Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften

Clifford-Algebren
und
Spin-Mannigfaltigkeiten

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2003/04

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Wuppertal, August 2004

Vorbemerkungen

Ursprünglich sollte sich diese Vorlesung an fortgeschrittene Mathematik-Studenten mit Grundkenntnissen in Darstellungstheorie wenden. Es kamen aber mehr Studenten aus der Physik, was zur Folge hatte, dass sehr viel mehr mathematische Grundlagen eingefügt werden mussten. Ein Teil davon findet sich im Text, ein anderer Teil in den Anhängen.

Außerdem zeigte es sich, dass es zum Thema „Clifford-Algebren“ sehr viel mehr Literatur als erwartet gibt. So wandelte sich der Inhalt der Vorlesung im Laufe des Semesters permanent, was den Hörern der Vorlesung sicher ein paar Probleme beschert hat. Die Darstellungstheorie geriet ausführlicher als geplant, dafür musste der Abschnitt über Spin-Strukturen stark verkürzt werden. Die dafür nötigen Kenntnisse (Bündel-Theorie, Cohomologie und charakteristische Klassen) konnten bei den Hörern nicht vorausgesetzt werden.

Der Abschnitt über Quantenphysik war nicht Teil der Vorlesung, ich bin nur neugierig geworden, in welcher Form die behandelten mathematischen Themen in der Physik angewandt werden. Aus Zeitgründen konnte ich den letzten Abschnitt (Symmetrien) nicht so ausführen, wie ich wollte. Vielleicht reizen mich die gemachten Erfahrungen irgendwann, eine Vorlesung über „Gruppen und Darstellungen für Physiker“ zu halten.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Allgemeines

[**Ad1**] J. F. Adams: *Lectures on Lie Groups.* Benjamin, New York 1969.
Sehr knappe und konzentrierte Einführung in die Darstellungstheorie, die alles Wesentliche enthält.

[**Brö-tDie**] Th. Bröcker, T. tom Dieck: *Representations of Compact Lie Groups.* Springer Graduate Texts 98, New York 1985.
Standardwerk über Liesche Gruppen und Darstellungen, gute Ergänzung zu [Ad1].

[**ECar**] Élie Cartan: *The Theory of Spinors.* Hermann, Paris 1966.
E. Cartans Original-Monographie zur Theorie der Spinoren.

[**Chev**] Cl. Chevalley: *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*, Springer 1997.
Klassische Referenz für Clifford-Algebren.

[**Crum**] A. Crumeyrolle: *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer Academic Publishers 1990.
Dies war eines der nützlichsten Bücher zur Vorbereitung des ersten Kapitels.

[**Frie**] Th. Friedrich: *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie.*
Einführung in die globale Theorie der Spinor-Bündel und Dirac-Operatoren. Vieweg 1997.

[**Fri1**] K. Fritzsche: *Analysis 1 – 3.* Vorlesungsskript, Wuppertal 2001.

[**Greu**] W. Greub: *Multilinear Algebra, 2nd Edition.* Springer, New York 1978.
Tensoralgebren, äußere Algebren, Clifford-Algebren und ihre Darstellungen.

[**Huse**] D. Husemoller: *Fibre Bundles (2nd ed.)*, Springer 1974.
enthält ausführliche Abschnitte über Clifford-Algebren, Spingruppen und die Darstellungstheorie klassischer Gruppen.

[**Law-Mi**] H. Bl. Lawson jr., M.-L. Michelsohn: *Spin Geometry*, Princeton University Press 1989.
Standard-Quelle zum gesamten Vorlesungsstoff, anspruchsvoll.

[**War**] F. W. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman and Company 1971.
Eine der besten Einführungen in die Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Literatur zu I.1 (Innere Produkte)

[**Art1**] E. Artin: *Analytische Geometrie und Algebra II*, Vorlesungsausarbeitung Hamburg 1960/61.
Statt von „symmetrischen Bilinearformen“ wird hier von „orthogonalen Geometrien“ gesprochen.

[**Bou1**] N. Bourbaki: *Algèbre, chap. 9, Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Hermann 1959.
Wie üblich ist die Darstellung bei Bourbaki sehr allgemein gehalten.

