Dann erzeugen die Vektoren

$$\mathbf{X}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

den Tangentialraum von $\widetilde{G}$, und die Vektoren $\mathbf{E}_r = \mathbf{X}_r$ und $\mathbf{E}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{X}_\theta$ bilden ein ON-System. Es ist

$$G_{\varphi^{-1}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_r \bullet \mathbf{X}_r & \mathbf{X}_r \bullet \mathbf{X}_\theta \\ \mathbf{X}_\theta \bullet \mathbf{X}_r & \mathbf{X}_\theta \bullet \mathbf{X}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

also $\sqrt{g} = \sqrt{\det G_{\varphi^{-1}}} = r$. In ebenen Polarkoordinaten ist daher

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{X}_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{X}_\theta = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{E}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{E}_\theta.$$

Ist $\xi = \xi^r\mathbf{E}_r + \xi^\theta\mathbf{E}_\theta = \xi^r\mathbf{X}_r + \frac{1}{r}\xi^\theta\mathbf{X}_\theta$, so ist

$$\operatorname{div}\xi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\xi^r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\xi^\theta)\right]$$

Ingenieure nennen das „Rechnen in krummlinigen Koordinaten“.

4.3 Klassische Integralformeln

Wir können jetzt auch die klassischen Sätze von Gauß und Stokes formulieren.

4.3.1. Der Integralsatz von Gauß-Ostrogradski

Es sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $G \subset\subset X$ ein Gebiet mit glattem Rand, ξ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von $\overline{G}$ und N das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂G. Dann ist

$$\int_G (\operatorname{div} \xi)\, dV = \int_{\partial G} \langle \xi\, ,\, N\rangle\, do.$$

Dabei ist $dV = \Omega_X$ das Volumenelement von X und do das Volumenelement auf ∂G. Das Skalarprodukt $\langle \xi\, ,\, N\rangle$ ist das Riemannsche Skalarprodukt $\gamma(\xi, N)$.

Beweis: Da $\|\xi\|$ auf ∂G stetig und damit beschränkt ist, ist $\langle \xi\, ,\, N\rangle$ bezüglich do auf ∂G integrierbar.

Es ist $\displaystyle\int_G (\operatorname{div} \xi)\Omega_X = \int_G d(\Lambda_\xi) = \int_{\partial G} \Lambda_\xi$.

Ist $x \in \partial G$ und $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von $T_x(\partial G)$, so ist

$$\xi_x = \langle \xi_x\, ,\, N_x\rangle\, N_x + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \xi_x\, ,\, u_i\rangle\, u_i\, . \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}
\text{Also ist}\quad (\Lambda_\xi)_x(u_1, \ldots, u_{n-1}) \ &= \\
&= \sqrt{g} \sum_{k=1}^{n} \xi^k (-1)^{k+1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n (u_1, \ldots, u_{n-1}) \\
&= \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n (\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) \ \text{(Laplace)} \\
&= \Omega_X(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) \ = \ \langle \xi_x\, ,\, N_x\rangle
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus $(*)$ und der Tatsache, dass $\Omega_X(N_x, u_1, \ldots, u_{n-1}) = 1$ ist. Andererseits ist auch $\langle \xi_x\, ,\, N_x\rangle \cdot do(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \langle \xi_x\, ,\, N_x\rangle$. Daraus folgt:

$$\Lambda_\xi|_{\partial G} = \langle \xi\, ,\, N\rangle \cdot do\, .$$

∎

Bemerkung: Die Größe $\int_{\partial G} \langle \xi\, ,\, N\rangle\, do$ nennt man den ***Fluss von $\boldsymbol{\xi}$ durch*** ∂G.

Definition

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $G \subset \mathbb{R}^2$ ein (beschränktes) Gebiet mit glattem Rand und $\varphi : \overline{G} \to X$ eine differenzierbare injektive Abbildung. Außerdem sei $\operatorname{rg} D\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in \overline{G}$. Dann heißt $S := \varphi(\overline{G})$ ein ***glattes Flächenstück mit Rand*** in X und $bS := \varphi(\partial G)$ der Rand von S.

