§ 2 Die Tensor-Algebra

Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, $a_1, \ldots, a_r \in V$ linear unabhängige Vektoren, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in k$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to k$ mit $f(a_i) = \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Bilden die a_ϱ sogar eine Basis von V, so ist f eindeutig bestimmt.

Diese Aussagen lassen sich auf multilineare Abbildungen verallgemeinern. Sind $V, V_1, \ldots, V_m$ endlich-dimensionale k-Vektorräume, so bezeichnen wir mit

$$L_m(V_1, \ldots, V_m; V)$$

den (ebenfalls endlich-dimensionalen) k-Vektorraum der m-fach k-multilinearen Abbildungen $f : V_1 \times \ldots \times V_m \to V$.

Wir betrachten hier nur den Fall $V = k$. Ist $\{a_1^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}\}$ eine Basis von V_i, für $i = 1, \ldots, m$, so gibt es eindeutig bestimmte Elemente $f_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \in L_m(V_1, \ldots, V_m; k)$ mit

$$f_{\nu_1,\ldots,\nu_m}(a_{\mu_1}^{(1)}, \ldots, a_{\mu_m}^{(m)}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \nu_i = \mu_i \text{ für } i = 1, \ldots, m\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Elemente bilden eine Basis von $L_m(V_1, \ldots, V_m; k)$.

Im Falle eines einzelnen Vektorraumes V mit Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ erhält man auf diesem Wege die *duale Basis* $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ des Dualraumes $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$, mit $\alpha^\nu(a_\mu) = \delta_{\nu\mu}$.

2.1 Satz. *Die Abbildung $\iota_V : V \to V^{**} = \mathrm{Hom}_k(V^*, k)$ mit $\iota_V(x)(f) = f(x)$ für $x \in V$ und $f \in V^*$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus.*

Die Abbildung ι_V ist „kanonisch" in dem Sinne, dass man zu ihrer Definition keine Basis benötigt. Sie ist auch„natürlich" in folgendem Sinne: Zu jeder linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt es eine lineare Abbildung $\varphi^{**} : V^{**} \to W^{**}$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & V^{**} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^{**} \\ W & \xrightarrow{\iota_W} & W^{**} \end{array}$$

Man kann deshalb V und V^{**} miteinander identifizieren.

Die Abbildung ι_V existiert auch bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen, allerdings ergibt sich dann i.a. kein Isomorphismus.

Unter dem Tensorprodukt zweier Linearformen $f, g \in V^*$ versteht man die Bilinearform $f \otimes g$ mit $(f \otimes g)(x, y) := f(x) \cdot g(y)$. Dies und die Identifikation $V \cong (V^*)^*$ liefern die Idee zu Folgendem:

Definition.

$V_1, \ldots, V_m$ seien endlich-dimensionale k-Vektorräume. Unter einem *Tensorprodukt* von $V_1, \ldots, V_m$ versteht man ein Paar (V, η_V) mit folgenden Eigenschaften:

1. V ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum.
2. $\eta_V : V_1 \times \ldots V_m \to V$ ist m-fach multilinear.
3. Die Elemente $\eta_V(x_1, \ldots, x_m)$ mit $x_i \in V_i$ erzeugen V.
4. Ist U ein beliebiger (endlich-dimensionaler) k-Vektorraum und

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_m \to U$$

m-fach multilinear, so gibt es eine lineare Abbildung $h : V \to U$, so dass $h \circ \eta_V = \varphi$ ist.

2.2 Satz.

a) Zu $V_1, \ldots, V_m$ existiert immer ein Tensorprodukt.

b) Sind (V, η_V) und (W, η_W) zwei Tensorprodukte von $V_1, \ldots, V_m$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Phi : V \to W$ mit $\Phi \circ \eta_V = \eta_W$.

