Kapitel 1 Clifford-Algebren

§ 1 Innere Produkte

Sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V stets ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Fehlende Beweise finden sich in der Literatur ([Art1], [Bou1], [Brie], [Cohn]).

Definition.

Ein *inneres Produkt* in V ist eine **symmetrische Bilinearform** $b : V \times V \to k$.

Eine *quadratische Form* auf V ist eine Abbildung $q : V \to k$, so dass gilt:

1. $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$ für $\alpha \in k$ und $x \in V$.
2. $b_q(x, y) := \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ ist eine Bilinearform auf V.

Jede symmetrische Bilinearform b definiert eine quadratische Form q durch

$$q(x) := b(x, x).$$

Umgekehrt ist die einer quadratischen Form zugeordnete Bilinearform automatisch symmetrisch. Ein Vektorraum mit einer quadratischen Form heißt auch ein *quadratischer Raum*.

Bezüglich einer gegebenen Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sei $x = \sum_{i=1}^{n} x^i a_i$ und $\mathbf{x} := (x^1, \ldots, x^n)$ Dann wird eine symmetrische Bilinearform b durch eine symmetrische Matrix $B \in M_{n,n}(k)$ beschrieben:

$$b(x, y) = \mathbf{x} \cdot B \cdot \mathbf{y}^\top.$$

Bei einem Basiswechsel $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \cdot P$ (mit einer invertierbaren Matrix P) erhält man:

$$b(x, y) = \mathbf{x}' \cdot B' \cdot \mathbf{y}', \text{ mit } B' = PBP^\top.$$

Definition.

Sei (V, q) ein quadratischer Raum. Zwei Elemente $x, y \in V$ heißen *orthogonal*, falls $b_q(x, y) = 0$ ist.

Ist $S \subset V$ eine beliebige Teilmenge, so nennt man den Untervektorraum

$$S^\perp := \{x \in V \,:\, b(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in S\}$$

das *orthogonale Komplement* zu S. Speziell heißt $\mathrm{Rad}(V) := V^\perp$ das *Radikal* von V. Die quadratische Form q (bzw. das innere Produkt b_q) heißt *nicht entartet*, falls $\mathrm{Rad}(V) = \{0\}$ ist. Den Raum nennt man dann einen *regulären quadratischen Raum*, andernfalls nennt man ihn *singulär*.

Durch $\varphi_b : V \to V^*$ mit $\varphi_b(x)(y) := b(x,y)$ wird eine lineare Abbildung definiert. Offensichtlich ist $\mathrm{Ker}(\varphi_b) = \mathrm{Rad}(V)$, also φ_b genau dann injektiv (und dann sogar ein Isomorphismus), wenn b nicht entartet ist. Wird b bezüglich einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V durch die Matrix B beschrieben, so wird φ_b bezüglich dieser Basis und der dazu dualen Basis von V^* durch $B^\top = B$ beschrieben. Das innere Produkt b ist also genau dann nicht entartet, wenn die zugehörige Matrix B regulär ist. In diesem Falle gilt für jeden Unterraum $U \subset V$:

$$\dim U + \dim U^\perp = n \quad \text{und} \quad U^{\perp\perp} = U.$$

Im allgemeinen versteht man unter dem *Rang* von b den Rang der linearen Abbildung φ_b. Es gilt die Gleichung

$$\mathrm{rg}(b) = n - \dim_k(V^\perp).$$

Es gibt eine orthogonale Zerlegung $V = V_0 \perp V^\perp$, wobei b auf V_0 nicht entartet ist. Außerdem kann man V_0 in eine orthogonale Summe von 1-dimensionalen Unterräumen zerlegen.

Definition.

Sei (V, q) ein quadratischer Raum. Ein Vektor $x \in V$ heißt *isotrop*, falls $x \neq 0$ und $q(x) = 0$ ist. Ein Unterraum $U \subset V$ heißt *total isotrop*, falls jeder Vektor $x \in U \setminus \{0\}$ isotrop ist.

Ein Unterraum $U \subset V$ ist genau dann total isotrop, wenn $b|_U \equiv 0$ ist. Ist U ein beliebiger Unterraum, so heißt $\mathrm{Rad}(U) := U \cap U^\perp$ das *Radikal* von U. Es ist dann $U = \mathrm{Rad}(U) \perp W$, mit einem nicht entarteten Unterrraum W. $\mathrm{Rad}(U)$ ist total isotrop.