S ist eine kompakte 2-dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit mit Rand (von X). Der Rand $C = bS$ ist eine glatte Kurve in X, parametrisiert durch $\alpha := \varphi \circ \beta : I \to X$, wenn $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂G ist. Nach Voraussetzung kann man β (und damit auch α) als glatt voraussetzen. Dann wird durch $\psi := \alpha^{-1}$ eine Karte für C gegeben.

Sei γ die Riemannsche Metrik auf X. Ist $t \in I$, so setzt man

$$\dot{\alpha}(t) := \alpha_{*,t}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\ , \ \text{(mit lokalen Koordinaten } x_1, \ldots, x_n \text{ in } \alpha(t)\text{)},$$

und dann heißt

$$T_\alpha(t) := \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|_\gamma}$$

der ***Tangenteneinheitsvektor*** an C in $\alpha(t)$. Er hängt nicht von der Parametrisierung α ab, nur von der Orientierung der Kurve C.

Die Riemannsche Metrik von X induziert eine Metrik auf der Kurve C. Zusammen mit der natürlichen Orientierung von C wird so ein Volumenelement auf C bestimmt, das ***Linienelement*** ds. Bezüglich der Karte $\psi = \alpha^{-1}$ ist ds gegeben durch $(ds)_\psi = \sqrt{G_\psi}\, dt$. Da die Karte ψ den Tangentialvektor $\dot{\alpha}(t) = \alpha_*(\partial/\partial t)$ als Basis des Tangentialraumes an C in $\alpha(t)$ induziert, ist $G_\psi(t) = \gamma(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = |\dot{\alpha}(t)|_\gamma^2$. Es folgt:

$$(ds)_\psi = |\dot{\alpha}|_\gamma\, dt.$$

Sei nun ξ ein Vektorfeld auf X. In lokalen Koordinaten ist

$$t(\xi) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_i g_{ik}\xi^i\Big)\, dx_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\, dx_k,$$

also

$$\begin{aligned}
\alpha^*(t(\xi)) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_i (g_{ik}\circ\alpha)\cdot(\xi^i\circ\alpha)\Big)\,\alpha_k'\, dt \\
&= \Big(\sum_{i,k}(\xi^i\circ\alpha)\cdot(g_{ik}\circ\alpha)\cdot\alpha_k'\Big)\, dt \\
&= \langle \xi\circ\alpha\,,\,\dot{\alpha}\rangle_\gamma\, dt \ = \ \langle \xi\circ\alpha\,,\,T_\alpha\rangle_\gamma\,(ds)_\psi = \alpha^*\big(\langle \xi|_C\,,\,T_\alpha\rangle_\gamma\, ds\big).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Eine 1-Form kann mühelos auf eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit eingeschränkt werden. Bei einem Vektorfeld ist das zunächst nicht möglich, da es i.a. ja nicht tangential zu der Untermannigfaltigkeit verläuft. Das Skalarprodukt $\langle \xi\,,\,T_\alpha\rangle$ liefert den ***tangentialen Anteil*** von ξ.

Ist X eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gibt es zu jedem Vektorfeld ξ auf X genau ein Vektorfeld $\mathbf{rot}\,\xi$ auf X mit

$$\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} = d(t(\xi)).$$

Die ***Rotation*** eines Vektorfeldes kann nur im Falle $n = 3$ definiert werden, denn nur dann ist die 2-Form $d(t(\xi))$ zugleich eine $(n-1)$-Form. Außerdem hängt die Zuordnung zwischen ξ und $\mathbf{rot}\,\xi$ von der Metrik und der Orientierung ab, ist also nicht spiegelungsinvariant.

