4 Vektoranalysis

4.1 Riemannsche Metriken

Zunächst etwas Lineare Algebra:

Es seien r linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ im $\mathbb{R}^n$ gegeben, und $V := \mathbb{R}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ sei der von ihnen aufgespannte Untervektorraum.

Setzt man $A := (\mathbf{a}_1^\top, \ldots, \mathbf{a}_r^\top) \in M_{n,r}(\mathbb{R})$, so ist $A^\top \cdot A \in M_{r,r}(\mathbb{R})$, und

$$G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) := \det(A^\top \cdot A) = \det\Big(\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, r\Big)$$

heißt die ***Gramsche Determinante*** von $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$.

Das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ induziert ein Skalarprodukt auf dem Unterraum V. Ist nun $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ eine ON-Basis von V, so gibt es eine Darstellung

$$\mathbf{a}_i = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} \mathbf{u}_\nu,\; i = 1, \ldots, r.$$

Setzen wir $\boldsymbol{\alpha}_i := (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir})$ und $\widetilde{A} := (\boldsymbol{\alpha}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r^\top)$, so ist

$$\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = \Big(\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} \mathbf{u}_\nu\Big) \bullet \Big(\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu} \mathbf{u}_\mu\Big) = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu}\alpha_{j\nu} = \boldsymbol{\alpha}_i \bullet \boldsymbol{\alpha}_j$$

und $\widetilde{A}^\top \cdot \widetilde{A} = A^\top \cdot A$, also $G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) = \det(A^\top \cdot A) = \det(\widetilde{A}^\top \cdot \widetilde{A}) = \det(\widetilde{A})^2$.

Jetzt versehen wir V mit einer Orientierung. Ist $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ positiv orientiert und $\{\eta^1, \ldots, \eta^r\} \subset V^*$ die dazu duale Basis, so ist

$$\Omega_V := \eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^r \in A^r(V)$$

die zugehörige ***Volumenform***, und es gilt:

$$|\Omega_V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)| = |\det(\widetilde{A})| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)}.$$

Jetzt betrachten wir den Spezialfall $r = n - 1$. Dann ist V eine ***Hyperebene***. Ist $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenvektor zu V und $(\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1})$ im $\mathbb{R}^n$ positiv orientiert, so entspricht die durch $\mathbf{N}$ gegebene transversale Orientierung von V der gegebenen positiven inneren Orientierung von V. Sei $\{\psi, \varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ die duale Basis zu $\{\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$. Dann ist $\eta^i := \varphi^i|_V$, für $i = 1, \ldots, n-1$.

Sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ linear unabhängig, so wird durch $\varphi(\mathbf{w}) := \det(\mathbf{w}^\top, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})$ eine Linearform φ auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert. Daher gibt es genau einen Vektor $\mathbf{z}$, so dass $\varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{z} \bullet \mathbf{w}$ ist. Man bezeichnet diesen eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{z}$ mit dem Symbol $\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}$. Das ergibt die Gleichung

$$(\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}) \bullet \mathbf{w} = \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}).$$

Insbesondere steht $\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}$ auf V senkrecht, ist also ein Vielfaches von $\mathbf{N}$.

Der Laplacesche Entwicklungssatz besagt:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k),$$

wobei A_k die quadratische Matrix ist, die aus $A = (\mathbf{a}_1^\top, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}^\top)$ entsteht, indem man die k-te Zeile streicht.

Wir erinnern uns nun an die einem Vektor $\mathbf{w}$ kanonisch zugeordnete $(n-1)$-Form $\Lambda_\mathbf{w}$. Benutzen wir das euklidische Skalarprodukt, die positiv orientierte Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ und die dazu duale Basis $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$, so ist

$$\Lambda_\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k (-1)^{k+1} \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varepsilon^k} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n.$$

Dann folgt: $\Lambda_\mathbf{w}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1})$ und

$$\begin{aligned}
\Omega_V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) &= \eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^{n-1}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) \\
&= \psi \wedge \varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^{n-1}(\mathbf{N}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) \\
&= \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n(\mathbf{N}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) \;=\; \det(\mathbf{N}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} N_k \cdot \det(A_k) \;=\; (\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}) \bullet \mathbf{N},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\sqrt{G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})} &= |\Omega_V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})| \;=\; |(\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}) \bullet \mathbf{N}| \\
&= \|\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

(Da $\mathbf{N}$ und $\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}$ zueinander parallel sind, wird die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung zu einer Gleichung).