BEWEIS: a) Wir setzen $V := L_m(V_1^*, \ldots, V_m^*; k)$ und definieren $\eta_V : V_1 \times \ldots \times V_m \to V$ durch

$$\eta_V(x_1, \ldots, x_m)(f_1, \ldots, f_m) := f_1(x_1) \cdots f_m(x_m).$$

Es ist klar, dass dies eine multilineare Abbildung ist. Für $i = 1, \ldots, m$ sei nun $\{a_1^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}\}$ eine Basis von V_i und $\{\alpha_{(i)}^1, \ldots, \alpha_{(i)}^{n_i}\}$ die dazu duale Basis von V_i^*. Dann ist

$$\begin{aligned} \eta_V(a_{\nu_1}^{(1)}, \ldots, a_{\nu_m}^{(m)})(\alpha_{(1)}^{\mu_1}, \ldots, \alpha_{(m)}^{\mu_m}) &= \alpha_{(1)}^{\mu_1}(a_{\nu_1}^{(1)}) \cdots \alpha_{(m)}^{\mu_m}(a_{\nu_m}^{(m)}) \\ &= \delta_{\nu_1\mu_1} \cdots \delta_{\nu_m\mu_m} \\ &= f_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^*(\alpha_{(1)}^{\mu_1}, \ldots, \alpha_{(m)}^{\mu_m}), \end{aligned}$$

wobei die $f_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^*$ eine (wie oben konstruierte) Basis von $L_m(V_1^*, \ldots, V_m^*; k)$ bilden. Also wird V von den Elementen $\eta_V(x_1, \ldots, x_m)$ erzeugt.

Sei schließlich $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_m \to U$ m-fach multilinear. Dann definieren wir $h : V \to U$ durch

$$h(f_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^*) := \varphi(a_{\nu_1}^{(1)}, \ldots, a_{\nu_m}^{(m)}).$$

Weil $f_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^* = \eta_V(a_{\nu_1}^{(1)}, \ldots, a_{\nu_m}^{(m)})$ ist, folgt (aus der Multilinearität der beteiligten Abbildungen), dass $h \circ \eta_V = \varphi$ ist.

b) Sind zwei Tensorprodukte (V, η_V) und (W, η_W) gegeben, so gibt es lineare Abbildungen $\Phi : V \to W$ mit $\Phi \circ \eta_V = \eta_W$ und $\Psi : W \to V$ mit $\Psi \circ \eta_W = \eta_V$, also $\Phi \circ \Psi \circ \eta_W = \Phi \circ \eta_V = \eta_W$. Weil die Bilder von η_V bzw. η_W die Tensorprodukträume V bzw. W erzeugen, folgt: $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_W$, und analog $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_V$. Also ist Φ ein Isomorphismus und $\Psi = \Phi^{-1}$. Durch die Gleichung $\Phi \circ \eta_V = \eta_W$ ist Φ auf einem Erzeugendensystem von V (und damit auf ganz V) eindeutig festgelegt. ∎

Definition.
Das (im Wesentlichen eindeutig bestimmte) Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_m$ wird mit $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ bezeichnet, und die Elemente $\eta_V(x_1, \ldots, x_m)$ mit $x_1 \otimes \ldots \otimes x_m$.

Man beachte, dass die „zerlegbaren Tensoren“ $x_1 \otimes \ldots \otimes x_m$ lediglich ein Erzeugendensystem des Tensorproduktes bilden. Sie sind i.a. nicht linear unabhängig

$$(\text{z.B. ist } (x_1' + x_1'') \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m = x_1' \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m + x_1'' \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m\ )$$

und es sind auch nicht alle Tensoren zerlegbar. Ist allerdings $\{a_1^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}\}$ eine Basis von V_i, so bilden die Tensorprodukte $a_{i_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes a_{i_m}^{(m)}$ eine Basis von $V_1 \otimes \ldots V_m$.

Sind $F_i : V_i \to W_i$ lineare Abbildungen, für $i = 1, \ldots, m$, so definiert man

$$(F_1 \otimes \ldots \otimes F_m) : V := V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \to W := W_1 \otimes \ldots \otimes W_m$$

durch $(F_1 \otimes \ldots \otimes F_m)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) := (F_1(x_1)) \otimes \ldots \otimes (F_m(x_m))$.
Dann ist $(F_1 \otimes \ldots \otimes F_m) : V \to W$ die lineare Abbildung, die über die Gleichung

$$(F_1 \otimes \ldots \otimes F_m) \circ \eta_V = \varphi$$

der multilinearen Abbildung $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_m \to W$ mit

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := (F_1(x_1)) \otimes \ldots \otimes (F_m(x_m))$$

zugeordnet ist.

