Anhang G - Bemerkungen zur Weylgruppe

Sei G eine kompakte zusammenhängende (halbeinfache) Liegruppe, $T \subset G$ ein maximaler Torus, $W = W_T(G) = N_G(T)/T$ die zugehörige Weylgruppe. Weiter sei $\mathfrak{g} = L(G)$ die Liealgebra von G, $\mathfrak{t} = L(T)$, sowie

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} + \mathsf{i}\,\mathfrak{g}$$

die komplexifizierte Liealgebra, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.

Die *adjungierte Darstellung* lässt sich auf die Komplexifizierung erweitern:

$$\mathrm{Ad} \otimes 1 \,:\, G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \text{ mit } g \mapsto \mathrm{Ad}(g) \otimes 1\,.$$

Die Ableitung ist die Darstellung

$$\mathrm{ad} \otimes 1 \,:\, \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \text{ mit } u \mapsto \mathrm{ad}(u) \otimes 1\,.$$

Sei $\Gamma_T \subset L(T)$ das Gitter zum Torus T, so dass $T \cong L(T)/\Gamma_T$ ist. Die Menge

$$\Gamma_T^* := \{\lambda \in \mathfrak{t}^* \,:\, \lambda(\Gamma_T) \subset \mathbb{Z}\}$$

nennt man das *duale Gitter*. Eine *(infinitesimale) Wurzel* von G ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathsf{i}\,\mathbb{R}$ der Gestalt $\alpha = 2\pi\mathsf{i}\,\lambda$ mit $\lambda \in \Gamma_T^*$ (also ein Element von $2\pi\mathsf{i}\,\Gamma_T^* \subset (\mathfrak{t}^*)_{\mathbb{C}}$), so dass gilt:

1. $\alpha \neq 0$.
2. Es gibt ein Element $x \in \mathfrak{h}$, $x \neq 0$, so dass $\mathrm{ad}(u)x = \alpha(u) \cdot x$ für alle $u \in \mathfrak{t}$ ist.

Sei Δ das System der endlich vielen Wurzeln. Dann ist

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha\,,$$

mit $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,:\, \mathrm{ad}(u)x = \alpha(u) \cdot x \text{ für alle } u \in \mathfrak{t}\}$.

Nun sei die Abbildung $c : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ definiert durch $c(y + \mathsf{i}\,z) := y - \mathsf{i}\,z$. Dann ist $\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,:\, c(x) = x\}$. Für $u \in \mathfrak{t}$ und $x = y + \mathsf{i}\,z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ist

$$\begin{aligned} [u, c(x)] &= [u, y] - \mathsf{i}\,[u, z] \\ &= c([u, y] + \mathsf{i}\,[u, z]) \;=\; c([u, x]). \end{aligned}$$

Ist $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, so ist $[u, c(x)] = \overline{\alpha(u)} \cdot c(x) = -\alpha(u) \cdot c(x)$, also $\mathfrak{g}_{-\alpha} = c(\mathfrak{g}_\alpha)$.

Wir halten nun eine Wurzel $\alpha = 2\pi\mathsf{i}\,\lambda \in \Delta$ fest, sowie ein Element $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Dann setzen wir

$$y_\alpha := x_\alpha + c(x_\alpha) \quad \text{ und } \quad z_\alpha := \mathsf{i}\,(x_\alpha - c(x_\alpha)).$$

Da $c(y_\alpha) = y_\alpha$ und $c(z_\alpha) = z_\alpha$ ist, liegen y_α und z_α in $\mathfrak{g}$, genau genommen in $(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$. Insbesondere liegt dann $h_\alpha^0 := [y_\alpha, z_\alpha]$ in $\mathfrak{t}$.

