3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

3.1 Der Differentialformenkalkül

Definition

X und Y seien differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Dann wird jeder q-Form $\omega \in \Omega^q(Y)$ eine q-Form $\Phi^*\omega \in \Omega^q(X)$ zugeordnet, durch

$$(\Phi^*\omega)_x(v_1, \dots, v_q) := \omega_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1, \dots, \Phi_{*,x}v_q).$$

3.1.1. Satz

Die „Liftung“ $\Phi^* : \Omega^q(Y) \to \Omega^q(X)$ hat folgende Eigenschaften:

1. *Φ^* ist $\mathbb{R}$-linear.*
2. *Ist f eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf Y und $\omega \in \Omega^q(Y)$, so ist*

   $$\Phi^*(f \cdot \omega) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi^*(\omega).$$

3. *Ist f eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf Y, so ist $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$.*
4. *Ist $\varphi \in \Omega^p(Y)$ und $\psi \in \Omega^q(Y)$, so ist $\Phi^*(\varphi \wedge \psi) = (\Phi^*\varphi) \wedge (\Phi^*\psi)$.*

Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften folgen sofort aus der Definition, die dritte Eigenschaft haben wir am Ende von Abschnitt 1.4 bewiesen. Insbesondere ist $\Phi^*(dy_i) = d\Phi_i$, wenn in lokalen Koordinaten $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ ist.

Sind $\omega_1, \dots, \omega_q$ Pfaffsche Formen auf Y, so ist

$$\begin{aligned}
&(\Phi^*\omega_1 \otimes \cdots \otimes \Phi^*\omega_q)_x(v_1, \dots, v_q) = \\
&\quad = (\Phi^*\omega_1)_x(v_1) \cdots (\Phi^*\omega_q)_x(v_q) \\
&\quad = (\omega_1)_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1) \cdots (\omega_q)_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_q) \\
&\quad = (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q)_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1, \dots, \Phi_{*,x}v_q).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\Phi^*(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q) = (\Phi^*\omega_1) \wedge \ldots \wedge (\Phi^*\omega_q)$ und dann allgemein $\Phi^*(\varphi \wedge \psi) = (\Phi^*\varphi) \wedge (\Phi^*\psi)$ ist. ∎

3.1.2. Folgerung 1

Sei $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ ein Koordinatensystem auf $U \subset X$, $\psi = (y_1, \dots, y_m)$ ein Koordinatensystem auf $V \subset Y$, $\Phi(U) \subset V$ und $\Phi_i := y_i \circ \Phi$ für $i = 1, \dots, m$.

Ist $\omega \in \Omega^q(Y)$ und $\omega|_V = \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} a_{i_1 \dots i_q}\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_q}$, so ist

$$(\Phi^*\omega)|_U = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} (a_{i_1 \dots i_q} \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_q}.$$

3.1.3. Folgerung 2

Ist $n = m$, so gilt mit den Bezeichnungen von Folgerung 1:

$$\Phi^*(a\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (a \circ \Phi) \cdot \big((\det J_{\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}}) \circ \varphi\big) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_n = \\
&\quad = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} \big((\Phi_1 \circ \varphi^{-1})_{x_{i_1}} \circ \varphi\big) \cdots \big((\Phi_n \circ \varphi^{-1})_{x_{i_n}} \circ \varphi\big)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\
&\quad = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \big((\Phi_1 \circ \varphi^{-1})_{x_{\sigma(1)}}\big) \cdots \big((\Phi_n \circ \varphi^{-1})_{x_{\sigma(n)}}\big)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\
&\quad = \big((\det J_{\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}}) \circ \varphi\big)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

■

3.1.4. Satz

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $d = d_U : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Ist $f \in \Omega^0(U)$ eine Funktion, so ist df das schon bekannte Differential.*
2. *Ist $\omega \in \Omega^p(U)$ und $\varphi \in \Omega^q(U)$, so ist*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi.$$

3. *Es ist stets $dd\omega = 0$.*

Beweis: 1) **Eindeutigkeit**:

Ist $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, so folgt:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} d\big(a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\big) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} \big(da_{i_1 \ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} + a_{i_1 \ldots i_q} \, d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q})\big) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} da_{i_1 \ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \end{aligned}$$

denn es ist $d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}) = 0$, wie ein simpler Induktionsbeweis (unter Verwendung der Eigenschaften (1), (2) und (3)) zeigt.

Existenz:

Wir definieren d durch die oben gewonnene Gleichung. Das ist möglich, wegen der eindeutig bestimmten Basisdarstellung der Differentialformen. Es ist klar, dass d dann linear ist, und dass df das Differential von f ist.

Wir benutzen eine abgekürzte Schreibweise:

Ist $\omega = a_I \, dx_I$ und $\varphi = b_J \, dx_J$, so ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= d(a_I b_J \, dx_I \wedge dx_J) \\ &= d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \big[(da_I) b_J + a_I (db_J)\big] \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (da_I \wedge dx_I) \wedge (b_J dx_J) + db_J \wedge (a_I \, dx_I) \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Weiter gilt in lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} ddf &= d\Big(\sum_i \big((f \circ \varphi^{-1})_{x_i} \circ \varphi\big) \, dx_i\Big) \\ &= \sum_i d\big((f \circ \varphi^{-1})_{x_i} \circ \varphi\big) \wedge \, dx_i \\ &= \sum_{i,j} \big((f \circ \varphi^{-1})_{x_i x_j} \circ \varphi\big) \, dx_j \wedge \, dx_i \\ &= \sum_{j<i} \Big(\big((f \circ \varphi^{-1})_{x_i x_j} - (f \circ \varphi^{-1})_{x_j x_i}\big) \circ \varphi\Big) \, dx_j \wedge \, dx_i \; = \; 0, \end{aligned}$$

wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen, und daher

$$\begin{aligned} dd(a_I \, dx_I) &= d(da_I \wedge dx_I) \\ &= dda_I \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I) \; = \; 0. \end{aligned}$$

∎

Bemerkung: Ist $V \subset U$ offen und $\omega \in \Omega^q(U)$, so ergibt sich sofort aus der Definition:

$$d(\omega|_V) = (d\omega)|_V.$$

3.1.5. Satz

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung und $\omega \in \Omega^q(Y)$, so ist

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega).$$

Beweis: In lokalen Koordinaten sei $\omega = a\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= d\big((a \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q}\big) \\ &= d(a \circ \Phi) \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q} + (a \circ \Phi)\, d(d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q}) \\ &= \Phi^*(da) \wedge \Phi^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \Phi^*(dy_{i_q}) \\ &= \Phi^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}) \;=\; \Phi^*(d\omega). \end{aligned}$$

■

3.1.6. Satz

$\Phi : X \to Y$ und $\Psi : Y \to Z$ seien differenzierbare Abbildungen, $\omega \in \Omega^q(W)$. Dann ist

$$(\Psi \circ \Phi)^*\omega = \Phi^*(\Psi^*\omega).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \big((\Psi \circ \Phi)^*\omega\big)_x(v_1, \ldots, v_q) &= \omega_{\Psi\circ\Phi(x)}\big((\Psi \circ \Phi)_{*,x}v_1, \ldots, (\Psi \circ \Phi)_{*,x}v_q\big) \\ &= (\Psi^*\omega)_{\Phi(x)}\big(\Phi_{*,x}v_1, \ldots, \Phi_{*,x}v_q\big) \\ &= \big(\Phi^*(\Psi^*\omega)\big)_x(v_1, \ldots, v_q). \end{aligned}$$

■

3.1.7. Lemma von Poincaré

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $\mathbf{0}$. Ist $\omega \in \Omega^q(U)$ und $d\omega = 0$, so gibt es eine Differentialform $\varphi \in \Omega^{q-1}(U)$ mit $d\varphi = \omega$.

Beweis: Wir benutzen folgende Idee: Es gibt eine Abbildung

$$I : \Omega^q(U) \to \Omega^{q-1}(U) \quad \text{mit} \quad \omega = I(d\omega) + d(I\omega).$$

Ist dann $d\omega = 0$, so ist $\omega = d(I\omega)$.