2.3 Satz. *Es ist* $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_k(V, W)$, *vermöge* $f \otimes w : v \mapsto f(v)w$.

Beweis: Die bilineare Abbildung $\varphi : V^* \times W \to \mathrm{Hom}_k(V, W)$ mit $\varphi(f, w)(v) := f(v)w$ induziert die lineare Abbildung $\widehat{\varphi} : V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_k(V, W)$ mit

$$\widehat{\varphi} \circ \eta_{V^* \otimes W} = \varphi.$$

Sei nun $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis von V^*. Dann definieren wir $\theta : \mathrm{Hom}_k(V, W) \to V^* \otimes W$ durch

$$\theta(f) := \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^\nu \otimes f(a_\nu).$$

Es ist $\widehat{\varphi} \circ \theta(f)(v) = \sum_\nu \varphi(\alpha^\nu, f(a_\nu))(v) = \sum_\nu \alpha^\nu(v) f(a_\nu) = f(v)$ und $\theta \circ \widehat{\varphi}(f \otimes w) = \theta(\varphi(f, w)) = \sum_\nu \alpha^\nu \otimes f(a_\nu)w = (\sum_\nu f(a_\nu)\alpha^\nu) \otimes w = f \otimes w$. Also ist $\widehat{\varphi}$ ein Isomorphismus und $\theta = \widehat{\varphi}^{-1}$. ∎

Übungsaufgabe: $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$.

Unter einer k-*Algebra* versteht man einen (nicht notwendig endlich-dimensionalen) k-Vektorraum A, zusammen mit einer k-bilinearen Abbildung $m : A \times A \to A$. An

Stelle von $m(x, y)$ schreiben wir $x \cdot y$. Erfüllt diese Multiplikation das Assoziativgesetz, so spricht man von einer *assoziativen Algebra.*

Ist $F \subset A$ ein Untervektorraum und liegt das Produkt zweier Elemente von F wieder in F, so spricht man von einer *Unteralgebra.*

Ein Untervektorraum $I \subset A$ heißt ein *Links-* bzw. *Rechts-Ideal* in A, falls gilt: Für $x \in A$ und $y \in I$ liegt $x \cdot y$ (bzw. $y \cdot x$) wieder in I. Gilt beides, so spricht man von einem zweiseitigen Ideal.

Beispiele.

1. Jeder Körper k ist auch eine k-Algebra. Darüber hinaus ist z.B. $\mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra.

2. Der Raum $M_{n,n}(k)$ der n-reihigen Matrizen über k ist eine k-Algebra. Ist X_0 eine feste Matrix, so ist $I = \{A \cdot X_0 \,:\, A \in M_{n,n}(k)\}$ ein Links-Ideal.

3. Sei V ein k-Vektorraum mit Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann ist $T^m(V)$ das m-fache Tensorprodukt von V mit sich selbst: $T^m(V) = V \otimes \ldots \otimes V$ (m-mal). Nun sei $T(V) := \bigoplus_{m \geq 0} T^m(V)$, mit $T^0(V) := k$. Das ist ein k-Vektorraum. Er wird zu einer Algebra durch die Multiplikation

$$((x_1 \otimes \ldots \otimes x_l), (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m)) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_l \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m.$$

   Aus der universellen Eigenschaft ergibt sich, dass $T(V)$ assoziativ ist. Außerdem wird $T(V)$ (als Algebra) von V erzeugt, d.h., jedes Element ist endliche Summe von Produkten von Elementen aus V.

   Behauptung: Ist $f : V \to A$ eine lineare Abbildung in eine k-Algebra A, so gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{f} : T(V) \to A$, der f fortsetzt.

   Beweis dafür: Definiere $\widehat{f}_m : T^m(V) \to A$ durch

$$\widehat{f}_m(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) := f(x_1) \cdots f(x_m).$$

   Alle $\widehat{f}_m$ zusammen ergeben den gewünschten Homomorphismus. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass $T(V)$ von V erzeugt wird.

