Anhang A - Vektorraum-Konstruktionen

Sei E ein k-Vektorraum, $M \subset E$ eine Teilmenge. Dann versteht man unter dem von M *aufgespannten Unterraum* die Menge aller endlichen Linearkombinationen $\sum_i \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in k$ und $x_i \in M$. Die Menge M heißt eine *Basis* von E, falls je endlich viele Elemente von M linear unabhängig sind und E von M aufgespannt wird.

$E_1, \ldots, E_k$ seien Untervektorräume von E. Besitzt jedes Element $x \in E$ eine Darstellung $x = x_1 + \cdots + x_k$ mit $x_i \in E_i$, so schreibt man:

$$E = E_1 + \cdots + E_k \text{ (E ist \textit{Summe} der E_i).}$$

Man nennt die Summe *direkt*, falls gilt:

$$E_i \cap (\sum_{k \neq i} E_k) = \{0\}, \text{ für alle } i.$$

Man schreibt dann:

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k \text{ oder } E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i.$$

Sei $(E_\iota)_{\iota \in I}$ eine beliebige Familie von k-Vektorräumen. Die *(äußere) direkte Summe* der E_ι ist der k-Vektorraum $\bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ aller Familien $(x_\iota)_{\iota \in I}$ mit der Eigenschaft, dass x_ι immer in E_ι liegt und $x_\iota \neq 0$ nur für endlich viele $\iota \in I$ gilt. Die Addition und die Multiplikation mit Skalaren erfolgt komponentenweise.

Sei E ein k-Vektorraum und $U \subset E$ ein Unterraum. Zwei Elemente $x, y \in E$ heißen *kongruent modulo* U (in Zeichen: $x \equiv y \mod U$), falls $x - y \in U$ ist. Das ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation, und es gilt:

$$\{x \in E \,:\, x \equiv y \mod U\} = y + U = \{y + u \,:\, u \in U\}.$$

Man nennt $y + U$ einen *affinen Unterraum* oder eine *Nebenklasse*. Anschaulich handelt es sich um den zu U parallelen Raum durch y. Die Menge

$$E/U = \{y + U \,:\, y \in E\}$$

nennt man den *Quotientenraum von E modulo U*. Er trägt auf natürliche Weise die Struktur eines k-Vektorraumes:

$$\begin{aligned} (x + U) + (y + U) &:= (x + y) + U, \\ \alpha(x + U) &:= \alpha x + U. \end{aligned}$$

Man muss zeigen, dass dies wohl-definiert ist. Ist $x_1 \equiv x_2 \mod U$ und $y_1 \equiv y_2 \mod U$, so ist $x_1 - x_2 \in U$ und $y_1 - y_2 \in U$, also auch $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in U$, d.h. $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \mod U$.

Und analog: Ist $x_1 \equiv x_2 \mod U$ und $\alpha \in k$, so ist $\alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \in U$, also $\alpha x_1 \equiv \alpha x_2 \mod U$.

Die Abbildung $q : E \to E/U$ mit $q(x) := x + U$ nennt man *Restklassen-Abbildung* oder *kanonische Projektion*. Sie ist linear und surjektiv.

A.1 Satz. *Ist F ein k-Vektorraum und $f : E \to F$ eine lineare Abbildung mit $U \subset \operatorname{Ker}(f)$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\widehat{f} : E/U \to W$ mit $\widehat{f} \circ q = f$.*

Beweis: Weil q surjektiv ist, ist $\widehat{f}$ durch die Gleichung $\widehat{f} \circ q = f$ eindeutig festgelegt. Man setzt $\widehat{f}(x + U) := f(x)$. Wegen der Bedingung $U \subset \operatorname{Ker}(f)$ ist $\widehat{f}$ wohl-definiert. Der Nachweis der Linearität ist trivial. ∎

Insbesondere folgt:

Ist $f : E \to F$ eine lineare Abbildung, so wird ein Isomorphismus

$$\overline{f} : E/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$$

induziert, mit $\overline{f}(x + \operatorname{Ker}(f)) := f(x)$.

Anhang B - Analysis in Vektorräumen

Es seien E und F endlich-dimensionale k-Vektorräume (mit $k = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$), $B \subset E$ offen, $x_0 \in B$ ein Punkt. Eine Funktion $f : B \to F$ heißt *differenzierbar* in x_0, falls es eine Abbildung $L : B \to \mathrm{Hom}_k(E, F)$ gibt, so dass gilt:

1. L ist stetig in x_0.
2. $f(x) = f(x_0) + L(x)(x - x_0)$ für $x \in B$.

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f'(x_0) := L(x_0) \in \mathrm{Hom}_k(E, F)$ heißt die *Ableitung* von f in x_0.

