2 Vektorbündel

2.1 Lokale Trivialisierungen

Definition

Sei X eine (n-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein ***Vektorbündel vom Rang*** q über X ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E, zusammen mit einer surjektiven differenzierbaren Abbildung $\pi : E \to X$, so dass gilt:

1. Für jedes $x \in X$ trägt die Faser $E_x := \pi^{-1}(x)$ die Struktur eines q-dimensionalen Vektorraumes.
2. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Für jedes $x \in U$ ist $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to \mathbb{R}^q$ ein $\mathbb{R}$-Isomorphismus.
   (b) $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi$ auf $\pi^{-1}(U)$.

Die Abbildung φ nennt man eine ***lokale Trivialisierung***, die Abbildung π nennt man ***Bündelabbildung***. Die Mannigfaltigkeit X heißt ***Basis***, E heißt ***Totalraum*** des Bündels.

2.1.1. Satz

Sei $\pi : E \to X$ eine surjektive differenzierbare Abbildung (zwischen Mannigfaltigkeiten). E ist genau dann ein Vektorbündel vom Rang q über X, wenn es eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X und lokale Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ gibt, so dass gilt:

Zu jedem Paar $(\alpha, \beta) \in I \times I$ gibt es eine differenzierbare Abbildung

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}) \quad \textit{mit} \quad \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{v}^\top)$$

für $x \in U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^q$.

Beweis: 1) Sei E ein Vektorbündel über X. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X und lokale Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$. Sei

$$\Lambda_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^q \to U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^q.$$

Dann ist $(\Lambda_{\alpha\beta})_x : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q$ für jedes $x \in U_{\alpha\beta}$ ein $\mathbb{R}$-VR-Isomorphismus, der bezüglich der Standardbasen durch eine Matrix $g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ beschrieben wird.

Weil $(g_{\alpha\beta})_{\nu\mu}(x) = \mathrm{pr}_\nu(\Lambda_{\alpha\beta}(x)(\mathbf{e}_\mu))$ ist, folgt auch, dass $g_{\alpha\beta}$ differenzierbar ist.

2) Sei umgekehrt ein System von lokalen Trivialsierungen mit differenzierbaren Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ gegeben. Dann kann man auf diesem Wege jede Faser E_x mit einer Vektorraum-Struktur versehen, so dass die Trivialisierungen faserweise Vektorraum-Isomorphismen sind. ∎

2.1.2. Konstruktionslemma

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $q \in \mathbb{N}$. Zu jedem $x \in X$ sei ein q-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum E_x gegeben, es sei $E := \dot{\bigcup}_{x\in X} E_x$ und $\pi : E \to X$ die kanonische Projektion. Weiter sei $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von X. Zu jedem $\alpha \in A$ gebe es eine bijektive Abbildung $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$, die auf jeder Faser einen $\mathbb{R}$-VR-Isomorphismus induziert, zu jedem Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ mit $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$ gebe es eine differenzierbare Abbildung $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$, so dass gilt:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{v}^\top).$$

Dann gibt es auf E eine (eindeutig bestimmte) differenzierbare Struktur, so dass E ein Vektorbündel vom Rang q über X mit Bündelprojektion π und lokalen Trivialisierungen φ_α ist.

Beweis: Man kann annehmen, dass A abzählbar ist und dass es lokale Karten $\psi_\alpha : U_\alpha \to B_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Dann ist

$$\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to B_\alpha \times \mathbb{R}^q \quad \text{mit} \quad \widetilde{\varphi}_\alpha := (\psi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\alpha$$

eine Karte für E. Die Kartenwechsel

$$\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} = (\psi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (\psi_\beta \times \mathrm{id})^{-1}$$

sind Diffeomorphismen.

E wird mit einer Topologie versehen, indem man Produktumgebungen als Elementarumgebungen benutzt. Das ist eine Hausdorff-Topologie: Seien $p, q \in E$, $p \neq q$. Liegen beide Punkte in einer Faser E_x, so liegen sie in der gleichen Koordinatenumgebung, und es gibt natürlich disjunkte Umgebungen. Ist $p \in E_x$ und $q \in E_y$ (mit $x \neq y$), so gibt es disjunkte Umgebungen $V = V(x)$ und $W = W(y)$, und $\pi^{-1}(V)$ und $\pi^{-1}(W)$ sind disjunkte Umgebungen von p und q. Dass E das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, folgt daraus, dass dies für den $\mathbb{R}^n$ gilt und die Überdeckung abzählbar ist. Damit ist E tatsächlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Weil $\psi_\alpha \circ \pi \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\top) = \psi_\alpha \circ \mathrm{pr}_1 \circ (\psi_\alpha^{-1} \times \mathrm{id}) = \mathbf{x}$ ist, ist π eine differenzierbare Abbildung. Damit ist alles gezeigt. ∎

2.1.3. Beispiel

In jedem Punkt x einer Mannigfaltigkeit ist der (n-dimensionale) Tangentialraum $T_x(X)$ gegeben. Nun sei $T(X) := \dot{\bigcup}_{x \in X} T_x(X)$. Überdeckt man X durch lokale Koordinaten (U_α, ψ_α), so erhält man Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ durch

$$\varphi_\alpha\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big|_x\Big) := \big(x, (a_1, \ldots, a_n)^\top\big).$$

Dann ist

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, J_{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}} \cdot \mathbf{v}^\top).$$

Das so beschriebene Vektorbündel $T(X)$ nennt man das ***Tangentialbündel*** von X.

Definition

Ein ***Vektorbündel-Homomorphismus*** (zwischen Vektorbündeln E und F über einer Mannigfaltigkeit X) ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : E \to F$, so dass gilt:

1. $\pi_F \circ \Phi = \pi_E$.
2. Für alle $x \in X$ ist $\Phi_x : E_x \to F_x$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Ist Φ zusätzlich bijektiv und auch Φ^{-1} ein Vektorbündel-Homomorphismus, so spricht man von einem (Vektorbündel-)***Isomorphismus***.