4. Sei $f : A \to B$ ein k-Algebra-Homomorphismus. Ist $f(x) = 0$, so ist auch $f(a \cdot x \cdot b) = f(a) \cdot f(x) \cdot f(b) = 0$, für $a, b \in A$. Also ist $\mathrm{Ker}(f)$ ein zweiseitiges Ideal.

Definition.

Sei L eine (additiv geschriebene) kommutative Halbgruppe (mit neutralem Element 0) und A eine k-Algebra. Eine *Graduierung* auf A vom Typ L ist eine Familie $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ von k-Untervektorräumen, so dass gilt:

1. Es ist $A = \bigoplus_{\lambda \in L} A_\lambda$.
2. Ist $x \in A_\lambda$ und $y \in A_\kappa$, so ist $x \cdot y \in A_{\lambda+\kappa}$.

Man nennt A in diesem Fall eine *graduierte k-Algebra* vom Typ L. Ein Element $x \in A$ heißt *homogen* vom Grad λ, falls es in A_λ liegt.

Jedes Element $x \neq 0$ in A besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung in eine Summe von homogenen Elementen. Gibt es in A ein Eins-Element, so hat dieses den Grad 0.

Beispiele.

1. Der Polynomring $\mathbb{R}[x]$ ist eine $\mathbb{N}_0$-graduierte kommutative und assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit Eins-Element. Dabei ist $\mathbb{R}[x]_n = \{ax^n : a \in \mathbb{R}\}$, für $n \in \mathbb{N}$. Man kann $\mathbb{R}[x]$ auch als $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra auffassen, indem man $\mathbb{R}[x]_n = 0$ setzt, für $n < 0$.
2. Die Tensoralgebra $T(V)$ ist $\mathbb{N}_0$-graduiert. Wir haben auf $T(V)$ aber auch eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. Dazu setzen wir

$$T_0(V) := \bigoplus_{\mu=0}^{\infty} T^{2\mu}(V) \quad \text{und } \mathrm{T}_1(V) := \bigoplus_{\mu=0}^{\infty} T^{2\mu+1}(V).$$

Dann ist $T = T_0 \oplus T_1, \quad T_0 \cdot T_0 \subset T_0, \quad T_1 \cdot T_1 \subset T_0$ und $T_0 \cdot T_1 \subset T_1$.

Definition.
Sei A eine graduierte k-Algebra vom Typ L. Ein Ideal $I \subset A$ heißt *graduiert*, falls $I = \bigoplus_{\lambda \in L} I \cap A_\lambda$ ist, falls also mit einem Element $x \in I$ auch alle homogenen Komponenten von x zu I gehören.

2.4 Satz. *Ein Ideal $I \subset A$ ist genau dann graduiert, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.*

Beweis: Ein Ideal $I \subset A$ wird von einer Teilmenge $E \subset A$ „erzeugt“, falls jedes Element $x \in I$ als endliche Summe $x = \sum_\nu a_\nu e_\nu$ mit $a_\nu \in A$ und $e_\nu \in E$ geschrieben werden kann.

a) Sei I graduiert. Ist $x \in I$, so gibt es eine eindeutige Zerlegung $x = \sum_\lambda x_\lambda$, mit $x_\lambda \in I \cap A_\lambda$. Führt man die Zerlegung für alle $x \in I$ durch, so bildet die Gesamtheit aller dabei auftretenden x_λ ein Erzeugendensystem von homogenen Elementen.

b) Sei umgekehrt I durch homogene Elemente erzeugt, etwa durch eine Familie von Elementen $(e_\iota)_{\iota \in J}$. Es sei $n_\iota = \deg(e_\iota)$. Jedes Element $x \in I$ kann als endliche Summe $x = \sum_{\iota \in J} a_\iota e_\iota$ geschrieben werden, mit $a_\iota \in A$. Nun sei $a_{\iota,\lambda}$ die homogene Komponente vom Grad λ von a_ι. Dann gilt:

$$x = \sum_{\iota \in J} \left(\sum_{\lambda \in L} a_{\iota,\lambda} e_\iota \right) = \sum_{\lambda \in L} \left(\sum_{\iota \in J} a_{\iota,\lambda} e_\iota \right) = \sum_{\mu \in L} \left(\sum_{\substack{(\lambda,\iota) \in L \times J \\ \lambda + n_\iota = \mu}} a_{\iota,\lambda} e_\iota \right).$$