Auch ein nicht entarteter Raum kann isotrope Vektoren enthalten.

Definition.

Ein 2-dimensionaler Unterraum $U \subset V$ heißt eine *hyperbolische Ebene*, falls b auf U nicht entartet ist und U isotrope Vektoren enthält.

1.1 Satz. *Ein Unterraum $U \subset V$ ist genau dann eine hyperbolische Ebene, wenn es eine Basis $\{x, y\}$ von U gibt, so dass gilt:*

$$q(x) = q(y) = 0 \text{ und } b_q(x,y) = 1.$$

BEWEIS: Die eine Richtung ist klar. Ist U eine hyperbolische Ebene, so gibt es ein $u \neq 0$ mit $q(u) = 0$ und ein e mit $q(e) \neq 0$. Wir setzen $\lambda := \dfrac{2b(u,e)}{q(e)}$ und $v := u - \lambda e$. Dann folgt:

$$q(v) = b(u - \lambda e, u - \lambda e) = \lambda^2 q(e) - 2\lambda b(u,e) = \frac{4b(u,e)^2}{q(e)^2} q(e) - \frac{4b(u,e)^2}{q(e)} = 0\,.$$

Wäre u ein Vielfaches von v, oder umgekehrt, so wäre $q(e) = 0$. Also sind u und v linear unabhängig. Wäre $b(u, v) = 0$, so wäre $q(x) = 0$ für alle $x \in U$. Da dies nicht der Fall ist, muss $b(u, v) \neq 0$ sein. Multipliziert man v noch mit einem geeigneten Faktor, so erhält man $b(u, v) = 1$. ∎

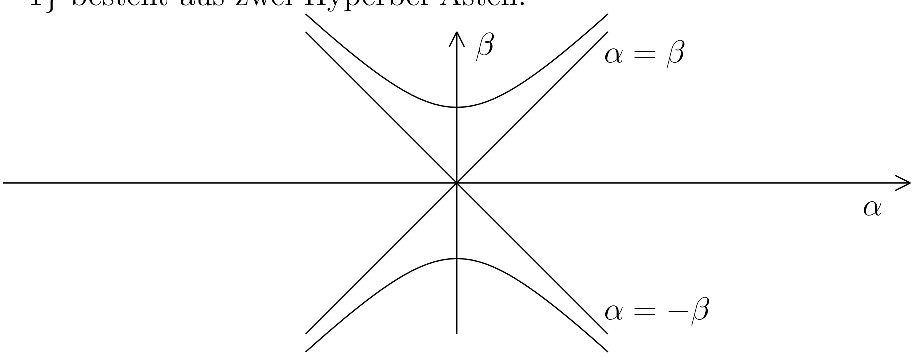
Ist $U \subset V$ eine hyperbolische Ebene und $\{x, y\}$ eine Basis wie im Satz, so kann man eine weitere Basis $\{u, v\}$ bilden, mit

$$u := \frac{1}{2}x + y \text{ und } v := \frac{1}{2}x - y.$$

Dann ist $q(u) = 1$, $q(v) = -1$ und $b_q(u, v) = 0$, also $\{u, v\}$ eine „ON-Basis“. Die Menge aller isotropen Vektoren

$$K = \{z \in U \,:\, q(z) = 0\} = \{z = \alpha u + \beta v \in U \,:\, \alpha^2 - \beta^2 = 0\}$$

ist offensichtlich die Vereinigung der Geraden $\alpha = \pm\beta$. Die Menge $\{z \in U \,:\, q(z) = -1\}$ besteht aus zwei Hyperbel-Ästen.



Ist (V, q) ein regulärer quadratischer Raum und $e \in V$ isotrop. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $b_q(x, e) \neq 0$, und in der hyperbolischen Ebene $H = \mathbb{R}(e, x)$ kann man – wie im obigen Beweis – einen isotropen Vektor f finden, so dass $\{e, f\}$ eine Basis von H und $b_q(e, f) = 1$ ist. Per Induktion erhält man so eine Zerlegung

$$V = H_1 \perp \ldots \perp H_r \perp W,$$

mit hyperbolischen Ebenen H_i und einem regulären Unterraum W ohne isotrope Vektoren.