[**Brie**] E. Brieskorn: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie II, Kapitel VI, Vektorräume mit einer Sesquilinearform*, vieweg 1985.
Dieser Teil des ansonsten hervorragenden Buches ist etwas unübersichtlich.

[**Cohn**] P. M. Cohn: *Basic Algebra, Chapt. 8, Quadratic Forms and Ordered Fields*, Springer 2003.

Die Informationen über die Lorentz-Gruppe muss man sich etwas mühsam zusammensuchen, außerdem sind die in der Literatur unterschiedlichen Definitionen des Minkowski-Raumes zu beachten. Ein Einstieg findet sich in [Str-Wi]. Mehr zur Lorentz-Gruppe erfährt man in [Ki-No] und [Nab].

[**Ki-No**] Y S. Kim / M. E. Noz: *Theory and Applications of the Poincaré Group*, Fundamental Theories of Physics, Holland 1986,

[**Nab**] G. L. Naber: *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer 1992.

[**Str-Wi**] R. F. Streater / A. S. Wightman: *PCT, Spin & Statistics, and All That*, Benjamin 1964. Es gibt eine deutsche Übersetzung: „PCT – Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie“, BI 1969.

Literatur zu I.2 (Die Tensor-Algebra)

[Chev], [Crum], [Greu], sowie

[**Bert**] J. E. et M. J. Bertin: *Algèbre linéaire et géométrie classique*, Masson 1981.

[**Bou2**] N. Bourbaki: *Algebra 1, chapter 2 + 3 (Linear Algebra, Tensor Algebras etc.)*, Hermann / Addison-Wesley 1974.
Die Standard-Referenz für abstrakte lineare Algebra.

[**Brö**] Th. Bröcker: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Birkhäuser 2003.
enthält elementare Ergebnisse über Bilinearformen, Liegruppen u. -Algebren, Quaternionen und die Lorentzgruppe.

[**Gerr**] L. Gerritzen: *Grundbegriffe der Algebra*, vieweg 1994.
Knappes Nachschlagewerk.

[**Marc**] M. Marcus: *Finite Dimensional Multilinear Algebra I + II*, Marcel Dekker 1973.
enthält viel Material über Tensoralgebren, äußere Algebren und Clifford-Algebren.

Literatur zu I.3 (Die Clifford-Algebra)

[Brö-tDie], [Crum], [Greu], [Huse], [Law-Mi], [Marc], sowie

[**At-Bo-Sh**] M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro: *Clifford Modules*, Topology 3, 3-38, 1964.

Berühmte und vielzitierte Original-Arbeit, für die Vorlesung interessiert vor allem der erste Teil.

[**Bak**] A. Baker: *Matrix Groups*, Springer 2002.

Matrizengruppen, Algebren und Quaternionen, Clifford-Algebren, elementare Lie-Theorie.

[**Be-Tu**] I.M. Benn, R. W. Tucker: *An Introduction to Spinors and Geometry, with Applications in Physics*, Adam Hilger 1987.

Sehr ausführliche Rechnungen, z. T. noch als Schnittstelle zwischen Mathematik und Physik brauchbar.

[**Ebb**] H.-D. Ebbinghaus u.a.: *Zahlen*, Springer 1988.

Sehr schöne Einführung in Quaternionen und andere Divisionsalgebren.

[**Hu-Van**] D. J. Hurley, M. A. Vandyck: *Geometry, Spinors and Applications*, Springer Praxis 2000.

Behandelt viele wichtige Themen, ist aber von den Notationen her schon arg auf ein physikalisches Publikum zugeschnitten.

[**Port1**] Ian R. Porteous: *Topological Geometry.* Cambridge University Press, 1969 (second ed. 1981).

Vorläufer von [Port2], etwas ausführlicher.

[**Port2**] I. R. Porteous: *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 1995.

Enthält viele nützliche Informationen über Algebren, quadratische Räume, Quaternionen, Clifford-Algebren etc., vor allem auch für den nächsten Paragraphen.

Literatur zu I.4 (Periodizitätssätze)

[Crum], [Huse], [Port2] und

[**Bu-Tr**] P. Budinich, A. Trautman: *The Spinorial Chessboard*, Springer (Trieste Notes in Physics) 1988.

Hier gilt ähnliches wie bei dem vorigen Buch.