Es reicht, Formen vom Typ $\omega = a\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ zu betrachten. Dann setzen wir

$$I\omega := \Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\, P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}),$$

mit

$$P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Es ist $d(P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x})) = q\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu a(t\mathbf{x}) \cdot D_j(tx_\nu) = t \cdot D_j a(t\mathbf{x}).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= d\Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \cdot dP_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{q-1} \frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\, dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \Big(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{q} D_j a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\, dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \Big(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (D_j a)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Ist $\{j, i_1, \ldots, i_q\} = \{k_1, \ldots, k_{q+1}\}$ mit $1 \le k_1 < \ldots < k_{q+1} \le n$, so ist

$$dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} = \delta(j, i_1, \ldots, i_q)\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{q+1}},$$

also

$$\begin{aligned} P_{k_1\ldots k_{q+1}}(\mathbf{x}) &= x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^{\nu} x_{i_\nu}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
I(d\omega) \;=\; & \sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\,dt\Big) x_j\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q} \\
& + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{q}(-1)^{\nu}\Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\,dt\Big) x_{i_\nu}\, dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_{i_\nu}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q} \\
= \;& \int_0^1 \Big(t^q\cdot\sum_{j=1}^{n}(D_j a)(t\mathbf{x})x_j\Big)\,dt\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q} \\
& - \sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,dx_j\wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}
& d(I\omega) + I(d\omega) \;= \\
& \quad = \int_0^1 \Big(qt^{q-1}a(t\mathbf{x}) + t^q\cdot\sum_{j=1}^{n}(D_j a)(t\mathbf{x})x_j\Big)\,dt\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q} \\
& \qquad + \sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^q D_j a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,dx_j\wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
& \qquad - \sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,dx_j\wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
& \quad = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t^q a(t\mathbf{x})\Big)\,dt\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q} \;=\; \omega.
\end{aligned}$$

■

Definition

Eine Differentialform ω vom Grad p heißt ***geschlossen***, wenn $d\omega = 0$ ist. Sie heißt ***exakt***, wenn es eine Differentialform φ vom Grad $p-1$ mit $d\varphi = \omega$ gibt.

3.1.8. Satz

Auf einer Mannigfaltigkeit X ist jede exakte Differentialform geschlossen.

Ist ω eine geschlossene Differentialform auf X, so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$, so dass $\omega|_U$ exakt ist.

Der Beweis ist klar.

3.2 Orientierungen

Definition

Zwei **geordnete** Basen $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ eines n-dimensionalen Vektorraumes V heißen ***gleichorientiert***, falls der durch $T(a_i) = b_i$ gegebene Automorphismus von V eine positive Determinante besitzt.

Die Menge der geordneten Basen von V wird durch die Relation „gleichorientiert“ in zwei Äquivalenzklassen zerlegt. Basen in zwei verschiedenen Klassen gehen durch einen Automorphismus mit negativer Determinante auseinander hervor. Die Äquivalenzklasse der geordneten Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ bezeichnen wir mit $[a_1, \ldots, a_n]$. Eine „Orientierung“ von V ist durch die Auswahl einer geordneten Basis und damit durch die Auswahl einer der beiden Klassen gegeben.

Definition

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mit $\mathrm{Or}(V)$ bezeichnet man die Menge der beiden Äquivalenzklassen von geordneten Basen von V. Ihre Elemente bezeichnet man als die beiden ***Orientierungen*** von V.

Ist $\beta \in \mathrm{Or}(V)$ eine Orientierung von V, so nennt man die andere Orientierung die ***entgegengesetzte Orientierung*** und bezeichnet sie mit $-\beta$.

Weil $(Ta_1) \wedge \ldots \wedge (Ta_n) = (\det T) \cdot a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ ist, zeichnet jede Orientierung von V eine Halbgerade in dem 1-dimensionalen Raum $\bigwedge^n(V) := A^n(V^*)$ aus, kann also durch einen nicht-verschwindenden n-Vektor repräsentiert werden. Die Klasse $[a_1, \ldots, a_n]$ wird durch den n-Vektor $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ repräsentiert.

Normalerweise kann keine der beiden Orientierungen ausgezeichnet werden. Der $\mathbb{R}^n$ hat hier eine Sonderstellung inne. Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ heißt ***positiv orientiert***, wenn sie in der Orientierungsklasse der (in natürlicher Weise geordneten) Standardbasis $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ liegt. Die positive Orientierung des $\mathbb{R}^n$ wird also durch den n-Vektor $\mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n$ repräsentiert.

Zum Beispiel repräsentiert $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ die positive Orientierung des $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ aber die negative Orientierung.

3.2.1. Satz

Ist V ein n-dimensionaler orientierter Vektorraum mit Skalarprodukt, so gibt es genau eine alternierende n-Form Ω_V, so dass

$$\Omega_V(a_1, \ldots, a_n) = 1$$

für jede positiv orientierte ON-Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ von V ist.

Beweis: Wir wählen eine spezielle positiv orientierte ON-Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ und die dazu duale Basis $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$. Dann setzen wir

$$\Omega_V := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

Offensichtlich ist $\Omega_V(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine andere (ebenfalls positiv orientierte) ON-Basis, so geht sie aus $(a_1, \ldots, a_n)$ durch eine Transformation T mit $\det(T) = 1$ hervor (vgl. Lineare Algebra). Andererseits gilt allgemein:

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(Ta_1, \ldots, Ta_n) = \det(T) \cdot \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(a_1, \ldots, a_n).$$

Also ist auch $\Omega_V(b_1, \ldots, b_n) = 1$. ∎

Definition

Die n-Form Ω_V heißt die durch die Orientierung und das Skalarprodukt bestimmte ***Volumenform*** von V. Speziell wird die durch das euklidische Skalarprodukt und die positive Orientierung des $\mathbb{R}^n$ bestimmte Volumenform Δ als ***Determinantenform*** bezeichnet.

Ist $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ die duale Basis zur Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\Delta = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n.$$

Ist M eine (n, n)-Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, so ist

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(M).$$

Es sei weiterhin V ein n-dimensionaler orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus zwischen V und V^*. Jedem Vektor $a \in V$ wird die durch $\lambda_a(v) = \langle a\,,\, v\rangle$ bestimmte Linearform $\lambda_a \in V^*$ zugeordnet. Die Zuordnung hängt nur vom Skalarprodukt ab, die Orientierung spielt dabei keine Rolle. Das Skalarprodukt muss auch nicht unbedingt positiv definit sein. Es reicht, dass eine nicht entartete Bilinearform vorliegt (z.B. das Minkowski-Produkt im $\mathbb{R}^4$: $\langle x\,,\, y\rangle_m := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$).

Wir wollen nun den Raum $A^{n-1}(V)$ untersuchen. Dabei brauchen wir nicht nur das Skalarprodukt, sondern auch die Orientierung. Es sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die zugehörige duale Basis.

Eine Basis von $A^{n-1}(V)$ bilden die n (n-1)-Formen

$$\omega^i := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei das Dach über α^i bedeutet, dass dieser Faktor weggelassen werden soll. Man erhält also die Formen

$$\omega^1 = \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \omega^2 = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \ldots, \quad \omega^n = \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1}.$$

3.2.2. Satz (Die kanonische $(n-1)$-Form zu einem Vektor)

Es gibt zu jedem Vektor $v \in V$ genau eine $(n-1)$-Form $\Lambda_v \in A^{n-1}(V)$, so dass gilt:

$$\varphi \wedge \Lambda_v = \varphi(v) \cdot \Omega_V, \qquad \text{für alle } \varphi \in V^*.$$

In Koordinaten: Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis, sowie $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$, so ist

$$\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

Beweis: Der Eindeutigkeitsbeweis liefert auch gleich die Formel:

Wenn es eine Form $\Lambda_v = \sum_{j=1}^{n} c_j \omega_j$ mit der geforderten Eigenschaft gibt, so muss für $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$ gelten:

$$\begin{aligned}
v_i \cdot \Omega_V &= \alpha^i(v) \cdot \Omega_V \\
&= \alpha^i \wedge \Lambda_v \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \ldots \wedge \alpha^n \\
&= c_i \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Omega_V.
\end{aligned}$$

Also ist dann $\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n$.

Da jede Linearform φ eine Linearkombination der α^i ist, folgt ganz leicht, dass die so definierte Form Λ_v die gewünschte Eigenschaft hat. ∎

Speziell gilt: Ist λ_a die durch $\lambda_a(v) = \langle a\,,\, v \rangle$ gegebene Linearform, so ist

$$\lambda_a \wedge \Lambda_v = \langle a\,,\, v \rangle \Omega_V.$$

3.2.3. Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir benutzen das euklidische Skalarprodukt und als Orthonormalbasis die Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ der Einheitsvektoren. Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\lambda_{\mathbf{a}} = a_1 \varepsilon^1 + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^2$$

und

$$\Lambda_{\mathbf{a}} = a_1 \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + a_2 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + a_3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= a_1(v_2w_3 - v_3w_2) + a_2(v_3w_1 - v_1w_3) + a_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Außerdem ist $\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \Lambda_{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\Delta$.