Definition

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine ***Riemannsche Metrik*** auf X ordnet jedem Punkt $x \in X$ ein Skalarprodukt γ_x auf dem Tangentialraum $T_x(X)$ zu, so dass gilt:

Sind ξ, η differenzierbare Vektorfelder auf X, so ist

$$x \mapsto \gamma_x(\xi_x, \eta_x)$$

eine differenzierbare Funktion.

Zur Erinnerung: Dass γ_x ein Skalarprodukt auf $T_x(X)$ ist, bedeutet:

1. $\gamma_x : T_x(X) \times T_x(X) \to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-bilinear.
2. Es ist $\gamma_x(v, w) = \gamma_x(w, v)$ für alle $v, w \in T_x(X)$.
3. Ist $v \neq 0$, so ist $\gamma_x(v, v) > 0$.

Ist (U, φ) eine Karte für X, so gibt es lokale Darstellungen

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{n} \xi^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{\nu=1}^{n} \eta^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \,.$$

Setzen wir $g_{\nu\mu}(x) := \gamma_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)_x\right)$, so ist

$$\gamma_x(\xi(x), \eta(x)) = \sum_{\nu,\mu} \xi^\nu(x) \cdot \eta^\mu(x) \cdot g_{\nu\mu}(x).$$

Fassen wir die $g_{\nu\mu}$ zu einer Matrix G_φ und die ξ^ν (bzw. η^μ) zu einem Vektor $\boldsymbol{\xi}_\varphi$ (bzw. $\boldsymbol{\eta}_\varphi$) zusammen, so erhalten wir die Gleichung

$$\gamma_x(\xi(x), \eta(x)) = \boldsymbol{\xi}_\varphi(x) \cdot G_\varphi(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_\varphi(x)^\top.$$

Die Riemannsche Metrik liefert auf jedem Tangentialraum eine Norm:

$$|v|_\gamma := \gamma_x(\xi(x), \xi(x))^{1/2} = \left(\boldsymbol{\xi}_\varphi(x) \cdot G_\varphi(x) \cdot \boldsymbol{\xi}_\varphi(x)^\top\right)^{1/2}.$$

4.1.1. Beispiel

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $X \subset G$ eine abgeschlossene k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann wird durch

$$\gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$$

eine Riemannsche Metrik (die kanonische Riemannsche Metrik) definiert. Ist $\varphi : T \to U \subset X$ eine lokale Parametrisierung und $\psi = \varphi^{-1}$ die davon bestimmte Karte, so bilden die Vektorfelder

$$\mathbf{X}_i(\varphi(\mathbf{u})) := D\varphi(\mathbf{u})(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(\mathbf{u})$$

die kanonischen Basisfelder auf U, und es ist

$$g_{ij} = \mathbf{X}_i \bullet \mathbf{X}_j, \text{ für } i, j = 1, \ldots, k.$$

Man kann aber auf jeder Mannigfaltigkeit X eine Riemannsche Metrik konstruieren. Dazu sei (U_ι, φ_ι) eine Überdeckung von X durch lokale Karten und (f_ι) eine dazu passende Teilung der Eins. Dann setzt man

$$\gamma_x(v, w) := \sum_\iota f_\iota(x) \cdot (v_{\varphi_\iota} \bullet w_{\varphi_\iota}),$$

wobei $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung von v bezüglich der Karte φ ist. Man rechnet leicht nach, dass γ alle Eigenschaften einer Riemannschen Metrik erfüllt.

Definition

Sei X eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik γ. Unter der ***Volumenform*** von X versteht man die eindeutig bestimmte n-Form Ω_X, für die

$$(\Omega_X)_x(u_1, \ldots, u_n) = 1$$

für jedes $x \in X$ und jede positiv orientierte ON-Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ von $T_x(X)$ ist.

