Aufgaben zu Kapitel 1

Afg. 1: Sei (V, q) ein regulärer quadratischer Raum über k, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie: Zu beliebig vorgegebenen Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ gibt es stets ein $x \in V$, so dass $b_q(a_i, x) = \alpha_i$ ist, für $i = 1, \ldots, n$.

Afg. 2: Sei (V, q) ein regulärer quadratischer Raum, $U \subset V$ ein beliebiger Unterraum. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{Rad}(U) = \mathrm{Rad}(U^\perp)$, und $U = \mathrm{Rad}(U) \perp W$, wobei $W \cong U/\mathrm{Rad}(U)$ nicht entartet ist.
2. Das orthogonale Komplement $W^\perp$ (in V) ist ebenfalls nicht entartet und enthält $\mathrm{Rad}(U)$.
3. Ist $\{a_1, \ldots, a_r\}$ eine Basis von $\mathrm{Rad}(U)$, so gibt es Elemente $b_1, \ldots, b_r \in W^\perp$, so dass a_i und b_i jeweils eine hyperbolische Ebene H_i aufspannen und außerdem gilt: $U \subset H_1 \perp \ldots \perp H_r \perp W$.

Afg. 3: Im $\mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Skalarprodukt $(\ldots, \ldots)$ sei eine positiv orientierte ON-Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ fest gewählt. Außerdem sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung, also eine Isometrie mit $\det(f) = 1$. Es sei $\mathbf{e}_3' := f(\mathbf{e}_3) \notin \{\pm\mathbf{e}_3\}$. Zeigen Sie, dass die durch $a_{ik} = (f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k)$ gegebene Matrix $A = (a_{ik})$ in $SO(3)$ liegt, sowie:

1. Sei $E := \mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ und $E' := f(E)$. Dann ist $E \cap E'$ eine Gerade, und es gibt genau einen Einheitsvektor $\mathbf{u} \in E \cap E'$, so dass $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3'\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Es gibt eindeutig bestimmte Drehungen D_1, D_2, D_3 mit $D_1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}$, $D_1(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, $D_2(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $D_2(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3'$, $D_3(\mathbf{u}) = f(\mathbf{e}_1)$ und $D_3(\mathbf{e}_3') = \mathbf{e}_3'$. Damit ist $f = D_3 \circ D_2 \circ D_1$.
3. Die Matrix A beschreibt f bezüglich der Basis $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Man bestimme nun die Matrizen, die D_1 bezüglich $\mathscr{B}$, D_2 bezüglich $D_1(\mathscr{B})$ und D_3 bezüglich $D_2 \circ D_1(\mathscr{B})$ beschreiben, und gewinne damit eine Zerlegung von A in drei spezielle Drehmatrizen.

Afg. 4: Sei $0 \le v \le c$ und $\beta := v/c$. Zeigen Sie, dass durch $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = \frac{x_3 - \beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und $x_4' = \frac{x_4 - \beta x_3}{\sqrt{1-\beta^2}}$ eine Lorentz-Transformation aus $\mathscr{L}_+^\uparrow$ gegeben wird. Berechnen Sie das Bild des isotropen Vektors $\mathbf{n} = (0, 0, 1, 1)$. Gegeben sei ein Stab, der im ursprünglichen Koordinatensystem in Ruhe ist, längs der x_3-Achse liegt und die Länge ℓ hat. Wie lang erscheint der Stab einem Beobachter im transformierten Sytem?

Afg. 5 : Benutzen Sie die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes, um die Existenz eines Isomorphismus $V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ zu zeigen.

Afg. 6 : Sei $I := \{A = (a_{ij}) \in M_n(k) \,:\, a_{ij} = 0 \text{ für } j > 1\}$. Zeigen Sie, dass I ein Linksideal in $M_n(k)$ ist.

Afg. 7 : Sei $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ die $\mathbb{C}$-Algebra der Polynome in n Veränderlichen über $\mathbb{C}$. Mit der Multi-Index-Schreibweise $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$ und $x^\nu := x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$ kann man jedes Polynom $p \in S$ in der Form $p(x) = \sum_\nu a_\nu x^\nu$ (mit $a_\nu \in \mathbb{C}$) schreiben. Es sei $\deg(a_\nu x^\nu) := |\nu|$. Zeigen Sie, dass S eine graduierte Algebra vom Typ $\mathbb{N}_0$ ist.

