Anhang E - Hilberträume

Definition.
Sei E ein komplexer Vektorraum. Eine *hermitesche Form* auf E ist eine Abbildung $h : E \times E \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $h(x + x', y) = h(x, y) + h(x', y)$ für alle $x, x', y \in E$.
2. $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x, y \in E$.
3. $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$ für $x, y \in E$.

Es ist dann $h(x, \alpha y) = \overline{\alpha} h(x, y)$, und $h(x, x)$ reell für alle $x \in E$.

h heißt ein *(hermitesches) Skalarprodukt*, falls zusätzlich gilt:

$$h(x, x) \geq 0 \text{ für alle } x, \text{ und } h(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

Ist E mit einem Skalarprodukt h versehen, so nennt man E einen *Prä-Hilbertraum*. An Stelle von $h(x, y)$ schreibt man häufig auch $<x\,,\,y>$.

Beispiele.

1. Es sei ℓ^2 der Raum aller unendlichen komplexen Zahlenfolgen $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ mit $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$, mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$<\mathbf{z}\,,\,\mathbf{w}> := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{w}_k\,.$$

   Weil $|z_k \overline{w}_k| \leq \frac{1}{2}(|z_k|^2 + |w_k|^2)$ ist, wird so ein Prä-Hilbertraum definiert.

2. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrierbar*, falls $f|_Q$ für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ (Lebesgue-)integrierbar ist. Die Funktion f heißt *quadrat-integrabel*, falls f lokal integrierbar und $|f|$ integrierbar ist. Der Raum der quadrat-integrablen Funktionen sei mit $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Entsprechend definiert man $\mathscr{L}^2(G)$ für Gebiete $G \subset \mathbb{R}^n$.

   Für $f, g \in \mathscr{L}^2(G)$ sei

$$<f\,,\,g> := \int f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} \quad \text{ und } \quad \|f\|_2 := \sqrt{< f, f >}\,.$$

   Weiter sei $\mathscr{N} \subset \mathscr{L}^2(G)$ der Unterraum aller Funktionen $f \in \mathscr{L}^2(G)$ mit $\|f\|_2 = 0$. Dann ist $L^2(G) := \mathscr{L}^2(G)/\mathscr{N}$ ein Prä-Hilbertraum.

Sei wieder E ein beliebiger Prä-Hilbertraum. Die Norm auf E wird wie üblich erklärt, dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|<x\,,\,y>|^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Zwei Elemente $x, y \in E$ werden *orthogonal* genannt, falls $<x\,,\,y> = 0$ ist. Ist $<x\,,\,y> = 0$, so gilt der **Satz des Pythagoras**:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Sind $x, y \in E$ beliebig, so gilt die **Parallelogramm-Regel**:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Definition.
Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger Prähilbertraum.

Der $\mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt, aber auch die Räume ℓ^2 und $L^2(G)$ sind Hilberträume. Jeder abgeschlossene Untervektorraum eines Hilbertraumes ist wieder ein Hilbertraum. Jeder Prä-Hilbertraum E kann zu einem Hilbertraum $\widehat{E}$ vervollständigt werden, so dass E dicht in $\widehat{E}$ liegt. Das kartesische Produkt zweier Hilberträume ist wieder ein Hilbertraum. Außerdem gilt:

1.1 Satz. *Sei E ein Hilbertraum, $U \subset E$ ein beliebiger linearer Unterraum. Dann ist das orthogonale Komplement*

$$U^\perp = \{x \in E \,:\, <x\,,\,y> = 0 \text{ für alle } y \in U\}$$

ein abgeschlossener Unterraum.

Beweis: Offensichtlich ist $U^\perp$ ein linearer Unterraum. Ist (x_n) eine Folge in $U^\perp$, die in E gegen ein x konvergiert, so konvergiert auch $<x_n\,,\,y>$ gegen $<x\,,\,y>$, für jedes $y \in U$. Da aber $<x_n\,,\,y> = 0$ für alle n ist, muss auch $<x\,,\,y> = 0$ sein. Also liegt y in $U^\perp$. ∎

1.2 Projektionssatz. *Sei E ein Hilbertraum und $U \subset E$ ein nicht-trivialer abgeschlossener Unterraum. Dann gilt:*

1. $\forall\, x \in E\ \exists !\, y = p_U(x) \in U$, *so dass gilt:*

   (a) $\|x - y\| \le \|x - y'\|$ *für alle* $y' \in U$.

   (b) $(x - y) \perp U$.

   Die Abbildung $p_U : E \to U$ ist linear und stetig.

2. $\mathrm{Ker}(p_U) = U^\perp$ *ist abgeschlossen.*

3. *$U \cap U^\perp = \{0\}$, $U + U^\perp = E$ und $U^{\perp\perp} = U$.*

4. *Die Abbildung $U \times U^\perp \to E$ mit $(x, y) \mapsto x + y$ ist ein Homöomorphismus.*

BEWEIS: Für $x, y \in E$ sei $d(x, y) := \|x - y\|$. Sei nun x fest und

$$\alpha := d(x, U) := \inf\{d(x, y) \,:\, y \in U\}.$$

Dann gibt es eine Folge (y_n) in U mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \alpha$.

Behauptung: (y_n) ist eine Cauchyfolge in E.

Beweis dafür: Es ist

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x) - (y_n - x)\|^2 \\ &= 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - 4\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2. \end{aligned}$$

Weil y_n und y_m in U liegen, ist $\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \ge \alpha^2$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0, so dass $\|x - y_n\|^2 \le \alpha^2 + \varepsilon$ für $n \ge n_0$ ist. Für $n, m \ge n_0$ folgt dann

$$\|y_m - y_n\|^2 \le 4(\alpha^2 + \varepsilon) - 4\alpha^2 = 4\varepsilon.$$

Also konvergiert (y_n) gegen ein Element $y \in E$. Weil alle y_n in U liegen und U abgeschlossen in E ist, liegt auch y in E. Wenn es zwei Punkte $y, y' \in U$ mit $\|x - y\| = \|x - y'\| = d(x, U)$ gäbe, so wäre

$$\begin{aligned} \|y - y'\|^2 &= \|(y - x) - (y' - x)\|^2 \\ &= 2(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2) - \|2x - (y + y')\|^2 \\ &= 4\alpha^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y + y')\|^2 \;\le\; 0, \end{aligned}$$

also $y = y'$. Bezeichne dann y mit $p_U(x)$.