Fallbeispiel Minkowski-Raum:

Sei $M = \mathbb{R}^4$, $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$. Dann ist

$$q_b(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2.$$

Die Menge $K := \{(\mathbf{x}', x_4) \,:\, q_b(\mathbf{x}', x_4) = 0\}$ der isotropen Vektoren bezeichnet man als *Lichtkegel*. Setzt man $x_4 = ct$ (mit der Lichtgeschwindigkeit c), so erfüllen alle Punkte $(\mathbf{x}', x_4) \in K$ die Gleichung

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = c^2t^2.$$

Das ist die Gleichung der Wellenfront eines sich vom Nullpunkt ausbreitenden Lichtblitzes. Die Elemente $\mathbf{v} \in K$ nennt man daher *lichtartige Vektoren*. Der Kegel K teilt den Raum in das zusammenhängende Gebiet $\{\mathbf{x} \,:\, q_b(\mathbf{x}) > 0\}$ der *raumartigen* Vektoren und in zwei weitere Zusammenhangskomponenten

$$Z_+ = \{\mathbf{x} \,:\, q_b(\mathbf{x}) < 0 \text{ und } x_4 > 0\} \quad \text{und} \quad Z_- = \{\mathbf{x} \,:\, q_b(\mathbf{x}) < 0 \text{ und } x_4 < 0\}.$$

Die Elemente von $Z = Z_+ \cup Z_-$ nennt man *zeitartige* Vektoren. Z_+ ist der sogenannte „Zukunftskegel“, Z_- der „Vergangenheitskegel“. Man überlegt sich leicht, dass $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z_+$ ist. Aus Zusammenhangsgründen muss dann sogar $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z_+$ sein. Außerdem gilt: Mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z_+$ ist auch $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in Z_+$, mit $\mathbf{x} \in Z_+$ und $\lambda > 0$ ist $\lambda \mathbf{x} \in Z_+$.

BEWEIS dafür: Ist $q(\mathbf{x}) < 0$ und $q(\mathbf{y}) < 0$, sowie $x_4 > 0$ und $y_4 > 0$, so ist auch $x_4 + y_4 > 0$ und $q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + 2b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$. Der zweite Teil ist trivial.

Die *Kausal-Ordnung* auf M wird definiert durch

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \;:\Longleftrightarrow\; \mathbf{y} - \mathbf{x} \in Z_+.$$

Diese Beziehung bedeutet: „$\mathbf{x}$ kann $\mathbf{y}$ kausal beeinflussen“. Liegt nun $\mathbf{x}$ im Zukunftskegel und ist $\mathbf{y}$ von $\mathbf{x}$ kausal beeinflussbar, so muss auch $\mathbf{y}$ im Zukunftskegel liegen.

Ist $\alpha : I \to M$ die „Lebenslinie“ eines materiellen Teilchens und $\dot{\alpha}(t)$ der Tangentialvektor (= Geschwindigkeitsvektor), so muss $q_b(\dot{\alpha}(t)) < 0$ sein, weil sich nichts schneller als das Licht bewegen kann.

Ist $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$, so sind die Vektoren $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 = (0, 0, 1, -1)$ und $\mathbf{v} = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = (0, 0, 1, 1)$ isotrop, und der davon aufgespannte Raum $U = \mathbb{R}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ ist eine hyperbolische Ebene H. Das orthogonale Komplement $\mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ist nicht entartet und enthält keine isotropen Vektoren mehr.

Ist (V, q) ein quadratischer Raum, so versteht man unter der zugehörigen *orthogonalen Gruppe* $O(V, q)$ die Gruppe der *Isometrien* von (V, q) (das sind alle k-Isomorphismen $f : V \to V$ mit $q(f(x)) = q(x)$ für alle $x \in V$). Ist $f \in \mathrm{End}_k(V)$ eine beliebige k-lineare Abbildung von V auf sich, so wird durch $f^*q(x) := q(f(x))$ eine neue quadratische Form f^*q auf V definiert. Für jede Isometrie f ist $f^*q = q$. In Matrizen-Schreibweise ist

$$O(V, q) = \{X \in \mathrm{GL}_n(k) \,:\, X \cdot B \cdot X^\top = B\},$$

wobei B wie üblich die Matrix zu dem inneren Produkt b bezeichnet. Ist (V, q) regulär, so ist $(\det X)^2 = 1$, also $\det X = \pm 1$.