Benutzen Sie ohne Beweis: *Jedes Ideal in S ist endlich erzeugt. Ist $p \in S$, so ist $p(z) \equiv 0$ genau dann, wenn alle Koeffizienten von p verschwinden.* Seien nun $f_1, \dots, f_q \in S$, $M := \{z \in \mathbb{C}^n \,:\, f_1(z) = \ldots = f_q(z) = 0\}$ und $I := \{p \in S \,:\, p(z) = 0 \text{ für alle } z \in M\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal in S ist, und dass I genau dann graduiert ist, wenn gilt: Ist $z \in M$ und $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, so ist auch $cz \in M$.

Afg. 8 : a) Sei $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $F : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(a \wedge b) \bullet c = \det(a, b, c)$.

b) Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar und $\alpha''(t) = \lambda(t)\alpha(t)$, mit einer stetigen Funktion λ. Zeigen Sie, dass $\alpha(t) \wedge \alpha'(t)$ konstant ist.

Afg. 9 : a) Sei A eine assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit 1, $e_0 \in A$. Zeigen Sie: Ist $e_0^2 = -1$, so erzeugt e_0 eine Unteralgebra $\cong \mathbb{C}$. Ist $e_0^2 = 1$, so erzeugt e_0 eine Unteralgebra $\cong \mathbb{R}^2$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{C})$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f einen Algebra-Isomorphismus von der Clifford-Algebra von $\mathbb{R}^3$ (mit dem euklidischen Skalarprodukt) auf $M_2(\mathbb{C})$ induziert.

Afg. 10 : Bestimmen Sie eine ON-Basis für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_2(\mathbb{R})$ mit der quadratischen Form $q(A) := \det(A)$, und zeigen Sie, dass (V, q) isometrisch zum $\mathbb{R}^4$ mit der quadratischen Form $q_{2,2}$ ist.

Afg. 11 : Sei $\mathbb{H}$ die Quaternionen-Algebra. Zeigen Sie:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{i} \\ \mathsf{j} & \mathsf{k} \end{pmatrix}$ ist in $M_2(\mathbb{H})$ invertierbar, nicht aber $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{j} \\ \mathsf{i} & \mathsf{k} \end{pmatrix}$.

2. Sei $SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \,:\, A \cdot \overline{A}^\top = E_2 \text{ und } \det(A) = 1\}$. Dann ist $SU(2) = \{A \in \mathscr{H} \,:\, \det(A) = 1\}$.

3. Ist $x \in \mathbb{H}$, $|x| = 1$ und $x \neq \pm 1$, so gibt es ein $\alpha \in (0, 2\pi)$ und ein $q \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$ mit $|q| = 1$, so dass $x = \cos(\alpha/2) \cdot 1 + \sin(\alpha/2) \cdot q$ ist.

4. Sind $u, v, w \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$, so ist
   $u \times v = \dfrac{1}{2}(uv - vu)$ und $u \times (v \times w) = \dfrac{1}{2}(uvw - vwu)$.

Afg. 12 : Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sei $e_{\mathbf{v}} : \bigwedge \mathbb{R}^n \to \bigwedge \mathbb{R}^n$ definiert durch $e_{\mathbf{v}}(\omega) := \mathbf{v} \wedge \omega$, sowie $i_{\mathbf{v}} : \bigwedge \mathbb{R}^n \to \bigwedge \mathbb{R}^n$ durch

$$i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p) := \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} (\mathbf{x}_i \bullet \mathbf{v}) \mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathbf{x}_i} \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_p \,.$$

Dann ist die Clifford-Multiplikation in $C = C(\mathbb{R}^n, q_{n,0})$ zwischen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $x \in C \cong \bigwedge \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\mathbf{v} \cdot x = e_{\mathbf{v}}(x) + i_{\mathbf{v}}(x)$.