Sei $z \ne 0$ ein beliebiger Vektor in U. Dann gilt für jedes reelle $\lambda \ne 0$:

$$\|x - (y + \lambda z)\|^2 > \alpha^2$$

und

$$\|x - (y + \lambda z)\|^2 = \|(x - y) - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} {<}x - y\,,\, z{>}.$$

Also ist $f(\lambda) := \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} {<}x - y\,,\, z{>}$ für jedes $\lambda \ne 0$ positiv. Andererseits ist $f(\lambda)$ ein quadratisches Polynom mit einer Nullstelle bei $\lambda = 0$. Dann kann f keine von 0 verschiedene Nullstelle besitzen. Damit auch die zweite Nullstelle von f bei $\lambda = 0$ liegt, muss gelten:

$$\operatorname{Re} {<}x - y\,,\, z{>} = 0.$$

Weil $\|(x-y)-\lambda\mathrm{i}\ z\|^2 = \|x-y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Im}<x-y\,,\,z>$ ist, folgt genauso auch, dass $\mathrm{Im}<x-y\,,\,z> = 0$ ist. Also ist $<x-y\,,\,z> = 0$.

Wenn es irgend ein Element $y' \in U$ gibt, so dass $(x-y') \perp U$ ist, so muss für jedes $z \neq 0$ in U gelten:

$$\|x-(y'+z)\|^2 = \|(x-y')-z\|^2 = \|x-y'\|^2 + \|z\|^2 \geq \|x-y'\|^2.$$

Das bedeutet, dass $y' = p_U(x)$ ist.

Nun seien $x, x' \in E$ mit Projektionen y, y'. Dann ist $(x-y) \perp U$ und $(x'-y') \perp U$, also auch $(\lambda x - \lambda y) \perp U$ und $((x+x')-(y+y')) \perp U$. Daraus folgt, dass p_U linear ist. Außerdem ist

$$\|x\|^2 = \|(x-p_U(x)) + p_U(x)\|^2 = \|x-p_U(x)\|^2 + \|p_U(x)\|^2,$$

also $\|p_U(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Daraus folgt, dass p_U stetig ist.

Offensichtlich ist $\mathrm{Ker}(p_U) = \{x \in E \,:\, p_U(x) = 0\} = \{x \in E \,:\, (x-0) \perp U\} = U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$. Ist $x \in E$, so ist $x = p_U(x) + (x - p_U(x))$. Also ist $E = U \oplus U^\perp$.

Die Abbildung $\varphi : U \times U^\perp \to E$ mit $\varphi(x,y) := x + y$ ist offensichtlich stetig. Sie ist auch bijektiv, und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1}(z) = (p_U(z), p_{U^\perp}(z))$ ist ebenfalls stetig.

Es ist klar, dass $U \subset U^{\perp\perp}$ ist. Ist umgekehrt $x \in U^{\perp\perp}$, so ist $x - p_U(x) \in U^\perp$ und daher $<x\,,\,x-p_U(x)>$. Da auch $<p_U(x)\,,\,x-p_U(x)> = 0$ ist, muss $\|x-p_U(x)\|^2 = 0$ und damit $x = p_U(x)$ sein. Also ist $U = U^{\perp\perp}$.

Dass $U^\perp$ abgeschlossen ist, wissen wir schon. ∎

1.3 Folgerung. *Sei E ein Hilbertraum.*

1. *Ist $a \in E$, so ist $\lambda_a(x) := <x\,,\,a>$ eine stetige Linearform auf E.*

2. *Ist H der Kern einer Linearform $\lambda \neq 0$ auf E und $a \notin H$, so ist $E = \mathbb{C}a \oplus H$. Ist H auch Kern einer anderen Linearform μ, so gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{C}$, so dass $\mu = c \cdot \lambda$ ist. Dabei brauchen λ und μ nicht stetig zu sein.*

3. *(„Darstellungssatz von Riesz") Ist λ eine beliebige stetige Linearform auf E, so gibt es ein (eindeutig bestimmtes) $a \in E$, so dass $\lambda = \lambda_a$ ist.*

Beweis: 1) Nach Cauchy-Schwarz ist $|\lambda_a(x)| \leq \|a\| \cdot \|x\|$, also λ_a stetig.

2) Es gibt genau dann ein $a \notin H$, wenn $\lambda \neq 0$ ist. In diesem Falle sei $\alpha := \lambda(a) \neq 0$. Offensichtlich ist $\mathbb{C}a \cap H = \{0\}$, und wenn $x \in E$ ist, dann ist $\lambda(x - \frac{\lambda(x)}{\alpha}\,a) = 0$, also

$$x = y + \frac{\lambda(x)}{\alpha}\,a, \text{ mit einem Vektor } y \in H.$$

Also ist $E = \mathbb{C}a \oplus H$.

Sei μ eine weitere Linearform mit $\mathrm{Ker}(\mu) = H$. Dann ist auch $\beta := \mu(a) \neq 0$. Wir setzen $c := \beta/\alpha$. Dann ist $\mu - c \cdot \lambda$ eine Linearform auf E, die auf H verschwindet. Zusätzlich ist auch $(\mu - c \cdot \lambda)(a) = \beta - c \cdot \alpha = 0$ und damit $\mu - c \cdot \lambda = 0$ auf E.

3) Sei $\lambda \neq 0$ eine beliebige stetige Linearform auf E, $H = \mathrm{Ker}(\lambda)$ und $a_0 \neq 0$ ein Element von $H^\perp$. Dann ist auch $\lambda_0(x) = <x\,,\,a_0>$ eine stetige Linearform. Der Unterraum H ist in $\mathrm{Ker}(\lambda_0)$ enthalten. Wenn es ein $b \in \mathrm{Ker}(\lambda_0)$ gäbe, das nicht in H liegt, dann wäre $E = \mathbb{C}b \oplus H$ und $\lambda_0 = 0$. Das wäre ein Widerspruch, weil $\lambda_0(a_0) \neq 0$ ist. Also ist sogar $H = \mathrm{Ker}(\lambda_0)$, und es gibt ein $c \in \mathbb{C}$, so dass $\lambda = c \cdot \lambda_0$ ist. Das bedeutet: $\lambda = \lambda_a$ mit $a = \overline{c} \cdot a_0$. ■

Durch $a \mapsto \lambda_a$ wird ein antilinearer Isomorphismus zwischen E und dem Dualraum E^* der stetigen Linearformen auf E hergestellt.