Ist $E = k^n$ und $F = k^m$, so wird $f'(\mathbf{x}_0)$ durch eine Matrix $A \in M_{m,n}(k)$ gegeben, mit

$$f'(x_0)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot A^\top.$$

Man nennt die Matrix $J_f(\mathbf{x}_0) := A$ die *Jacobi-Matrix* von f in $\mathbf{x}_0$. Ist $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ die Standard-Basis von k^n, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) = L(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)(t\mathbf{e}_i),$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot J_f(\mathbf{x}_0)^\top.$$

Damit ist die *partielle Ableitung* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right)^\top$ die i-te Spalte von $J_f(\mathbf{x}_0)$.

Ist $F = k$, so ist $f'(x_0)$ eine Linearform. Ist außerdem $E = k^n$, so besteht die Jacobi-Matrix nur aus einer Zeile, dem *Gradienten* $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.

f heißt *stetig differenzierbar* auf B, falls f in jedem Punkt von B differenzierbar und die Funktion $f' : B \to \mathrm{Hom}_k(E, F)$ stetig ist. Ist f auf B stetig differenzierbar und die abgeleitete Funktion f' in $x_0 \in B$ ein weiteres Mal differenzierbar, so heißt $f''(x_0) := (f')'(x_0) \in \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(E, F)) \cong L_2(E, E; F)$ die *zweite Ableitung* von f in x_0. Die zugehörige Bilinearform ist symmetrisch. Im Falle $E = k^n$ und $F = k$ wird sie durch die Hesse-Matrix beschrieben:

$$f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathrm{Hess}_f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}^\top.$$

Analog werden höhere Ableitungen erklärt. Mit $\mathscr{C}^p(B, F)$ wird die Menge der p-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : B \to F$ bezeichnet. Im Falle $k = \mathbb{C}$ nennt man die differenzierbaren Funktionen auch *holomorph*. Wie in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen folgt aus der einmaligen (stetigen) komplexen Differenzierbarkeit einer Funktion, dass sie sogar beliebig oft komplex differenzierbar ist. Mit $\mathscr{O}(B, F)$ bezeichnet man die Menge aller holomorphen Funktionen von B nach F.

Die meisten aus der Differentialrechnung bekannten Sätze lassen sich übertragen:

B.1 Ableitung linearer Abbildungen. *Ist $f : E \to F$ eine k-lineare Abbildung, so ist f überall differenzierbar und $f'(x) = f$ in jedem Punkt $x \in E$.*

B.2 Kettenregel. *Ist $U \subset E$ offen, $V \subset F$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \to F$ differenzierbar in x_0, $f(U) \subset V$ und $g : V \to G$ (mit einem weiteren k-Vektorraum G) differenzierbar in $f(x_0)$, so ist $g \circ f : U \to G$ differenzierbar in x_0, und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) \in \mathrm{Hom}_k(E, G).$$

Ist $E = k$, $F = k^n$ und $G = k$, so ist $(g \circ f)'(t_0) = \nabla g(f(t_0)) \cdot f'(t_0)$.

B.3 Produktregel. *$f, g : U \to F$ seien differenzierbar in x_0 und $b : F \times F \to G$ sei bilinear. Dann ist auch $b \circ (f, g) : U \to G$ differenzierbar in x_0, und es gilt:*

$$(b \circ (f, g))'(x_0)(v) = b(f(x_0), g'(x_0)(v)) + b(f'(x_0)(v), g(x_0)).$$

Diese Formel liefert z.B. Ableitungsregeln für das gewöhnliche Produkt, das Skalarprodukt und das Vektorprodukt, aber auch für die Produkte in beliebigen endlichdimensionalen k-Algebren.

B.4 Umkehrsatz. *Sei $U \subset E$ offen, $f : U \to E$ stetig differenzierbar und $f'(x_0) \in \mathrm{End}_k(E)$ ein Isomorphismus. Dann gibt es Umgebungen $V(x_0) \subset U$ und $W(f(x_0)) \subset E$, so dass $f : V \to W$ ein* Diffeomorphismus *ist, also bijektiv mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, und $(f^{-1})'(y_0) = f'(x_0)^{-1}$.*

Beispiel.

Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $E := \mathrm{End}_k(V)$. Dann ist $G := \mathrm{Aut}_k(V)$ eine offene Teilmenge von E. Die Abbildung $j : G \to E$ sei definiert durch $j(g) := g^{-1}$. Man kann zeigen, dass j ein Diffeomorphismus von G nach G ist. Außerdem ist $\mu : E \times E \to E$ mit $\mu(f, g) := f \circ g$ bilinear, und $\mu(g, j(g)) \equiv \mathrm{id}_V$ auf G. Daraus folgt:

$$0 = (\mu \circ (\mathrm{id}_E, j))'(g_0)(f) = \mu \circ (g_0, j'(g_0)(f)) + \mu \circ (f, j(g_0)),$$

also $j'(g_0)(f) = -g_0^{-1} \circ f \circ g_0^{-1}$.

B.5 Satz über implizite Funktionen. *Seien $U \subset E$ und $V \subset F$ offene Teilmengen und $f : U \times V \to F$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei $(a, b) \in U \times V$, die Ableitung der Funktion $x \mapsto f(x, b)$ in $x = a$ sei mit $D_1 f(a, b)$ bezeichnet, die Ableitung der Funktion $y \mapsto f(a, y)$ in $y = b$ mit $D_2 f(a, b)$.*

Ist $f(a,b) = 0$ *und* $D_2 f(a,b) \in \mathrm{End}_k(F)$ *ein Isomorphismus, so gibt es eine Umgebung* $U_0(a) \subset U$ *und eine stetig differenzierbare Funktion* $g : U_0 \to V$ *mit*

$$g(a) = b \quad \text{und} \quad f(x, g(x)) \equiv 0 \text{ auf } U_0.$$

Außerdem gilt:

$$g'(x_0) = -D_2 f(x_0, g(x_0))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)).$$

Im Rest dieses Abschnittes sei $k = \mathbb{R}$.

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $U \subset E$ offen, so bezeichnet man eine differenzierbare Abbildung $f : I \times U \to E$ als ein *zeitabhängiges Vektorfeld*. Eine *Integralkurve* mit Anfangswert $x_0 \in U$ für f ist eine differenzierbare Kurve $\alpha : I_0 \to U$, so dass gilt:

1. $I_0 \subset I$ ist ein offenes Intervall mit $0 \in I_0$.
2. $\alpha(0) = x_0$.
3. $\alpha'(t) = f(t, \alpha(t))$ für $t \in I_0$.

Man bezeichnet α auch als Lösung der DGL $y' = f(t, y)$.

Ein *lokaler Fluss* für f in x_0 ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : I_0 \times U_0 \to E$, so dass U_0 eine offene Umgebung von x_0 ist und außerdem gilt:

1. Für jedes $x \in U_0$ ist $\Phi_x(t) := \Phi(t, x)$ eine Integralkurve für f.
2. Es ist stets $\Phi(0, x) = x$.

Aus dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für DGLn folgt, dass es lokal immer einen (eindeutig bestimmten) Fluss gibt.

Ein Spezialfall sind die linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten: $y' = A(y)$, mit $A \in \mathrm{End}(E)$. Dann ist $e^A = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^\nu \in \mathrm{Aut}(E)$, $t \mapsto e^{tA}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (mit $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$) und $e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y$, sofern $XY = YX$ ist. Durch $\Phi(t, x) := e^{tA} \cdot x$ wird ein globaler Fluss für das Vektorfeld $f(x) = A(x)$ gegeben.

Nach dem Satz von Liouville erfüllt die Wronski-Determinante $W(t) := \det(e^{tA})$ die DGL $y' = \mathrm{Spur}(A) \cdot y$, es ist also $(\log \circ W)'(t) = \mathrm{Spur}(A)$. Daraus folgt:

$$\det(e^{tA}) = W(t) = \exp(\int_0^t \mathrm{Spur}(A)\, ds) = e^{t \cdot \mathrm{Spur}(A)}.$$

Anhang C - Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Sei X ein Hausdorff-Raum und E ein n-dimensionaler k-Vektorraum. Eine *Karte* (U, φ) für X in E besteht aus einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einem Homöomorphismus $\varphi : U \to W$ auf eine offene Teilmenge $W \subset E$.