3.2.4. Satz

Sind $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, *so gibt es genau einen Vektor* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, *so dass*

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{a} = \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a}) = \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

für alle Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ *gilt.*

BEWEIS: Durch $\mathbf{a} \mapsto \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a})$ wird eine Linearform gegeben. Es muss also einen (eindeutig bestimmten) Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ geben, so dass $\lambda_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a})$ ist. Wir setzen dann $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \mathbf{z}$. ∎

Man nennt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ das ***Vektorprodukt*** von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

3.2.5. Satz (Eigenschaften des Vektorproduktes)

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$.

2. $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *ist bilinear und alternierend.*

3. $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

4. *Ist* $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ *eine positiv orientierte ON-Basis des* $\mathbb{R}^3$, *so gilt:*

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \text{ und } \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2.$$

BEWEIS: 1) Die Komponenten von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sind die drei Zahlen $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{e}_i = \Lambda_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{v},\mathbf{w})$, $i = 1,2,3$. Dabei ist $\Lambda_{\mathbf{e}_1} = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$, $\Lambda_{\mathbf{e}_2} = \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1$ und $\Lambda_{\mathbf{e}_3} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$.

2) ergibt sich aus den Eigenschaften der Determinantenform.

3) Es ist

$$\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \Delta(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$$

und analog auch $\mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \Delta(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$.

4) Aus (2) ergibt sich, dass $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ senkrecht steht. Sei nun $A = \{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$, also $\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$.

A ist genau dann positiv orientiert, wenn $\Delta(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) > 0$ ist. Weil die $\mathbf{a}_i$ die Zeilen einer Orthogonalmatrix bilden, muss dann sogar $\Delta(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) = 1$ gelten.

Es muss $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = c_{12} \cdot \mathbf{a}_3$ sein, mit einem geeigneten Faktor $c_{12} \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$c_{12} = c_{12} \cdot (\mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \bullet \mathbf{a}_3 = \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1.$$

Die beiden anderen Fälle gehen genauso. ∎

3.2.6. Satz

$\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} = \Lambda_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$.

Beweis: Wir rechnen die Formel „zu Fuß" nach:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \varepsilon^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \varepsilon^j\right) \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \\
&= \Lambda_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

∎

3.2.7. Satz

1. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}$.
2. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

Beweis: 1) Es ist

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \Lambda_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= (\lambda_{\mathbf{v}} \wedge \lambda_{\mathbf{w}})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= \lambda_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) - \lambda_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{v} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{y}) - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} \bullet \mathbf{y}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2) Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig, so kommt auf beiden Seiten Null heraus. Seien also $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig. Wendet man darauf das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, so erhält man eine ON-Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ des von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Unterraums. Mit $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ erhält man eine ON-Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ des $\mathbb{R}^3$, und es gibt Konstanten α, β, γ, ε und δ, so daß gilt:

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \gamma \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \cdot \mathbf{b} + \delta \cdot \mathbf{c}.$$

Außerdem ist

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c} = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}\bullet\mathbf{a} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{b} \\ \mathbf{b}\bullet\mathbf{a} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{b}\end{pmatrix} = 1,$$

also $\mathbf{c}\times\mathbf{a} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Damit folgt:

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u} = (\|\mathbf{v}\|\beta\cdot\mathbf{c})\times(\gamma\cdot\mathbf{a}+\varepsilon\cdot\mathbf{b}+\delta\cdot\mathbf{c}) = (\|\mathbf{v}\|\beta)\cdot(\gamma\cdot\mathbf{b}-\varepsilon\cdot\mathbf{a}),$$

sowie

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\bullet\mathbf{u})\mathbf{w} &= (\|\mathbf{v}\|\gamma)\cdot(\alpha\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}) \\ &= (\|\mathbf{v}\|\gamma\alpha)\cdot\mathbf{a}+(\|\mathbf{v}\|\beta)\cdot(\gamma\cdot\mathbf{b})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}\bullet\mathbf{u})\mathbf{v} &= (\alpha\gamma+\beta\varepsilon)\cdot(\|\mathbf{v}\|\cdot\mathbf{a}) \\ &= (\|\mathbf{v}\|\gamma\alpha)\cdot\mathbf{a}+(\|\mathbf{v}\|\beta)\cdot(\varepsilon\cdot\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das die gewünschte Formel. ∎

Definition

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Unter einer ***Orientierung*** μ von X versteht man die Wahl von Orientierungen μ_x für jeden Tangentialraum $T_x(X)$, so dass es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und differenzierbare Vektorfelder $\xi_1, \ldots, \xi_n$ auf U gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt:

$$[(\xi_1)_x, \ldots, (\xi_n)_x] = \mu_x.$$

Eine Mannigfaltigkeit X heißt ***orientierbar***, falls für X eine Orientierung gewählt werden kann.

Definition

Sei μ eine Orientierung auf X. Eine Karte (U,φ) mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ heißt ***positiv orientiert***, falls für alle $x \in U$ gilt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_x\right] = \mu_x.$$

3.2.8. Satz

Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas für X gibt, bei dem alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind (also positive Funktionaldeterminante haben).

Beweis: 1) Sei μ eine Orientierung von X. Man kann einen Atlas finden, der nur aus positiv orientierten Karten besteht. Da dann alle Karten (U, φ) mit $x \in U$ auf $T_x(X)$ die gleiche Orientierung induzieren, müssen die Kartenwechsel positive Funktionaldeterminante haben.

2) Sei umgekehrt ein Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von X gegeben, so dass $\det J_{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}} > 0$ auf $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist. Dann definieren alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ mit $x \in U_\alpha$ auf $T_x(X)$ die gleiche Orientierung, die wir mit μ_x bezeichnen. Durch $\mu : x \mapsto \mu_x$ wird eine Orientierung auf X gegeben, denn auf jeder Kartenumgebung ist sie durch ein n-Tupel differenzierbarer Vektorfelder festgelegt. ∎

Sei ω eine n-Form auf X. Sei (U, φ) eine Karte und $\omega_\varphi = a_\varphi \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Es ist $\omega_x = 0$ genau dann, wenn $a_\varphi(\varphi(x)) = 0$ ist. Diese Bedingung ist unabhängig von den Koordinaten. Wir schreiben dafür $\omega(x) = 0$.

Ist f eine differenzierbare Funktion auf X, so wird durch

$$(f \cdot \omega)_x = f(x) \cdot \omega_x$$

eine n-Form $f \cdot \omega$ auf X definiert. Dabei ist $(f \cdot \omega)_\varphi = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot \omega_\varphi$.

3.2.9. Satz

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit X ist genau dann orientierbar, wenn es auf X eine nirgends verschwindende stetige n-Form gibt.

Beweis: 1) Sei ω_0 eine nirgends verschwindende n-Form auf X, $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ein Atlas für X. Dann gibt es zu jedem $\iota \in I$ eine nirgends verschwindende stetige Funktion h_ι auf $B_\iota = \varphi_\iota(U_\iota) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $(\omega_0)_\iota = h_\iota \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ ist. Indem man notfalls die Koordinate x^n durch $-x^n$ ersetzt, kann man erreichen, dass stets $h_\iota > 0$ auf B_ι ist.

Nun ist

$$h_\kappa \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = (\omega_0)_\kappa = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}})\omega_\iota = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) \cdot h_\iota \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Also muss $\det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) > 0$ sein, der Atlas ist orientiert.

2) Jetzt sei vorausgesetzt, dass X orientierbar ist, und (U_ι, φ_ι) sei ein orientierter Atlas. Weiter sei $(f_\iota)_{\iota \in I}$ eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Für jedes $\iota \in I$ induziert $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ eine n-Form ω_ι auf U_ι. Auf $U_\iota \cap U_\kappa$ ist $\omega_\iota = d_{\iota\kappa} \cdot \omega_\kappa$, mit $d_{\iota\kappa} = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) \circ \varphi_\kappa > 0$. Die Form $f_\iota \cdot \omega_\iota$ ist eine n-Form auf X mit Träger in U_ι. Wir setzen

$$\omega_0 := \sum_{\iota \in I} f_\iota \cdot \omega_\iota.$$

Sei $x \in X$, I_0 die endliche Menge aller $\iota \in I$ mit $x \in \mathrm{Tr}(f_\iota)$ und $\iota_0 \in I_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\omega_0)_x &= \sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) \cdot (\omega_\iota)_x \\ &= \Big(\sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) d_{\iota\iota_0}(x)\Big) \cdot (\omega_{\iota_0})_x.\end{aligned}$$

Weil $f_\iota(x) \geq 0$, $\sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) = 1$ und $d_{\iota\iota_0}(x) > 0$ ist, folgt: $(\omega_0)_x \neq 0$. ∎

Ist X zusammenhängend, so nennt man zwei nirgends verschwindende n-Formen ω_1, ω_2 äquivalent, falls es eine überall positive stetige Funktion f auf X gibt, so dass $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ ist. Eine Orientierung von X entspricht der Auswahl einer Äquivalenzklasse.