1.4 Satz. *Sei E ein Hilbertraum und $B \subset E$ eine Teilmenge. Der von B erzeugte Unterraum U liegt genau dann dicht in E, wenn es kein $a \neq 0$ in E gibt, das auf jedem Vektor $x \in B$ senkrecht steht.*

BEWEIS: 1) Sei U dicht in E. Wenn $<a\,,\,x> = 0$ für alle $x \in B$ gilt, dann auch für alle $x \in U$. Es muss aber eine Folge (x_n) in U geben, die gegen a konvergiert. Daraus folgt, dass $<a\,,\,a> = 0$ ist, also $a = 0$.

2) Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt. Wir nehmen an, U sei nicht dicht in E. Dann ist $\overline{U}$ ein echter abgeschlossener Unterraum von E und $\overline{U}^\perp \neq \{0\}$. Aber jeder Vektor $\neq 0$ in $\overline{U}^\perp$ steht auf B senkrecht, und das kann nicht sein. ■

Definition.
Ein Hilbertraum E heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Definition.
Eine Folge (a_n) in einem (Prä-)Hilbertraum heißt ein *Orthogonalsystem*, falls $<a_n\,,\,a_m> = 0$ für alle $n \neq m$ ist. Man nennt (a_n) ein *Orthonormalsystem*, falls außerdem $\|a_n\| = 1$ für alle n gilt.

Beispiel.

$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi n \mathrm{i}\, t}$ in $\mathscr{C}^0([-1,1])$, mit $<f\,,\,g> := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

1.5 Satz. *Sei E ein Hilbertraum und (a_n) ein ON-System in E. Außerdem sei sei $V \subset E$ der abgeschlossene Unterraum, der von den a_n erzeugt wird. Dann gilt für alle $x \in E$:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} |<x\,,\,a_n>|$ konvergiert gegen $= \|p_V(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung).*

2. *$\sum_{n=1}^{\infty} <x\,,\,a_n>\overline{<y\,,\,a_n>} = <p_V(x)\,,\,p_V(y)>$.*

3. *$\sum_{n=1}^{\infty} <x\,,\,a_n> \cdot a_n$ konvergiert gegen $p_V(x)$.*

Umgekehrt gibt es zu jeder Zahlenfolge (λ_n), so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ konvergiert, genau ein $y \in V$, so dass $<y\,,\,a_n> = \lambda_n$ für alle n gilt.

Hier ohne Beweis (vgl Dieudonne).

Ist $V = E$, so nennt man (a_n) *total* (d.h. die Menge der endlichen Linearkombinationen bildet einen dichten Teilraum von E) oder eine *Orthonormalbasis*. Dann wird aus der Besselschen Ungleichung die Parsevalsche Gleichung.

Ein ON-System in einem Hilbertraum E ist genau dann total, wenn gilt:

$$\text{Ist } <x\,,\,a_n> = 0 \text{ für alle } n, \text{ so folgt: } x = 0.$$

Man kann zeigen: In jedem separablen Hilbertraum existiert eine ON-Basis.

Es sei fortan H ein fester separabler Hilbertraum (über $\mathbb{C}$).

Ein *Operator* auf H ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T : D(T) \to H$, mit einem (nicht notwendig abgeschlossenen) Unterraum $D(T) \subset H$. Der Operator T heißt *stetig*, falls es eine reelle Zahl $c > 0$ gibt, so dass $\|T(x)\| \leq c \cdot \|x\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt.

Definition.
Ein Operator T auf H heißt *beschränkt*, falls T stetig und $D(T) = H$ ist. Andernfalls heißt T *unbeschränkt*.

Die Menge der beschränkten Operatoren auf H wird mit $\mathscr{L}(H)$ bezeichnet.

Durch

$$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

wird auf $\mathscr{L}(H)$ eine Norm erklärt. Damit wird $\mathscr{L}(H)$ zu einer vollständigen normierten Algebra.

Ist ein unbeschränkter Operator T stetig, so kann er auf $U := \overline{D(T)}$ linear und stetig fortgesetzt werden. Da es aber zu U in H ein orthogonales Komplement gibt, kann T nun sogar (trivial) auf ganz H stetig und linear fortgesetzt werden. Deshalb interessieren unbeschränkte lineare Operatoren in erster Linie dann, wenn sie nicht stetig sind.

Ein Operator T heißt *dicht definiert*, falls $D(T)$ dicht in H ist. Das gilt vor allem für beschränkte Operatoren, es gibt aber auch unbeschränkte dicht definierte Operatoren.

1.6 Satz. *Sei T ein dicht definierter Operator. Dann ist*

$$D^* := \{y \in H \,:\, x \mapsto <Tx\,,\,y> \textit{ ist stetig auf } D(T)\,\}$$

ein Unterraum von H, und es gibt einen Operator $T^* : D^* \to H$, so dass gilt:

$$<Tx\,,\,y> = <x\,,\,T^*y>, \textit{ für alle } x \in D(T),\, y \in D^*.$$

Beweis: Definitionsgemäß ist für jedes $y \in D^*$ die Linearform $\lambda_y(x) := <Tx\,,\,y>$ stetig auf $D(T)$. Sie lässt sich dann auf $\overline{D(T)} = H$ stetig und linear fortsetzen. Es gibt also nach Folgerung 4.2(3) einen eindeutig bestimmten Vektor T^*y, so dass $\lambda_y(x) = <x\,,\,T^*y>$ ist. Offensichtlich ist D^* ein Unterraum und T^* linear. ■

Bemerkung. Man nennt T^* den zu T *adjungierten Operator*. Er ist offensichtlich eindeutig bestimmt. Ist T ein beschränkter Operator, so ist $D(T) = H$ und $D^* = H$.

Definition.
Ein Operator T heißt *symmetrisch*, falls für alle $x, y \in D(T)$ gilt:

$$<Tx\,,\,y> = <x\,,\,Ty>.$$

Ein dicht definierter Operator heißt *selbstadjungiert*, wenn $T^* = T$ ist.