Definition.
Ein *differenzierbarer Atlas (mit Modellraum E)* für X ist eine Familie $\mathscr{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten (U_i, φ_i) für X in E mit folgenden Eigenschaften:

1. Die U_i überdecken X, d.h., es ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$.
2. Die Karten sind paarweise differenzierbar verträglich, d.h., für $i, j \in I$ ist $U_i \cap U_j = \varnothing$ oder
$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$
ist eine differenzierbare Abbildung. Dabei soll hier im Falle $k = \mathbb{R}$ unter „differenzierbar“ stets $\mathscr{C}^\infty$ verstanden werden, im Falle $k = \mathbb{C}$ „holomorph“.

Sind $(X, \mathscr{A})$ und $(Y, \mathscr{B})$ zwei Hausdorffräume mit differenzierbaren Atlanten, so nennt man eine Abbildung $f : X \to Y$ *differenzierbar* (bezüglich der gegebenen Atlanten), falls für Karten $(U, \varphi) \in \mathscr{A}$ und $(V, \psi) \in \mathscr{B}$ stets $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist, sofern diese Abbildung einen nicht-leeren Definitionsbereich besitzt. Der Körper k soll stets mit dem trivialen Atlas $\mathscr{A}_k = \{(k, \mathrm{id}_k)\}$ versehen werden. Eine differenzierbare Abbildung von $(X, \mathscr{A})$ nach $(k, \mathscr{A}_k)$ nennt man auch eine *differenzierbare Funktion* (bzw. im Falle $k = \mathbb{C}$ eine *holomorphe Funktion*) auf X.

Zwei Atlanten $\mathscr{A}_1$ und $\mathscr{A}_2$ für X heißen *äquivalent*, falls $\mathrm{id}_X : X \to X$ bezüglich der Atlanten in beiden Richtungen differenzierbar ist. Eine *differenzierbare Struktur* auf X ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten für X.

Definition.
Eine *differenzierbare* (bzw. im Falle $k = \mathbb{C}$ eine *komplexe*) *Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffraum, zusammen mit einer differenzierbaren Struktur. Ist E der Modellraum und $\dim_k(E) = n$, so spricht man von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Beispiele.

1. Ist $B \subset E$ offene Menge eines n-dimensionalen k-Vektorraumes, so wird B mit dem trivialen Atlas (B, id_B) zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.
2. Sei E ein n-dimensionaler k-Vektorraum, $B \subset E$ offen und $f : B \to F$ differenzierbar, $q := \dim_k(F) < n$. Ist $X := f^{-1}(0) \neq \varnothing$ und $\mathrm{rg}(f'(x)) = q$ für alle $x \in X$, so kann man X wie folgt mit einer differenzierbaren Struktur versehen:

Sei $x_0 \in X$, $K := \text{Ker}(f'(x_0)) \subset E$ und $L \subset E$ ein „Komplementärraum“ zu K, so dass $E = K \oplus L$ ist. Dann ist $\dim_k(L) = n - \dim_k(\text{Ker}(f'(x_0))) = \dim_k(\text{Im}(f'(x_0))) = \text{rg}(f'(x_0)) = q = \dim_k(F)$. Weil $\text{Ker}(f'(x_0)|_L) = \{0\}$ ist, induziert $f'(x_0)$ einen Isomorphismus $D_2f(x_0) : L \to F$.

Sei $x_0 = x_0' + x_0''$, mit $x_0' \in K$ und $x_0'' \in L$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung $U(x_0') \subset K$, eine offene Umgebung $V(x_0'') \subset L$ und eine differenzierbare Funktion $g : U \to V$, so dass $f(x' + g(x')) \equiv 0$ für $x' \in U$ ist.

Sei $\widehat{f} : U \times V \to K \times F$ definiert durch $\widehat{f}(x', x'') := (x', f(x' + x''))$. Dann ist $\widehat{f}'(x_0', x_0'') = (\text{pr}_1, D_1f(x_0) \circ \text{pr}_1 + D_2f(x_0) \circ \text{pr}_2) : K \times L \to K \times F$ ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $(v, w) \mapsto (v, D_2f(x_0)^{-1}(w - D_1f(x_0)(v)))$. Also ist $\widehat{f}$ ein lokaler Diffeomorphismus und aus der Gleichung $f(x' + x'') = 0$ kann $x'' = \text{pr}_2 \circ \widehat{f}^{-1}(x', 0)$ eindeutig bestimmt werden. Also muss dann $x'' = g(x')$ sein.