Literatur zu I.5 (Spinoren, Cliffordgruppen)

[Ecar], [Chev], [Crum], [Frie], [Greu], [Huse], [Law-Mi], [Marc], [At-Bo-Sh], [Bak], [Port2], sowie

[**On-Su**] A. L. Oniščik, R. Sulanke: *Algebra und Geometrie, 2. Moduln und Algebren.* VEB Wissenschaften, Berlin 1988.

Allgemeine Theorie von Algebren, Clifford-Algebren und Clifford-Gruppen, etwas ausführlicher als andere Autoren.

Literatur zu II.1 (Liegruppen)

[Ad1], [Brö-tDie], [War], sowie

[**Bou3**] N. Bourbaki: *Intégration, chap. 7, Mesure de Haar*. Hermann, Paris 1963.

[**Bou4**] N. Bourbaki: *Groupes et algèbre de Lie, insbesondere chap. 1, 3 und 9.* Hermann / Masson, Paris 1971 - 1982.

[**Dieu**] J. Dieudonné: *Grundzüge der modernen Analysis, 3, 4 und 5.* Vieweg/VEB Wissenschaften, Braunschweig/Berlin 1976 - 1979.
Fortsetzung der berühmten „Foundation of Analysis“; sehr ausführliche Einführung in differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Faserbündel, in Teil 5 Darstellungen von Liegruppen; in den Notationen manchmal etwas unkonventionell.

[**Ga-Hu-La**] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry.* Springer Universitext, Heidelberg 1987.
gut lesbare Einführung in die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, mit einem ganz kleinen Abschnitt über Liegruppen.

[**Hein**] W. Hein: *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen.* Springer Hochschultext, Heidelberg 1990.

[**Hil-Ne**] J. Hilgert, K. H. Neeb: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren.* Vieweg 1991.

[**Lee**] J. M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer Graduate Texts, New York 2003.
Dickes Buch über Analysis auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

[**Sa-Wea**] D. H. Sattinger, O. L. Weaver: *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer Appl. Math. Sc. 61, New York 1986.
Physikalische Anwendungen der Lie-Theorie, in einer vermutlich für Mathematiker und Physiker akzeptablen Form.

Literatur zu II.2 (Darstellungs-Theorie)

[Ad1], [Brö-tDie], [Huse], [Bak], [Bou4], [Dieu] (Band 5), [Hein], [Sa-Wea], sowie

[**Ad2**] J. F. Adams: *Lectures on Exceptional Lie Groups.* Chicago Lectures in Mathematics 1996.

[**Ba-Ra**] A. O. Barut, R. Raczka: *Theory of Group Representations and Applications.* PWN, Warszawa 1977.

[**Boer**] H. Boerner: *Darstellungen von Gruppen – mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik.* Springer 1967.

[**Ful-Ha**] W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory - A First Course.* Springer Graduate Texts, New York 1991.

[**Hum**] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer Graduate Texts, New York 1972.

[**Knapp**] A. W. Knapp: *Lie Groups Beyond an Introduction.* Birkhäuser 1996.

[**Simon**] B. Simon: *Representations of Finite and Compact Groups*. AMS, Graduate Studies in Mathematics 10, 1996.

[**Sug**] M. Sugiura: *Unitary Representations and Harmonic Analysis - An Introduction*. Wiley, New York 1975.

[**Vara**] V. S. Varadarajan: *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*. Prentice-Hall 1974.

[**Zelo**] D.P.Zelobenko: *Compact Lie Groups and Their representations*.

Literatur zu II.3 (Spin-Darstellungen)

[Brö-tDie], [Frie], [Greu], [Huse], [Law-Mi], [At-Bo-Sh], [Bu-Tr], [Ad2].

Literatur zu II.4 (Spin-Strukturen)

[Frie], [Law-Mi], [At-Bo-Sh], sowie

[**Bau**] H. Baum: *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*. Teubner, Leipzig 1981.

[**Gil-Mu**] J. E. Gilbert, Margaret A. M. Murray: *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*. Cambridge studies in advanced Math. 26, 1991.

[**Jost**] J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer Universitext, New York 1998.

Literatur zu II.5 (Quantenphysik)

[Be-Tu], [Hu-Van], [Sa-Wea], sowie

[**Abr**] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics*. Benjamin, New York 1967.