Das ist die Zerlegung von $x = \sum_{\mu \in L} x_\mu$ in homogene Komponenten, und alle Komponenten gehören wieder zu I. Daraus folgt, dass I graduiert ist. ∎

2.5 Satz. *Sei A eine graduierte k-Algebra vom Typ L und $I \subset A$ ein graduiertes (zweiseitiges) Ideal. Dann ist auch A/I eine graduierte Algebra vom Typ L (mit $(A/I)_\lambda \cong A_\lambda/(I \cap A_\lambda)$, und die Multiplikation ist gegeben durch $q(x) \cdot q(y) = q(x \cdot y)$ (wobei $q : A \to A/I$ die kanonische Projektion ist).*

Beweis: Sei $u := x - x' \in I$ und $v := y - y' \in I$. Dann folgt:

$$x \cdot y = (x' + u) \cdot (y' + v) = x'y' + (x'v + uy' + uv) \equiv x'y' \mod I.$$

Also ist die Multiplikation in A/I wohldefiniert. Die Algebra-Eigenschaften sind schnell nachgerechnet.

Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ die Graduierung von A und $j_\lambda : A_\lambda \hookrightarrow A$ die kanonische Injektion. Dann ist $A_\lambda/(I \cap A_\lambda) \cong q(A_\lambda)$, vermöge $(x \mod I \cap A_\lambda) \mapsto q(x)$. Die Abbildung ist offensichtlich wohldefiniert und linear. Ist $x \in A_\lambda$ und $q(x) = 0$, so liegt x in $I \cap A_\lambda$. Also ist die Abbildung injektiv. Die Surjektivität ist klar.

Wir behaupten, dass $A/I = \bigoplus\limits_\lambda q(A_\lambda)$ ist. Es ist klar, dass $A/I = \sum\limits_\lambda q(A_\lambda)$ ist. Sind nun $x\lambda \in A_\lambda$ mit $\sum_\lambda q(x_\lambda) = 0$, dann ist $\sum_\lambda x_\lambda \in I$. Aber weil I graduiert ist, müssen die x_λ sogar in $I \cap A_\lambda$ liegen, und das bedeutet, dass $q(x_\lambda) = 0$ ist, für alle λ. Also ist die Summe direkt.

Ist $x_\lambda \in A_\lambda$ und $x_\kappa \in A_\kappa$, so ist $q(x_\lambda) \cdot q(x_\kappa) = q(x_\lambda \cdot x_\kappa)$ in $q(A_{\lambda+\kappa})$. Also ist A/I graduiert vom Typ L. ∎

Sei $J \subset T(V)$ das (zweiseitige) Ideal, das von allen Elementen $x \otimes x$, $x \in V$, erzeugt wird. Dann besteht J aus allen endlichen Summen der Gestalt

$$\sum_i t_i \otimes x_i \otimes x_i \otimes s_i, \quad x_i \in V,\ t_i, s_i \in T(V).$$

Weil $(x + y) \otimes (x + y) - x \otimes x - y \otimes y = x \otimes y + y \otimes x$ ist, wird J auch von den Elementen $x \otimes y + y \otimes x$ erzeugt.

Da J von den homogenen Elementen $x \otimes x$ (vom Grad 2) erzeugt wird, ist J ein graduiertes Ideal.

Definition.

Die *äußere Algebra* über V ist die Algebra $\bigwedge(V) := T(V)/J$, wobei J das von den Elementen $x \otimes x$ erzeugte zweiseitige Ideal ist.

Bemerkung. Weil J ein graduiertes Ideal ist, ist $\bigwedge(V)$ eine graduierte k-Algebra, mit

$$\bigwedge^m(V) := (\bigwedge(V))_m = T^m(V)/T^m(V) \cap J.$$

Weil $T^0(V) \cap J = T^1(V) \cap J = 0$ ist, ist $\bigwedge^0(V) = k$ und $\bigwedge^1(V) = V$.