Durch $\varphi(x' + x'') := x'$ wird somit ein Homöomorphismus $\varphi : (U \times V) \cap X \to U$ gestiftet, mit $\varphi^{-1}(x') = (x', g(x'))$. Das ist eine Karte für X in K. Man kann leicht zeigen, dass zwei solche Karten miteinander differenzierbar verträglich sind. So wird X zu einer $(n-q)$-dimensionalen (Unter-)Mannigfaltigkeit.

Sei z.B. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\top - 1$. Dann ist $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = 2\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v}^\top$ für $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(\mathbf{0})$ eine nicht verschwindende Linearform, hat also den Rang 1. Damit ist

$$S^{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\top = 1\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die sogenannte $(n-1)$-Sphäre.

3. Sei jetzt E ein $(n+1)$-dimensionaler k-Vektorraum, versehen mit einem (im Falle $k = \mathbb{R}$ euklidischen und im Falle $k = \mathbb{C}$ hermiteschen) Skalaprodukt $<\ldots, \ldots>$.

   Die Menge $\mathbb{P}(E)$ aller 1-dimensionalen k-Untervektorräume $L \subset E$ nennt man den *projektiven Raum* von E. Die Abbildung $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ heißt die *kanonische Projektion*. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}(E)$ wird *offen* genannt, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in $E \setminus \{0\}$ ist. Man kann nachrechnen, dass dies die „feinste“ Topologie auf $\mathbb{P}(E)$ ergibt, für die π stetig ist.

   Karten für $\mathbb{P}(E)$ erhält man folgendermaßen: Ist $L_0 \subset E$ eine feste Gerade und $H_0 := L_0^\perp$ die dazu orthogonale Hyperebene, so ist $U_0 := \{L \in \mathbb{P}(E) : E = L \oplus H_0\}$ eine offene Umgebung von L_0, denn $\pi^{-1}(U_0)$ ist die Vereinigung aller Geraden L (ohne den Nullpunkt) mit $L \cap H_0 = \{0\}$, also die offene Menge $E \setminus H_0$. Jede Gerade $L \in U$ ist auf eindeutige Weise der Graph einer linearen Abbildung $f_L : L_0 \to H_0$ in $L_0 \oplus H_0 = E$. Durch $\varphi_0 : L \mapsto f_L$

wird eine Karte für $\mathbb{P}(E)$ in $\mathrm{Hom}_k(L_0, H_0) \cong H_0 \cong k^n$ definiert. Ist nämlich $L_0 = ke_0$ und $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von H_0, so ist f_L festgelegt durch $f_L(e_0) = x_1(L)a_1 + \cdots + x_n(L)a_n$, und damit $\varphi(L) = (x_1(L), \ldots, x_n(L))$.

Ist speziell $E = k^{n+1}$, so schreiben wir $\mathbb{P}_n(k)$ an Stelle von $\mathbb{P}(k^{n+1})$ und $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ an Stelle von $\pi(x_0, \ldots, x_n)$. Die x_i heißen die *homogenen Koordinaten* des entsprechenden Punktes im projektiven Raum. Mit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sind auch $\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$ homogene Koordinaten des gleichen Punktes. Ist in diesem Falle $L_0 = k\mathbf{e}_i = (0 : \ldots : 1 : \ldots : 0)$ (mit einer 1 an der i-ten Stelle), so ist $L_0^\perp = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i = 0\}$ und wir erhalten als Umgebung von $\pi(\mathbf{e}_i)$ die Menge

$$U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \,:\, x_i \neq 0\}.$$

Jede Gerade $L = k\mathbf{x} \subset k^{n+1}$, die – als Element des projektiven Raumes – zu U_i gehört, ist Graph einer linearen Abbildung $f_L : L_0 \to L_0^\perp$, und die Karte $\varphi_i : U_i \to k^n$ ist nach der obigen Konstruktion wie folgt gegeben: Ist $\iota_i : k^n \to k^{n+1}$ definiert durch $\iota_i(w_1, \ldots, w_n) := (w_1, \ldots, w_i, 0, w_{i+1}, \ldots, w_n)$, so gibt es zu $\mathbf{x}$ ein $\lambda \in k$ mit $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + \iota_i(\varphi_i(\pi(\mathbf{x})))$. Im Falle $i = 0$ bedeutet das z.B. $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (1, w_1, \ldots, w_n)$ und $\varphi_0(x_0 : \ldots : x_n) = (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$, für allgemeines i also

$$\varphi_i(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \widehat{1}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Man kann nun leicht nachprüfen, dass je zwei solcher Karten differenzierbar verträglich sind.