4.1.2. Satz

Ist (U, φ) eine positiv orientierte Karte für X und $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, so ist

$$\Omega_X|_U = \sqrt{\det(G_\varphi)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \,.$$

Beweis: Weil φ positiv orientiert ist, gibt es eine positive Funktion h auf U, so dass gilt:

$$\Omega_X|_U = h \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \,.$$

Setzen wir $a_\nu := \partial/\partial x_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$, so ist $h(x) = (\Omega_X)_x(a_1, \ldots, a_n)$.

Sei nun $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von $T_x(X)$ und

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu}\, u_\nu, \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Fassen wir die $\alpha_{i\nu}$ zu einer Matrix $\widetilde{A}$ zusammen, so ist

$$\det(\widetilde{A})^2 = \det(\widetilde{A}^\top \cdot \widetilde{A}) = G(a_1, \ldots, a_n)$$

die Gramsche Determinante von $a_1, \ldots, a_n$.

Nun ist einerseits $(\Omega_X)_x(a_1, \ldots, a_n) = \det \widetilde{A}$ (und letztere damit positiv), und andererseits ist $\det G_\varphi(x) = \det\big(\gamma_x(a_i, a_j) \;\big|\; i, j = 1, \ldots, n\big) = G(a_1, \ldots, a_n)$.

Zusammen ergibt dies: $h(x) = \det(\widetilde{A}) = \sqrt{G(a_1, \ldots, a_n)} = \sqrt{\det G_\varphi(x)}$. ∎

4.1.3. Beispiele

A. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist U eine orientierte Mannigfaltigkeit mit dem euklidischen Skalarprodukt als Riemannsche Metrik, $\varphi = \mathrm{id}$ und $G_\varphi = E_n$, also

$$\Omega_U = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =: dV$$

das klassische „Volumenelement“.

Der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ kann mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden, und dann ist $|\mathbf{v}|_\gamma = \|\mathbf{v}\|$.

B. Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche, transversal orientiert durch ein Einheitsnormalenfeld $\mathbf{N}$. Ist $\mathbf{y} \in Y$, so kann man $T_{\mathbf{y}}(Y)$ als Untervektorraum von $T_{\mathbf{y}}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$ auffassen. Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ eine Basis von $T_{\mathbf{y}}(Y)$, so ist

$$(\Omega_Y)_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = (\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}) \bullet \mathbf{N}(\mathbf{y}) = \Lambda_{\mathbf{N}(\mathbf{y})}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}).$$

Ist $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_n)$, so ist

$$(\Omega_Y)_{\mathbf{y}} = \Lambda_{\mathbf{N}(\mathbf{y})} = j^*\Big(\sum_{k=1}^{n} N_k(-1)^{k+1}\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \wedge \ldots dx_n\Big),$$

wenn $j : Y \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Injektion ist. Man nennt $do := \Omega_Y$ das ***Oberflächenelement*** von Y.

C. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve, parametrisiert durch $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$. Sei $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\alpha}(t_0) \in C$. Dann ist

$$\boldsymbol{\alpha}_{*,t_0}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \boldsymbol{\alpha}'(t_0).$$

Ist $\varphi : C \to I$ eine durch $\boldsymbol{\alpha}$ bestimmte Koordinate, so ist

$$\sqrt{\det G_\varphi(\mathbf{x}_0)} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}'(t_0) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t_0)} = \|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|,$$

also $(\Omega_C)_\varphi(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\, dt$. Man bezeichnet $ds := \Omega_C$ auch als ***Linienelement***.

Es ist $\int_C ds = \int_I \|\alpha'(t)\|\, dt = L(C)$ die Länge von C.

Das letzte Beispiel legt die folgende Definition nahe:

Definition

Ist X eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik, so nennt man

$$\mathrm{vol}(X) := \int_X \Omega_X$$

den ***Inhalt*** (das ***Volumen***) von X.

Im Falle von 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (also Kurven) kommt die bekannte Weglänge heraus.