Bei einem symmetrischen Operator ist $D(T) \subset D^*$ und T^* eine Fortsetzung von T. Ist T sogar selbstadjungiert, so ist $D(T) = D^*$.

Ist T beschränkt und selbstadjungiert, so ist $h(x, y) := <Tx\,,\,y> = \overline{<Ty\,,\,x>}$ eine hermitesche Form auf H.

Definition.
Ein beschränkter Operator $P \in \mathscr{L}(H)$ heißt *orthogonaler Projektor*, falls gilt:

1. $P^2 := P \circ P = P$.
2. $\|P\| = 1$.
3. Für alle $x \in P(H)^\perp$ ist $P(x) = 0$.

Am Anfang wurde gezeigt, dass es zu jedem abgeschlossenen Unterraum $U \subset H$ einen orthogonalen Projektor P_U mit $P_U(H) = U$ gibt. Umgekehrt ist jeder orthogonale Projektor von dieser Gestalt.

Ist P ein orthogonaler Projektor auf einen abgeschlossenen Unterraum U, so kann man Elemente $x, y \in H$ stets in der Form $x = x' + x''$ und $y = y' + y''$ zerlegen, mit $x', y' \in U$ und $x'', y'' \in U^\perp$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} <x\,,\,Py> &= <x\,,\,y'> \\ &= <x'\,,\,y'> \text{ (weil } x'' \perp y' \text{ ist)} \\ &= <Px\,,\,y> \text{ (weil } Px \perp y'' \text{ ist).} \end{aligned}$$

Also ist P selbstadjungiert! Umgekehrt kann man zeigen, dass jeder selbstadjungierte beschränkte Operator T mit $T^2 = T$ ein orthogonaler Projektor ist.

Definition.
Ein beschränkter Operator $U \in \mathscr{L}(H)$ heißt *isometrisch*, falls $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in H$ gilt. Ist U außerdem surjektiv (und damit bijektiv), so heißt U *unitär*.

Ist U unitär, so ist

$$<x\,,\,U^*Uy> = <Ux\,,\,Uy> = <x\,,\,y> \text{ und } <Ux\,,\,UU^*y> = <x\,,\,U^*y> = <Ux\,,\,y>.$$

Also ist $UU^* = U^*U = \mathrm{id}_H$ und $U^* = U^{-1}$.

Sind U und V unitäre Operatoren, so ist auch $U \circ V$ unitär. Also bildet die Menge $\mathscr{U}(H)$ aller unitären Operatoren auf H ein Gruppe.

Definition.
Sei G eine Liegruppe. Eine *unitäre Darstellung* von G auf H ist ein Gruppenhomomorphismus $\varrho : G \to \mathscr{U}(H)$ mit folgender Eigenschaft:

Für alle $x \in H$ ist die durch $g \mapsto \varrho(g)x$ definierte Abbildung $G \to H$ stetig.

Die Darstellung heißt *treu*, falls ϱ injektiv ist.

Ist $U_0 \in \mathscr{U}(H)$, so versteht man unter einer *fundamentalen Umgebung* von U_0 eine Menge der Gestalt

$$W(U_0; x_1, \ldots, x_k; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) := \{U \in \mathscr{U}(H) \,:\, \|U_0x_i - Ux_i\| < \varepsilon_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}.$$

Eine Menge $B \subset \mathscr{U}(H)$ wird *offen* genannt, wenn es zu jedem Element $U_0 \in B$ eine fundamentale Umgebung W von U_0 gibt, die ganz in B liegt. Auf diese Weise erhält $\mathscr{U}(H)$ eine Topologie, so dass jede Darstellung $\varrho : G \to \mathscr{U}(H)$ stetig ist.

Beispiel.

Sei $H := L^2(\mathbb{R}^3)$. Dann wird durch $\varrho(A)f := f \circ A^{-1}$ eine Darstellung von $SO(3)$ auf H definiert (die „Links-Darstellung“). Man kann zeigen, dass diese Darstellung unitär und stetig ist.

Definition.
Sei $\varrho : G \to \mathscr{U}(H)$ eine unitäre Darstellung.

1. Ein abgeschlossener Unterraum $V \subset H$ heißt *invariant*, wenn $\varrho(g)(V) \subset V$ für alle $g \in G$ gilt.
2. Ist $V \subset H$ invariant, so definiert man $\varrho_V : G \to \mathscr{U}(V)$ durch $\varrho_V(g) := \varrho(g)|_V$.
3. Die Darstellung ϱ heißt *irreduzibel*, wenn $\{0\}$ und H die einzigen invarianten Unterräume von H sind.

Sei $\varrho : G \to \mathscr{U}(H)$ eine unitäre Darstellung und $V \subset H$ ein invarianter Unterraum. Dann ist auch $V^\perp$ invariant. Ist nämlich $x \in V^\perp$, so gilt für alle $y \in V$:

$$<\varrho(g)x\,,\, y> = <x\,,\, \varrho(g^{-1})y> = 0.$$

Deshalb zerfällt ϱ in die direkte Summe der Darstellungen ϱ_V und $\varrho_{V^\perp}$.

1.7 Satz von Peter und Weyl. *Sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum. Ist G eine kompakte Liegruppe und $\varrho : G \to \mathscr{U}(H)$ eine unitäre Darstellung, so gibt es eine Folge von endlich-dimensionalen invarianten Unterräumen $H_i \subset H$, $i \in \mathbb{N}$, so dass gilt:*

1. *Alle Darstellungen ϱ_{H_i} sind irreduzibel.*
2. *Es ist $H_i \perp H_j$ für $i \neq j$*
3. *Es ist $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i$ (Hilbertsche Summe).*

Der Beweis ist etwas langwieriger (vgl. [Brö-tDie]). Die Hilbertsche Summe der Räume H_i besteht aus den Elementen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_i H_i$, für die $\sum_i \|x_i\|^2 < \infty$ ist. Man darf dies nicht mit der in Anhang A beschriebenen algebraischen direkten Summe verwechseln.