[**Ar-We**] G. B. Arfken, H. J. Weber: *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press 1995.

[**Ball**] L. E. Ballentine: *Quantum Mechanics*. Prentice Hall 1990.

[**Ber**] R. Berndt: *Einführung in die Symplektische Geometrie*. Vieweg 1998.

[**Berg**] C.Berger: *Teilchenphysik*. Springer, Berlin 1992.

[**Chai-Ha**] M. Chaichian, R. Hagedorn: *Symmetries in Quantum Mechanics*. Institute of Physics Publishing, London 1998.

[**Choq**] Y. Choquet-Bruhat: *Geéométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs*. Dunod, Paris 1968.

[**CT-D-L**] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë: *Quantenmechanik*. de Gruyter 1997.

[**De-Mi**] L. Debnath, P. Mikusiński: *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Academic Press, San Diego 1990.

[**Dirac**] P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics, 4th Edition*. Oxford University Press 1958.

[**Dod**] J. E. Dodd: *The Ideas of Particle Physics – An Introduction for Scientists*. Cambridge University Press, Oxford 1984.

[**Dosch**] H. G. Dosch u.a.: *Teilchen, Felder und Symmetrien*, Spektrum Verlag 1984.
Populärwissenschaftliche Einführung.

[**Fri2**] K. Fritzsche: *Quantenphysik und Instantonenbündel*. Manuskript, Göttingen 1980.

[**Go-Wei**] K. Gottfried, V. F. Weisskopf: *Concepts of Particle Physics, vol. 1*. Clarendon Press, Oxford 1984.

[**Gran**] W. T. Grandy, Jr.: *Relativistic Quantum Mechanics of Leptons and Fields*. Kluwer Academic Publishers 1991.

[**Herm**] R. Hermann: *Lie Groups for Physicists*. Benjamin, New York 1966.

[**Huang**] K. Huang: *Quarks, Leptons & Gauge Fields*. World Scientific Publishing, Singapore 1982.

[**Josh**] A. W. Joshi: *Elements of Group Theory for Physicists*. Wiley Eastern private limited, New Delhi 1973.

[**Kahan**] Th. Kahan: *Théorie des Groupes en Physique Classique et Quantique, I+II*. Dunod, Paris 1960.

[**Ko-Ma**] I. Yu. Kobzarev, Yu. I. Manin: *Elementary Particles*. Kluwer Academic Publishers.

[**Licht**] D. B. Lichtenberg: *Unitary Symmetry and Elementary Particles*. Academic Press 1970.

[**Mack**] G. W. Mackey: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Benjamin, New York 1963.

[**McD-Sa**] D. McDuff, D. Salamon: *Introduction to Symplectic Topology*. Clarendon Press, Oxford 1995.

[**Mess**] A. Messiah: *Quantenmechanik 1+2*. de Gruyter, Berlin 1976 - 1990.

[**Nacht**] O. Nachtmann: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*. vieweg 1986.

[**Okun**] L. B. Okun: *Physik der Elementarteilchen*. Akademie-Verlag, Berlin 1991.

[**Pich**] G. Pichon: *Groupes de Lie - Représentations Linéaires et Applications*. Hermann, Paris 1973.

[**Roll1**] H. Rollnik: *Quantentheorie, Band 1*. Vieweg 1995.

[**Roll2**] H. Rollnik: *Quantentheorie, Band 2*. Springer 2003.

[**Scho**] M. Schottenloher: *Geometrie und Symmetrie in der Physik*. Vieweg 1995.

[**Schwa**] F. Schwabl: *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Springer, Heidelberg 1996.

[**Se-Urb**] R. U. Sexl, H. K. Urbantke: *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer, Wien 1992.

[**Sim**] D. J. Simms: *Lie Groups and Quantum Mechanics*. Springer Lecture Notes 52, New York 1968.

[**Stern**] S. Sternberg: *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press 1994.

[**Strau**] N. Straumann: *Quantenmechanik*. Springer, Berlin 2002.
erstaunlich mathematisch!

[**Tass**] L. J. Tassie: *Physik der Elementarteilchen*. Oldenbourg Verlag, München 1977.