Unter der *speziellen orthogonalen Gruppe* versteht man die Gruppe

$$SO(V, q) := \{f \in O(V, q) \,:\, \det(f) = 1\}.$$

Isometrische Räume haben isomorphe orthogonale Gruppen.

Wir betrachten einen nicht entarteten quadratischen Raum V. Ist $U \subset V$ ein Unterraum, so gibt es eine orthogonale Zerlegung $V = U \perp U^{\perp}$. Unter der *Spiegelung* an U versteht man die lineare Abbildung $s_U : V \to V$ mit $s_U(x) = x$ für $x \in U$ und $s_U(y) = -y$ für $y \in U^{\perp}$. Weil $q(-y) = q(y)$ ist, handelt es sich offensichtlich um eine orthogonale Transformation. Außerdem ist s_u eine *Involution*, d.h., es ist $s_u \circ s_U = \mathrm{id}_V$. Umgekehrt ist eine Involution $\sigma \in O(V)$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_V$ immer eine Spiegelung an $U_+ := \{x \in V : \sigma(x) = x\}$. Man kann zeigen, dass jede orthogonale Transformation ein Produkt von höchstens $\dim(V)$ Spiegelungen ist.

Ist $a \neq 0$ nicht isotrop, so wird durch $\lambda_a(x) := \dfrac{b(a,x)}{q(a)}$ eine Linearform auf V mit $\lambda_a(a) = 1$ definiert. Dann ist $U = \mathrm{Ker}(\lambda_a) = \{x \in V : b(a,x) = 0\}$ eine Hyperebene, und umgekehrt hat jede Hyperebene diese Gestalt. Durch $\sigma_U(x) := x - 2\lambda_a(x) \cdot a$ wird die Spiegelung an U gegeben.

1.2 Satz von Witt. *Ist (V,b) nicht entartet, $U \subset V$ ein Unterraum und $\varphi : U \to V$ injektiv und isometrisch, so gibt es eine (bijektive) Isometrie $\widehat{\varphi} : V \to V$ mit $\widehat{\varphi}|_U = \varphi$.*

1.3 Folgerung. *Alle maximalen total isotropen Unterräume $U \subset V$ haben die gleiche Dimension.*

Beweis: Seien $F, F' \subset V$ maximal total isotrop, o.B.d.A. sei $\dim_k(F) \leq \dim_k(F')$. Ist $f : F \to F'$ eine beliebige injektive lineare Abbildung, so ist f auch eine Isometrie (weil q auf F und auf F' identisch verschwindet). Nach Witt gibt es eine Isometrie $\widehat{f} : V \to V$ mit $\widehat{f}|_F = f$. Der Raum $F'' := \widehat{f}^{-1}(F')$ ist total isotrop, und es ist $F \subset F''$. Wegen der Maximalität von F muss $F = F''$ sein. Weil $\widehat{f}$ ein Isomorphismus ist, ist $\dim_k(F) = \dim_k(F')$. ∎

Definition.

Ist $k = \mathbb{R}$ und $q_b(\mathbf{x}) > 0$ (bzw. < 0) für alle $\mathbf{x} \neq 0$, so nennt man b (oder q_b) *positiv definit* bzw. *negativ definit*. Im ersteren Falle nennt man b ein *Skalarprodukt*.

1.4 Trägheitssatz von Sylvester. *Ist $k = \mathbb{R}$ und (V,b) ein beliebiger Raum mit innerem Produkt, so gibt es Unterräume $V_+, V_- \subset V$, so dass gilt:*

1. *$V = \mathrm{Rad}(V) \perp V_+ \perp V_-$.*
2. *b ist positiv definit auf V_+ und negativ definit auf V_-.*

Die Dimensionen n_0, n_+ und n_- der Unterräume $\mathrm{Rad}(V)$, V_+ und V_- sind Invarianten von b.