2.1.4. Satz

Eine Abbildung $\Phi : E \to F$ (zwischen Vektorbündeln über X) ist genau dann ein Vektorbündel-Homomorphismus (bzw. -Isomorphismus), wenn es zu jeder offenen Teilmenge $U \subset X$, zu der es Trivialisierungen $\varphi : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$ und $\psi : \pi_F^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^p$ (im Falle eines Isomorphismus mit $p = q$) gibt, eine differenzierbare Abbildung $h : U \to M_{p,q}(\mathbb{R})$ (bzw. $H : U \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$) gibt, so dass gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, h(x) \bullet \mathbf{v}^\top).$$

Beweis: 1) Sei $\Phi : E \to F$ ein Vektorbündel-Homomorphismus. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) &= \pi_F \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) \\ &= \pi_E \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) \;=\; x \end{aligned}$$

und für festes $x \in U$ ist

$$\mathbf{v}^\top \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = \psi_x \circ \Phi_x \circ \varphi_x^{-1}(\mathbf{v}^\top)$$

eine lineare Abbildung, die man in der Form $\mathbf{v}^\top \mapsto h(x) \bullet \mathbf{v}^\top$ mit $h(x) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ schreiben kann.

2) Ist das Kriterium erfüllt, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$, Trivialisierungen φ_α von E und ψ_α von F und differenzierbare Abbildungen $h_\alpha : U_\alpha \to M_{p,q}(\mathbb{R})$, so dass gilt:

$$\psi_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_F \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) &= \pi_F \circ \psi_\alpha^{-1}(x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \\ &= \mathrm{pr}_1(x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \;=\; x \;=\; \pi_E \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top), \end{aligned}$$

also $\pi_F \circ \Phi = \pi_E$. Dass Φ auf jeder Faser linear ist, ist ebenfalls klar. ∎

Bemerkung: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem zweiten Teil des Beweises. Die Übergangsfunktionen von E seien mit $g_{\alpha\beta}$ bezeichnet, die von F mit $\gamma_{\alpha\beta}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top) &= \psi_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) \\ &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ \psi_\beta \circ \Phi \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, \mathbf{v}^\top) \\ &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ \psi_\beta \circ \Phi \circ \varphi_\beta^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \bullet \mathbf{v}^\top) \\ &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, h_\beta(x) \bullet g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \bullet \mathbf{v}^\top) \\ &= (x, \gamma_{\alpha\beta}(x) \bullet h_\beta(x) \bullet g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \bullet \mathbf{v}^\top), \end{aligned}$$

also

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) \bullet h_\beta(x) = h_\alpha(x) \bullet g_{\alpha\beta}(x).$$

2.1.5. Satz

Das System der Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ eines Vektorbündels zur Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ erfüllt die folgende „Cozykel-Bedingung“:

$$g_{\alpha\beta}(x) \bullet g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \text{ für } x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma^{-1} = \varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\gamma^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma^{-1}),$$

die über $U_{\alpha\beta\gamma}$ gilt. ∎

2.1.6. Existenzsatz

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von X und $g_{\alpha\beta}$ ein System von Übergangsfunktionen zur Überdeckung $\mathscr{U}$, das die Cozykel-Bedingung erfüllt.

Dann gibt es ein Vektorbündel $\pi : E \to X$ vom Rang q mit Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ und Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$. Das Bündel ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: Auf $\widetilde{E} := \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times \{\alpha\} \times \mathbb{R}^q$ wird eine Äquivalenzrelation erklärt:

$$(x,\alpha,\mathbf{v}) \sim (y,\beta,\mathbf{w}) \;:\iff\; x = y \text{ und } \mathbf{w}^\top = g_{\beta\alpha}(x)\bullet\mathbf{v}^\top.$$

Es sei $E := E/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : E \to X$ definiert durch $\pi\big([x,\alpha,\mathbf{v}]\big) := x$. Diese Projektion ist wohldefiniert, und die Fasern haben die Struktur q-dimensionaler Vektorräume. Für $\alpha \in A$ sei $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ definiert durch $[x,\alpha,\mathbf{v}] \mapsto (x,\mathbf{v})$. Das ist offensichtlich eine wohldefinierte bijektive Abbildung. Über $U_{\alpha\beta}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x,\mathbf{w}^\top) &= \varphi_\alpha\big([x,\beta,\mathbf{w}]\big) \\
&= \varphi_\alpha\big([x,\alpha,\mathbf{v}]\big) \quad (\text{mit } \mathbf{w} = g_{\beta\alpha}(x)\bullet\mathbf{v}^\top) \\
&= (x,\mathbf{v}) \;=\; (x, g_{\alpha\beta}(x)\bullet\mathbf{w}^\top).
\end{aligned}$$

Seien zwei Bündel E und F vom Rang q mit den gleichen Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ gegeben, mit Trivialisierungen φ_α und ψ_α. Dann sei $h_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ definiert durch $\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,\mathbf{v}^\top) = (x, h_\alpha(x)\bullet\mathbf{v}^\top)$ und $\Phi : E \to F$ durch

$$\Phi(\varphi_\alpha^{-1}(x,\mathbf{v}^\top)) := \psi_\alpha^{-1}(x, h_\alpha(x)\bullet\mathbf{v}^\top).$$

Ist $x \in U_{\alpha\beta}$ und $\varphi_\alpha^{-1}(x,\mathbf{v}^\top) = \varphi_\beta^{-1}(x,\mathbf{w}^\top)$, so ist

$$\psi_\beta^{-1}(x, h_\beta(x)\bullet\mathbf{w}^\top) = \psi_\beta^{-1} \circ (\psi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(x,\mathbf{w}^\top) = \varphi_\alpha^{-1}(x,\mathbf{v}^\top).$$

Also ist Φ ein wohldefinierter Vektorbündel-Isomorphismus. ∎

Definition

Ein Vektorbündel E heißt ***trivial***, falls $E \cong X \times \mathbb{R}^q$ ist.

2.1.7. Satz

Das Bündel E sei (bezüglich der Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)$) durch Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ gegeben. E ist genau dann trivial, wenn es differenzierbare Funktionen $h_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ gibt, so dass gilt:

$$g_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x)\bullet h_\beta(x)^{-1} \text{ für } x \in U_{\alpha\beta}.$$

Beweis: Die Einheitsmatrix dient als Übergangsfunktion für das triviale Bündel. Die Behauptung folgt dann aus der lokalen Beschreibung von Vektorbündel-Isomorphismen. ∎

Wir wollen nun zu einem Vektorbündel E das „duale Bündel“ E^* konstruieren. Dazu zunächst etwas Lineare Algebra: Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen (endlich-dimensionalen) Vektorräumen, so wird die duale lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ definiert durch $f^*(\lambda) := \lambda \circ f$.