[**Tic**] R. Ticciati: *Quantum Field Theory for Mathematicians*. Cambridge University Press 1999.

[**vdW**] B. L. van der Waerden: *Group Theory and Quantum Mechanics*.
Darstellungen von Gruppen, Lorentzgruppe, Spin, im etwas altertümlichen Stil van der Waerdens.

[**Wyb**] B. G. Wybourne: *Classical Groups for Physicists*. John Wiley & Sons 1974.

Ergänzende Literatur

[**Al-B**] J. L. Alperin, R. B. Bell: *Groups and Representations*, Springer Graduate Texts 162, New York 1995.
Begriffsbildungen aus der Darstellungstheorie allgemeiner Gruppen; ansonsten eher unbrauchbar.

[**Bala**] A. P. Balachandran, C. G. Trahern: *Lectures on Group Theory for Physicists*. Bibliopolis, Napoli 1984.

[**Cur**] M. L. Curtis: *Matrix Groups, 2nd Edition*. Springer 1984.
Liegruppentheorie zu Fuß.

[**Far**] D. R. Farenick: *Algebras of Linear Transformations*, Springer Universitext, New York 2001.
Relativ elementare Einführung in Algebren, insbesondere auch Tensorprodukte von Algebren; ganz gut lesbar.

[**Hahn**] A. J. Hahn: *Quadratic Algebras, Clifford Algebras, and Arithmetic Witt Groups*. Springer Universitext, New York 1994.

Algebren, insbesondere Cliffordalgebren, kleiner Abschnitt über Dirac-Operatoren und Spin-Mannigfaltigkeiten, ansonsten aber eher andere Fragestellungen, nur bedingt brauchbar.

[**Kir**] A. A. Kirillov: *Elements of the Theory of Representations.* Springer, New York 1976.
Allgemeine Begriffsbildungen in der Darstellungstheorie.

[**Ko-Sha**] A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich: *Algebra I.* Springer, New York 1990.
Algebraische Grundbegriffe, insbesondere auch über Algebren

[**Lor**] F. Lorenz: *Einführung in die Algebra, Teil II*, BI 1990.
Abschnitt über einfache und halbeinfache Algebren.

[**Lou**] P. Lounesto: *Clifford Algebras and Spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series 239, Cambridge University Press 1997.
geschrieben für Interessenten aus dem Grenzbereich Mathematik - Physik; enthält sehr viel Material über Clifford-Algebren und Spin-Darstellungen, auch Aufgaben und physikalische Anwendungen, aber nur die affine Theorie, also keine Faserbündel. Die Darstellung ist nicht unbedingt Standard und manchmal etwas wirr. Allerdings ist der Anfang recht elementar.

[**ML-B**] S. MacLane, G. Birkhoff: *Algebra (Second Edition)*, MacMillan Publishing Co., New York 1979.
enthält u.a. Abschnitte über quadratische Formen und graduierte Algebren.

[**Oni**] A. L. Onishchik: *Topology of Transitive Transformation Groups.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin, Heidelberg 1994.
Liegruppen, Darstellungen, homogene Räume, Transformationsgruppen.

[**Syn**] J. L. Synge: *Relativity: The Special Theory*, North-Holland Publishing Company 1972.
Spezielle Relativitätstheorie und Lorentz-Transformationen für Physiker, mit Anwendungen; angelsächsische Vektor-Notation und Ricci-Kalkül.

[**Weid**] J. Weidmann: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner 1976.
Ausführliche Darstellung der Hilbertraumtheorie für physikalische Anwendungen.

[**Re-Si**] M. Reed, B. Simon: *Functional Analysis I*, Academic Press, Princeton 1980.
Klassiker zum Thema „Funktionalanalysis für Physiker“.

[**Bla-Brü**] Ph. Blanchard, E. Brüning: *Distributionen und Hilbertraumoperatoren*, Springer, Wien 1993.

[**Rudin**] W. Rudin: *Functional Analysis*, Tata McGraw-Hill, New Delhi 1973.

[**Hir-Schar**] F. Hirzebruch, W. Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis*, BI 1971.

[**Wgnr**] M. Wagner: *Gruppentheoretische Methoden in der Physik.* Vieweg 1998.

[**Werner**] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer 1997.