Es ist relativ leicht, Beispiele von orientierbaren Mannigfaltigkeiten anzugeben. Schwieriger ist es, die Nicht-Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit zu beweisen. Da hilft der folgende kleine Satz:

3.2.10. Satz

Sei X eine orientierbare Mannigfaltigkeit, (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten. Sind U und V zusammenhängend, so kann $\det J_{\psi \circ \varphi^{-1}}$ *auf $\varphi(U \cap V)$ nirgends das Vorzeichen wechseln.*

BEWEIS: Sei μ eine Orientierung auf X. Die Koordinaten auf U bzw. V seien mit $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ bezeichnet. Außerdem sei $\xi_\nu := \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ auf U und $\eta_\nu := \dfrac{\partial}{\partial y_\nu}$ auf V.

Weil U zusammenhängend ist, ist $\big(\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\big)$ entweder in jedem Punkt $x \in U$ positiv orientiert oder in jedem Punkt negativ orientiert (denn $\xi_1(x) \wedge \ldots \wedge \xi_n(x)$ ist stetig und hat keine Nullstellen). Eine entsprechende Aussage gilt für V und die η_μ.

Sei $f := \operatorname{sign} \det J_{\psi \circ \varphi^{-1}}$ auf $\varphi(U \cap V)$. Sind beide Karten positiv orientiert oder beide negativ orientiert, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. Sind sie entgegengesetzt orientiert, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv -1$. Auf jeden Fall ist f konstant. ∎

3.2.11. Beispiele

A. Wir wollen zeigen, dass die Sphäre S^{n-1} orientierbar ist.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ sei eine $(n-1)$-Form ω_0 definiert durch $(\omega_0)_{\mathbf{x}} := \Lambda_{\mathbf{x}}$. Dann ist

$$(\omega_0)_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i (-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Ist $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ und $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ eine Basis von $T_{\mathbf{x}}(S^{n-1})$, so ist $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und daher

$$(\omega_0)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \det\big(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\big) \neq 0.$$

Also ist $\omega_0|_{S^{n-1}}$ eine nirgends verschwindende $(n-1)$-Form und S^{n-1} damit orientierbar.

B. Sei $X = \mathbb{R}P^2$, mit den Karten

$$\varphi_0(x : y : z) := \Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big), \quad \varphi_1(x : y : z) := \Big(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\Big) \text{ und } \varphi_2(x : y : z) := \Big(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\Big).$$

Die Definitionsbereiche $U_0 = \{x \neq 0\}$, $U_1 = \{y \neq 0\}$ und $U_2 = \{z \neq 0\}$ sind alle diffeomorph zum $\mathbb{R}^2$ und damit zusammenhängend.

Es ist $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(s,t) = \varphi_1(1 : s : t) = \Big(\dfrac{1}{s}, \dfrac{t}{s}\Big)$, also

$$\det J_{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}}(s,t) = \det \begin{pmatrix} -1/s^2 & 0 \\ -t/s^2 & 1/s \end{pmatrix} = -1/s^3.$$

Diese Funktion nimmt auf $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, s \neq 0\}$ zwei verschiedene Vorzeichen an. Also ist $\mathbb{R}P^2$ nicht orientierbar.

Sei X eine n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine ***transversale*** oder ***äußere Orientierung*** von Y in $y_0 \in Y$ ist eine Orientierung auf $(N_X(Y))_{y_0}$. Eine ***innere Orientierung*** von Y in y_0 ist eine Orientierung auf $T_{y_0}(Y)$.

Hat man auf X eine feste Orientierung gewählt, so bedingen sich innere und transversale Orientierung gegenseitig. Wie, das kann willkürlich festgelegt werden. Man hat sich auf folgende Konvention geeinigt: Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $T_{y_0}(X)$, so dass die Restklassen $\overline{v}_{k+1}, \ldots, \overline{v}_n$ eine Basis von $(N_X(Y))_{y_0} = T_{y_0}(X)/T_{y_0}(Y)$ und die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $T_{y_0}(Y)$ bilden. Die transversale Orientierung $[\overline{v}_{k+1}, \ldots, \overline{v}_n]$ entspricht der inneren Orientierung $[v_1, \ldots, v_k]$, falls $[v_{k+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_k]$ die positive Orientierung von $T_{x_0}(X)$ ist.

Der Zusammenhang ist nicht spiegelungsinvariant. Kehrt man die Orientierung von X um, behält aber die von Y bei, so ändert sich die Richtung der transversalen Orientierung.

3.2.12. Satz

Sei X eine orientierbare Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Ist $N_X(Y)$ trivial, so ist auch Y orientierbar.

BEWEIS: Sei $\dim(X) = n$ und $q := \operatorname{codim}(Y, X)$. Dann gibt es globale Schnitte $\nu_1, \ldots, \nu_q \in \Gamma(Y, N_X(Y))$, die das Normalenbündel in jedem Punkt $y \in Y$ erzeugen.

Sei $\varepsilon : T(X)|_Y \to N_X(Y)$ die kanonische Projektion. Es gibt eine offene Überdeckung (U_α) von Y in X und Schnitte $N_\alpha^i \in \Gamma(U_\alpha, T(X))$ mit $\varepsilon(N_\alpha^i(y)) = \nu_i(y)$

für $y \in U_\alpha \cap Y$. Ist (e_α) eine Teilung der 1 zur Überdeckung (U_α), so setzen wir $N^i := \sum_\alpha e_\alpha N^i_\alpha|_Y$. Dann ist $N^i \in \Gamma(Y, T(X)|_Y)$ für $i = 1, \dots, q$, und

$$\varepsilon(N^i(y)) = \sum_\alpha e_\alpha(y)\varepsilon(N^i_\alpha(y)) = \sum_\alpha e_\alpha(y)\nu_i(y) = \nu_i(y).$$

Sei ω eine nirgends verschwindende n-Form auf X. Dann sei die $(n-q)$-Form ω_0 auf Y definiert durch

$$(\omega_0)_y(v_1, \dots, v_{n-q}) := \omega_y(N^1(y), \dots, N^q(y), v_1, \dots, v_{n-q}) \neq 0.$$

Offensichtlich ist dies eine nirgends verschwindende differenzierbare $(n-q)$-Form auf Y: Damit ist Y orientierbar. ■

Ein Spezialfall ist die folgende Situation: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge, $f : B \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $c \in \mathbb{R}$ und $Y := f^{-1}(c) \neq \varnothing$. Ist $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in Y$, so ist Y eine orientierbare Untermannigfaltigkeit. Das Gradientenfeld von f definiert ein nirgends verschwindendes Normalenfeld auf Y. Das liefert z.B. auch eine Orientierung auf S^{n-1}.

Sei X eine beliebige n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit,

$$\widetilde{X} := \dot{\bigcup_{x \in X}} \operatorname{Or}(T_x(X)), \quad p : \widetilde{X} \to X \text{ die kanonische Projektion.}$$

Ist (U, φ) eine Karte für X, so induziert φ auf jedem Tangentialraum $T_x(X)$, $x \in U$, eine Orientierung $\mu_x(\varphi)$. Sei

$$\widetilde{U} := \{(x, \mu_x(\varphi)) \,:\, x \in U\} \quad \text{und} \quad \widetilde{\varphi} := \varphi \circ p : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n.$$

Offensichtlich bildet $\widetilde{\varphi}$ die Menge $\widetilde{U}$ bijektiv auf die offene Menge $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ab, und die Menge solcher $\widetilde{U}$ überdeckt $\widetilde{X}$ (denn zu jeder Karte gibt es eine entsprechende mit entgegengesetzter Orientierung.

Seien nun zwei Karten $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ und $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ gegeben. Ist $(x_0, \mu_0) \in \widetilde{U} \cap \widetilde{V}$, so ist $\mu_{x_0}(\varphi) = \mu_0 = \mu_{x_0}(\psi)$, d.h., die Karten φ und ψ sind in x_0 gleichorientiert, es ist $\det J_{\varphi\circ\psi^{-1}}(\psi(x_0)) > 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $W = W(\psi(x_0)) \subset \psi(U \cap V)$, auf der $\det J_{\varphi\circ\psi^{-1}} > 0$ ist. Also ist $\mu_x(\varphi) = \mu_x(\psi)$ für $x \in \psi^{-1}(W)$. Damit liegt W auch in $\widetilde{\psi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V})$, und diese Menge ist offen.