Nun seien $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von W. Es gibt dazu die dualen Basen $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ von V^* und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ von W^*, mit $\alpha_i(a_j) = \delta_{ij}$ und $\beta_k(b_l) = \delta_{kl}$.

f wird bezüglich der Basen durch eine Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ beschrieben,

$$f(a_\nu) = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} b_\mu,$$

und f^* wird bezüglich der dualen Basis durch eine Matrix $A^* = (a^*_{\nu\mu})$ beschrieben,

$$f^*(\beta_\mu) = \sum_{\nu=1}^{n} a^*_{\nu\mu} \alpha_\nu.$$

Dabei ist

$$a^*_{\nu\mu} = (f^*\beta_\mu)(a_\nu) = (\beta_\mu \circ f)(a_\nu) = a_{\mu\nu},$$

also $A^* = A^\top$.

Ist nun E ein Vektorbündel über X mit lokalen Trivialisierungen $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$, so beschreibt für $x \in U_{\alpha\beta}$ die Matrix $g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ den Isomorphismus $(\varphi_\alpha)_x \circ (\varphi_\beta)_x^{-1} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ (bezüglich der Standardbasis). Die Matrix $g^*_{\alpha\beta}(x)$ beschreibe nun $\big((\varphi_\alpha)^*_x\big)^{-1} \circ (\varphi_\beta)^*_x : (\mathbb{R}^q)^* \to (\mathbb{R}^q)^*$ (bezüglich der zur Standardbasis dualen Basis von $(\mathbb{R}^q)^*$). Dann ist $g^*_{\alpha\beta}(x) = \big(g_{\alpha\beta}(x)^\top\big)^{-1}$.

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus $\iota : \mathbb{R}^q \to (\mathbb{R}^q)^*$ mit $\iota(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$. Dabei wird $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_q)$ auf die Linearform $\lambda_{\mathbf{v}} : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto v_1x_1 + \cdots + v_qx_q$ abgebildet.

Das ***duale Bündel*** E^* ist definiert als $E^* := \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} E^*_x$. Trivialisierungen $\widetilde{\varphi}_\alpha$ gewinnt man durch

$$(\widetilde{\varphi}_\alpha)_x := \iota^{-1} \circ \big((\varphi_\alpha)^*_x\big)^{-1}.$$

Übergangsfunktionen sind die Funktionen $g^*_{\alpha\beta}(x) = \big(g_{\alpha\beta}(x)^\top\big)^{-1} = g_{\beta\alpha}(x)^\top$.

Das ***Cotangentialbündel*** $T^*(X)$ ist das duale Bündel zum Tangentialbündel $T(X)$.

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung (zwischen Mannigfaltigkeiten), $\pi : E \to Y$ ein Vektorbündel vom Rang q. Dann versteht man unter dem ***inversen Bild*** von E über X das Bündel

$$f^*E := X \times_Y E = \{(x,e) \in X \times E \,:\, f(x) = \pi(x)\}.$$

Die Bündelprojektion $\widehat{\pi} : f^*E \to X$ ist gegeben durch $\widehat{\pi}(x,e) := x$.

Die Faser von f^*E über $x \in X$ ist gegeben durch $(f^*E)_x = E_{f(x)}$. Daher ist das „geliftete Bündel“ (das inverse Bild von E) trivial über den Fasern $f^{-1}(y)$.

Man hat folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & f^*E & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & E & \\ \widehat{\pi} & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

Ist $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von Y, so dass E über U_α trivial ist. Dann ist $\widehat{\mathscr{U}} := \{\widehat{U}_\alpha := f^{-1}(U_\alpha) \,:\, \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von X, so dass f^*E über $\widehat{U}_\alpha$ trivial ist: Ist $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ eine Trivialisierung von E, so kann man eine Trivialisierung $\widehat{\varphi}_\alpha : f^*E|_{\widehat{U}_\alpha} \to \widehat{U}_\alpha \times \mathbb{R}^q$ definieren durch

$$\widehat{\varphi}_\alpha(x,e) := \big(x, (\varphi_\alpha)_{f(x)}(e)\big).$$

Sei $(g_{\alpha\beta})$ das System der Übergangsfunktionen von E. Dann ist

$$\widehat{\varphi}_\alpha \circ \widehat{\varphi}_\beta^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) = \big(x, (\varphi_\alpha)_{f(x)} \circ (\varphi_\beta)^{-1}_{f(x)}(\mathbf{w}^\top\big) = (x, g_{\alpha\beta}(f(x)) \bullet \mathbf{w}^\top),$$

also $g_{\alpha\beta} \circ f$ Übergangsfunktion von f^*E.

Sei $j : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer Untermannigfaltigkeit Y in eine Mannigfaltigkeit X. Ist E ein Vektorbündel über X, so ist $E|_Y := j^*E$ die Einschränkung von E auf Y.

2.2 Schnitte

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang q.

Definition

Sei $U \subset X$ offen. Ein ***stetiger (bzw. differenzierbarer) Schnitt*** in E über U ist eine stetige (bzw. differenzierbare) Abbildung $s : U \to E$ mit $\pi_E \circ s = \mathrm{id}_U$.

Die Menge aller differenzierbaren Schnitte in E über U wird mit $\Gamma(U, E)$ bezeichnet.

2.2.1. Satz

Sei (φ_α) ein System von Trivialisierungen für E und $(g_{\alpha\beta})$ das zugehörige System von Übergangsfunktionen.

Ist $s \in \Gamma(X, E)$, so gibt es ein System von differenzierbaren Funktionen $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^q$ mit

$$\varphi_\alpha \circ s(x) = (x, s_\alpha(x)) \quad \text{für } x \in U_\alpha.$$

Über $U_{\alpha\beta}$ ist dann

$$s_\alpha(x)^\top = g_{\alpha\beta}(x) \bullet s_\beta(x)^\top.$$

Jedes System von Funktionen s_α, das die zweite Bedingung erfüllt, bestimmt (über die erste Gleichung) einen differenzierbaren Schnitt in E.

Beweis: Die Existenz der Funktionen s_α (mit $s_\alpha(x) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \circ s(x)$) ist klar. Und dann ist

$$\begin{aligned}
(x, s_\alpha(x)^\top) &= \varphi_\alpha \circ s(x) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta \circ s(x) \\
&= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, s_\beta(x)^\top) \\
&= (x, g_{\alpha\beta}(x) \bullet s_\beta(x)^\top).
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt das System der s_α mit der obigen Übergangsbedingung gegeben, so wird durch

$$s(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, s_\alpha(x)) \text{ (über } U_\alpha)$$

der Schnitt s definiert. Die Wohldefiniertheit folgt wie üblich aus der Übergangsbedingung. ∎

2.2.2. Beispiel

Sei $E = T(X)$ das Tangentialbündel von X. Ist ξ ein Vektorfeld auf X, so wird jedem Punkt $p \in X$ der Tangentialvektor $\xi_p = \sum_\nu a_\nu(p)(\partial/\partial x_\nu) \in T_p(X)$ zugeordnet. Sei $\varphi : T(X)|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ eine von einer Karte (U, ψ) induzierte Trivialisierung. Dann ist

$$\varphi(\xi_p) = \varphi\big(\sum_\nu a_\nu(p)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\big) = (p, \big(a_1(p), \dots, a_n(p)\big)^\top).$$

Also definiert ξ einen Schnitt in $T(X)$ (und umgekehrt definiert jeder Schnitt ein Vektorfeld).