Für $u \in \mathfrak{t}$ ist

$$[u, y_\alpha] = [u, x_\alpha] + [u, c(x_\alpha)] = \alpha(u) \cdot (x_\alpha - c(x_\alpha)) = -\mathsf{i}\, \alpha(u) \cdot z_\alpha = 2\pi\lambda(u) \cdot z_\alpha$$

und

$$[u, z_\alpha] = \mathsf{i}\,([u, x_\alpha] - [u, c(x_\alpha)]) = \mathsf{i}\, \alpha(u) \cdot (x_\alpha + c(x_\alpha)) = \mathsf{i}\, \alpha(u) \cdot y_\alpha = -2\pi\lambda(u) \cdot y_\alpha.$$

Ist $\mathrm{Exp} : \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ durch die Exponentialreihe gegeben, so ist

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}(u)) = \mathrm{Ad}(\exp(u)), \text{ für } u \in \mathfrak{t}$$

(vgl. die Beweise zu Satz 2.16 und 2.17). Also ist

$$(\mathrm{Ad}(\exp(u)) \otimes 1)(x_\alpha) = (\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}(u)) \otimes 1)(x_\alpha) = e^{\alpha(u)} \cdot x_\alpha = e^{2\pi \mathsf{i}\, \lambda(u)} \cdot x_\alpha.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\exp(u)) y_\alpha &= (\mathrm{Ad}(\exp(u)) \otimes 1)(x_\alpha + c(x_\alpha)) \\
&= e^{2\pi \mathsf{i}\, \lambda(u)} \cdot x_\alpha + e^{-2\pi \mathsf{i}\, \lambda(u)} \cdot c(x_\alpha) \\
&= (\cos(2\pi\lambda(u)) + \mathsf{i}\, \sin(2\pi\lambda(u))) \cdot x_\alpha \\
&\quad + (\cos(2\pi\lambda(u)) - \mathsf{i}\, \sin(2\pi\lambda(u))) \cdot c(x_\alpha) \\
&= \cos(2\pi\lambda(u)) \cdot y_\alpha + \sin(2\pi\lambda(u)) \cdot z_\alpha,
\end{aligned}$$

und analog

$$\mathrm{Ad}(\exp(u)) z_\alpha = -\sin(2\pi\lambda(u)) \cdot y_\alpha + \cos(2\pi\lambda(u)) \cdot z_\alpha.$$

G.1 Satz. *Ist $\alpha \in \Delta$ und $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x \neq 0$, so bilden die Elemente y_α, z_α und h_α^0 die Basis einer Lie-Unteralgebra $\mathfrak{k}_\alpha \subset \mathfrak{g}$, die isomorph zu $\mathfrak{su}(2)$ ist. Außerdem ist $-\mathsf{i}\alpha(h_\alpha^0)$ reell und > 0. Desweiteren gibt es eine zusammenhängende, abgeschlossene Lie-Untergruppe $K_\alpha \subset G$ mit $L(K_\alpha) = \mathfrak{k}_\alpha$, die lokal isomorph zu $SU(2)$ ist.*

BEWEIS: Wir versehen $\mathfrak{g}$ mit einem G-invarianten Skalarprodukt $(\ldots, \ldots)$. Dann gilt für $u \in \mathfrak{t}$:

$$\begin{aligned}
(u, h_\alpha^0) &= (u, [y_\alpha, z_\alpha]) = (u, \mathrm{ad}(y_\alpha) z_\alpha) \\
&= -(\mathrm{ad}(y_\alpha) u, z_\alpha) = ([u, y_\alpha], z_\alpha) \\
&= 2\pi\lambda(u) \cdot (z_\alpha, z_\alpha).
\end{aligned}$$

Weil $z_\alpha \neq 0$ ist, ist auch $(z_\alpha, z_\alpha) \neq 0$. Weil außerdem $\lambda = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \alpha$ auf $\mathfrak{t}$ nicht identisch verschwindet, muss $h_\alpha^0 \neq 0$ sein.

Setzt man $u = h_\alpha^0$ ein, so erhält man $\mathsf{i}\,(h_\alpha^0, h_\alpha^0) = \alpha(h_\alpha^0) \cdot (z_\alpha, z_\alpha)$, also $\alpha(h_\alpha^0) \neq 0$ und $-\mathsf{i}\, \alpha(h_\alpha^0) = (h_\alpha^0, h_\alpha^0)/(z_\alpha, z_\alpha) > 0$.