Sind zwei Punkte im projektiven Raum gegeben, so kann man eine Hyperebene $H \subset k^{n+1}$ finden, die die Urbilder der Punkte nur im Nullpunkt trifft. Damit liegen beide Punkte in der gleichen Kartenumgebung, und man kann sehr leicht die Hausdorff-Eigenschaft verifizieren. Also ist $\mathbb{P}_n(k)$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Anhang D - Tangentialvektoren und Derivationen

In einem n-dimensionalen k-Vektorraum E werden Richtungen durch Vektoren beschrieben. Ist $X \subset E$ eine Untermannigfaltigkeit, so steht der Begriff des „Tangentialvektors“ zur Verfügung:

Sei $B \subset E$ offen, $f : B \to F$ differenzierbar und $\text{rg}(f'(x)) = q$ auf $X = f^{-1}(0)$. Dann ist X eine $(n-q)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ein Vektor $v \in E$ heißt *Tangentialvektor* an X im Punkt x_0, falls es eine offene Umgebung $\Delta = \Delta(0) \subset k$ und einen differenzierbaren Weg $\alpha : \Delta \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha'(0) = v$ gibt. Man stellt sehr schnell fest, dass die Menge $T_{x_0}(X)$ aller Tangentialvektoren an X in x_0 mit dem Vektorraum $\text{Ker}(f'(x_0))$ übereinstimmt. Deshalb kann man vom „Tangentialraum“ sprechen. Ist $W \subset k^{n-q}$ offen und $\varphi : W \to X$ eine lokale Parametrisierung von X in x_0 (also $\varphi : W \to E$ differenzierbar, $\varphi(W) \subset X$ und speziell $\varphi(w_0) = x_0$, $\text{rg}(\varphi'(w)) = n - q$ für alle $w \in W$ und $\varphi : W \to \varphi(W)$ ein Homöomorphismus), so ist $T_{x_0}(X) = \text{Im}(\varphi'(w_0))$.

Bei abstrakten Mannigfaltigkeiten geht das nicht so einfach. Natürlich kann man Richtungen durch Wege beschreiben, aber das liefert einem noch keine Vektoren. Die gewinnt man folgendermaßen:

Gegeben seien zwei differenzierbare Wege $\alpha, \beta : \Delta \to X$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$. Wir sagen, α und β haben in x_0 die „gleiche Richtung“, falls gilt:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$$

für alle differenzierbaren Funktionen in der Nähe von x_0. Offensichtlich wird dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege durch x_0 erklärt. Ein *Tangentialvektor* in x_0 ist eine Äquivalenzklasse von Wegen durch x_0 mit gleicher Richtung. Ist (U, φ) eine beliebige Karte für X in E, so sind die Vektoren $(\varphi \circ \alpha)'(0)$ und $(\varphi \circ \beta)'(0)$ gleich. Da haben wir unseren Vektor! Allerdings hängt er von der Karte φ ab.

Vektoren sind also Paare $(v, (U, \varphi))$, bestehend aus einem Vektor $v \in E$ und einer Karte (U, φ) mit $x_0 \in U$. Zwei solche Paare $(v, (U, \varphi))$ und $(w, (V, \psi))$ definieren den gleichen Vektor, falls gilt:

$$v = (\varphi \circ \psi^{-1})'(\psi(x_0))(w).$$

Im Folgenden betrachten wir nur noch reelle Mannigfaltigkeiten.

Sei $x \in X$ ein fester Punkt. Zwei in der Nähe von x definierte Funktionen f und g heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ gibt, so dass $f|_U = g|_U$ ist. Eine Äquivalenzklasse nennt man einen *Funktionskeim* in x. Den Keim der Funktion f bezeichnet man mit f_x. Meistens unterscheiden wir nicht zwischen einer Funktion und dem von ihr repräsentierten Keim. Die Menge $\mathscr{E}_x$ aller (beliebig oft) differenzierbaren Funktionskeime in x bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Unter einer *Derivation* in x versteht man eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\delta : \mathscr{E}_x \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\delta(f \cdot g) = f(x) \cdot \delta(g) + g(x) \cdot \delta(f).$$

Man sieht leicht, dass die Menge $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_x, \mathbb{R})$ aller Derivationen in x ein reeller Vektorraum ist.

