Aufgaben zu Kapitel 2

Afg. 29: Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $x \in X$ und $v = \alpha'(0) \in T_x(X)$. Ist f eine in einer Umgebung von x definierte differenzierbare Funktion, so setzt man $v[f] := (f \circ \alpha)'(0)$. Zeigen Sie, dass $v[f \cdot g] = f(x) \cdot v[g] + g(x) \cdot v[f]$ ist.

Sei $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ ein lokales Koordinatensystem. Bestimmen Sie einen Tangentialvektor $v = \alpha'(0)$, so dass gilt:

$$v[f] = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(x)).$$

Bezeichnen Sie dann den Tangentialvektor v mit $D_\nu^{(\varphi)}$.

Ist g eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion auf einer Umgebung $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$, so gibt es eine Umgebung $V = V(\mathbf{0}) \subset U$ und differenzierbare Funktionen g_ν auf V, so dass gilt: $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^n x_\nu g_\nu(\mathbf{x})$ auf V und $g_\nu(\mathbf{0}) = \dfrac{\partial g}{\partial x_\nu}(\mathbf{0})$, für $\nu = 1, \ldots, n$. Benutzen Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass $\{D_1^{(\varphi)}, \ldots, D_n^{(\varphi)}\}$ eine Basis von $T_x(X)$ ist. Beweisen Sie außerdem: $\alpha'(0) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^n (x^\nu \circ \alpha)'(0) D_\nu^{(\varphi)}$.

Ist $\Phi : X \to X$ ein Diffeomorphismus, so ist $\Phi_* \alpha'(0) = (\Phi \circ \alpha)'(0)$. Beweisen Sie die Formel $\Phi_* v[f] = v[f \circ \Phi]$.

Afg. 30: Sei G eine Liegruppe und ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf G. Zeigen Sie:

$$(\mathscr{L}_\xi f)(g) = \xi_g[f], \text{ für } g \in G.$$

Sei $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ ein Koordinatensystem für G in e mit $\varphi(e) = \mathbf{0}$. Zeigen Sie, dass für das Koordinatensystem $\psi = \varphi \circ L_g^{-1} = (y^1, \ldots, y^n)$ gilt:

$$(L_g)_* D_\nu^{(\varphi)} = D_\nu^{(\psi)}, \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Ist ξ ein (zunächst nicht notwendig differenzierbares) Vektorfeld auf G und $\mathscr{L}_\xi f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ für alle $f \in \mathscr{C}^\infty(G)$, so ist ξ ein **differenzierbares** Vektorfeld.

Afg. 31: Die Operatoren $L_j : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, sind definiert durch

$$(L_1 f)(x, y, z) := \frac{1}{\mathsf{i}}\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad (L_2 f)(x, y, z) := \frac{1}{\mathsf{i}}\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

und $(L_3 f)(x, y, z) := \dfrac{1}{\mathsf{i}}\left(x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$. Zeigen Sie, dass der von den L_j aufgespannte Raum von Operatoren mit $[L_i, L_j] = L_i \circ L_j - L_j \circ L_i$ eine Liealgebra bildet, und berechnen Sie die Lieklammern $[L_i, L_j]$ für $i < j$.

Afg. 32 : Bestimmen Sie die Liealgebra der Lorentz-Gruppe $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

Afg. 33 : Sei G eine Liegruppe, $f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ und ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf G mit globalem Fluss Φ. Zeigen Sie:

$$(\mathscr{L}_\xi f)(g) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\Phi(t,g)) - f(g)}{t}\ , \text{ für } g \in G.$$

Afg. 34 : Sei $E := \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, H die von den Operatoren P, Q und id erzeugte „Heisenberg-Algebra“, mit

$$Qf(x) := x \cdot f(x), \quad Pf(x) := \frac{d}{dt} f(x) \quad \text{ und } \operatorname{id} f(x) := f(x).$$

Berechnen Sie alle Kommutatoren (Lieklammern) und zeigen Sie, dass H eine Liealgebra ist. Berechnen Sie $[a, a^*]$ für $a := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + P)$ und $a^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - P)$.