Definition

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang q, $U \subset X$ offen. Ein System $S = \{s_1, \dots, s_q\}$ von Schnitten in E über U heißt ein ***Rahmen*** oder eine ***Basis*** über U, falls $\{s_1(x), \dots, s_q(x)\}$ für jedes $x \in U$ eine Basis von E_x ist.

Ist $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ eine Trivialisierung, so erhält man durch

$$s_i(x) := \varphi^{-1}(x, \mathbf{e}_i) \text{ für } i = 1, \dots, q$$

einen Rahmen für E über U.

Ist umgekehrt ein Rahmen $\{s_1, \dots, s_q\}$ über U gegeben, so kann man eine Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ definieren durch

$$\varphi\big(\sum_{\nu=1}^q a_i s_i(x)\big) := (x, (a_1, \dots, a_q)^\top).$$

Viele Konstruktionen, die es bei Vektorräumen gibt, lassen sich auf Vektorbündel übertragen. Wir kennen das schon von den Dualräumen und den dualen Bündeln. Nun betrachten wir die direkte Summe.

$\pi_E : E \to X$ und $\pi_F : F \to X$ seien zwei Vektorbündel vom Rang p bzw. q. Dann nennt man

$$E \oplus F := \dot{\bigcup_{x \in X}} E_x \oplus F_x = \{(v, w) \in E \times F \,:\, \pi_E(v) = \pi_F(w)\} =: E \times_X F$$

die ***direkte Summe*** oder ***Whitney-Summe*** von E und F. Wir führen die Vektorbündel-Struktur auf $E \oplus F$ schrittweise ein:

1) Sei $E = X \times \mathbb{R}^p$ und $F = X \times \mathbb{R}^q$. Dann ist $E \oplus F = X \times \mathbb{R}^{p+q}$, mit der offensichtlichen Bündel-Struktur.

2) Es gebe globale Bündel-Isomorphismen $\varphi : E \to X \times \mathbb{R}^p$ und $\psi : F \to X \times \mathbb{R}^q$. Dann kann man $\varphi \times_X \psi : E \oplus F \to X \times \mathbb{R}^{p+q}$ definieren durch

$$\varphi \times_X \psi(v, w) := (x, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(v), \mathrm{pr}_2 \circ \psi(w)) \text{ für } (v, w) \in E_x \oplus F_x.$$

Das induziert auf $E \oplus F$ eine Bündelstruktur, so dass $\varphi \times_X \psi$ ein VB-Isomorphismus ist.

3) Es seien $\widetilde{\varphi} : E \to X \times \mathbb{R}^p$ und $\widetilde{\psi} : F \to X \times \mathbb{R}^q$ andere Trivialisierungen. Dann gibt es differenzierbare Abbildungen $g_1 : X \to \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ und $g_2 : X \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ mit

$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_1(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \quad \text{und} \quad \widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) = (x, g_2(x) \bullet \mathbf{w}^\top),$$

und es gilt:

$$(\widetilde{\varphi} \times_X \widetilde{\psi}) \circ (\varphi \times_X \psi)^{-1}(x, (\mathbf{v}, \mathbf{w})^\top) = (x, \begin{pmatrix} g_1(x) & 0 \\ 0 & g_2(x) \end{pmatrix} \bullet (\mathbf{v}, \mathbf{w})^\top).$$

4) Sind E und F beliebige Vektorbündel, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)$ von X und Trivialisierungen $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^p$ und $\psi_\alpha : F|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$. Die Trivialisierungen $\varphi_\alpha \times_{U_\alpha} \psi_\alpha$ liefern dann wegen (1), (2) und (3) die gewünschte Vektorbündel-Struktur auf $E \oplus F$.

Nach diesem Schema geht man immer vor, wenn man Vektorraum-Konstruktionen auf Bündel überträgt. Das wird z.B. am Ende des nächsten Abschnittes angesprochen.

2.3 Tensorfelder

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum und $V^{**} = L(V^*, \mathbb{R})$ der Bidualraum. Es gibt eine kanonische Abbildung

$$j : V \to V^{**}, \text{ mit } j(v)(\varphi) := \varphi(v).$$

Offensichtlich ist j linear, und wenn $j(v) = 0$ ist, so ist $\varphi(v) = 0$ für alle Linearformen $\varphi \in V^*$.

Schreibt man $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$, mit einer beliebigen Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V, und ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis von V^*, so ist $0 = \alpha^i(v) = v_i$ für alle i, also $v = 0$. Das zeigt die Injektivität, und aus Dimensionsgründen ist j dann ein Isomorphismus. Auf diese Weise kann man V und V^{**} miteinander identifizieren.

Definition

Eine Abbildung

$$\varphi : (V^*)^p \times V^q \to \mathbb{R},$$

die in jedem Argument linear (insgesamt also $(p+q)$-fach multilinear) ist, heißt ein ***p-fach kontravarianter*** und ***q-fach kovarianter Tensor*** (über V). Die Menge aller dieser Tensoren sei mit $T^p_q(V)$ bezeichnet.

2.3.1. Beispiele

A. Eine Linearform $\varphi \in V^*$ ist ein 1-fach kovarianter Tensor.

Der Vektorraum $T^0_q(V)$ aller q-fach kovarianten Tensoren wird auch mit $L_q(V; \mathbb{R})$ bezeichnet (Raum der q-fachen Multilinearformen über V).

Im Falle $V = \mathbb{R}^n$ wird jedem Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ auf kanonische Weise eine Linearform $\lambda_{\mathbf{a}}$ zugeordnet, mit

$$\lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} = a_1 x_1 + \cdots a_n x_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\top.$$

Die Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf $(\mathbb{R}^n)^*$. Ist $\lambda_{\mathbf{a}} = 0$, so ist $a_i = \lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = 0$ für alle i, also $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Damit ist die Zuordnung ein Isomorphismus.