Außerdem ist $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ auf $\widetilde{\psi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{V})$.

Man erhält eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf $\widetilde{X}$. Die Hausdorff-Eigenschaft zeigt man ähnlich wie bei den Vektorbündeln, das zweite Abzählbarkeitsaxiom ist erfüllt.

Außerdem ist $p : \widetilde{X} \to X$ eine zweiblättrige Überlagerung, zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x) \subset X$, so dass $p^{-1}(U)$ diffeomorph zu $U \times \mathbb{Z}_2$ ist. Man nennt $\widetilde{X}$ die *Orientierungsüberlagerung* von X.

3.2.13. Satz

Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn $\widetilde{X}$ nicht zusammenhängend ist.

BEWEIS: 1) Sei X orientierbar und ω eine nirgends verschwindende n-Form auf X, wodurch eine Orientierung μ festgelegt wird. Dann induziert ω eine stetige Abbildung $s : X \to \widetilde{X}$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$, und $s(X)$ ist zusammenhängend. Die Abbildung s ist ein lokaler Homöomorphismus (denn wenn (U, φ) eine positiv orientierte Karte ist, dann ist $s(x) = (x, \mu_x)$ für $x \in U$, also $s|_U = (p|_{\widetilde{U}})^{-1}$). Damit ist s offen. Sei nun (y_ν) eine Folge in $s(X)$, die in $\widetilde{X}$ gegen einen Punkt y_0 konvergiert, sowie $x_\nu \in X$ mit $s(x_\nu) = y_\nu$. Aus Stetigkeitsgründen konvergiert $x_\nu = p \circ s(x_\nu) = p(y_\nu)$ gegen $p(y_0)$, und $y_\nu = s(x_\nu)$ gegen $s \circ p(y_0)$. Damit liegt $y_0 = s \circ p(y_0)$ in $s(X)$, d.h., $s(X)$ ist abgeschlossen. Es folgt, dass $s(X)$ eine Zusammenhangskomponente von $\widetilde{X}$ ist. Weil $s(U)$ eins der beiden Blätter von $p^{-1}(U)$ ist, ist $s(X) \neq \widetilde{X}$, also $\widetilde{X}$ nicht zusammenhängend.

2) Sei $\widetilde{X}$ nicht zusammenhängend, $X_1 \subset \widetilde{X}$ eine Zusammenhangskomponente. Dann ist $p|_{X_1} : X_1 \to X$ ein Diffeomorphismus (denn $p|_{X_1}$ ist eine Überlagerung, also $p(X_1) = X$, und diese Überlagerung ist einblättrig). Die Umkehrabbildung $s : X \to X_1 \subset \widetilde{X}$ definiert wie folgt eine Orientierung auf X:

Sei $s(x) = (x, \mu_x)$. Dann gibt es in x eine Karte φ, die die Orientierung μ_x induziert. Wegen der Stetigkeit von s stimmen die durch φ bzw. s bestimmten Orientierungen in einer ganzen Umgebung überein. Der Wechsel zwischen zwei solchen Karten hat offensichtlich positive Funktionaldeterminante. Also ist X orientierbar. ∎

3.3 Integration

Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ ein stetige n-Form mit kompaktem Träger auf B. Dann setzt man

$$\int_B \omega := \int_B f(\mathbf{x})\,dx_1 \ldots dx_n.$$

3.3.1. Satz

Sei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$, ω eine n-Form mit kompaktem Träger auf V. Dann ist

$$\int_U \Phi^*\omega = \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \int_V \omega.$$

Beweis: Sei $\omega = f\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Die Transformationsformel liefert:

$$\begin{aligned}
\int_u \Phi^*\omega &= \int_U (f \circ \Phi) \cdot \det(J_\Phi)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\
&= \int_U f(\Phi(\mathbf{x})) \cdot \det J_\Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\
&= \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \cdot \int_U f(\Phi(\mathbf{x})) \cdot |\det J_\Phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \\
&= \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \cdot \int_V f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&= \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \cdot \int_V \omega.
\end{aligned}$$

■

Definition

Es sei X eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit, (U, φ) eine positiv orientierte Karte und ω eine stetige n-Form auf X mit kompaktem Träger in U. Dann setzen wir

$$\int_X \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Die Definition hängt nicht von der gewählten Karte ab. Ist (V, ψ) eine weitere positiv orientierte Karte mit $\mathrm{Tr}(\omega) \subset V$, so ist

$$\begin{aligned}\int_{\psi(V)}(\psi^{-1})^*\omega &= \int_{\psi(U\cap V)}(\psi^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\varphi(U\cap V)}(\psi\circ\varphi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\varphi(U\cap V)}(\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(U)}(\varphi^{-1})^*\omega.\end{aligned}$$

Es sei jetzt $(U_\iota,\varphi_\iota)_{\iota\in I}$ ein orientierter Atlas für X und $(f_\iota)_{\iota\in I}$ eine dazu passende Teilung der Eins.

Definition

Ist ω eine stetige n-Form mit kompaktem Träger auf X, so setzen wir

$$\int_X \omega := \sum_{\iota\in I}\int_X f_\iota\cdot\omega.$$

Wir müssen uns erst mal überlegen, dass diese Definition sinnvoll ist.

1) Nach Voraussetzung ist $K := \mathrm{Tr}(\omega)$ kompakt. Zu jedem $x\in K$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x)$, die nur für endlich viele ι den Träger von f_ι trifft. Da man K mit endlich vielen solchen Umgebungen überdecken kann, ist die Summe in der Integraldefinition endlich.

2) Sei $(V_\nu)_{\nu\in N}$ ein weiterer (gleich-orientierter) Atlas und $(g_\nu)_{\nu\in N}$ eine dazu passende Teilung der Eins. Dann ist $f_\iota g_\nu = 0$ für fast alle (ι,ν), und es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_\iota\int_X f_\iota\omega &= \sum_\iota\int_X\big(\sum_\nu g_\nu\big)f_\iota\omega = \sum_{\iota,\nu}\int_X g_\nu f_\iota\omega \\ &= \sum_\nu\int_X\big(\sum_\iota f_\iota\big)g_\nu\omega = \sum_\nu\int_X g_\nu\omega.\end{aligned}$$

3.3.2. Eigenschaften des Integrals

Sei X eine orientierte Mannigfaltigkeit, sowie ω, ω_1 und ω_2 n-Formen mit kompaktem Träger auf X: Dann gilt:

1. *Sind $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, so ist $\int_X(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1\int_X\omega_1 + c_2\int_X\omega_2$.*
2. *Ist X^- die gleiche Mannigfaltigkeit mit entgegengesetzter Orientierung, so ist $\int_{X^-}\omega = -\int_X\omega$.*
3. *Ist $\Phi : Y\to X$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, so ist $\int_X\omega = \int_Y\Phi^*\omega$.*

Der Beweis ist trivial.

Unter einer ***Nullmenge*** im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine Lebesgue-Nullmenge.

3.3.3. Satz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann-)integrierbar, wenn $\{\mathbf{x} \in Q \,:\, f \text{ nicht stetig in } \mathbf{x}\}$ eine Nullmenge ist.

BEWEIS: Siehe Analysis 2. ∎

Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ soll ***Integrationsbereich*** heißen, wenn ihr Rand eine Nullmenge ist. Jede beschränkte stetige Funktion auf M ist (Riemann-)integrierbar (denn die Menge der Unstetigkeitsstellen der trivialen Fortsetzung von f ist in ∂M enthalten).

3.3.4. Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Dann gibt es einen kompakten Integrationsbereich M mit $K \subset M \subset U$.

BEWEIS: Man überdecke K durch endlich viele offene Kugeln $B_1, \ldots, B_N$, deren abgeschlossene Hüllen in U enthalten sind. Dann kann man $M := \overline{B}_1 \cup \ldots \cup \overline{B}_N$ setzen. ∎

3.3.5. Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset U$ eine Nullmenge und $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist auch $\mathbf{F}(A)$ eine Nullmenge.

BEWEIS: Siehe Analysis 2. ∎

3.3.6. Folgerung

Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $m < n$ und $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so ist $\mathbf{F}(U)$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Sei $\widehat{U} := U \times \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\widehat{\mathbf{F}} : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') := \mathbf{F}(\mathbf{x}')$. Dann ist $\widehat{U}$ eine Nullmenge, $\widehat{\mathbf{F}}$ differenzierbar und $\widehat{\mathbf{F}}(\widehat{U}) = \mathbf{F}(U)$. Die Behauptung folgt aus dem obigen Satz. ∎

Definition

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset X$ heißt ***Nullmenge***, falls $\varphi(N \cap U)$ für jede Karte (U, φ) eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ ist.