Ist φ ein Koordinatensystem in x, so bestimmt jeder Tangentialvektor $\alpha'(0) \in T_x(X)$ eindeutig einen Vektor $(\varphi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n$. Ist umgekehrt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und

$$\alpha(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\mathbf{v}),$$

so ist $(\varphi \circ \alpha)'(0) = \mathbf{v}$. Auf diesem Wege überträgt man die Vektorraum-Struktur des $\mathbb{R}^n$ auf $T_x(X)$.

D.1 Satz. *Durch $\theta_x(\alpha'(0))(f) := (f \circ \alpha)'(0)$ wird ein Isomorphismus $\theta_x : T_x(X) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_x, \mathbb{R})$ definiert.*

BEWEIS: Offensichtlich hängt die Definition von $\theta_x(\alpha'(0))$ nur von der Äquivalenzklasse $\alpha'(0)$ ab. Und man rechnet leicht nach, dass es sich tatsächlich um eine Derivation handelt. Nun zur $\mathbb{R}$-Linearität. Es seien zwei Tangentialvektoren $\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)$ gegeben, ihre Bilder seien die Derivationen δ_1 und δ_2. Weiter sei φ eine lokale Karte in x. Ist $(\varphi \circ \alpha_i)'(0) = \mathbf{v}_i$, für $i = 1, 2$, und $\beta(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2))$, so ist $\beta'(0) = \alpha_1'(0) + \alpha_2'(0)$ und

$$\begin{aligned}
\theta_x(\beta'(0))(f) &= (f \circ \beta)'(0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) \\
&= (\nabla(f \circ \varphi^{-1}))(\mathbf{0}) \bullet (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\
&= (\nabla(f \circ \varphi^{-1}))(\mathbf{0}) \bullet \mathbf{v}_1 + (\nabla(f \circ \varphi^{-1}))(\mathbf{0}) \bullet \mathbf{v}_2 \\
&= (f \circ \alpha_1)'(0) + (f \circ \alpha_2)'(0) \\
&= \delta_1(f) + \delta_2(f),
\end{aligned}$$

also $\theta_x(\alpha_1'(0) + \alpha_2'(0)) = \theta_x(\alpha_1'(0)) + \theta_x(\alpha_2'(0))$. Die Homogenität zeigt man genauso.

Ist $\theta_x(\alpha'(0)) = 0$, so ist $(f \circ \alpha)'(0) = 0$ für alle $f \in \mathscr{E}_x$. Das bedeutet aber, dass $\alpha'(0)$ der Nullvektor in $T_x(X)$ ist. Also ist θ_x injektiv.

Sei nun eine Derivation $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_x, \mathbb{R})$ gegeben. Wir wählen eine Karte $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ für X mit $\varphi(x) = \mathbf{0}$. Ist $f \in \mathscr{E}_x$, so gibt es eine Darstellung

$$f(y) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(y) \cdot f_\nu(y), \text{ für } y \text{ nahe } x,$$

mit Funktionen $f_\nu \in \mathscr{E}_x$ und $f_\nu(x) = \dfrac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\mathbf{0})$. Die Derivation δ verschwindet auf allen konstanten Funktionen. Daher ist

$$\delta(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta(x_\nu) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\mathbf{0}).$$

Der Weg $\alpha(t) := \varphi^{-1}(\delta(x_1)t, \ldots, \delta(x_n)t)$ mit $\alpha(0) = x$ hängt nicht von f ab, und es ist

$$(f \circ \alpha)'(0) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta(x_\nu) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\mathbf{0}) = \delta(f),$$

also $\theta_x(\alpha'(0)) = \delta$. ∎

Spezielle Derivationen sind die (von der Karte φ abhängigen) *partiellen Ableitungen* $D_i^{(\varphi)}$, $i = 1, \ldots, n$, definiert durch

$$D_i^{(\varphi)}(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \ .$$

Man kann zeigen, dass die partiellen Ableitungen eine Basis des Raumes $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_x, \mathbb{R})$ bilden:

1. Wir haben oben schon gesehen, dass $\delta = \sum_{\nu=1}^{n} \delta(x_\nu) \cdot D_\nu^{(\varphi)}$ ist. Also bilden die partiellen Ableitungen ein Erzeugendensystem.

2. Ist $\delta := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cdot D_\nu^{(\varphi)} = 0$, so ist $a_\nu = \delta(x_\nu) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Also sind die $D_\nu^{(\varphi)}$ linear unabhängig.