Man nennt das Tripel (n_0, n_+, n_-) die *Signatur* von (V, b).

Beispiele.

1. Das *euklidische Skalarprodukt* auf $V = \mathbb{R}^n$ ist durch

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^\top = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

gegeben. Die zugehörige quadratische Form ist

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\top = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

die zugehörige orthogonale Gruppe ist

$$O(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \, : \, A \cdot A^\top = E_n\}.$$

Bekanntlich sind die folgenden Aussagen über eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ äquivalent:

(a) A ist eine orthogonale Matrix.

(b) Die Spalten von A bilden eine ON-Basis von V.

(c) Die Zeilen von A bilden eine ON-Basis von V.

Die Elemente der *speziellen orthogonalen Gruppe* $SO(n) := \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$ bezeichnet man als *Drehungen*. Jede orthogonale Matrix ist eine Drehung oder das Produkt einer Drehung und einer Spiegelung an einer Hyperebene.

Speziell ist $SO(2) = \{A = A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi]\}$. Durch $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot A_\alpha$ wird eine Drehung der Ebene um den Winkel α im mathematisch positiven Sinne beschrieben. Die Drehung um $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird durch die Matrix $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben und entspricht der Multiplikation mit i in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Deshalb bilden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ein Modell für $\mathbb{C}$.

Eine Drehung des 3-dimensionalen Raumes kann bezüglich einer geeigneten ON-Basis durch eine Matrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Dann ist α der Drehwinkel und die x-Achse die Drehachse. Offensichtlich ist $\mathrm{Spur}(A) = 1 + 2\cos\alpha$. Weil die Spur einer Matrix eine Invariante der zugehörigen linearen Abbildung ist, folgt allgemein: Durch

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(A) - 1)$$

wird bei einer Drehmatrix A der Drehwinkel α gegeben. Die Drehachse ist durch einen Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 gegeben.

2. Die Signatur des Minkowski-Raumes M ist $(0, 3, 1)$. Die orthogonale Gruppe $\mathscr{L} = O(3, 1, \mathbb{R})$ des Minkowski-Raumes nennt man die *Lorentzgruppe*. Das (spezielle) Einsteinsche Relativitätsprinzip besagt, dass physikalisch sinnvolle Größen und Gesetze so definiert und formuliert sein müssen, dass sie invariant unter der Lorentzgruppe sind.[1]

   Die zum Minkowski-Produkt b gehörende Matrix ist

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Ist $\Lambda = (\lambda_{ij})$ ein Element der Lorentzgruppe $\mathscr{L}$, so ist $\det\Lambda = \pm 1$. Außerdem gilt (weil $\Lambda \cdot G \cdot \Lambda^\top = G$ ist):

$$-1 = (\Lambda \cdot G \cdot \Lambda^\top)_{44} = \sum_{i,j} \lambda_{4i} g_{ij} \lambda_{4j} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{4i}^2 - \lambda_{44}^2,$$

   also $\lambda_{44}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \lambda_{4i}^2 \geq 1$ und damit $|\lambda_{44}| \geq 1$. Das zeigt, dass $\mathscr{L}$ in vier Zusammenhangskomponenten zerfällt, nämlich

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_+^\uparrow &:= \{\Lambda \in \mathscr{L} \,:\, \det\Lambda = 1 \text{ und } \lambda_{44} \geq 1\} \text{ (die Komponente der 1)}, \\ \mathscr{L}_-^\uparrow &:= \{\Lambda \in \mathscr{L} \,:\, \det\Lambda = -1 \text{ und } \lambda_{44} \geq 1\}, \\ \mathscr{L}_+^\downarrow &:= \{\Lambda \in \mathscr{L} \,:\, \det\Lambda = 1 \text{ und } \lambda_{44} \leq -1\} \\ \text{und } \mathscr{L}_+^\downarrow &:= \{\Lambda \in \mathscr{L} \,:\, \det\Lambda = -1 \text{ und } \lambda_{44} \leq -1\}. \end{aligned}$$

   Dabei heißt $\mathscr{L}_+^\uparrow$ die *eingeschränkte* oder *eigentlich orthochrone Lorentzgruppe*. Dass es sich tatsächlich um eine Untergruppe von $\mathscr{L}$ handelt, zeigen wir weiter unten.