2.6 Satz. *Sei E eine beliebige k-Algebra und $f : V \to E$ eine lineare Abbildung, so dass gilt:*

$$f(x)^2 = 0 \ \text{ für alle } x \in V.$$

Dann gibt es genau einen k-Algebra-Homomorphismus $\widehat{f} : \bigwedge(V) \to E$, der f fortsetzt.

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass $\bigwedge(V)$ von V erzeugt wird. Zur Existenz benutzen wir die eindeutige Fortsetzung $f_T : T(V) \to E$ von f. $\mathrm{Ker}(f_T)$ ist ein zweiseitiges Ideal, das auf jeden Fall die Elemente $x \otimes x$ enthält. Das bedeutet, dass $J \subset \mathrm{Ker}(f_T)$ ist. Wir können also $\widehat{f}(t \mod J) := f_T(t)$ setzen.
■

Definition.
Das Produkt zweier Elemente $u, v \in \bigwedge(V)$ vom Grad ≥ 1 wird mit $u \wedge v$ bezeichnet (*Dachprodukt*).

Die Elemente von $\bigwedge^m(V)$ sind also Summen von Produkten $u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$ mit $u_i \in V$. Man nennt solche Produkte auch *m-Vektoren*.

Definition.
Für $q \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A^q(V) := \{\varphi : V \times \ldots \times V \to k \ : \ \varphi \text{ ist } q\text{-fach multilinear und alternierend}\}.$$

2.7 Hilfssatz. *Es seien M, N k-Vektorräume und $U \subset M$ ein Unterraum. Dann ist*

$$\{f \in \mathrm{Hom}_k(M, N) \ : \ U \subset \mathrm{Ker}(f)\} \cong \mathrm{Hom}_k(M/U, N).$$

Beweis: Ist $f \in \mathrm{Hom}_k(M, N)$ und $f|_U = 0$, so ist $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_k(M/U, N)$ durch $\overline{f}(x \mod U) := f(x)$ wohldefiniert. Ist umgekehrt $g \in \mathrm{Hom}_k(M/U, N)$ gegeben und $p : M \to M/U$ die kanonische Projektion, so ist $\widehat{g} := g \circ p \in \mathrm{Hom}_k(M, N)$ und $\widehat{g}|_U = 0$. Man sieht, dass diese beiden Zuordnungen zueinander invers sind. ■

Nun folgt unmittelbar:

$$\mathrm{Hom}_k(\bigwedge^q(V), k) \cong \{f \in \mathrm{Hom}_k(T^q(V), k) \ : \ f|_J = 0\}.$$

2.8 Satz. *Sei $\varphi : V \times \ldots \times V \to k$ q-fach multilinear und alternierend (also ein Element von $A^q(V)$). Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $g : \bigwedge^q(V) \to k$ mit*

$$g(x_1 \wedge \ldots \wedge x_q) = \varphi(x_1, \ldots, x_q).$$

BEWEIS: Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\bigwedge^q(V)$ von den q-Vektoren $x_1 \wedge \ldots \wedge x_q$ erzeugt wird. Wegen der Existenz sei daran erinnert, dass es zu der multilinearen Abbildung φ genau eine lineare Abbildung $h : T^q(V) \to k$ mit $h \circ \eta_{T^qV} = \varphi$ gibt. Weil φ alternierend ist, verschwindet h auf $J \cap T^q(V)$. Sei nun $p : T^q(V) \to \bigwedge^q(V) = T^q(V)/(J \cap T^q(V))$ die kanonische Projektion. Dann gibt es eine lineare Abbildung $g : \bigwedge^q(V) \to k$ mit $g \circ p = h$. Es ist

$$\begin{aligned} g(x_1 \wedge \ldots \wedge x_q) &= g(p(x_1 \otimes \ldots \otimes x_q)) \\ &= h(x_1 \otimes \ldots \otimes x_q) \\ &= \varphi(x_1, \ldots, x_q). \end{aligned}$$

■

2.9 Satz.

1. *Es ist $x \wedge x = 0$ und $x \wedge y = -y \wedge x$ für $x, y \in V$.*
2. *Sind $x_1, \ldots, x_m \in V$ und ist $\sigma \in S_m$ eine Permutation, so ist*

$$x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(m)} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot x_1 \wedge \ldots \wedge x_m.$$

3. *Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V, so bilden die Elemente*

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n,$$

eine Basis von $\bigwedge^p(V)$. Insbesondere ist $\dim \bigwedge^p(V) = \binom{n}{p}$ für $0 \leq p \leq n$ und $\bigwedge^q(V) = 0$ für $q > n$.