Damit hat eine allgemeine Derivation die Gestalt

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i^{(\varphi)} \ .$$

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten, so wird für jedes $x \in X$ durch $\Phi_*(\alpha'(0)) := (\Phi \circ \alpha)'(0)$ eine lineare Abbildung $\Phi_* : T_x(X) \to T_{\Phi(x)}(Y)$ definiert. Wird nämlich der Tangentialvektor $\alpha'(0)$ durch ein Paar $(v, (U, \varphi))$ repräsentiert und ist (V, ψ) eine Karte für Y in $\Phi(x)$, so wird $\Phi_*(\alpha'(0))$ durch den Vektor $(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(v)$ und die Karte (V, ψ) repräsentiert. Wird $\alpha'(0)$ durch eine Derivation δ gegeben, so ist

$$\Phi_*\delta(g) = \delta(g \circ \Phi).$$

Definition.

Eine *Derivation* auf einer Mannigfaltigkeit X ist eine Abbildung $D : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$, so dass gilt:

1. D ist $\mathbb{R}$-linear.
2. Es ist $D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$.

Die Menge $\operatorname{Der}(X)$ aller Derivationen auf X bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

D.2 Satz. *Ist $x_0 \in X$, $U = U(x_0) \subset X$ eine offene Umgebung, $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ und $f|_U = 0$, sowie D eine Derivation auf X, so ist $(Df)(x_0) = 0$.*

BEWEIS: Man kann eine Funktion $\varrho \in \mathscr{C}^\infty(G)$ finden, so dass $\varrho(x) \equiv 1$ nahe x_0 und $\equiv 0$ auf $X \setminus U$ ist Dann ist $\varrho(x) \cdot f(x) \equiv 0$ auf ganz X und daher $0 = D(\varrho \cdot f)(x_0) = \varrho(x_0) \cdot (Df)(x_0) + f(x_0) \cdot (D\varrho)(x_0) = (Df)(x_0)$. ∎

Man kann also Derivationen auf offene Teilmengen einschränken!

Betrachten wir nun den Spezialfall, dass es eine Karte $\varphi : U \to W \subset E$ gibt. Ist D eine Derivation auf X, so wird in jedem Punkt $x \in X$ eine Derivation D_x definiert, durch $D_x(f) := D(\widehat{f})$, wobei $\widehat{f}$ eine differenzierbare Funktion auf X ist, die in der Nähe von x mit f übereinstimmt. Wegen des obigen Satzes ist die Definition unabhängig von der gewählten Fortsetzung $\widehat{f}$.

Offensichtlich gibt es differenzierbare Funktionen a_ν auf U, so dass gilt:

$$(D|_U f)(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x) \cdot D_\nu^{(\varphi)} f(x), \text{ für } x \in U.$$

Dabei sind die Funktionen $a_\nu = D|_U(x_\nu)$ differenzierbar.

Sei umgekehrt eine Derivation $D_U = \sum_\nu a_\nu D_\nu^{(\varphi)}$ auf U gegeben, mit differenzierbaren Funktionen a_ν. Dann definiert man zu jedem $x_0 \in U$ eine Derivation $D : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ wie folgt: Zunächst wähle man zwei offene Umgebungen $V \subset\subset U \subset X$ um x_0 und eine Funktion $\varrho \in \mathscr{C}^\infty(X)$ mit kompaktem Träger in U und $\varrho|_{\overline{V}} \equiv 1$. Dann setze man

$$Df(x) := \begin{cases} \varrho(x) \cdot \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(x)) & \text{für } x \in U, \\ 0 & \text{falls } x \notin U. \end{cases}$$

Offensichtlich ist D eine Derivation mit $D|_V = D_U|_V$.

Definition.

Ein *globaler Fluss* auf X ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times X$, so dass gilt:

1. $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in X$.
2. $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$ für $t, s \in \mathbb{R}$ und $x \in X$.

Ein globaler Fluss definiert Diffeomorphismen $\Phi_t : X \to X$ durch $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ (und mit $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$ und $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$). Für jeden Punkt $x \in X$ wird außerdem eine Kurve $\Phi_x : \mathbb{R} \to X$ mit $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$ definiert, also mit $\Phi_x(0) = x$.

D.3 Satz. *Sei $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ ein globaler Fluss. Dann wird durch $Df(x) := \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial t}(0, x)$ eine Derivation auf X gegeben.*