   Behauptung: *Ist $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathscr{L}_+^\uparrow$, so liegt auch Λ^{-1} in $\mathscr{L}_+^\uparrow$, und es ist $(\Lambda^{-1})_{44} = \lambda_{44}$.*

   Beweis: Ist $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$, so ist $y_4 = -b(\mathbf{e}_4, \mathbf{y})$, also insbesondere

$$-b(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \cdot \Lambda) = \lambda_{44}.$$

[1] Im affinen Raum muss man die Poincaré-Gruppe betrachten, die auch noch die Translationen enthält.

Ist $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$, so liegt Λ^{-1} zumindest in $\mathscr{L}$, und natürlich ist auch $\det(\Lambda^{-1}) = 1$. Außerdem ist

$$(\Lambda^{-1})_{44} = -b(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \cdot \Lambda^{-1}) = -b(\mathbf{e}_4 \cdot \Lambda, \mathbf{e}_4) = \lambda_{44} > 0.$$

Behauptung: *Sei* $\Lambda \in \mathscr{L}$, $\det(\Lambda) = 1$ *und* $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \Lambda$. *Dann gilt:*

$$\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow \quad \Longleftrightarrow \quad f(Z_+) \subset Z_+ \,.$$

BEWEIS:
„$\Longleftarrow$“: Da $\mathbf{e}_4 \in Z_+$ ist, muss auch $f(\mathbf{e}_4) \in Z_+$ sein. Aber dann ist

$$\lambda_{44} = -b(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \cdot \Lambda) = -b(\mathbf{e}_4, f(\mathbf{e}_4)) = (f(\mathbf{e}_4))_4 > 0\,.$$

„$\Longrightarrow$“: Sei $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ und $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_4)$. Liegt $\mathbf{x}$ in Z_+, so ist $x_4 > 0$ und $q(\mathbf{x}) < 0$, also $\|\mathbf{x}'\|^2 < x_4^2$. Wir müssen zeigen, dass auch $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \Lambda$ in Z_+ liegt. Weil $q(\mathbf{x} \cdot \Lambda) = q(\mathbf{x}) < 0$ ist, müssen wir nur zeigen, dass $y_4 > 0$ ist. Dazu sei $\mathbf{z} := \mathbf{e}_4 \cdot \Lambda^{-1} = (\mathbf{z}', \lambda_{44})$. Dann ist $\|\mathbf{z}'\|^2 = z_4^2 + q(\mathbf{z})$, mit $q(\mathbf{z}) = q(\mathbf{e}_4) = -1$. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt jetzt:

$$\begin{aligned}
y_4 &= -b(\mathbf{e}_4, \mathbf{x} \cdot \Lambda) \\
&= -b(\mathbf{e}_4 \cdot \Lambda^{-1}, \mathbf{x}) \\
&= -b((\mathbf{z}', \lambda_{44}), (\mathbf{x}', x_4)) \\
&= -(\mathbf{z}', \mathbf{x}') + x_4\lambda_{44} \\
&\geq -\|\mathbf{z}'\| \cdot \|\mathbf{x}'\| + x_4\lambda_{44} \\
&> -x_4\sqrt{\lambda_{44}^2 - 1} + x_4\lambda_{44} \\
&= x_4(\lambda_{44} - \sqrt{\lambda_{44}^2 - 1}) \; > \; 0\,.
\end{aligned}$$

Folgerung: $\mathscr{L}_+^\uparrow$ ist eine Untergruppe von $\mathscr{L}$.

BEWEIS: Offensichtlich ist $1 \in \mathscr{L}_+^\uparrow$. Aus der vorangegangenen Aussage ergibt sich, dass das Produkt zweier Elemente von $\mathscr{L}_+^\uparrow$ wieder in $\mathscr{L}_+^\uparrow$ liegt. Die nötige Aussage über das Inverse haben wir schon weiter oben bewiesen. ∎

Sei $P = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. Man spricht von der *Raumspiegelung* und der *Zeitumkehr*. Es ist $PT = TP = -1$. Daher ist $G_0 := \{1, P, T, PT\}$ eine Untergruppe von $\mathscr{L}$.