Zwei unitäre Darstellungen $\varrho : G \to \mathscr{U}(H)$ und $\mu : G \to \mathscr{U}(H)$ heißen *äquivalent*, falls es einen beschränkten invertierbaren Operator T auf H gibt, so dass gilt:

$$T \circ \varrho(g) = \mu(g) \circ T \text{ für alle } g \in G.$$

Dabei kann T unitär gewählt werden. Auf den Begriff des „invertierbaren Operators“ werden wir gleich eingehen.

Die *Bildmenge* eines Operators $T : D(T) \to H$ ist die Menge

$$R(T) := \{Tx \,:\, x \in D(T)\} \text{ („range“)}.$$

Manchmal spricht man auch vom *Wertebereich*. Ist T injektiv, also $\text{Ker}(T) = \{0\}$, so definiert man den *inversen Operator* T^{-1} durch $D(T^{-1}) := R(T)$ und $T^{-1}y := x$, falls $Tx = y$ ist. Man nennt T dann *invertierbar*.

1.8 Satz vom inversen Operator. *Sei $T : H \to H$ ein bijektiver beschränkter Operator. Dann ist auch $T^{-1} : H \to H$ ein beschränkter Operator.*

Der Beweis benutzt das „Prinzip der offenen Abbildung“ („open mapping theorem“): Ist T ein beschränkter Operator und $R(T) = H$, so ist T eine offene Abbildung (vgl. [Re-Si]).

1.9 Folgerung („Closed graph theorem“). *Ein auf ganz H definierter Operator T ist genau dann beschränkt, wenn der Graph von T in $H \times H$ abgeschlossen ist.*

Beweis: a) Ist T beschränkt und (x_n, Tx_n) eine Folge im Graphen $\Gamma_T := \{(x, Tx) \,:\, x \in H\}$, die gegen einen Punkt $(x, y) \in H \times H$ konvergiert, so muss Tx_n gegen Tx konvergieren, also $(x, y) = (x, Tx)$ in Γ_T liegen.

b) Sei nun der Graph von T abgeschlossen. Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \Gamma_T \to H$ $(i = 1, 2)$ sind stetig und linear. Weil Γ_T wieder ein Hilbertraum und $\mathrm{pr}_1 : (x, Tx) \mapsto x$ bijektiv ist, gibt es einen beschränkten inversen Operator $(\mathrm{pr}_1)^{-1} : H \to \Gamma_T$. Also ist $T = \mathrm{pr}_2 \circ (\mathrm{pr}_1)^{-1} : H \to H$ stetig und damit beschränkt. ■

Ist T ein unbeschränkter Operator, so ist der Graph von T die Menge

$$\Gamma_T = \{(x, Tx) \,:\, x \in D(T)\}.$$

Im allgemeinen ist der Graph dann nicht abgeschlossen. Man nennt den Operator T *abgeschlossen*, wenn Γ_T in $H \times H$ abgeschlossen (und damit ein Hilbertraum) ist. Ist $D(T)$ abgeschlossen, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist. I.a. braucht der Definitionsbereich eines abgeschlossenen Operators aber nicht abgeschlossen zu sein (das ist so ähnlich wie bei der Tangensfunktion, deren Definitionsbereich $(-\pi/2, \pi/2)$ offen, deren Graph aber abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist).

1.10 Satz. *Ist T dicht definiert, so ist T^* abgeschlossen. Insbesondere ist jeder selbstadjungierte Operator abgeschlossen.*

Beweis: Der Raum $H \times H$ wird mit dem Skalarprodukt

$$<(a, b)\,,\,(c, d)> := <a\,,\,c> + <b\,,\,d>$$

zum Hilbertraum. Die Abbildung $J : H \times H \to H \times H$ mit $J(a, b) := (-b, a)$ ist stetig und linear. Außerdem ist $J^2 = -\mathrm{id}$, also $J^2(V) = V$ für jeden Unterraum $V \subset H \times H$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
(y, z) \in \Gamma_{T^*} &\iff y \in D(T^*) \text{ und } z = T^*y \\
&\iff <Tx\,,\,y> = <x\,,\,z> \text{ für alle } x \in D(T) \\
&\iff <(-Tx, x)\,,\,(y, z)> = 0 \text{ für alle } x \in D(T) \\
&\iff (y, z) \in J(\Gamma_T)^{\perp}.
\end{aligned}$$

Weil $J(\Gamma_T)^{\perp}$ in $H \times H$ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. ■

1.11 Satz. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. T ist genau dann invertierbar, wenn $R(T)$ dicht in H ist.*

Beweis: a) Sei T injektiv und $y \in R(T)^{\perp}$. Die Abbildung $x \mapsto <Tx\,,\,y>$ ist stetig auf $D(T)$, also ist $y \in D^* = D(T)$. Für alle $x \in D(T)$ ist außerdem $<x\,,\,Ty> = <Tx\,,\,y> = 0$. Weil $D(T)$ dicht in H ist, ist $Ty = 0$ und damit $y = 0$. Das bedeutet, dass $R(T)$ dicht ist.

b) Ist umgekehrt $R(T)$ dicht in H und $Tx = 0$, so ist $<x\,,\,Ty> = <Tx\,,\,y> = 0$ für alle $y \in D(T)$, also $x \in R(T)^{\perp}$ und damit $x = 0$. ■

Definition.
Eine Schar $\{B(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ von beschränkten Operatoren auf H heißt eine *einparametrige Gruppe*, wenn gilt:

$$B(0) = \mathrm{id}_H \text{ und } B(s)B(t) = B(s+t) \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Die einparametrige Gruppe heißt *stark stetig*, wenn für jedes $x \in H$ die Funktion $t \mapsto B(t)x$ stetig ist.

1.12 Satz von Stone. *Sei $\{U(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige einparametrige Gruppe von unitären Operatoren auf H. Dann ist*

$$D := \{x \in H \,:\, \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x) \text{ existiert in } H\}$$

ein dichter Teilraum von H, und durch

$$\mathrm{i}\, Ax := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x) \text{ für } x \in D$$

wird ein selbstadjungierter Operator $A : D \to H$ definiert.

Zum Beweis vgl. [Weid]. Man nennt A den *infinitesimalen Operator* der einparametrigen Gruppe $\{U(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ und schreibt:

$$U(t) = e^{\mathrm{i}\, tA}\,.$$

Ist A beschränkt, so kann man $e^{\mathrm{i}\, tA}$ über die Exponentialreihe definieren. Ist A unbeschränkt, dann braucht man Spektraltheorie dafür.