4. *Ist $u \in \bigwedge^p(V)$ und $v \in \bigwedge^q(V)$, so ist $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$ (man spricht deshalb auch von einer* alternierenden graduierten Algebra*).*

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) Aus (1) folgt: Enthält $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ zwei gleiche Vektoren, so verschwindet das Produkt. Vertauscht man zwei aufeinanderfolgende Faktoren, so wechselt das Vorzeichen. Per Induktion folgt die Behauptung.

3) Wegen (2) ist klar, dass die Elemente $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^p(V)$ bilden. Wir müssen nur noch zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

a) Wir beginnen mit dem Fall $p = n$. Zu der alternierenden Multilinearform

$$\det : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\text{-mal}} \to k$$

gibt es eine lineare Abbildung $\delta : \bigwedge^n(V) \to k$ mit

$$\delta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det(x_1, \ldots, x_n).$$

Ist nun $c \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0$, so ist $\det(c \cdot e_1, \ldots, e_n) = 0$. Das bedeutet, dass die Vektoren $c \cdot e_1, e_2, \ldots, e_n$ linear abhängig sind. Aber das ist nur möglich, wenn $c = 0$ ist.

b) Sei nun $1 < p < n$ und $\displaystyle\sum_{1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_p \le n} c_{\nu_1 \ldots \nu_p} e_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge e_{\nu_p} = 0.$

Zu festem $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ mit $\lambda_1 < \ldots < \lambda_p$ wählen wir $\mu_1, \ldots, \mu_{n-p}$, so dass gilt:

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_{n-p}\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= e_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge e_{\mu_{n-p}} \wedge 0 \\ &= \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_p} c_{\nu_1 \ldots \nu_p} e_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge e_{\mu_{n-p}} \wedge e_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge e_{\nu_p} \\ &= c_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} e_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge e_{\mu_{n-p}} \wedge e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_p} \\ &= \pm c_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Also ist $c_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0$, und die $e_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge e_{\nu_p}$ sind linear unabhängig.

4) folgt leicht für Basiselemente $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ und $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$ mit $\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{j_1, \ldots, j_q\} = \varnothing$. Daraus ergibt sich dann die allgemeine Aussage. ∎

2.10 Satz. *Es ist $A^q(V) \cong (\bigwedge^q(V))^*$.*

Beweis: Jedem $\varphi \in A^q(V)$ wird die Linearform $f_\varphi \in \mathrm{Hom}_k(\bigwedge^q(V), k)$ zugeordnet, mit $f_\varphi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_q) = \varphi(x_1, \ldots, x_q)$. Ist umgekehrt $g \in (\bigwedge^q(V))^*$, so kann man ein $\varphi \in A^q(V)$ definieren, durch $\varphi(x_1, \ldots, x_q) := g(x_1 \wedge \ldots \wedge x_q)$. Dazu braucht man die Eigenschaften des Dachproduktes aus dem obigen Satz. Offensichtlich sind die beiden Zuordnungen zueinander invers. ∎

Umgekehrt kann man auch einen Isomorphismus $\bigwedge^q(V^*) \to A^q(V)$ angeben, etwa vermöge

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_q \mapsto \left((x_1, \ldots, x_q) \mapsto \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sign}(\sigma) f_1(x_{\sigma(1)}) \cdots f_q(x_{\sigma(q)}) \right).$$

Man nennt die rechte Seite auch den *alternierenden Anteil* von $f_1 \otimes \ldots \otimes f_q$. Er ist nicht eindeutig festgelegt, häufig wird noch durch $q!$ geteilt.