Behauptung: Jede Lorentz-Matrix Λ kann eindeutig in der Form $\Lambda = \Lambda' \cdot \Lambda_0$ geschrieben werden, mit $\Lambda' \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ und $\Lambda_0 \in G_0$.

Beweis: Die Existenz ist einfach zu zeigen. Ist z.B. $\Lambda \in \mathscr{L}_-^\uparrow$, so ist $\Lambda \cdot P \in \mathscr{L}_+^\uparrow$. Man hat dann $\Lambda = (\Lambda \cdot P) \cdot P$. Die anderen Fälle werden analog behandelt. Nun zur Eindeutigkeit: Ist $\Lambda' \cdot \Lambda_0 = \Gamma' \cdot \Gamma_0$, so ist $(\Lambda')^{-1} \cdot \Gamma' = \Lambda_0 \cdot \Gamma_0^{-1} \in \mathscr{L}_+^\uparrow \cap G_0 = \{1\}$. Also muss $\Gamma' = \Lambda'$ und $\Gamma_0 = \Lambda_0$ sein.

Nun wollen wir noch $\mathscr{L}_+^\uparrow$ näher untersuchen. Typische Elemente sind die

$$\text{räumlichen Drehungen } \Gamma_A := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (\text{mit } A \in SO(3))$$

$$\text{und die „Lorent-Boosts" } \Lambda_\alpha := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ 0 & 0 & \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{array}\right) \quad (\text{mit } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$G_1 = \{\Gamma_A \,:\, A \in SO(3)\} \quad \text{und} \quad G_2 = \{\Lambda_\alpha \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Untergruppen von $\mathscr{L}_+^\uparrow$ sind.

Behauptung: Zu jeder Matrix $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ gibt es Matrizen $A, B \in SO(3)$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\Lambda = \Gamma_A \cdot \Lambda_\alpha \cdot \Gamma_B^{-1}$ ist.

Beweis: Sei $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathscr{L}$, $\det\Lambda = 1$ und $\lambda_{44} \geq 1$. Wir bezeichnen die Zeilen von Λ mit $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_4$. Dann ist $\mathbf{e}_4 \cdot \Lambda = \mathbf{z}_4$, und es gilt:

$$\mathbf{e}_4 \cdot \Lambda = \mathbf{e}_4 \iff \Lambda = \Gamma_A \text{ für ein } A \in SO(3).$$

Sei $\mathbf{z}_4 = (\mathbf{z}', \lambda_{44})$ mit $\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^3$. Man kann eine ON-Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ so wählen, dass $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ die zu $\mathbf{z}'$ orthogonale Ebene im $\mathbb{R}^3$ aufspannen. Dann bilden $\mathbf{b}_1^\top, \mathbf{b}_2^\top, \mathbf{b}_3^\top$ die Spalten einer Matrix $B \in SO(3)$. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_4 \cdot \Lambda \cdot \Gamma_B &= (\mathbf{z}', \lambda_{44}) \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{z}' \cdot \mathbf{b}_1^\top, \mathbf{z}' \cdot \mathbf{b}_2^\top, \mathbf{z}' \cdot \mathbf{b}_3^\top, \lambda_{44}) \\ &= (0, 0, s, \lambda_{44}), \end{aligned}$$

mit $-1 = q(\mathbf{e}_4) = q(\mathbf{e}_4 \cdot \Lambda \cdot \Gamma_B) = s^2 - \lambda_{44}^2$. Also gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $s = \sinh\alpha$ und $\lambda_{44} = \cosh\alpha$ ist. Dann folgt:

$$\mathbf{e}_4 \cdot \Lambda \cdot \Gamma_B \cdot \Lambda_{-\alpha} = (0, 0, s, \lambda_{44}) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_{44} & -s \\ 0 & 0 & -s & \lambda_{44} \end{array}\right) = \mathbf{e}_4.$$

Also gibt es ein $A \in SO(3)$, so dass $\Lambda \cdot \Gamma_B \cdot \Lambda_{-\alpha} = \Gamma_A$ ist. Damit ist $\Lambda = \Gamma_A \cdot \Lambda_\alpha \cdot \Gamma_B^{-1}$.

Man beachte, dass $\Gamma_B^{-1} = \Gamma_{B^\top}$ ist.