Wegen der obigen Ergebnisse ist die Definition nicht von gewählten Karten abhängig. Das Komplement einer Nullmenge ist dicht in X.

3.3.7. Satz

Sei X eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. $G_1, \ldots, G_k$ seien (offene) Integrationsbereiche im $\mathbb{R}^n$, $U_1, \ldots, U_k$ offene Mengen in X und $\varphi_i : \overline{G}_i \to X$ differenzierbare Abbildungen, so dass gilt:

1. *$\overline{U}_i = \varphi_i(\overline{G}_i)$ ist kompakt und ∂U_i ist eine Nullmenge, für $i = 1, \ldots, k$.*
2. *$\varphi_i : G_i \to U_i$ ist ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, für $i = 1, \ldots, k$.*
3. *Für $i \neq j$ ist $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \partial U_i \cap \partial U_j$.*

Dann ist

$$\int_X \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\overline{G}_i} \varphi_i^* \omega$$

für jede n-Form ω auf X mit kompaktem Träger in $\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_k$.

Zum Beweis setze man alle vorangegangenen Ergebnisse zusammen.

3.3.8. Beispiel

Sei $a > 1$. Lässt man den Kreis $(x_1 - a)^2 + x_3^2 = 1$ um die x_3-Achse rotieren, so entsteht ein „Torus“ X, eine 2-dimensionale kompakte (und orientierbare) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Der Torus kann parametrisiert werden durch

$$\psi(u, v) := ((a + \cos v)\cos u, (a + \cos v)\sin u, \sin v).$$

Dabei sei ψ auf $Q := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi\}$ definiert. Dann ist

$$\int_X \omega = \int_Q \psi^* \omega$$

für jede 2-Form ω auf X.

Sei etwa $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$ (worunter eigentlich die Einschränkung dieser Differentialform auf X zu verstehen ist). Dann ist

$$\begin{aligned} \psi^*(dx_1 \wedge dx_2) &= (a + \cos v)\sin v\, du \wedge dv, \\ \psi^*(dx_3 \wedge dx_1) &= (a + \cos v)\sin u \cos v\, du \wedge dv \\ \text{und} \quad \psi^*(dx_2 \wedge dx_3) &= (a + \cos v)\cos u \cos v\, du \wedge dv. \end{aligned}$$

also

$$\psi^* \omega = (a + \cos v)(1 + a\cos v)\, du \wedge dv$$

und

$$\int_X \omega = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} \big[a(1+\cos^2 v) + (1+a^2)\cos v \big]\, du \Big)\, dv = 6\pi^2 a,$$

denn es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos v\, dv = 0, \quad \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \text{ und } \int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv = \pi.$$

Bemerkung: Es gibt auch eine Integrationstheorie für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten.

Ist X eine beliebige Mannigfaltigkeit und $p : \widetilde{X} \to X$ die Orientierungsüberlagerung, sowie $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, so verstehen wir unter einem ***axialen Schnitt*** in E eine Abbildung $s : \widetilde{X} \to E$ mit $\pi \circ s = p$. Dadurch wird jedem Punkt $x \in X$ und jeder Orientierung μ_x in x ein Element $s(\mu_x) \in E_x$ zugeordnet.

Auf diese Weise kann man „axiale“ (also orientierungsabhängige) Differentialformen definieren. Ist (U, φ) eine Karte für X und ω eine axiale n-Form auf X, so definiert man die n-Form ω_φ auf U durch

$$\omega_\varphi := \omega\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big].$$

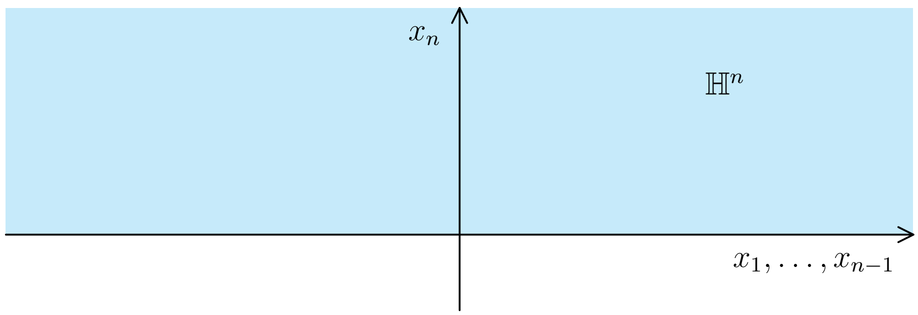
Damit ist klar, wie eine axiale n-Form mit Träger in einer Kartenumgebung zu integrieren ist. Da in der Transformationsformel nur der Betrag der Funktionaldeterminante zum Einsatz kommt, ist die Integraldefinition unabhängig von der Karte. Bei einer beliebigen axialen n-Form benutzt man wie üblich eine Teilung der Eins.

Ist X eine orientierbare Mannigfaltigkeit, so erhält man auf diese Weise ein orientierungsunabhängiges Integral. In der Literatur wird zu diesem Zweck oftmals der Begriff der „Dichte“ eingeführt.

3.4 Der Satz von Stokes

Es sei $\mathbb{H}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n \geq 0\}$. Dann ist

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n = 0\}.$$



Der Halbraum $\mathbb{H}^n$ werde mit der Relativtopologie versehen.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt ***topologische Mannigfaltigkeit mit Rand***, falls gilt:

1. X ist ein Hausdorffraum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
2. Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$, eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{H}^n$ und eine topologische Abbildung $\varphi : U \to W$. Man spricht dann von einer ***Karte*** für X.

Sei $U \subset \mathbb{H}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset W$ und eine differenzierbare Funktion $\widehat{f} : W \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\widehat{f}|_U = f$ ist.

Definition

Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) für X heißen ***differenzierbar verträglich***, falls $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ differenzierbar ist.

X heißt ***differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand***, falls es für X einen Atlas mit paarweise differenzierbar verträglichen Karten gibt.

Ein Punkt $a \in X$ heißt ***innerer Punkt*** von X, falls eine Karte (U, φ) mit $a \in U$ existiert, so dass $\varphi(U)$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Ist a kein innerer Punkt, so nennt man a einen ***Randpunkt*** von X. Es sei $\mathrm{Int}(X)$ die Menge der inneren Punkte und bX die Menge der Randpunkte von X.

3.4.1. Satz

Ist X eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $a \in \mathrm{Int}(X)$ und (U, φ) eine Karte für X mit $a \in U$, so gibt es eine offene Umgebung $W = W(a) \subset U$, so dass $\varphi(W)$ offen im $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: $M := \varphi(U)$ ist eine offene Umgebung von $\mathbf{x}_0 := \varphi(a)$ in $\mathbb{H}^n$, und $\varphi^{-1} : M \to U$ ist eine differenzierbare Abbildung im oben definierten allgemeineren Sinne. Es gibt also eine offene Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset N$ und eine differenzierbare Abbildung $\varrho : N \to X$ mit $\varrho|_M = \varphi^{-1}$.

Sei (V, ψ) eine Karte für X mit $a \in V$ und $\psi(V)$ offen im $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$(\psi \circ \varrho) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) = \psi \circ (\varrho \circ \varphi) \circ \psi^{-1} = \psi \circ \psi^{-1} = \mathrm{id},$$

also $D(\psi \circ \varrho)(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \mathrm{id}$ und damit $D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x))$ invertierbar, für alle $x \in U \cap V$. Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen P von $\psi(a)$ und Q von $\varphi(a)$ (jeweils im $\mathbb{R}^n$), so dass $\varphi \circ \psi^{-1}(P) = Q$ ist. $W := \psi^{-1}(P)$ ist dann eine offene Umgebung von a in $U \cap V$, so dass $\varphi(W)$ offen im $\mathbb{R}^n$ ist. ∎

Der Satz zeigt, dass die Unterscheidung zwischen inneren Punkten und Randpunkten eindeutig ist.

3.4.2. Satz

Ist X eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist bX leer oder eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist $bbX = \varnothing$.

Beweis: Ist $x_0 \in bX$ und (U, φ) eine Karte für X, so liegt $\varphi(x_0)$ in $\partial\mathbb{H}^n$. Insbesondere ist $bX \cap U = \varphi^{-1}(\partial\mathbb{H}^n \cap \varphi(U))$.