Sei nun $a_\alpha := -\mathsf{i}\,\alpha(h_\alpha^0)$ und

$$\widetilde{h}_\alpha := \frac{2}{a_\alpha}\,h_\alpha^0,\quad \widetilde{y}_\alpha := \frac{2}{\sqrt{a_\alpha}}\,y_\alpha \quad \text{und} \quad \widetilde{z}_\alpha := \frac{2}{\sqrt{a_\alpha}}\,z_\alpha\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
[\widetilde{h}_\alpha, \widetilde{y}_\alpha] &= \frac{4}{a_\alpha\sqrt{a_\alpha}}\,[h_\alpha^0, y_\alpha] \\
&= \frac{4}{a_\alpha\sqrt{a_\alpha}}\,2\pi\lambda(h_\alpha^0)\cdot z_\alpha \\
&= -\mathsf{i}\,\frac{4}{a_\alpha\sqrt{a_\alpha}}\,\alpha(h_\alpha^0)\cdot z_\alpha \\
&= \frac{4}{\sqrt{a_\alpha}}\cdot z_\alpha \\
&= 2\widetilde{z}_\alpha,
\end{aligned}$$

und analog

$$[\widetilde{h}_\alpha, \widetilde{z}_\alpha] = -2\widetilde{y}_\alpha \quad \text{und} \quad [\widetilde{y}_\alpha, \widetilde{z}_\alpha] = 2\widetilde{h}_\alpha\,.$$

Bildet man nun die Basis $\{\mathsf{i}\,H, U, V\}$ von $\mathfrak{su}(2)$ (vgl. Kapitel 2, Anfang von §3) auf $\{\widetilde{h}_\alpha, \widetilde{y}_\alpha, \widetilde{z}_\alpha\}$ ab, so erhält man einen Algebra-Isomorphismus von $\mathfrak{su}(2)$ auf eine Unteralgebra $\mathfrak{k}_\alpha$ von $\mathfrak{g}$. Offensichtlich wird $\mathfrak{k}_\alpha$ von h_α^0, y_α und z_α erzeugt.

Zu der Liealgebra $\mathfrak{k}_\alpha$ gibt es eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe $K_\alpha \subset G$ mit $L(K_\alpha) = \mathfrak{k}_\alpha$. Natürlich ist K_α eine kompakte Liegruppe. Da eine Liegruppe in der Nähe der Eins durch ihre Liealgebra bestimmt wird, ist K_α lokal isomorph zu $SU(2)$. Damit ist $\mathrm{rg}(K_\alpha) = 1$. Man kann zeigen, dass dann $K_\alpha \cong SU(2)$ oder $\cong SO(3)$ sein muss (vgl. [Brö-tDie], chapter V). ■

G.2 Satz. *Es gibt ein Element $r_\alpha \in K_\alpha \cap N_G(T)$, so dass das dadurch definierte Element $w_\alpha \in W(G)$ auf $\mathfrak{t}$ die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene $H_\alpha := \{u \in \mathfrak{t} : \alpha(u) = 0\}$ induziert. Insbesondere wird dabei h_α^0 in $-h_\alpha^0$ überführt.*

BEWEIS: Wir machen den Ansatz $r_\alpha = \exp(ty_\alpha)$, mit einem noch zu bestimmenden Faktor $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathrm{Ad}(r_\alpha) = \mathrm{Exp}(t\cdot \mathrm{ad}(y_\alpha)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(\mathrm{ad}(y_\alpha))^n \;\; (\text{in } \mathrm{End}(\mathfrak{g})).$$

Ist $u \in H_\alpha = \alpha^{-1}(0) \subset \mathfrak{t}$, so ist

$$\mathrm{ad}(y_\alpha)u = [y_\alpha, u] = -[u, y_\alpha] = -2\pi\lambda(u)\cdot z_\alpha = \mathsf{i}\,\alpha(u)\cdot z_\alpha = 0,$$

also $\mathrm{Ad}(r_\alpha)u = u$ (wenn man die vorige Zeile in die Exponentialreihe einsetzt).