Afg. 13 : Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) := \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ einen Isomorphismus $\widehat{\varphi}$ von $C_{1,0} = \mathbb{R}^2$ auf eine Unteralgebra $\mathscr{A} \subset M_2(\mathbb{R})$ induziert. Beschreiben Sie diese Unteralgebra! Bestimmen Sie ein Element $M \in \mathscr{A}$ mit $M^2 = E_2$, so dass es zu jedem $X = \widehat{\varphi}(x_1, x_2) \in \mathscr{A}$ mit $x_1 x_2 > 0$ ein $r > 0$ und ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt: $X = r(\cosh t \cdot E_2 + \sinh t \cdot M)$.

Afg. 14 : Sei $f_1 : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ der aus der Vorlesung bekannte injektive $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus und $f_2 : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{C})$ definiert durch $f_2(z) := z \cdot E_2$. Konstruieren Sie aus diesen beiden Abbildungen einen Algebra-Isomorphismus $f : \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{C})$.

Afg. 15 : Geben Sie eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ mit $u(\mathbf{x})^2 = -\|\mathbf{x}\|^2 \cdot (1, 1)$ an. Bestimmen Sie damit eine Basis von $C_{0,3}$ in $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Afg. 16 : a) Der Standard-Isomorphismus $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ induziert einen $\mathbb{R}$-Algebra-Isomorphismus $g : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \to M_4(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es einen $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus $f : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ gibt, so dass gilt:

$$f(x_1 \otimes x_2)(y) := x_1 \cdot y \cdot \overline{x}_2.$$

b) Geben Sie lineare Abbildungen $u_1 : \mathbb{R}^4 \to C_{1,1} \otimes C_{1,1} = M_4(\mathbb{R})$ und $u_2 : \mathbb{R}^4 \to C_{0,2} \otimes C_{0,2} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ an, so dass für die induzierten Isomorphismen $\widehat{u}_1 : C_{2,2} \to M_4(\mathbb{R})$ und $\widehat{u}_2 : C_{2,2} \to \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ gilt: $(g \circ f) \circ \widehat{u}_2 = \widehat{u}_1$. Leiten Sie daraus ab, dass f ein Isomorphismus ist.

Afg. 17 : Es seien $\gamma_0, \ldots, \gamma_3$ die Original-Dirac-Matrizen. Berechnen Sie – mit Hilfe der Pauli-Matrizen – das Produkt $f := \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)\frac{1}{2}(1 + \mathsf{i}\,\gamma_1\gamma_2)$.

Afg. 18 : 1) Seien V, W zwei k-Vektorräume, $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig und $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebig. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0 \text{ (in } V \otimes W) \iff w_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

2) $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ seien assoziative k-Algebren. Dann ist $Z(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) = Z(\mathscr{A}) \otimes Z(\mathscr{B})$. Dabei bezeichnet $Z(\mathscr{A})$ das Zentrum von $\mathscr{A}$.

Afg. 19 : Sei $\mathscr{A}$ eine assoziative k-Algebra und $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ eine endlich-dimensionale Unteralgebra. Zeigen Sie: Ist $a \in \mathscr{B}$ in $\mathscr{A}$ invertierbar, so liegt a^{-1} schon in $\mathscr{B}$.

Zeigen Sie, dass $M_n(\mathbb{H})$ als Unteralgebra von $M_{2n}(\mathbb{C})$ aufgefasst werden kann, und leiten Sie daraus ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen aus $M_n(\mathbb{H})$ ab. Testen Sie das Verfahren mit Aufgabe 11.1.

Afg. 20 : Bekanntlich ist $C_4 = C_{0,4} \cong C_{0,2} \otimes C_{2,0} \cong M_2(\mathbb{H})$. Konstruieren Sie den Isomorphismus $\widehat{\varphi} : C_4 \to M_2(\mathbb{H})$ explizit, indem Sie eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{H})$ angeben, die $\widehat{\varphi}$ induziert. Bestimmen Sie eine Basis von C_4^0 (dem „geraden Anteil“ in der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung $C_4 = C_4^0 \oplus C_4^1$), und geben Sie einen Algebra-Isomorphismus $C_4^0 \to \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ an.

Afg. 21 : Die $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$ lässt zwei nicht-äquivalente komplexe Darstellungen $\gamma_i : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ zu, die als reelle Darstellungen äquivalent sind.