Sei $\pi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ die durch $\pi_n(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{n-1})$ definierte Projektion. Dann ist $\pi_n \circ \varphi : bX \cap U \to \mathbb{R}^{n-1}$ eine Karte für bX. Alle diese Karten ergeben einen Atlas für X. ∎

Wir nennen die betrachteten Karten „angepasst“.

3.4.3. Beispiele

A. $X := \overline{B_r(\mathbf{0})} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand, mit $bX = \partial B_r(\mathbf{0})$.

B. Ist X_0 eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist $X := X_0 \times [0,1]$ eine $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dabei ist

$$bX = \big(X_0 \times \{0\}\big) \cup \big(X_0 \times \{1\}\big).$$

Sei X eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $a \in bX$. Mit $C_+(a)$ bezeichnen wir die Menge der Paare (U, f) mit folgenden Eigenschaften:

1. U ist eine Umgebung von a in X und f eine differenzierbare Funktion auf U.
2. $f(a) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in U$.

Definition

Ein Tangentialvektor $v \in T_a(X)$ heißt ***positiv*** oder ***innerer Normalenvektor***, falls $v(f) \geq 0$ für jedes $f \in C_+(a)$ gilt, und $v(f) > 0$ für wenigstens ein $f \in C_+(a)$.

3.4.4. Satz

Sei X eine Mannigfaltigkeit mit Rand, $a \in bX$ und (U, φ) eine angepasste Karte für X in a. Sind die lokalen Koordinaten bezüglich φ mit $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet und ist v ein positiver Tangentialvektor in a, so ist $v = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ mit $c_n > 0$.

Beweis: 1) Sei $\varphi(a) = \mathbf{0}$ und $W := \varphi(U) \subset \mathbb{H}^n$. Ist $f \geq 0$ auf W und $f(\mathbf{0}) = 0$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{0}) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0, \ldots, 0, h) - f(0, \ldots, 0)}{h} \geq 0.$$

2) Sei $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Dann hat g im Nullpunkt ein lokales Minimum, und es ist $g_{x_\nu}(\mathbf{0}) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$.

Ist $v \in T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n)$, $v = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, so ist $v(f) = c_n \cdot f_{x_n}(\mathbf{0})$. Ist also v positiv, so muss $c_n > 0$ sein. Ist umgekehrt $c_n > 0$, so ist allgemein $v(f) \geq 0$ uns speziell $v(x_n) = c_n > 0$, also v positiv. ∎

3.4.5. Satz

Sei X eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $a \in bX$. Sind $v_1, v_2 \in T_a(X)$ positiv, so gibt es ein $\lambda > 0$ mit $v_1 - \lambda v_2 \in T_a(bX)$.

Beweis: Man beschreibe beide Tangentialvektoren in lokalen Koordinaten, c_n bzw d_n sei jeweils der Koeffizient bei $\frac{\partial}{\partial x_n}$. Dann sind beide Zahlen > 0, und man kann ein $\lambda > 0$ finden, so dass $c_n - \lambda d_n = 0$ ist. Dann ist $v_1 - \lambda v_2$ Linearkombination von $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$, liegt also in $T_a(bX)$. ∎

Sei $N_a(bX) := T_a(X)/T_a(bX)$ und $\varepsilon_a : T_a(X) \to N_a(bX)$ die kanonische Projektion. Für zwei positive Tangentialvektoren $v_1, v_2 \in T_a(X)$ gibt es ein $\lambda > 0$, so dass $\varepsilon(v_1) = \lambda \cdot \varepsilon(v_2)$ ist. Die von einem positiven Tangentialvektor v induzierte

Orientierung $[\varepsilon(v)]$ von $N_a(bX)$ ist demnach eindeutig bestimmt. Man orientiert nun bX transversal so, dass $-[\varepsilon(v)]$ positiv orientiert ist.

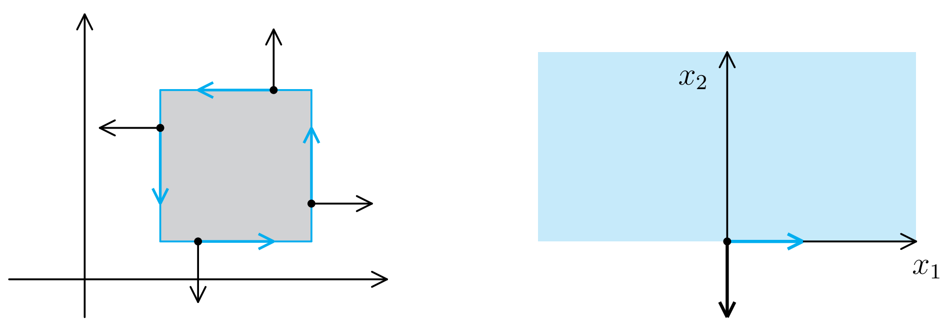
Ist φ eine angepasste positiv orientierte Karte mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, so ist $\partial/\partial x_n$ ein positiver Tangentialvektor. Nun gilt:

$$\Big[-\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big] = (-1)^n \Big[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big].$$

Also ist

$$(-1)^n \Big[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big]$$

die innere Orientierung von bX, die der kanonischen transversalen Orientierung entspricht. Fortan sei bX immer so orientiert. Dies entspricht nur dann der Standard-Orientierung des $\mathbb{R}^{n-1}$, wenn n gerade ist (also z.B. im Falle $n = 2$).



Orientierung des Randes

3.4.6. Satz von Stokes

Sei X eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, $j : bX \hookrightarrow X$ die natürliche Einbettung, ω eine $(n-1)$-Form mit kompaktem Träger auf X. Dann ist

$$\int_{bX} j^*\omega = \int_X d\omega.$$

Beweis: 1) Sei $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ein positiv orientierter angepasster Atlas, $(\varrho_\iota)_{\iota \in I}$ eine dazu passende Teilung der Eins. Dann ist $\omega = \sum_\iota \omega_\iota$ mit $\omega_\iota := \varrho_\iota \omega$, und es ist $d\omega = \sum_\iota d\omega_\iota$ und $j^*\omega = \sum_\iota j^*\omega_\iota$. Gilt schon für jedes ι die Gleichung $\int_{bX} j^*\omega_\iota = \int_X d\omega_\iota$, so ist

$$\int_{bX} j^*\omega = \sum_{\iota \in I} \int_{bX} j^*\omega_\iota = \sum_{\iota \in I} \int_X d\omega_\iota = \int_X d\omega.$$

Es genügt also, den Fall zu betrachten, dass es eine Karte (U, φ) für X mit $\operatorname{Tr}\omega \subset\subset U$ gibt.

Sei $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$ die Darstellung von ω bezüglich der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ zur Karte φ. Dann ist

$$(\varphi^{-1})^*\omega = \sum_{i=1}^{n} (a_i \circ \varphi^{-1})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

und

$$(\varphi^{-1})^*(d\omega) = d\big((\varphi^{-1})^*\omega\big) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial(a_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Schließlich sei noch $Q = [a,b]^n \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $\mathrm{Tr}\big((\varphi^{-1})^*\omega\big) \subset\subset Q$.

2) Fall (a): Es sei $bX \cap U = \varnothing$. Dann ist $\displaystyle\int_{bX} j^*\omega = 0$ und

$$\begin{aligned}
\int_X d\omega &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(d\omega) \\
&= \int_{\varphi(U)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial(a_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_Q \frac{\partial(a_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_a^b \ldots \int_a^b \frac{\partial(a_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_n \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Das folgt aus dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, da $a_i \circ \varphi^{-1}$ auf ∂Q verschwindet.

Fall (b): Nun sei $bX \cap U \neq \varnothing$. Dann ist $\varphi(U) \subset \mathbb{H}^n$ und

$$\varphi(U) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n \,:\, x_n = 0\} \neq \varnothing.$$

Es ist $\displaystyle\int_X d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial(a_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_n$,
und für $i = 1, \ldots, n-1$ ist $\displaystyle\int_{\varphi(U)} \frac{\partial(a_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_n = 0$,
das folgt mit dem gleichen Argument wie oben.