Wir benutzen die Zahl $a_\alpha := -\mathsf{i}\,\alpha(h_\alpha^0) > 0$. Dann ist

$$\mathrm{ad}(y_\alpha)h_\alpha^0 = -[h_\alpha^0, y_\alpha] = \mathsf{i}\,\alpha(h_\alpha^0)\cdot z_\alpha = -a_\alpha \cdot z_\alpha \text{ und } \mathrm{ad}(y_\alpha)z_\alpha = h_\alpha^0.$$

Per Induktion folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(y_\alpha)^{2k}h_\alpha^0 &= (-a_\alpha)^k h_\alpha^0 \\ \text{und} \quad \mathrm{ad}(y_\alpha)^{2k+1}h_\alpha^0 &= (-a_\alpha)^{k+1} z_\alpha. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(r_\alpha)h_\alpha^0 &= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^{2k}}{(2k)!}(-a_\alpha)^k h_\alpha^0 + \sum_{k=0}^\infty \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-a_\alpha)^{k+1} z_\alpha \\ &= \cos(\sqrt{a_\alpha}\,t)\cdot h_\alpha^0 - \sqrt{a_\alpha}\sin(\sqrt{a_\alpha}\,t)\cdot z_\alpha. \end{aligned}$$

Setzen wir $t := \pi/\sqrt{a_\alpha}$, so erhalten wir $\mathrm{Ad}(r_\alpha)h_\alpha^0 = -h_\alpha^0$.

Offensichtlich ist $\mathfrak{t} = H_\alpha \oplus \mathbb{R}h_\alpha^0$. Die Summe ist sogar orthogonal, weil $(u, h_\alpha^0) = -\mathsf{i}\,\alpha(u)\cdot(z_\alpha, z_\alpha) = 0$ ist, für $u \in H_\alpha$ (siehe Beweis zu Satz G.1). Da $\mathfrak{t}$ von $\mathrm{Ad}(r_\alpha)$ invariant gelassen wird, gehört r_α zum Normalisator $N_G(T)$, entspricht also einem Element der Weylgruppe. Es ist klar, dass $\mathrm{Ad}(r_\alpha)|_{\mathfrak{t}}$ die orthogonale Spiegelung an H_α ist. ∎

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass gezeigt wurde, dass die Spiegelungen an den Hyperebenen H_α zur Weylgruppe gehören. Man kann sogar zeigen, dass die Weylgruppe von diesen Spiegelungen erzeugt wird.

Anhang H - Cohomologie-Gruppen

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine abelsche Gruppe (ein $\mathbb{Z}$-Modul, also z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ oder einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ist $U \subset X$ offen, so verstehen wir unter $\Gamma(U,G)$ die Menge aller lokal-konstanten Funktionen auf U mit Werten in G.

Ist U zusammenhängend, so ist jedes Element von $\Gamma(U,G)$ konstant, also $\Gamma(U,G) = G$. Im allgemeinen ist $\Gamma(U,G)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul.

Sei $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von X. Für einen Multi-Index $I = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in A^{q+1}$ sei $|I| = q+1$, $U_I = U_{\alpha_0\ldots\alpha_q} := U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_q}$ und

$$C^q(\mathscr{U},G) := \{f = (f_I)_{I\in A^{q+1}} \,:\, f_I \in \Gamma(U_I,G)\}.$$

Dann ist z.B.

$$\begin{aligned} C^0(\mathscr{U},G) &= \{f = (f_\alpha)_{\alpha\in A} \,:\, f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha,G)\,\} \\ \text{und } C^1(\mathscr{U},G) &= \{g = (g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A^2} \,:\, g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_{\alpha\beta},G)\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\delta_q : C^q(\mathscr{U},G) \to C^{q+1}(\mathscr{U},G)$ sei definiert durch

$$\delta_q(f)_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}} := \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i f_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}}}.$$

Dann ist speziell

$$\begin{aligned} \delta_0(f)_{\alpha\beta} &= (f_\beta - f_\alpha)|_{U_{\alpha\beta}} \\ \text{und } \delta_1(g)_{\alpha\beta\gamma} &= (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma} + g_{\beta\gamma})|_{U_{\alpha\beta\gamma}}. \end{aligned}$$

Definition.

Ein q-dimensionaler *Cozykel* (zur Überdeckung $\mathscr{U}$) mit Werten in G ist ein Element $f \in C^q(\mathscr{U},G)$ mit $\delta_q(f) = 0$. Die Menge aller dieser Cozykel wird mit $Z^q(\mathscr{U},G)$ bezeichnet.

Die Elemente von $B^q(\mathscr{U},G) := \delta_{q-1}(C^{q-1}(\mathscr{U},G))$ werden als *Coränder* bezeichnet, für $q \geq 1$. Außerdem setzt man $B^0(\mathscr{U},G) = 0$.