Afg. 35 : a) Es sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathscr{A}$ eine beliebige k-Algebra. Eine *Derivation* in $\mathscr{A}$ ist ein $\delta \in \operatorname{End}_k(\mathscr{A})$ mit $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ (Reihenfolge beachten!). Zeigen Sie, dass die Menge $\operatorname{Der}_k(\mathscr{A})$ aller Derivationen in $\mathscr{A}$ eine Unteralgebra von $\operatorname{End}_k(\mathscr{A})$ ist. Enthält $\mathscr{A}$ eine Eins, so ist $\delta(1) = 0$.

b) Sei $\mathscr{A} := k[x]$. Zeigen Sie: Ist $\delta \in \operatorname{Der}_k(\mathscr{A})$, so ist $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$. Beweisen Sie, dass die Derivation $\delta_0 := \frac{d}{dx}$ eine Basis von $\operatorname{Der}_k(\mathscr{A})$ darstellt.

Afg. 36 : Sei L eine beliebige abstrakte Liealgebra über k. Für $x, y \in L$ sei $\operatorname{ad} x(y) := [x, y]$. Zeigen Sie: $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}_k(L)$ ist eine Derivation und $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad})$ ein Ideal in L.

Afg. 37 : Sei L eine beliebige abstrakte k-Liealgebra. Eine assoziative k-Algebra $\mathscr{U}$ mit 1 heißt *universelle einhüllende Algebra* von L, falls es eine k-lineare Abbildung $j : L \to \mathscr{U}$ gibt, so dass gilt:

1. $j([x, y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$.
2. Ist $\mathscr{A}$ irgend eine assoziative k-Algebra mit 1 und $h : L \to \mathscr{A}$ eine k-lineare Abbildung mit $h([x, y]) = h(x)h(y) - h(y)h(x)$, so gibt es genau einen k-Algebra-Homomorphismus $\varphi : \mathscr{U} \to \mathscr{A}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $h = \varphi \circ j$.

Zeigen Sie: Ist L endlich-dimensional, $T(L)$ die Tensoralgebra von L und $J \subset T(L)$ das von den Elementen $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, $x, y \in L$, erzeugte Ideal, so ist $\mathscr{U} := T(L)/J$ eine universelle einhüllende Algebra von L.

Afg. 38 : Sei $\varrho : G \to \operatorname{Aut}_k(E)$ die Darstellung einer Liegruppe, $\varrho' : L(G) \to \operatorname{End}_k(E)$ ihre Ableitung. Zeigen Sie: Ist $U \subset E$ ein G-invarianter Unterraum, so ist U auch invarianter Unterraum bezüglich ϱ'. Ist ϱ' irreduzibel, so auch ϱ.

Afg. 39: Sei $\varrho : G \to \mathrm{GL}(E)$ eine endlich-dimensionale Darstellung, $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(E^*)$ die *kontragrediente Darstellung* mit $\varrho^* g(f)(v) = f(\varrho(g)^{-1}v)$ für $v \in E$ und $f \in E^*$. Zeigen Sie: Ist ϱ irreduzibel, so ist auch ϱ^* irreduzibel.

Afg. 40: Sei $V_n \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ der Unterraum der homogenen Polynome v. Grad n.

a) Zeigen Sie, dass durch $(\varrho_A p)(\mathbf{z}) := p(\mathbf{z} \cdot A)$ (für $p \in V_n$, $A \in SU(2)$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$) eine Darstellung der Gruppe $SU(2)$ auf V_n gegeben wird.

b) Für $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^2$ sei $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) := (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}^\top)^n$. Definieren Sie auf V_n ein hermitesches Skalarprodukt $(\ldots, \ldots)$, so dass gilt: $(p_{\mathbf{a}}, p_{\mathbf{b}}) = n! <\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}>$, wobei $<\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}>$ das kanonische hermitesche Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^2$ ist. Zeigen Sie, dass ϱ dann eine unitäre Darstellung ist.

c) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ seien die Pauli-Matrizen. Zeigen Sie, dass $X_1 := \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1$, $X_2 := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2$ und $X_3 := \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3$ eine Basis von $\mathfrak{su}(2)$ bilden. Berechnen Sie die Lieklammern $[X_1, X_2]$, $[X_2, X_3]$ und $[X_3, X_1]$, sowie $\exp(tX_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

d) Für $k = 0, 1, \ldots, n$ sei $\varphi_k(z_1, z_2) := z_1^k z_2^{n-k}$. Beweisen Sie:

$$\begin{aligned}
(\varrho' X_1)\varphi_k &= \frac{\mathrm{i}}{2}(k\varphi_{k-1} + (n-k)\varphi_{k+1}),\\
(\varrho' X_2)\varphi_k &= \frac{1}{2}(k\varphi_{k-1} - (n-k)\varphi_{k+1})\\
\text{und } (\varrho' X_3)\varphi_k &= \frac{2k-n}{2}\mathrm{i}\,\varphi_k\,.
\end{aligned}$$