Für $i = n$ ist $\dfrac{\partial(a_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x_n}$ nur auf $[0, \infty)$ erklärt und

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(U)} \frac{\partial(a_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x_n}\, dx_1 \ldots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)} \frac{\partial(a_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x_n}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \ldots dx_{n-1},
\end{aligned}$$

also

$$\int_X d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Ist $\widetilde{\varphi} := \varphi|_{bX\cap U} : bX \cap U \to \partial\mathbb{H}^n \cap \varphi(U)$ die induzierte Karte für den Rand und $J : \partial\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^n$ die natürliche Einbettung, so ist

$$j \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \circ J$$

und

$$\int_{bX} j^*\omega = \int_{\varphi(bX\cap U)} (\widetilde{\varphi}^{-1})^*(j^*\omega) = \int_{\varphi(bX\cap U)} (j \circ \widetilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(bX\cap U)} (\varphi^{-1} \circ J)^*\omega.$$

Es ist

$$\mathrm{pr}_i \circ J(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \begin{cases} x_i & \text{für } i = 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

und damit

$$(j\circ\widetilde{\varphi}^{-1})^* dx_i = (\varphi^{-1}\circ J)^* dx_i = d(x_i\circ\varphi^{-1}\circ J) = d(\mathrm{pr}_i\circ J) = \begin{cases} dx_i & \text{für } i = 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(j \circ \widetilde{\varphi}^{-1})^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n) = \begin{cases} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} & \text{falls } i = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$(j \circ \widetilde{\varphi}^{-1})^*\omega = a_n \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}.$$

Da sich definitionsgemäß die Orientierung von bX von der kanonischen Orientierung des $\mathbb{R}^{n-1}$ um den Faktor $(-1)^n$ unterscheidet, folgt:

$$\int_{bX} j^*\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_n \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

3.4.7. Folgerung

Ist X eine orientierte n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und ω eine $(n-1)$-Form mit kompaktem Träger auf X, so ist $\displaystyle\int_X d\omega = 0$.

Ergänzung: Überlagerungen

Definition

Eine differenzierbare Abbildung $p : X \to Y$ heißt ***differenzierbare Überlagerung***, falls gilt:

1. X und Y sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten.
2. p ist surjektiv.
3. Zu jedem Punkt $y \in Y$ gibt es eine zusammenhängende offene Umgebung $V = V(y) \subset Y$, so dass jede Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(V)$ durch p diffeomorph auf V abgebildet wird.

3.4.8. Satz

Ist $p : X \to Y$ eine differenzierbare Überlagerung, so ist p offen und lokal diffeomorph. Alle Fasern $p^{-1}(y)$ haben die gleiche Kardinalität. Ist p zusätzlich injektiv, so ist p ein Diffeomorphismus.

Beweis: 1) Ist $x_0 \in X$ und $y_0 := p(x_0)$, so gibt es eine offene Umgebung $V = V(y_0)$, so dass die Zusammenhangskomponente U von x_0 in $p^{-1}(V)$ diffeomorph auf V abgebildet wird. Also ist p lokal diffeomorph.

2) Ist $M \subset X$ offen, so ist M Vereinigung von offenen Teilmengen U_ι, $\iota \in I$, die diffeomorph auf offene Mengen $V_\iota \subset Y$ abgebildet werden. Dann ist $p(M) = \bigcup_\iota V_\iota$ offen. Also ist p eine offene Abbildung.

3) Sei $y \in Y$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V = V(y) \subset Y$, so dass für die Zerlegung $p^{-1}(V) = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$ in Zusammenhangskomponenten gilt: Für jedes $\iota \in I$ ist $p|_{U_\iota} : U_\iota \to V$ ein Diffeomorphismus. Es gibt also zu jedem $\iota \in I$ genau ein $x_\iota \in U_\iota$ mit $p(x_\iota) = y$. Damit ist durch $\iota \mapsto x_\iota$ eine bijektive Abbildung von I auf $p^{-1}(y)$ gegeben. Also haben I und $p^{-1}(y)$ die gleiche Kardinalität. Das gilt für alle $y \in V$. Weil Y zusammenhängend ist, gilt es sogar für alle $y \in Y$.

4) Nach Voraussetzung ist p surjektiv. Ist p sogar injektiv und damit bijektiv, so folgt aus (1), dass p ein Diffeomorphismus ist. ∎

3.4.9. Satz

X und Y seien zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, $p : X \to Y$ eine eigentliche differenzierbare Abbildung. Ist p lokal diffeomorph, so ist p eine differenzierbare Überlagerung.

Beweis: 1) Weil p lokal diffeomorph ist, ist p eine offene Abbildung. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Es soll gezeigt werden, dass auch $p(A)$ in Y abgeschlossen ist. Sei (y_i) eine Folge in $p(A)$, die gegen ein $y_0 \in Y$ konvergiert, $y_i = p(x_i)$ mit $x_i \in A$. Sei V eine kompakte Umgebung von y_0 in Y. Für $i \geq i_0$ liege y_i in V. Weil p nach Voraussetzung eigentlich ist, ist $p^{-1}(V)$ kompakt. Die Folge der Punkte x_i, $i \geq i_0$, besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{i_k}), mit Grenzwert $x_0 \in p^{-1}(V)$. Weil A abgeschlossen ist, muss x_0 in A liegen. Da p stetig ist, konvergiert $y_{i_k} = p(x_{i_k})$ gegen $p(x_0)$. Offensichtlich muss $p(x_0) = y_0$ sein, d.h. y_0 liegt in $p(A)$.

2) Weil p eine offene und abgeschlossene Abbildung ist, ist $p(X)$ offen und abgeschlossen in Y, also $= Y$. Damit ist p surjektiv.

3) Sei $y_0 \in Y$ beliebig vorgegeben. Zu jedem $x \in p^{-1}(y_0)$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und eine offene Umgebung $V = V(y_0)$, so dass $p|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $U \cap p^{-1}(y_0) = \{x\}$, also $p^{-1}(y_0)$ eine diskrete Teilmenge von X. Weil p eigentlich ist, ist $p^{-1}(y_0)$ zudem kompakt, also eine endliche Menge, etwa $= \{x_1, \ldots, x_k\}$.

Zu jedem i gibt es eine Umgebung $\widetilde{U}_i$ von x_i, die diffeomorph auf eine Umgebung $\widetilde{V}$ von y_0 abgebildet wird. Man kann annehmen, dass $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j = \varnothing$ für $i \neq j$ ist. Sei $V := V_1 \cap \ldots \cap V_k$. Die Menge $A := X \setminus (\widetilde{U}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{U}_k)$ ist abgeschlossen in X, also ist auch $p(A)$ abgeschlossen in Y. Da $y_0 \notin p(A)$ ist, kann man V durch $V \setminus p(A)$ ersetzen, also annehmen, dass $p^{-1}(V) \subset \widetilde{U}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{U}_k$ ist. Geht man noch zu der Zusammenhangskomponente von y_0 in V über, so kann man erreichen, dass V zusammenhängend ist, $V \subset V_i$ für alle i und immer noch $p^{-1}(V) \subset \widetilde{U}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{U}_k$ ist.

Sei $U_i := p^{-1}(V) \cap \widetilde{U}_i$, für $i = 1, \ldots, k$. Dann ist $p^{-1}(V) = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Es ist $p|_{U_i} : U_i \to V$ ein Diffeomorphismus und U_i zusammenhängend. Also haben wir die Zerlegung von $p^{-1}(V)$ in Zusammenhangskomponenten gefunden. Damit ist p eine Überlagerung. ∎

3.4.10. Lemma

Sei $p : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Hausdorffräumen und $s : Y \to X$ ein stetiger Schnitt (mit $p \circ s = \mathrm{id}_Y$). Dann ist s eigentlich.

Beweis: Sei $K \subset X$ kompakt, $y \in s^{-1}(K)$. Dann ist $y = p \circ s(y) \in p(K)$. Da K in X abgeschlossen ist, ist $s^{-1}(K)$ abgeschlossen in Y. Und wie wir gezeigt haben, ist $s^{-1}(K)$ in der kompakten Menge $p(K)$ enthalten, muss also selbst kompakt sein. Das zeigt, dass s eigentlich ist. ∎

3.4.11. Die universelle Eigenschaft des Faserproduktes

Gegeben seien zwei differenzierbare Abbildungen $f : E \to X$ und $g : F \to X$. Das Faserprodukt $E \times_X F$ ist gegeben durch

$$E \times_X F := \{(x, y) \in E \times F \,:\, f(x) = g(y)\}.$$

$p_1 : E \times_X F \to E$ und $p_2 : E \times_X F \to F$ seien die kanonischen Projektionen. Ist Z eine weitere Mannigfaltigkeit und sind $\varphi : Z \to E$ und $\psi : Z \to F$ zwei differenzierbare Abbildungen mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$, so gibt es eine differenzierbare Abbildung $F : Z \to E \times_X F$ mit $p_1 \circ F = \varphi$ und $p_2 \circ F = \psi$.

Beweis: Trivial: Man setze $F(z) := (\varphi(z), \psi(z))$. ■