Auch $C^q(\mathscr{U},G)$, $Z^q(\mathscr{U},G)$ und $B^q(\mathscr{U},G)$ sind $\mathbb{Z}$-Moduln, δ_q ist ein Homomorphismus, $Z^q(\mathscr{U},G) = \operatorname{Ker}(\delta_q)$ und $B^q(\mathscr{U},G) = \operatorname{Im}(\delta_{q-1})$. Speziell ist

$$\begin{aligned} Z^0(\mathscr{U},G) &= \Gamma(X,G) \quad \text{und} \\ Z^1(\mathscr{U},G) &= \{g = (g_{\alpha\beta}) \in C^0(\mathscr{U},G) \,:\, g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} \text{ auf } U_{\alpha\beta\gamma}\,\}. \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass $\delta_q \circ \delta_{q-1} = 0$ ist, also $B^q(\mathscr{U},G) \subset Z^q(\mathscr{U},G)$.

Definition.
$H^q(\mathscr{U},G) := Z^q(\mathscr{U},G)/B^q(\mathscr{U},G)$ heißt q-te *Cohomologiegruppe* von X zur Überdeckung $\mathscr{U}$ mit Werten in G.

Offensichtlich ist $H^0(\mathscr{U},G) = \Gamma(X,G)$. Die „Cohomologieklassen“ in $H^1(\mathscr{U},G)$ sind Äquivalenzklassen von Elementen $g = (g_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathscr{U},G)$, wobei zwei Elemente g und $\widetilde{g}$ genau dann äquivalent genannt werden, wenn es ein $f = (f_\alpha) \in C^0(\mathscr{U},G)$ gibt, so dass $\widetilde{g} = g + \delta_0 f$ ist, also $\widetilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + f_\beta - f_\alpha$ auf $U_{\alpha\beta}$.

Bemerkung. Das obige Konzept lässt sich verallgemeinern. Ist $p : P \to X$ ein Faserbündel, so ist

$$\Gamma(U,P) = \{s : U \to P \text{ (differenzierbar), mit } p \circ s = \mathrm{id}_U\}$$

der Raum der Schnitte in P über U. Mit solchen Schnitten kann man genau wie oben die Cohomologiegruppen $H^q(\mathscr{U},P)$ definieren. Ist P ein Prinzipalbündel mit endlicher (abelscher) Strukturgruppe G, so erhält man wieder die oben beschriebenen Cohomologiegruppen. Das trifft zum Beispiel im Falle von $\mathbb{Z}_2$-Bündeln, also zweifachen Überlagerungen zu.

Die obige Theorie hat einen Schönheitsfehler: Alles hängt von der Überdeckung $\mathscr{U}$ ab. Es soll nun kurz angedeutet werden, wie man sich von dieser Abhängigkeit lösen kann.

Eine Überdeckung $\mathscr{V} = (V_n)_{n\in N}$ von X heißt eine *Verfeinerung* von $\mathscr{U}$, falls es eine Abbildung $\tau : N \to A$ (die „Verfeinerungsabbildung“) gibt, so dass $V_n \subset U_{\tau(n)}$ ist, für alle $n \in N$. Die Verfeinerungsabbildung induziert Abbildungen $\tau^q : C^q(\mathscr{U},G) \to C^q(\mathscr{V},G)$ durch $\tau^q(f)_J := f_{\tau(J)}$. Weil $\delta \circ \tau^q = \tau^{q+1} \circ \delta$ ist, wird nun für jedes q eine Abbildung $\tau^* : H^q(\mathscr{U},G) \to H^q(\mathscr{V},G)$ induziert. Man kann zeigen, dass τ^* wohldefiniert und von der Verfeinerungsabbildung unabhängig ist.

H.1 Satz. *Die Abbildung $\tau^* : H^1(\mathscr{U},G) \to H^1(\mathscr{V},G)$ ist injektiv.*

Beweis: Sei g ein Cozykel bezüglich $\mathscr{U}$ und $\tau^1(g) = \delta f$, für ein $f \in C^0(\mathscr{V},G)$. Wir müssen zeigen, dass g schon selbst ein Corand ist.