Leider läßt sich diese Zuordnung zwischen Vektoren und Linearformen nicht so ohne weiteres auf einen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraum V übertragen. Ist allerdings ein *Skalarprodukt* $\langle \ldots, \ldots \rangle$ auf V gegeben, so können wir jedem Vektor $a \in V$ genau wie oben eine Linearform λ_a zuordnen, durch

$$\lambda_a(x) := \langle a\, ,\, x \rangle.$$

B. Ein 1-fach kontravarianter Tensor ist ein Element des Bidualraumes V^{**} und kann deshalb auch als Vektor aufgefasst werden.

Definition

Sind $f_1, \ldots, f_q$ Linearformen auf V, so wird deren ***Tensorprodukt*** $f_1 \otimes \ldots \otimes f_q \in L_q(V; \mathbb{R})$ definiert durch

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_q)(v_1, \ldots, v_q) := f_1(v_1) \cdots f_q(v_q).$$

2.3.2. Satz

Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis, so bilden die Tensorprodukte $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_q}$ mit $1 \le i_1, \ldots, i_q \le n$ eine Basis des Raumes $L_q(V; \mathbb{R})$. Insbesondere ist $\dim L_q(V; \mathbb{R}) = n^q$.

Beweis: 1) Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_q} c_{i_1 \ldots i_q} \alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_q} = 0$. Setzt man q-Tupel $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q})$ ein, so erhält man $c_{j_1 \ldots j_q} = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_q$.

2) Ist φ eine beliebige q-fache Multilinearform, so setzen wir

$$\psi := \sum_{i_1,\ldots,i_q} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) \alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_q}.$$

Dann ist $(\psi - \varphi)(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_q$, also $(\psi - \varphi)(v_1, \ldots, v_q) = 0$ für alle $v_1, \ldots, v_q$, und damit $\varphi = \psi$. ■

Definition

Eine Multilinearform $\varphi \in L_q(V; \mathbb{R})$ heißt *alternierend* oder *schiefsymmetrisch*, falls für $i = 1, \ldots, q-1$ gilt:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_q) = -\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_q).$$

Da man beliebige Permutationen aus Vertauschungen zusammensetzen kann, folgt:

2.3.3. Satz

1. $\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_q)$ *für alle Permutationen* $\sigma \in S_q$.
2. $\varphi(x_1, \ldots, x_q) = 0$, *falls zwei Argumente gleich sind.*

Definition
Es sei $A^q(V) \subset L_q(V;K)$ der Unterraum aller alternierenden q-fachen Multilinearformen auf V.

Speziell ist $A^0(V) = \mathbb{R}$, $A^1(V) = V^*$ und $A^q(V) = 0$ für $q > n$.

Definition
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in V^*$ Linearformen, so setzt man

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q = \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \lambda_{\sigma(q)}.$$

2.3.4. Satz

Es ist

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \ \Big| \ i,j = 1, \ldots, q\Big).$$

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Determinante.

2.3.5. Folgerung

$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q$ *ist alternierend, und für* $\sigma \in S_q$ *ist*

$$\lambda_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \lambda_{\sigma(q)} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q.$$

Beweis: Die Determinante

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \ \Big| \ i,j = 1, \ldots, q\Big)$$

ist alternierend in den Zeilen (also den λ_i) und den Spalten (also den v_j). ∎

Für $1 \le i_1, \ldots, i_q \le n$ sei $\delta(i_1, \ldots, i_q)$ das (eindeutig bestimmte) Vorzeichen derjenigen Permutation, die $(i_1, \ldots, i_q)$ auf $(j_1, \ldots, j_q)$ mit $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$ abbildet.

2.3.6. Hilfssatz 1

Ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *die duale Basis zu* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *und* $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$, *so ist*

$$\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} \neq \{j_1, \ldots, j_q\}, \\ \delta(i_1, \ldots, i_q) & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}. \end{cases}$$

Beweis: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} \neq \{j_1, \ldots, j_q\}$, so ist $\alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_{\sigma(q)}}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0$ für jedes $\sigma \in S_q$. Sei daher $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) &= \delta(i_1, \ldots, i_q)\alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) \\
&= \delta(i_1, \ldots, i_q) \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha^{j_1}(a_{j_{\sigma(1)}}) \cdots \alpha^{j_q}(a_{j_{\sigma(q)}}) \\
&= \delta(i_1, \ldots, i_q).
\end{aligned}$$

Von der Summe bleibt nur der Summand mit $\sigma = \mathrm{id}$ übrig. ∎

2.3.7. Hilfssatz 2

Ist $\varphi \in A^q(V)$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und

$$\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = 0 \text{ für } 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n,$$

so ist $\varphi = 0$.

Beweis: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, so ist

$$\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = \delta(i_1, \ldots, i_q) \cdot \varphi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0.$$

Sind nun $x_j = x_{j1}a_1 + \cdots + x_{jn}a_n$, $j = 1, \ldots, q$, beliebige Vektoren, so ist

$$\varphi(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i_1, \ldots, i_q} x_{1i_1} \cdots x_{qi_q} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = 0.$$

∎

2.3.8. Satz

Die Formen $\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$ bilden eine Basis von $A^q(V)$. Insbesondere ist $\dim(A^q(V)) = \binom{n}{q}$.

Beweis: 1) Lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} c_{i_1 \ldots i_q} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q} = 0.$$

Dann ist

$$0 = \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} c_{i_1 \ldots i_q} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q} \Big)(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = c_{j_1 \ldots j_q} \text{ für } j_1 < \ldots < j_q.$$

2) Erzeugendensystem: Sei $\varphi \in A^q(V)$. Dann definieren wir $\psi \in A^q(V)$ als

$$\psi := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}.$$

Dann sieht man sofort: $\psi = \varphi$.