e) Berechnen Sie die Matrizen der Endomorphismen $\operatorname{ad} X_i$ (mit $\operatorname{ad} X_i(Y) = [X_i, Y]$) von $\mathfrak{su}(2)$ bezüglich der Basis $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Afg. 41: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k. Zeigen Sie, dass die *Killing-Form* $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$, definiert durch $B(v, w) := \mathrm{Spur}((\operatorname{ad} v) \circ (\operatorname{ad} w))$, eine symmetrische Bilinearform ist. Beweisen Sie mit Hilfe von 42e), dass die Killing-Form von $\mathfrak{su}(2)$ nicht entartet ist.

Afg. 42: Unter einem *infinitesimalen Erzeugendensystem* von $SU(n)$ versteht man eine Basis $\{H_1, \ldots, H_k\}$ des Raumes der n-reihigen hermiteschen Matrizen mit Spur 0. Die Matrizen $A_\nu := \exp(\mathrm{i}tH_\nu)$ erzeugen dann $SU(n)$. Warum? Welcher Zusammenhang besteht zur Liealgebra $\mathfrak{su}(n)$? Bestimmen Sie ein solches System für $SU(2)$ und $SU(3)$.

Afg. 43: Es wird die komplexe Liealgebra $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \{A \in M_3(\mathbb{C}) : \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ betrachtet.

a) Zeige Sie, dass $\mathfrak{h} := \{H = \Delta(z_1, z_2, z_3) \;:\; z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ eine abelsche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist.

b) Eine Abbildung $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ wird *Wurzel* von $\mathfrak{g}$ genannt, falls es ein Element $E_\alpha \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ (einen *Wurzelvektor*) gibt, so dass für alle $H \in \mathfrak{h}$ gilt:

$$\operatorname{ad}(H)(E_\alpha) = \alpha(H) \cdot E_\alpha.$$

Zeigen Sie, dass α automatisch $\mathbb{C}$-linear ist.

c) Sei $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq 3\}$ die Standardbasis von $M_3(\mathbb{C})$, sowie

$$E_\alpha = E_{12},\ E_\beta = E_{23},\ E_\gamma = E_{13},\ E_{-\alpha} = E_{21},\ E_{-\beta} = E_{32} \text{ und } E_{-\gamma} = E_{31}.$$

Bestimmen Sie Wurzeln $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, für die $E_{\pm\alpha}$, $E_{\pm\beta}$, $E_{\pm\gamma}$ Wurzelvektoren sind. Zeigen Sie, dass $\alpha + \beta = \gamma$ ist.

d) Zeigen Sie: Zu jedem $\lambda \in \mathfrak{h}^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ gibt es ein $H_\lambda \in \mathfrak{h}$ mit $\lambda(H) = \operatorname{Spur}(H \cdot H_\lambda)$.

e) Fassen Sie die Wurzeln von $\mathfrak{g}$ als Vektoren von $\mathbb{R}^2$ und die Zahlen $<\varrho\,,\,\mu> := \operatorname{Spur}(H_\varrho \cdot H_\mu)$ als euklidische Skalarprodukte auf und zeichnen Sie das zugehörige „Wurzeldiagramm" auf. Leiten Sie daraus einen Dynkin-Graphen ab.

Afg. 44: Zeigen Sie, dass die Killing-Form von $SU(n+1)$ durch $B(X,Y) := 2(n+1)\operatorname{Spur}(X \cdot Y)$ gegeben wird.

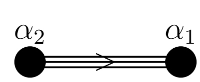
Afg. 45: Sei $G = SO(3)$ und $T = \{R^*(t) = \begin{pmatrix} R(t) & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \subset G$ der maximale Torus (mit $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$).

a) Zeigen Sie: Die Matrizen $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $L(G)$, und U liegt in $L(T)$.

b) Berechnen Sie alle Lieklammern von U, V und W, sowie alle Wurzeln von G.

b) Sei $Z := \Delta(-1, 1, -1)$. Zeigen Sie: $N_G(T) = T \cup (Z \cdot T)$. Bestimmen Sie die Weylgruppe $W(G)$.

Afg. 46: Die Liegruppe G_2 hat den Dynkin-Graphen



Es gebe ein Skalarprodukt auf $L(G_2)$, so dass $|\alpha_1| = 1$ ist. Bestimmen Sie alle Wurzeln von G_2 und das Wurzel-Diagramm, sowie $|\alpha_2|$ und $\angle(\alpha_1, \alpha_2)$.