Die Spektraltheorie ersetzt die Eigenwerttheorie in unendlich-dimensionalen Räumen.

Definition.
Sei $T : D(T) \to H$ ein Operator. Eine komplexe Zahl c heißt *Eigenwert* von T, wenn es ein $x \in D(T)$ mit $x \neq 0$ gibt, so dass $Tx = c \cdot x$ ist. Den Vektor x nennt man *Eigenvektor* und $\mathrm{Ker}(T - c \cdot \mathrm{id}_H)$ *Eigenraum* zu c.

Offensichtlich ist c genau dann Eigenwert von T, wenn $T - c \cdot \mathrm{id}_H$ nicht invertierbar ist. Wie im Reellen zeigt man:

1. Ist T selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von T reell.
2. Ist T unitär, so gilt $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwertλ von T.
3. Ist T unitär oder selbstadjungiert und sind x_1, x_2 zwei Eigenvektoren zu zwei verschiedenen Eigenwerten, so ist $<x_1\,,\, x_2> = 0$.

Definition.

Sei T ein beschränkter oder ein abgeschlossener unbeschränkter Operator. Ein Wert $c \in \mathbb{C}$ heißt *regulärer Punkt* von T, falls $T - c \cdot \mathrm{id} : D(T) \to H$ bijektiv und die sog. *Resolvente* $R_c T := (T - c \cdot \mathrm{id})^{-1}$ auf H stetig ist. Die Menge

$$\varrho(T) := \{c \in \mathbb{C} \,:\, c \text{ ist regulärer Punkt von } T\}$$

nennt man die *Resolventenmenge* von T.

Unter dem *Spektrum* von T versteht man die Menge $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$.

Bemerkungen.

1. Ist $T - c \cdot \mathrm{id}$ injektiv, die Bildmenge $R := R(T - c \cdot \mathrm{id})$ dicht in H und $R_c T$ stetig auf R, so ist c bereits ein regulärer Punkt. Denn der Graph von $T - c \cdot \mathrm{id}$ ist abgeschlossen, also auch der Graph von $R_c T$ (den man durch Vertauschung von x und y erhält). Weil $R_c T$ außerdem auf $D(R_c T) = R$ stetig ist, muss R abgeschlossen, also $= H$ sein.

2. Die Menge $\sigma_p(T)$ aller Eigenwerte von T bezeichnet man als das *Punktspektrum* von T. Ist $c \in \sigma_p(T)$, so ist $T - c \cdot \mathrm{id}$ nicht injektiv, also $c \in \sigma(T)$.

3. Ist c ein Element des Spektrums, aber kein Eigenwert, so gibt es zwei Möglichkeiten:

   (a) $T - c \cdot \mathrm{id}$ ist injektiv, $R = D(R_c T)$ ist dicht in H und $R_c T$ ist auf R nicht stetig. Dann gehört c zum *kontinuierlichen Spektrum* von T,

   $$\sigma_k(T) := \{c \in \mathbb{C} \,:\, T - c \cdot \mathrm{id} \text{ injektiv, } R_c T \text{ dicht definiert, nicht stetig}\}.$$

   (b) $T - c \cdot \mathrm{id}$ ist injektiv und $R = D(R_c T)$ ist nicht dicht in H. Dann gehört c zum *Restspektrum* von T,

   $$\sigma_r(T) := \{c \in \mathbb{C} \,:\, T - c \cdot \mathrm{id} \text{ injektiv, } R_c T \text{ nicht dicht definiert}\}.$$

   Offensichtlich ist $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_k(T) \cup \sigma_r(T)$.

4. **Achtung!** Die Definition von Resolventenmenge und Spektrum ist bei unbeschränkten Operatoren in der Literatur nicht einheitlich! Auch die an T gestellte Bedingung ist unterschiedlich. Manchmal wird „abgeschlossen“ verlangt, manchmal „dicht definiert“ und manchmal gar nichts.

   So, wie diese Mengen hier definiert wurden, gilt: $\sigma(T)$ ist (in $\mathbb{C}$) abgeschlossen, $\varrho(T)$ offen.

Ist A selbstadjungiert, so ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Ist A unitär, so ist $\sigma(A) \subset S^1$.

Definition.
Sei A ein selbstadjungierter beschränkter Operator. Dann definiert man:

$$A \geq 0 \;:\Longleftrightarrow\; <Ax\,,\,x> \geq 0 \text{ für alle } x \in H.$$

Sind A, B zwei selbstadjungierte beschränkte Operatoren, so definiert man:

$$A \leq B \;:\Longleftrightarrow\; B - A \geq 0.$$

1.13 Satz. *Sind P, Q zwei orthogonale Projektoren mit $P \leq Q$, so ist $R(P) \subset R(Q)$ und $P \circ Q = Q \circ P = P$.*

BEWEIS: Für einen Projektor P ist $Px = x$ für $x \in R(P)$ und $P(x) = 0$ für $x \in R(P)^\perp$. Zerlegt man ein beliebiges $x \in H$ in $x = x' + x''$ mit $x' \in R(P)$ und $x'' \in R(P)^\perp$, so erhält man:

$$<Px\,,\,x> = <Px'\,,\,x'> = <Px'\,,\,Px'> = \|Px'\|^2 = \|Px\|^2.$$

Ist also $P \leq Q$, so muss auch $\|Px\| \leq \|Qx\|$ für alle $x \in H$ gelten.

Ist $x \in R(P)$, so ist $P(x) = x = Qx + (1 - Q)x$, wobei $<Qx\,,\,(1-Q)x> = <Qx\,,\,x> - <Qx\,,\,Qx> = <x\,,\,Qx> - <x\,,\,Q^2x> = 0$ ist, also

$$\|Px\|^2 = \|x\|^2 = \|Qx\|^2 + \|(1-Q)x\|^2.$$

Wäre $\|(1-Q)x\| > 0$, so wäre $\|Px\| > \|Qx\|$, was nicht sein kann. Daher muss $\|(1-Q)x\| = 0$ sein, also $Qx = x$, d.h. $x \in R(Q)$.

Für $x \in H$ ist $P(x) \in R(Q)$, also $Q(P(x)) = P(x)$.