4.1.4. Beispiel

Sei $Y = S^{n-1}(r) = \partial B_r(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$. Ist $\mathbf{x} \in Y$, so ist $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{x}$ der äußere Normaleneinheitsvektor. Dann folgt mit dem Stokes'schen Satz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_{n-1}(Y) \quad &= \quad \int_Y do \;=\; \int_{\partial B_r} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r} x_k (-1)^{k+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&\overset{\text{(Stokes)}}{=} \quad \frac{n}{r} \int_B dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \;=\; \frac{n}{r} \cdot \mathrm{vol}_n(B_r(\mathbf{0})).
\end{aligned}$$

Im Falle $n = 2$ ist Y eine Kreislinie vom Radius r und $\mathrm{vol}_2(B_r(0)) = r^2\pi$, also $\mathrm{vol}_1(Y) = 2r\pi$.

Im Falle $n = 3$ ist Y eine Sphäre vom Radius r und $\mathrm{vol}_3(B_r(0)) = \frac{4}{3}\pi r^3$, also $\mathrm{vol}_2(Y) = \frac{3}{r}\mathrm{vol}_3(B_r(0)) = 4\pi r^2$.

Zum Schluss dieses Abschnittes soll gezeigt werden, dass eine Riemannsche Metrik tatsächlich eine Metrik im Sinne der Topologie induziert. Aus Zeitgründen wurde diese Aussage nicht in der Vorlesung bewiesen.

4.1.5. Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und γ eine Riemannsche Metrik auf U. Ist $K \subset U$ kompakt, so gibt es Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle $\mathbf{x} \in K$ und alle $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$c \cdot \|\mathbf{v}\| \le |\mathbf{v}|_\gamma \le C \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Beweis: Es gibt eine differenzierbare Funktion $A : U \to M_n(\mathbb{R})$, so dass $A(\mathbf{x})$ stets positiv definit und $\gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{w}^\top$, und $|\mathbf{v}|_\gamma = \big(\mathbf{v} \bullet A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}^\top\big)^{1/2}$ ist.

Sei $K \subset U$ kompakt und

$$L := \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in U \times \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{x} \in K \text{ und } \|\mathbf{v}\| = 1\} = K \times S^{n-1}.$$

Auch L ist kompakt, und die stetige Funktion $N(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \big(\mathbf{v} \bullet A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}^\top\big)^{1/2}$ nimmt auf L ein Maximum und ein positives Minimum an. Also gibt es Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in L$ gilt:

$$c \le N(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \le C.$$

Ist $\mathbf{x} \in K$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$, so setzen wir $\lambda := \|\mathbf{v}\|$. Dann ist $(\mathbf{x}, \lambda^{-1}\mathbf{v}) \in L$ und

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lambda \cdot N(\mathbf{x}, \lambda^{-1}\mathbf{v}) \le \lambda \cdot C = C \cdot \|\mathbf{v}\|,$$

und analog $N(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \ge c \cdot \|\mathbf{v}\|$. ∎

4.1.6. Satz

Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik γ,

$$d(x,y) := \inf\{L_\gamma(\alpha) \,:\, \alpha \textit{ stückweise differenzierbarer Weg von } x \textit{ nach } y\}.$$

Dann ist d eine Metrik, die die vorhandene Topologie induziert.

Beweis: 1) Offensichtlich ist stets $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,x) = 0$, sowie $d(x,y) = d(y,x)$.

2) Seien nun x, y, z drei Punkte von X. Ist α ein Weg von x nach y und β ein Weg von y nach z, so ist

$$d(x,z) \leq L_\gamma(\alpha + \beta) = L_\gamma(\alpha) + L_\gamma(\beta).$$

Bildet man das Infimum über alle α und β, so erhält man die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

3) Sind $x_0, y_0 \in X$ mit $x_0 \neq y_0$, so ist zu zeigen, dass $d(x_0, y_0) > 0$ ist.