Die Dimension von $A^q(V)$ ist die Anzahl der q-Tupel $(i_1, \ldots, i_q)$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n$. Jedes solche q-Tupel bestimmt genau eine q-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$, und zu jeder der Mengen gibt es nur eine zulässige Anordnung der Elemente. ∎

2.3.9. Satz

Sei W ein beliebiger Vektorraum und $h : V^* \times \ldots \times V^* \to W$ eine q-fach multilineare, alternierende Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\widehat{h} : A^q(V) \to W$ mit

$$\widehat{h}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_q) = h(f_1, \ldots, f_q).$$

Beweis: Die lineare Abbildung $\widehat{h}$ wird durch Festlegung auf den Elementen einer Basis definiert. Das ergibt auch schon die Eindeutigkeit. Wir müssen nur sehen, dass die gewünschte Eigenschaft erfüllt ist. Ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ eine Basis von V^*, so gilt für Elemente $f_\nu = \sum_{i_\nu} a_{\nu,i_\nu} \alpha^{i_\nu}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_q) &= \widehat{h}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_q} a_{1,i_1} \cdots a_{q,i_q} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q} \Big) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_q} a_{1,i_1} \cdots a_{q,i_q} \widehat{h}(\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_q} a_{1,i_1} \cdots a_{q,i_q} h(\alpha^{i_1}, \ldots, \alpha^{i_q}) \\
&= h\Big(\sum_{1,i_1} a_{1,i_1} \alpha^{i_1}, \ldots, \sum_{i_q} a_{q,i_q} \alpha^{i_q} \Big) \;=\; h(f_1, \ldots, f_q).
\end{aligned}$$

∎

2.3.10. Satz

Es gibt genau eine bilineare Abbildung $\Phi : A^p(V) \times A^q(V) \to A^{p+q}(V)$ mit

$$\Phi(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p \,,\, g_1 \wedge \ldots \wedge g_q) = f_1 \wedge \ldots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_q.$$

Beweis: Für $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p) \in (V^*)^p$ sei $g_{\mathbf{u}} : (V^*)^q \to A^{p+q}(V)$ definiert durch

$$g_{\mathbf{u}}(w_1, \ldots, w_q) := u_1 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_q.$$

Weil $g_{\mathbf{u}}$ q-fach multilinear und alternierend ist, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widehat{g}_{\mathbf{u}} : A^q(V) \to A^{p+q}(V)$ mit

$$\widehat{g}_{\mathbf{u}}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) = g_{\mathbf{u}}(w_1, \ldots, w_q).$$

Die Abbildung $h : (V^*)^p \to L(A^q(V), A^{p+q}(V))$ mit $h(\mathbf{u}) := \widehat{g}_{\mathbf{u}}$ ist p-fach multilinear und alternierend. Also gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widehat{h} : A^p(V) \to L(A^q(V), A^{p+q}(V))$ mit $\widehat{h}(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) := \widehat{g}_{\mathbf{u}}$.

Für $\omega \in A^p(V)$ und $\psi \in A^q(V)$ sei $\Phi(\omega, \psi) := \widehat{h}(\omega)(\psi)$. Offensichtlich ist Φ bilinear und (durch die Werte auf Basis-Elementen) eindeutig bestimmt. Es ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p)(g_1 \wedge \ldots \wedge g_q) &= \widehat{g}_{(f_1, \ldots, f_p)}(g_1 \wedge \ldots \wedge g_q) \\
&= g_{(f_1, \ldots, f_p)}(g_1, \ldots, g_q) \\
&= f_1 \wedge \ldots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_q.
\end{aligned}$$

∎

So erhält man das ***Dachprodukt***

$$A^p(V) \times A^q(V) \xrightarrow{\wedge} A^{p+q}(V), \text{ mit } (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi := \Phi(\varphi, \psi).$$

Dieses Produkt hat folgende Eigenschaften:

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$.
2. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$ für $\omega \in A^p(V)$, $\varphi \in A^q(V)$. (Antikommutativgesetz).
3. Für Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ ist $\varphi \wedge \psi = \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$.

Die Eigenschaften (1) und (2) folgen ganz leicht für Basisformen und dann wegen der Bilinearität für beliebige Formen.

Sei nun X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$T_q^p(X) := \dot{\bigcup_{x \in X}} T_q^P(T_x(X)).$$

Wie üblich kann man auf $T_q^p(X)$ die Struktur eines differenzierbaren Vektorbündels einführen.

Definition

Ein ***p-fach kontravariantes und q-fach kovariantes Tensorfeld*** auf X ist ein differenzierbarer Schnitt $\mathsf{T} \in \Gamma, X, T_q^p(X))$. Die Menge solcher Tensorfelder bezeichnet man mit $\mathscr{T}_q^p(X)$.

Bemerkung: Die Tensorfelder über X bilden einen Modul über $\mathscr{C}^\infty(X)$.

Analog bildet man das Vektorbündel $A^q(X) := \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} A^q(T_x(X))$.

Definition

Eine q***-dimensionale Differentialform*** (kurz: q***-Form***) ist ein differenzierbarer Schnitt im Bündel $A^q(X)$. Man setzt $\Omega^q(X) := \Gamma(X, A^q(X))$.

Ist $\omega \in \Omega^p(X)$ und $\varphi \in \Omega^q(X)$, so wird $\omega \wedge \varphi \in \Omega^{p+q}(X)$ definiert durch $(\omega \wedge \varphi)_x := \omega_x \wedge \varphi_x$.

Es ist $T_0^1(X) = T(X)$ und $T_1^0(X) = T^*(X)$. Die Schnitte sind jeweils Vektorfelder oder 1-Formen. Ist (U, φ) eine Karte für X mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, so haben wir die Basen $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bzw. $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ von $\mathscr{T}_0^1(U)$ bzw. $\mathscr{T}_1^0(U)$. Ein Tensorfeld T hat über U die Darstellung

$$\mathsf{T}|_U = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \\ j_1,\ldots,j_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes \ldots \otimes dx_{j_q},$$

mit differenzierbaren Funktionen $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Eine q-dimensionale Differentialform ω hat über U die Darstellung

$$\omega|_U = \sum_{0 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} a_{j_1 \ldots j_q} \, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q},$$

mit differenzierbaren Funktionen $a_{j_1 \ldots j_q}$.

2.4 Unterbündel und Quotientenbündel

Definition

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang q. Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt ***Unterbündel*** vom Rang p, falls es einen p-dimensionalen Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^q$ gibt, so dass gilt:

Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und eine Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ von E über U mit $\varphi^{-1}(U \times W) = F|_U$ $(:= F \cap (E|_U)\,)$.

2.4.1. Satz

Sei E ein Vektorbündel über X. Eine Teilmenge $F \subset E$ ist genau dann ein Unterbündel (vom Rang p), wenn gilt:

1. *Für jedes $x \in X$ ist $F_x \subset E_x$ ein p-dimensionaler Unterraum.*
2. *Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und ein Rahmen $\{s_1, \ldots, s_q\} \subset \Gamma(U, E)$, so dass $\{s_1(x), \ldots, s_p(x)\}$ für $x \in U$ eine Basis von F_x ist.*

Beweis: 1) Sei $F \subset E$ ein Unterbündel, $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ eine angepasste Trivialisierung. Dann ist $F_x = \varphi_x^{-1}(W)$ ein Unterraum von E_x, für $x \in X$. Man wähle eine Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ von W und ergänze diese zu einer Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+1}, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ von $\mathbb{R}^q$. Die Schnitte s_i mit $s_i(x) := \varphi^{-1}(x, \mathbf{a}_i)$ liefern das Gewünschte.

2) Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt. Die Schnitte $s_1, \ldots, s_q \in \Gamma(U, E)$ eines angepassten lokalen Rahmens liefern eine Trivialisierung φ für E über U. Dann ist $\varphi \circ s_i(x) = (x, \mathbf{e}_i^\top)$ für alle i, und es ist $F|_U = \varphi^{-1}(U \times (\mathbb{R}^p \times \{\mathbf{0}\}))$. Also ist F ein Unterbündel. ∎

Klar ist, dass ein Unterbündel eine Untermannigfaltigkeit und selbst ein Vektorbündel ist.

Sei E ein Vektorbündel vom Rang q über X und $F \subset E$ ein Unterbündel vom Rang r, sowie

$$E/F := \dot{\bigcup_{x \in X}} E_x/F_x \quad \text{und} \quad \overline{\pi} : E/F \to X \text{ sowie } p : E \to E/F$$

die kanonischen Projektionen. Wir wollen E/F so mit der Struktur eines Vektorbündels versehen, dass p ein Bündel-Homomorphismus ist.

Sei $\{s_1, \ldots, s_q\}$ ein Rahmen für E über einer offenen Menge $U \subset X$, so dass $s_1, \ldots, s_r$ das Unterbündel F über U erzeugen. Dann erzeugen $s_{r+1}, \ldots, s_q$ ein weiteres (triviales) Unterbündel $Q \subset E|_U$. Für $x \in U$ ist $\{p(s_{r+1}(x)), \ldots, p(s_q(x))\}$

eine Basis von E_x/F_x. Damit ist $p_x : Q_x \to E_x/F_x$ für jedes $x \in U$ ein Isomorphismus, und $(E/F)|_U$ erhält die Struktur eines trivialen Bündels.

Nun sei eine offene Überdeckung durch Vektorbündel-Karten $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ gegeben, so dass $F|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times (\mathbb{R}^r \times \{\mathbf{0}\}))$ ist. Sei $Q_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}^{q-r}))$. Dann induziert p eine Abbildung $p_\alpha : Q_\alpha \to (E/F)|_{U_\alpha}$, die faserweise ein Isomorphismus ist.

Sei $\psi_\alpha := \varphi_\alpha|_F : F|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times (\mathbb{R}^r \times \{\mathbf{0}\})$. Die Übergangsfunktionen zu den φ_α und den ψ_α seien mit $G_{\alpha\beta}$, bzw. $g_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Dann gilt:

$$G_{\alpha\beta}(x) \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix},$$

also

$$G_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & \sharp \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix},$$

mit differenzierbaren Funktionen $h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_{q-r}(\mathbb{R})$.

Ist $\sigma : U \times \mathbb{R}^q \to U \times \mathbb{R}^{q-r}$ definiert durch $\sigma(x, (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')^\top) := (x, (\mathbf{v}'')^\top)$ und $j_\alpha : Q_\alpha \hookrightarrow E|_{U_\alpha}$ die kanonische Injektion, so werden durch $\varrho_\alpha := \sigma \circ \varphi_\alpha \circ j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} : (E/F)|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{q-r}$ Trivialisierungen für E/F gegeben, mit

$$\begin{aligned}
\varrho_\alpha \circ \varrho_\beta^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) &= \sigma \circ \varphi_\alpha \circ j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} \circ p_\beta \circ (\sigma \circ \varphi_\beta \circ j_\beta)^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) \\
&= \sigma \circ \varphi_\alpha \circ j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} \circ p \circ \varphi_\beta^{-1}(x, (\mathbf{0}, \mathbf{w})^\top) \\
&= \sigma \circ \varphi_\alpha \circ j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} \circ p \circ \varphi_\alpha^{-1}\big(x, G_{\alpha\beta}(x) \bullet (\mathbf{0}, \mathbf{w})^\top\big) \\
&= \sigma(x, (\sharp, h_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{w}^\top)) \;=\; (x, h_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{w}^\top))
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt, E/F ist ein Vektorbündel mit Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}$.

Definition

Sei $f : E \to F$ ein Vektorbündel-Homomorphismus. Dann setzt man

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &:= \dot{\bigcup_{x \in X}} \operatorname{Ker}(f_x : E_x \to F_x) \\
\text{und} \quad \operatorname{Im} f &:= \dot{\bigcup_{x \in X}} \operatorname{Im}(f_x : E_x \to F_x).
\end{aligned}$$

2.4.2. Satz

Sei X eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f : E \to F$ ein Homomorphismus zwischen Bündeln über X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $x \mapsto \mathrm{rg}(f_x)$ *ist konstant.*
2. $\mathrm{Ker}\, f \subset E$ *ist ein Unterbündel.*
3. $\mathrm{Im}\, f \subset F$ *ist ein Unterbündel.*

Beweis: OBdA sei $E = X \times \mathbb{R}^p$, $F = X \times \mathbb{R}^q$ und $f(x, \mathbf{v}^\top) = (x, A(x) \bullet \mathbf{v}^\top)$. Ist $\mathrm{Ker}\, f$ oder $\mathrm{Im}\, f$ ein Unterbündel, so muss offensichtlich $x \mapsto \mathrm{rg}(f_x)$ konstant.

Sei umgekehrt $\mathrm{rg}(f_x)$ konstant, etwa $= r$. OBdA kann man annehmen, dass es eine Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ von $\mathbb{R}^p$ und eine Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_q\}$ von $\mathbb{R}^q$ gibt, so dass die Elemente $f(x, \mathbf{a}_i)$, $i = 1, \ldots, r$, eine Basis von $\mathrm{Im}(f_x)$ bilden und $\mathrm{Im}(f_x)$ komplementär zu dem von $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_q$ erzeugten Raum ist.

Die Schnitte $t_i(x) := f(x, \mathbf{a}_i)$, $i = 1, \ldots, r$, und $\widetilde{t}_j(x) := (x, \mathbf{b}_j)$, $j = r+1, \ldots, q$, bilden dann einen Rahmen für F. Deshalb ist $\mathrm{Im}\, f$ ein Unterbündel.