Auf $V_{nm} \cap U_\alpha$ ist

$$g_{\tau(n)\tau(m)} = g_{\tau(n)\alpha} + g_{\alpha\tau(m)} = g_{\alpha\tau(m)} - g_{\alpha\tau(n)}.$$

Da $g_{\tau(n)\tau(m)}|_{V_{nm}} = (f_m - f_n)|_{V_{nm}}$ ist, folgt:

$$g_{\alpha\tau(m)} - f_m = g_{\alpha\tau(n)} - f_n \text{ auf } V_{nm} \cap U_\alpha.$$

Nun kann man h_α auf U_α definieren, durch $h_\alpha|_{U_\alpha\cap V_n} := g_{\alpha\tau(n)} - f_n$. So erhält man ein Element $h = (h_\alpha) \in C^0(\mathscr{U},G)$, und auf $U_{\alpha\beta} \cap V_n$ gilt:

$$h_\beta - h_\alpha = (g_{\beta\tau(n)} - f_n) - (g_{\alpha\tau(n)} - f_n) = g_{\beta\tau(n)} + g_{\tau(n)\alpha} = g_{\beta\alpha}.$$

Das bedeutet, dass $g = \delta(-h)$ ist. ∎

Man kann also $H^1(\mathscr{U}, G)$ als Untergruppe von $H^1(\mathscr{V}, G)$ auffassen. Bildet man nun die Vereinigung aller Cohomologiegruppen $H^1(\mathscr{U}, G)$ (über alle Überdeckungen $\mathscr{U}$), so erhält man die Cohomologiegruppe $H^1(X, G)$, die *1. Cohomologiegruppe von X mit Werten in G*.

Leider funktioniert diese Konstruktion nicht mehr für höheres q. Man behilft sich dann mit der Konstruktion des *induktiven Limes*. Zwei Cohomologieklassen $\xi \in H^q(\mathscr{U}, G)$ und $\eta \in H^q(\mathscr{V}, G)$ heißen äquivalent, falls es eine gemeinsame Verfeinerung $\mathscr{W}$ von $\mathscr{U}$ und $\mathscr{V}$ (mit Verfeinerungsabbildungen τ und σ) gibt, so dass gilt:

$$\tau^*(\xi) = \sigma^*(\eta) \quad \text{(in } H^q(\mathscr{W}, G)).$$

Aus den Äquivalenzklassen bildet man die Cohomologiegruppe

$$H^q(X, G) = \lim_{\rightarrow} H^q(\mathscr{U}, G).$$

Diese Konstruktion (die auch schon von der Definition von Funktionskeimen her bekannt ist) ist nicht so kompliziert, wie es aussieht. Man nennt eine Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)$ *azyklisch*, falls $H^q(U_\alpha, G) = 0$ ist, für alle α. Solche azyklischen Überdeckungen kann man – wenn X eine Mannigfaltigkeit ist – immer finden. Allerdings ist das nicht trivial. Nun gilt der berühmte Satz von Leray: Ist $\mathscr{U}$ azyklisch, so ist $H^q(\mathscr{U}, G) \cong H^q(X, G)$.

Es ist unmöglich, hier eine komplette Cohomologie-Theorie zu entwickeln. Ein Aspekt soll aber noch erwähnt werden:

Sei $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann erhält man induzierte Abbildungen $F^* : H^q(Y) \to H^q(X)$ wie folgt: Ist $\mathscr{U} = (U_\iota)$ eine offene Überdeckung von Y, so ist $F^{-1}(\mathscr{U}) = (F^{-1}(U_\iota))$ eine offene Überdeckung von X. Man erhält nun Abbildungen $F^q : C^q(\mathscr{U}, G) \to C^q(F^{-1}(\mathscr{U}), G)$ durch

$$(F^q\xi)_I := \xi_I \circ F : F^{-1}(U_I) \to G.$$

Da dies mit dem Corand-Operator δ verträglich ist, werden Abbildungen $F^* : H^q(\mathscr{U}, G) \to H^q(F^{-1}(\mathscr{U}), G)$ induziert, und schließlich geht man noch zum induktiven Limes über.

Ist z.B. $j : M \to X$ die Einbettung einer Untermannigfaltigkeit in X und $x \in H^q(X, G)$, so ist $j^*x \in H^q(M, G)$ die „Einschränkung von x auf M“.