Wir wählen ein Koordinatensystem (U, φ) mit $x_0 \in U$ und $y_0 \notin U$, sowie eine offene Umgebung $W = W(x_0) \subset\subset U$. Auf U haben wir eine „euklidische" Riemannsche Metrik $\delta = \delta_e$, durch $(\delta_e)_x(v,w) = (\varphi_{*,x}v) \bullet (\varphi_{*,x}w)$ für $x \in U$ und $v, w \in T_x(X)$. Nach dem Lemma gibt es Konstanten $c, C > 0$, so dass gilt:

$$c \cdot \|\varphi_{*,x}v\| \leq |v|_\gamma \leq C \cdot \|\varphi_{*,x}v\| \text{ für } x \in \overline{W} \text{ und } v \in T_x(X).$$

Für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\widetilde{\alpha}$ in $\overline{W}$ ist dann

$$c \cdot L_\delta(\widetilde{\alpha}) \leq L_\gamma(\widetilde{\alpha}) \leq C \cdot L_\delta(\widetilde{\alpha}).$$

Nun sei $\alpha : [a,b] \to X$ ein Verbindungsweg von x_0 nach y_0 und

$$t_0 := \inf\{t \in [a,b] \,:\, \alpha(t) \notin \overline{W}\}.$$

Dann liegt $\alpha(t_0)$ in ∂W, und $\alpha(t) \in \overline{W}$ für $a \leq t \leq t_0$. Ist $\widetilde{\alpha} := \alpha|_{[a,t_0]}$, so gilt:

$$\begin{aligned} L_\gamma(\alpha) &\geq L_\gamma(\widetilde{\alpha}) \geq c \cdot L_\delta(\widetilde{\alpha}) \\ &\geq c \cdot d_\delta(x_0, \alpha(t_0)) \geq c \cdot \mathrm{dist}_\delta(x_0, \partial W) > 0. \end{aligned}$$

Also muss auch $d_\gamma(x_0, y_0) > 0$ sein.

4) Sei $M \subset X$ offen und $p \in M$. Sei (U, φ) ein Koordinatensystem mit $p \in U \subset M$. Sei $B = B_\varepsilon(\varphi(p)) \subset\subset \varphi(U)$ und $V := \varphi^{-1}(B) \subset\subset U$. Dann gibt es ein $c > 0$, so dass $d_\gamma(p,q) \geq c \cdot d_\delta(p,q) \geq c \cdot \varepsilon$ für $q \notin \overline{V}$ ist.

Ist also $d_\gamma(p,q) < c\varepsilon$, so ist $q \in \overline{V} \subset U$. Das zeigt, dass die metrische Kugel mit Radius $c\varepsilon$ um p in U und damit in M enthalten ist. Also ist M auch im metrischen Sinne offen.

5) Sei umgekehrt M offen im metrischen Raum (X, d_γ), und $p \in M$. Sei (U, φ) ein Koordinatensystem in p und $V = V(p) \subset\subset U$. Versieht man U wie oben mit der euklidischen Metrik δ, so gibt es Konstanten $c, C > 0$, so dass $c\|v\| \leq |v|_\gamma \leq C\|v\|$ für $x \in \overline{V}$ und $v \in T_x(X)$ ist. Wir können annehmen, dass U im $\mathbb{R}^n$ liegt.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $W := \{x \in X \,:\, d_\gamma(x,p) < C\varepsilon\} \subset M$ und $V_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - p\| < \varepsilon\} \subset V$ ist.

Sei $q \in V_\varepsilon$. Ist α die Verbindungsstrecke von p mit q in V_ε, so gilt:

$$d_\gamma(p,q) \leq L_\gamma(\alpha) \leq C \cdot L_\delta(\alpha) < C \cdot \varepsilon.$$

Also liegt V_ε in $W \subset M$, und M ist offen in der gegebenen Topologie von X. ∎

4.2 Stern-Operator und Volumenelement

Sei V ein n-dimensionaler orientierter Vektorraum mit Skalarprodukt, Ω_V die zugehörige Volumenform. Durch $t(v)(w) := \langle v\,,\,w\rangle$ wird der kanonische Isomorphismus $t : V \to V^*$ mit $v \mapsto t(v) = \lambda_v$ definiert.

4.2.1. Satz

Ist $\alpha \in A^p(V)$, so gibt es genau ein Element $*\alpha = *_p\,\alpha \in A^{n-p}(V)$ mit

$$(*\alpha)(x_1,\ldots,x_{n-p})\cdot\Omega_V = \alpha\wedge t(x_1)\wedge\ldots\wedge t(x_{n-p})$$

für $x_1,\ldots,x_{n-p}\in V$.