4.3.2. Stokesscher Integralsatz

Es sei S ein glattes Flächenstück mit Rand in einer 3-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit, ξ ein differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung von S. Dann ist

$$\int_S \langle \mathbf{rot}\,\xi\,,\, N\rangle\, do = \int_{bS} \langle \xi\,,\, T\rangle\, ds.$$

Dabei ist N ein Einheitsnormalenfeld auf S, das die transversale Orientierung von S festlegt, und T das Tangenteneinheitsvektorfeld auf bS, das den Rand in der richtigen Weise orientiert.

Beweis: Die Integrierbarkeit ist bei diesem Satz kein Problem. Wie oben beschrieben sei S durch $\varphi : G \to X$ und bS durch den Weg $\alpha = \varphi \circ \beta$ parametrisiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_S \langle \mathbf{rot}\,\xi\,,\, N\rangle\, do &= \int_S \Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} \;=\; \int_G \varphi^*(\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi}) \\
&= \int_G \varphi^*(dt(\xi)) \;=\; \int_G d(\varphi^* t(\xi)) \\
&= \int_{\partial G} \varphi^* t(\xi) \;=\; \int_{bS} t(\xi) \\
&= \int_I \alpha^*(t(\xi)) \;=\; \int_{bS} \langle \xi\,,\, T\rangle\, ds.
\end{aligned}$$

∎

Wie in der 1-dimensionalen Theorie gilt auch im $\mathbb{R}^n$ der ***Mittelwertsatz der Integralrechnung***, etwa in folgender Form: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $\mathbf{z} \in M$ mit

$$\int_M f(\mathbf{x})\, dx^1 \ldots dx^n = v_n(M) \cdot f(\mathbf{z}).$$

Wir verwenden diese Tatsache, um eine Interpretation von Divergenz und Rotation zu liefern.

Ist $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon(\mathbf{x})$ ein kleiner Quader um $\mathbf{x}$, so stellt $\displaystyle\int_{\partial Q_\varepsilon} \langle \xi\,,\, N\rangle\, do$ den ***Fluss*** des Vektorfeldes ξ durch die Oberfläche von Q_ε dar. Ist die Gesamtbilanz positiv, so enthält Q_ε eine ***Quelle***, ist die Bilanz negativ, so enthält Q_ε eine ***Senke***. Nun gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v_n(Q_\varepsilon(\mathbf{x}_0))}\int_{\partial Q_\varepsilon}\langle \xi\,,\,N\rangle\,do = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v_n(Q_\varepsilon)}\int_{Q_\varepsilon}(\operatorname{div}\xi)\,dV \;=\; \operatorname{div}\xi(\mathbf{x}_0).$$

Deshalb nennt man $\operatorname{div}\xi$ auch die ***Quelldichte*** von ξ.

Jetzt sei $N \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor der Länge 1 in $\mathbf{x}_0$. Mit S_ε bezeichnen wir kleine Kreisscheiben durch $\mathbf{x}_0$ senkrecht zu N (mit N als „Achse“). Dann gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v_2(S_\varepsilon)}\int_{bS_\varepsilon}\langle \xi\,,\,T\rangle\,ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v_2(S_\varepsilon)}\int_{S_\varepsilon}\langle \mathbf{rot}\,\xi\,,\,N\rangle\,do = \langle \mathbf{rot}\,\xi(\mathbf{x}_0)\,,\,N\rangle.$$

Man nennt $\langle \mathbf{rot}\,\xi(\mathbf{x}_0)\,,\,N\rangle$ die ***Wirbeldichte*** von ξ um die durch N bestimmte Achse. Das Integral $\displaystyle\int_{bS}\langle \xi\,,\,T\rangle\,ds$ nennt man die ***Zirkulation*** von ξ entlang bS.

4.3.3. Satz von Green

Sei $G \subset\subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit glattem Rand, $U = U(\overline{G}) \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung, f, g zwei (beliebig oft) differenzierbare Funktionen auf U. Dann ist

$$\int_{\partial G}(f\,dx + g\,dy) = \int_G \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$

Der Beweis ist eine triviale Anwendung des Stokes'schen Satzes, denn es ist

$$d\big(f\,dx + g\,dy\big) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx \wedge dy.$$