Es gibt Funktionen α_{ij}, so dass gilt:

$$f(x, \mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}(x) \mathbf{b}_j, \text{ für } i = 1, \ldots, p.$$

Setzt man $A'(X) := \left(\alpha_{ij}(x) \;\middle|\; {}_{j=1,\ldots,r}^{i=1,\ldots,r} \right)$, so ist $\det A'(x) \neq 0$. Daher gibt es auch differenzierbare Funktionen β_{ki} mit

$$f(x, \mathbf{a}_k) = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ki}(x) f(x, \mathbf{a}_i), \text{ für } k = r+1, \ldots, q.$$

Es folgt: Die Schnitte

$$\begin{aligned} s_k(x) &:= \big(x, \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{r} \beta_{ki}(x) \mathbf{a}_i\big),\ k = r+1, \ldots, q \\ \text{und } \widetilde{s}_i &:= (x, \mathbf{a}_i),\ i = 1, \ldots, r, \end{aligned}$$

erzeugen E, und dabei erzeugen die s_k den Kern von f. Also ist $\mathrm{Ker}\, f$ ein Unterbündel. ∎

Definition

Eine Folge $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H$ von Vektorbündel-Homomorphismen heißt eine ***exakte Sequenz***, falls für jedes $x \in X$ die Folge $E_x \xrightarrow{f} F_x \xrightarrow{g} H_x$ eine exakte Sequenz ist (also $\mathrm{Im}(f_x) = \mathrm{Ker}(g_x)$).

In diesem Fall ist $\mathrm{rg}(f_x) + \mathrm{rg}(g_x) = \mathrm{rg}(F)$ konstant. Da $\mathrm{rg}(f_x)$ und $\mathrm{rg}(g_x)$ in der Nähe eines Punktes x_0 höchstens kleinere Werte als in x_0 selbst annehmen können, gilt das auch für die Summe. Also sind beide Ränge konstant, und $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind Unterbündel.

2.4.3. Beispiel

Sei $F \subset E$ ein Unterbündel. Dann ist die Sequenz $0 \to F \to E \to E/F \to 0$ exakt.

Ist $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, so kann man

$$Tf : T(X) \to f^*T(Y)$$

definieren durch $(Tf)_x := f_{*,x} : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y) = (f^*T(Y))_x$. Diese Abbildung ist fasertreu und in jeder Faser linear. Wir müssen noch die Differenzierbarkeit zeigen.

Sind $\psi_0 : V \to \mathbb{R}^m$ und $\varphi_0 : U = f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$ Karten für Y bzw. X, so hat man Bündelkarten $\varphi : T(X)|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ mit $\varphi\big(\sum_\nu a_\nu(\partial/\partial x_\nu)|_x\big) := \big(x, (a_1, \ldots, a_n)^\top\big)$ und analog $\psi : T(Y)|_V \to V \times \mathbb{R}^m$. Eine Trivialisierung $\widehat{\psi} : (f^*T(Y))|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ gewinnt man dann durch $\widehat{\psi}\big(\sum_\mu b_\mu(\partial/\partial y_\mu)|_{f(x)}\big) := \big(x, (b_1, \ldots, b_m)^\top\big)$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi} \circ Tf \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{a}^\top) &= \widehat{\psi}\Big(f_{*,x} \sum_{\nu=1}^n a_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big|_x\Big) \\
&= \widehat{\psi}\Big(\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(y_\mu \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu}\Big|_{f(x)}\Big) \\
&= (x, \psi_{f(x)}\Big(\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(y_\mu \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu}\Big|_{f(x)}\Big)) \\
&= \Big(x, (\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu)^\top\Big) \\
&= (x, J_{\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}}(\varphi_0(x)) \bullet \mathbf{a}^\top)
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass Tf ein Bündel-Homomorphismus ist.

2.4.4. Beispiele

A. Ist $Y \overset{j}{\hookrightarrow} X$ eine Untermannigfaltigkeit, so hat man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T(Y) \longrightarrow j^*T(X) \longrightarrow N_X(Y) \longrightarrow 0,$$

mit dem ***Normalenbündel*** $N_X(Y) := j^*T(X)/T(Y)$.

B. Sei $f : X \to Y$ eine Submersion. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T(f) \longrightarrow T(X) \xrightarrow{Tf} f^*T(Y) \longrightarrow 0,$$

da $f_{*,x}$ für jedes $x \in X$ surjektiv ist. Das Bündel $\operatorname{Ker}(Tf)$ nennt man auch das „Bündel der vertikalen Tangentialvektoren“.

C. Ist $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, so ist π eine Submersion.

Behauptung: $\mathrm{Ker}(T\pi) \cong \pi^* E$.

Beweis: Sind e und v zwei Elemente von E_x, so wird durch $\alpha(t) := e + tv$ ein Weg in E_x mit $\alpha(0) = e$ und $\dot{\alpha}(0) = v$ definiert. Auf diese Weise kann man die Elemente von $E_x = E_{\pi(e)} = (\pi^* E)_e$ als Tangentialvektoren aus $T_e(E_x) \subset T_e(E)$ auffassen. Aus Dimensionsgründen ist dann sogar $T_e(E_x) \cong E_x$. Weil $\pi \circ \alpha$ konstant ist, ist $\pi_{*,e}(v) = 0$ für alle $v \in T_e(E_x)$, also $(\pi^* E)_e \subset (\mathrm{Ker}(T\pi))_e$. Wieder aus Dimensionsgründen folgt die Gleichheit. ∎

So erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi^* E \longrightarrow T(E) \xrightarrow{T\pi} \pi^* T(X) \longrightarrow 0.$$

Besonders interessant ist der Spezialfall $E = T(X)$. Mit der Projektion $\pi_X : T(X) \to X$ erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_X^* T(X) \longrightarrow T(T(X)) \xrightarrow{T\pi_X} \pi_X^* T(X) \longrightarrow 0.$$

Das zweite Tangentialbündel spielt eine wichtige Rolle in der Analytischen Mechanik.

Der Konfigurationsraum X eines mechanischen Systems wird durch n verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ beschrieben (das können z.B. die $3n$ kartesischen Koordinaten eines Systems von n Massenpunkten sein). Die Koordinaten von $T(X)$ bezeichnet man mit $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, die des Phasenraums $T^*(X)$ mit $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ (mit den verallgemeinerten Impulsen p_i). Auf $T(T(X))$ hat man die Koordinaten q_i, $\dot{q}_i$, dq_i und $d\dot{q}_i$.