Beweis: Zu jedem $(n-p)$-Tupel $(x_1,\ldots,x_{n-p})\in V\times\ldots\times V$ gibt es genau eine reelle Zahl $a = a(x_1,\ldots,x_{n-p})$, so dass $\alpha\wedge t(x_1)\wedge\ldots\wedge t(x_{n-p}) = a\cdot\Omega_V$ ist. Also kann man

$$(*\alpha)(x_1,\ldots,x_{n-p}) := a$$

setzen. Da die Zuordnung $(x_1,\ldots,x_{n-p})\mapsto\alpha\wedge t(x_1)\wedge\ldots\wedge t(x_{n-p})$ multilinear und alternierend ist, gilt das auch für $*\alpha$. ∎

Sei $\{a_1,\ldots,a_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von V und $\{\alpha^1,\ldots,\alpha^n\}$ die duale Basis, also $\Omega_V = \alpha^1\wedge\ldots\wedge\alpha^n$. Dann folgt:

4.2.2. Satz

Sind $I=(i_1,\ldots,i_p)$ und $J=(j_1,\ldots,j_{n-p})$ Multiindizes mit $1\le i_1<\ldots<i_p\le n$, $1\le j_1<\ldots<j_{n-p}\le n$ und $I\cup J=\{1,\ldots,n\}$, so gilt:

$$*(\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_p}) = \delta(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{n-p})\cdot\alpha^{j_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{j_{n-p}}.$$

Beweis: Zur Abkürzung sei $\delta(I,J)=\delta(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{n-p})$.

Weil die a_i eine ON-Basis bilden, ist $t(a_i)=\alpha^i$, für $i=1,\ldots,n$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&(\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_p})\wedge t(a_{j_1})\wedge\ldots\wedge t(a_{j_{n-p}}) =\\
&= \alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_p}\wedge\alpha^{j_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{j_{n-p}}\\
&= \begin{cases}\delta(I,J)\cdot\Omega_V & \text{falls } I\cap J=\varnothing,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ist $*(\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_p})(a_{j_1},\ldots,a_{j_{n-p}}) = \begin{cases}\delta(I,J) & \text{falls } I\cap J=\varnothing,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$,

also $*(\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_p}) = \delta(I,J)\alpha^{j_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{j_{n-p}}$. ∎

4.2.3. Folgerung

Ist α eine p-Form, so ist $**\,\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$.

BEWEIS: Es reicht, die Aussage für Formen vom Typ $\alpha^I := \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_p}$ zu beweisen. Sei $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$**\,(\alpha^I) = \delta(I,J) \cdot *\alpha^J = \delta(I,J)\delta(J,I)\alpha^I.$$

Andererseits ist $\alpha^I \wedge \alpha^J = (-1)^{p(n-p)}\alpha^J \wedge \alpha^I$. Damit folgt:

$\delta(J,I) = (-1)^{p(n-p)}\delta(I,J)$. ∎

4.2.4. Folgerung

Die lineare Abbildung $* = *_p : A^p(V) \to A^{n-p}(V)$ ist ein Isomorphismus, mit $*_p^{-1} = (-1)^{p(n-p)} *_{n-p}$.

Bemerkung: Ist $n = \dim(V)$ ungerade, so ist $*_p^{-1} = *_{n-p}$, für jedes p.

Ist n gerade, so ist $*_p^{-1} = (-1)^p *_{n-p}$.

4.2.5. Satz

Sind $\alpha, \beta \in A^p(V)$, so ist $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$.

BEWEIS: Sei zunächst $\alpha = \alpha^I$ und $\beta = \alpha^K$. Ist $K \cup L = \{1, \ldots, n\}$ und $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$, so gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge *\beta &= \alpha^I \wedge *\alpha^K \ = \ \alpha^I \wedge \delta(K,L)\alpha^L \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } K \neq I, \\ \delta(I,J)\alpha^I \wedge \alpha^J = \Omega_V & \text{falls } K = I. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\beta \wedge *\alpha$ liefert das gleiche Ergebnis. ∎

Ist $\alpha = \sum\limits_I a_I \alpha^I$ und $\beta = \sum\limits_J b_K \alpha^K$, so ist $\alpha \wedge *\beta = \big(\sum\limits_I a_I b_I\big)\,\Omega_V$. Speziell ist $\alpha \wedge *\alpha = \big(\sum\limits_I a_I^2\big)\,\Omega_V$.