Afg. 22 : Sei $n = r + s$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ bezüglich $q_{r,s}$. Zeigen Sie:

a) Das „Volumenelement“ $\omega := e_1 e_2 \cdots e_n \in C_{r,s}$ ist unabhängig von der Basis.

b) $\omega^2 = (-1)^{n(n+1)/2+r}$, und für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $v\omega = (-1)^{n-1}\omega v$.

c) Ist n gerade und $\alpha : C_{r,s} \to C_{r,s}$ die von $v \mapsto -j(v)$ induzierte kanonische Involution, so gilt $x \cdot \omega = \omega \cdot \alpha(x)$ für alle $x \in C_{r,s}$.

d) Ist $\varrho : C_{0,n} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ eine irreduzible Darstellung und $n = 4m + 3$, so ist $\varrho(\omega) = \mathrm{id}_S$ oder $\varrho(\omega) = -\mathrm{id}_S$. Gibt es irreduzible Darstellungen ϱ_+ und ϱ_-

mit $\varrho_+(\omega) = \mathrm{id}_S$ und $\varrho_-(\omega) = -\mathrm{id}_S$, so können diese Darstellungen nicht äquivalent sein.

Afg. 23 : Sei $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ das Produkt der Dirac-Matrizen. Zeigen Sie, dass $(\gamma_5)^2 = -1$ ist. Sei $M := \frac{1}{2}(1 + \mathsf{i}\,\gamma_5)$. Zeigen Sie, dass $M^2 = M$ ist.

Seien σ_k die Pauli-Matrizen, für $k = 1, 2, 3$. Stellen Sie $\exp(\mathsf{i}\,\sigma_k t)$ als Linearkombination von E_2 und σ_k dar, für $t \in \mathbb{R}$.

Afg. 24 : Sei $\mathscr{A}$ eine endlich-dimensionale assoziative k-Algebra mit 1. Ein Element $e \in \mathscr{A}$ heißt *idempotent* (bzw. *zentral*), falls $e^2 = e$ ist (bzw. $ae = ea$ für alle $a \in \mathscr{A}$). Zeigen Sie: $\mathscr{A}$ ist genau dann direkte Summe von Algebren $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$, wenn es zentrale idempotente Elemente $e_1, \ldots, e_k$ in $\mathscr{A}$ gibt, so dass $e_1 + \cdots + e_k = 1$ und $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$ ist.

Afg. 25 : Sei $C = C(V, q)$ eine Clifford-Algebra und $C^\times$ die Gruppe der Einheiten in C. Weiter sei $G := \{g \in C^\times \,:\, gxg^{-1} \in V \text{ für alle } x \in V\}$. Zeigen Sie

1. Für alle $g \in G$ ist $\varphi_g : V \to V$ mit $\varphi_g(x) := gxg^{-1}$ linear und bijektiv.
2. $G \cap V$ ist die Menge der nicht-isotropen Vektoren in V.
3. Für $g \in G \cap V$ ist $-\varphi_g$ die Spiegelung an der zu g orthogonalen Hyperebene.

Afg. 26 : Sei G eine Gruppe und $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ eine (endlich-dimensionale) Darstellung. Es gebe ein hermitesches Skalarprodukt $<\ldots, \ldots>$ auf V, so dass $<\varrho(g)x\,,\, \varrho(g)y> = <x\,,\, y>$ für alle $g \in G$ und $x, y \in V$ ist. Zeigen Sie, dass ϱ vollständig reduzibel ist.

Afg. 27 :

1. Übertragen Sie das Schur'sche Lemma auf Darstellungen von Gruppen und zeigen Sie: Ist G eine **kommutative** Gruppe und $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ eine irreduzible Darstellung, so ist $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$.
2. Bestimmen Sie alle irreduziblen **stetigen** Darstellungen $\varrho : SO(2) \to \mathbb{C}^*$.

Afg. 28 : Es seien A und B zwei hermitesche Matrizen. Zeigen Sie, dass die Matrix C mit $AB - BA = \mathsf{i}\,C$ ebenfalls hermitesch ist. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, dass AB hermitesch ist.

Zwischen den Matrizen U und H gelte die Beziehung $U = e^{\mathsf{i}\,tH}$, mit einer reellen Zahl $t > 0$. Zeigen Sie: H ist genau dann hermitesch, wenn U unitär ist.