Zerlegt man x in der Form $x = x' + x'' + x_0$ mit $x' = Py \in R(P)$, $x'' \in R(Q) \cap R(P)^\perp$ und $x_0 \in R(Q)^\perp \subset R(P)^\perp$, so ist $Px = Px_1$ und $PQx = PQPy + PQx'' = Px_1 + Px'' = Px$. ∎

Definition.
Eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathscr{L}(H)$, $\lambda \mapsto E_\lambda$, heißt *Spektralschar*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. E_λ ist orthogonaler Projektor, für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ (also insbesondere beschränkt und selbstadjungiert).
2. $E_\lambda \leq E_\mu$ für $\lambda \leq \mu$ (also E_λ und E_μ vertauschbar).
3. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$ und $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = \mathrm{id}_H$ (im Sinne der starken Stetigkeit).
4. Für alle λ ist $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} E_{\lambda+\varepsilon} = E_\lambda$ (im obigen Sinne).

Der *Träger* der Spektralschar ist die abgeschlossene Hülle der Menge $\{\lambda \in \mathbb{R} : E_\lambda \neq 0 \text{ und } \neq \mathrm{id}_H\}$.

Die Funktion $g(\lambda) := <E_\lambda x\,,\,x>$ ist monoton wachsend. Daher ist für stetige Funktionen f das „Stieltjes-Integral“ $\int_a^b f(x)dg$ erklärt (als Grenzwert von Riemannschen Summen der Gestalt $\sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu)(g(x_\nu) - g(x_{\nu-1}))$).

1.14 Spektralsatz. *Sei* (E_λ) *eine Spektralschar mit kompaktem Träger* $[a,b]$ *und* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Operator* A_f *mit*

$$<A_f x\,,\,x> = \int_a^b f(\lambda)\,d<E_\lambda x\,,\,x>.$$

Zum Beweis vgl. [Hir-Schar].

Ist A ein beliebiger selbstadjungierter Operator, so gibt es eine Zerlegung $A = A^+ - A^-$, mit $A^+ \geq 0$ und $A^- \geq 0$. Man kann dann eine Spektralschar (E_λ) konstruieren, so dass E_λ die Projektion auf $\mathrm{Ker}(A_\lambda^+)$ ist, mit $A_\lambda := A - \lambda \cdot \mathrm{id}_H$. Ist f eine stetige Funktion, so ist $f(A)$ der Operator A_f.

Anhang F - Gruppen

Definition.

Eine *Gruppe* ist eine Menge G, zusammen mit einer inneren Verknüpfung $(a, b) \mapsto a \cdot b$, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in G$ (*Assoziativ-Gesetz*).
2. Es gibt ein *neutrales Element* $e \in G$, so dass $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$ gilt.
3. Zu jedem $a \in G$ existiert ein *Inverses* $a^{-1} \in G$ mit $a \cdot a^{-1} = e$.

Wird die Verknüpfung *additiv* geschrieben ($(a, b) \mapsto a + b$), so bezeichnet man das neutrale Element mit 0 und das Inverse zu a mit $-a$.

Die Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*, falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Beispiele.

1. Jeder Körper und jeder Vektorraum bildet mit der Addition eine abelsche Gruppe.

2. Ist V ein k-Vektorraum, so ist $\mathrm{Aut}_k(V) = \{f : V \to V \,:\, f \text{ ist } k\text{-Isomorphismus}\}$ eine Gruppe. Die Menge $\mathrm{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) \,:\, \det(A) \neq 0\}$ der regulären Matrizen bildet eine Gruppe, insbesondere auch $k^\times := k \setminus \{0\} = \mathrm{GL}_1(k)$.

3. Die symmetrische Gruppe S_n ist die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

4. Sei $n \geq 2$ eine feste natürliche Zahl. Zwei ganze Zahlen a, b heißen *kongruent* modulo n (in Zeichen: $a \equiv b \mod n$), falls sie bei Division durch n den gleichen rest lassen, ihre Differenz also durch n teilbar ist. Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bezeichnet man auch als *Restklassen*. Die Restklasse $[a]$ der Zahl $a \in \mathbb{Z}$ besteht aus allen Zahlen $a + n \cdot q$, $q \in \mathbb{Z}$. Die Menge

$$\mathbb{Z}_n := \{[a] \,:\, a \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

bildet mit $[a] + [b] := [a + b]$ eine abelsche Gruppe.

Eine Teilmenge $U \subset G$ einer Gruppe heißt *Untergruppe*, falls gilt:

1. Sind $a, b \in U$, so ist auch $a \cdot b \in U$.
2. Das neutrale Element $e \in G$ liegt schon in U.
3. Ist $a \in U$, so liegt das Inverse a^{-1} von a in G schon in U.

Damit wird U automatisch zu einer Gruppe.

Definition.
Eine Abbildung $f : G \to H$ zwischen zwei Gruppen heißt *(Gruppen-)Homomorphismus*, falls gilt:

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \text{ für alle } a, b \in G.$$

Ist f außerdem bijektiv, so spricht man von einem *Isomorphismus*. Dann schreibt man $G \cong H$.

Ist $f : G \to H$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus.

Beispiel.

Die Menge $U := \{E_n, -E_n\} \subset \mathrm{GL}_n(k)$ stellt eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ dar. Nun sei $f : \mathbb{Z}_2 \to U$ definiert durch $f([a]) := (-1)^a \cdot E_n$. Dann ist $f([0]) = E_n$ und $f([1]) = -E_n$. Ist $a \equiv b \mod 2$, so ist $(-1)^a = (-1)^b$. Also ist f wohldefiniert. Und schließlich ist $f([a] + [b]) = (-1)^{a+b} \cdot E_n = f([a]) \cdot f([b])$. Also ist f ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem ist f offensichtlich bijektiv, also sogar ein Isomorphismus.

Ist ein Homomorphismus $f : G \to H$ injektiv, spricht man von einem *Monomorphismus*. Ist f surjektiv, so spricht man von einem *Epimorphismus*.

Definition.
Ist $f : G \to H$ ein Homomorphismus, so nennt man

$$\mathrm{Ker}(f) := \{a \in G \,:\, f(a) = e_H\}$$

den *Kern* von f.

$\mathrm{Ker}(f)$ ist eine Untergruppe von G, und das *Bild* $f(G)$ ist eine Untergruppe von H.

Eine *Sequenz* von Gruppen ist eine Folge von Gruppenhomomorphismen

$$\ldots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

Die Sequenz heißt *exakt* bei G_n, falls $f_{n-1}(G_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$ ist.

Unter einer *kurzen exakten Sequenz* versteht man eine Sequenz

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow 1\,,$$

die bei K, G und H exakt ist. Dabei steht 1 für die triviale Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht. Die Abbildungen $1 \to K$ und $H \to 1$ sind kanonisch vorgegeben. Eine kurze exakte Sequenz liegt genau dann vor, wenn f injektiv, g surjektiv und $f(K) = \mathrm{Ker}(g)$ ist.

Ein *Automorphismus* der Gruppe G ist ein Isomorphismus von G auf sich. Ein wichtiges Beispiel sind die *inneren Automorphismen* oder *Konjugationen* $\varphi(x) = gxg^{-1}$, mit einem festen Element $g \in G$. Die Elemente x und $\varphi(x)$ nennt man dann zueinander konjugiert.

Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert, durch

$$a \sim b, \text{ wenn es ein } h \in H \text{ mit } b = a \cdot h \text{ gibt.}$$

Das ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation, und die Äquivalenzklassen haben die Gestalt

$$aH = \{ah : h \in H\}.$$

Man spricht von *(Links-)Nebenklassen*. Natürlich gilt: Wenn aH und bH ein Element gemeinsam haben, dann sind sie schon gleich. Die Menge der Nebenklassen wird mit G/H bezeichnet.

Gelegentlich braucht man auch Rechts-Nebenklassen $Ha = \{ha : h \in H\}$. Die Menge dieser Klassen wird dann üblicherweise mit $G\backslash H$ bezeichnet.

2.1 Satz. *Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$aH = Ha$ für alle $a \in G$.*
2. *$aHa^{-1} \subset H$ für alle $a \in G$.*
3. *$aHa^{-1} = H$ für alle $a \in G$.*

Der BEWEIS ist simpel.

Definition.

Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt *Normalteiler* in G, falls eine der obigen äquivalenten Aussagen erfüllt ist, also $aHa^{-1} \subset H$ für alle $a \in G$ ist.

Beispiele.

1. Ist $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\mathrm{Ker}(f)$ ein Normalteiler in G.
2. Ist $f : G \to H$ ein Gruppenepimorphismus und $N \subset G$ ein Normalteiler, so ist auch $f(N) \subset H$ ein Normalteiler.
3. Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $N_G(H) = \{a \in G : aHa^{-1} = H\}$ der *Normalisator* von H in G. Dann ist $N_G(H)$ Untergruppe von G und H Normalteiler in $N_G(H)$. Tatsächlich ist $N_G(H)$ die größte Untergruppe von G, in der H Normalteiler ist.

2.2 Satz. *Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler, $p : G \to G/N$ die kanonische Projektion (mit $p(g) = gN$). Dann gibt es genau eine innere Verknüpfung auf G/N, so dass gilt:*

1. *G/N ist eine Gruppe.*
2. *$p : G \to G/N$ ist ein Homomorphismus.*

Dann ist $(aN) \cdot (bN) = (ab)N$, p surjektiv und $\operatorname{Ker}(p) = N$.

Der BEWEIS findet sich in jedem Algebra-Buch.

Es gibt dann eine kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{p} G/N \longrightarrow 1\,.$$

Die Gruppe G/N nennt man die *Faktorgruppe* von G modulo N, und p nennt man den *kanonischen Epimorphismus*.

Nun gilt:

2.3 Homomorphiesatz. *Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus und $K := \operatorname{Ker}(f)$. Dann wird durch $\widehat{f}(aK) := f(a)$ ein Gruppen-Isomorphismus $\widehat{f} : G/\operatorname{Ker}(f) \to f(G)$ gegeben.*

2.4 Erster Isomorphiesatz. *Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. Dann gilt:*

1. *$HN := \{hn \,:\, h \in H \text{ und } n \in N\}$ ist Untergruppe von G.*
2. *N ist Normalteiler von HN.*
3. *$H \cap N$ ist Normalteiler von H.*
4. *Durch $f(a(H \cap N)) := aN$ wird ein Isomorphismus $f : H/H \cap N \to HN/N$ definiert.*

2.5 Zweiter Isomorphiesatz. *Seien U, V Normalteiler einer Gruppe G, mit $U \subset V$. Dann gilt:*

1. *V/U ist Normalteiler in G/U.*
2. *Durch $f((aV)(U/V)) := aU$ wird ein Isomorphismus $f : (G/V)/(U/V) \to G/U$ definiert.*

Definition.
N und H seien zwei Gruppen und $\sigma : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Dann versteht man unter dem *semidirekten Produkt* $G = N \times_\sigma H$ die Menge $G = N \times H$, mit der Verknüpfung

$$(n,h) \cdot (n',h') := (n \cdot \sigma(h)n', hh').$$

Beispiel.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann nennt man

$$\mathrm{Aff}(V) := V \times_{\mathrm{id}} \mathrm{Aut}(V)$$

die *affine Gruppe* von V. Sie setzt sich aus Translationen und linearen Automorphismen zusammen.

Auf ähnliche Weise kann man auch andere „inhomogene" Gruppen definieren, z. B. die *inhomogene Lorentzgruppe* (oder *Poincaré-Gruppe*).

2.6 Satz. *Sei G eine Gruppe, $N, H \subset G$ zwei Untergruppen. Außerdem sei N Normalteiler, $N \cap H = \{e\}$ und $N \cdot H = G$, sowie $\sigma : H \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert durch $\sigma(h)n = hnh^{-1}$.*

Dann liefert $\varphi(n,h) := nh$ einen Isomorphismus $\varphi : N \times_\sigma H \to G$.

BEWEIS: Es ist $\varphi((n,h)\cdot(n',h')) = \varphi(nhn'h^{-1}, hh') = nhn'h' = \varphi(n,h)\cdot\varphi(n',h')$. Ist $\varphi(n,h) = e$, so ist $h = n^{-1} \in N \cap H$, also $n = h = e$. Damit ist φ injektiv, und wegen der Beziehung $N \cdot H = G$ ist φ surjektiv. ∎