Wir halten weiterhin eine positiv orientierte ON-Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V und die zugehörige duale Basis $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ von V^* fest. Sei $g_{ij} := \langle a_i\,,\, a_j\rangle$. Die Matrix $G = \big(g_{ij} \,:\, i,j = 1, \ldots, n\big)$ ist symmetrisch und positiv definit, also insbesondere invertierbar. Sei $G^{-1} = (g^{kl})$ die inverse Matrix zu G.

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} v^i a_i \in V$. Die Indizes bei den „kontravarianten“ Komponenten v^i sind bewusst hochgestellt. Hat die zugeordnete Linearform $t(v) = \lambda_v$ die Gestalt $\lambda_v = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \alpha^\nu$ (mit „tiefgestellten“ Indizes v_ν), so gilt:

$$v_\nu = \lambda_v(a_\nu) = \langle v\,,\, a_\nu\rangle = \sum_{i=1}^{n} v^i \langle a_i\,,\, a_\nu\rangle = \sum_{i=1}^{n} g_{\nu i} v^i \text{ (weil } g_{i\nu} = g_{\nu i} \text{ ist).}$$

Andererseits ist

$$\sum_{\mu=1}^{n} g^{k\mu} v_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} g_{\mu i} v^i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\mu=1}^{n} g^{k\mu} g_{\mu i} \Big) v^i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} v^i = v^k.$$

In der Physik lässt man an dieser Stelle gerne die Summenzeichen weg. Die Prozeduren

$$v_\nu = g_{\nu i} v^i \quad \text{ und } \quad v^k = g^{k\mu} v_\mu$$

bezeichnet man als „Herunter- und Heraufziehen der Indizes“. Die Koeffizienten v_ν nennt man die „kovarianten Komponenten“ von v.

Der Sternoperator kann wörtlich auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden:

Definition

Sei X eine n-dimensionale orientierbare zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, mit fest gewählter Orientierung, Riemannscher Metrik γ und Volumenelement Ω_X.

Ist $\alpha \in \Omega^p(X)$, so gibt es genau eine Differentialform $*\alpha \in \Omega^{n-p}(X)$, so dass für alle Vektorfelder $\xi_1, \ldots, \xi_{n-p}$ auf X gilt:

$$(*\alpha)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-p}) \cdot \Omega_X = \alpha \wedge t(\xi_1) \wedge \ldots \wedge t(\xi_{n-p}).$$

Dabei ist $t : \mathscr{X}(X) \to \Omega^1(X)$ der durch $t(\xi)(\eta) = \gamma(\xi, \eta)$ definierte Isomorphismus.

Wie in Vektorräumen folgt, dass $* = *_p : \Omega^p(X) \to \Omega^{n-p}(X)$ ein Isomorphismus mit $*_p^{-1} = (-1)^{p(n-p)} *_{n-p}$ ist. Und für $\alpha, \beta \in \Omega^p(X)$ ist $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$.

4.2.6. Satz

Ist X zusätzlich kompakt, so wird durch

$$\langle \alpha\,,\, \beta\rangle_p := \int_X \alpha \wedge *\beta \;\; (\textit{für } \alpha, \beta \in \Omega^p(X))$$

ein Skalarprodukt auf $\Omega^p(X)$ definiert.

Beweis: Offensichtlich ist $\langle \ldots , \ldots \rangle_p$ eine symmetrische Bilinearform. Und weil $\alpha \wedge *\alpha = h\,\Omega_X$ mit einer positiven Funktion h ist, ist sie auch positiv definit. ∎

4.2.7. Folgerung

Ist X kompakt, so ist $*_p$ eine Isometrie, d.h., es ist $\langle *\alpha\,,\, *\beta\rangle_{n-p} = \langle \alpha\,,\,\beta\rangle_p$.

Beweis: Sind $\alpha, \beta \in \Omega^p(X)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \langle *\alpha\,,\, *\beta\rangle &= \int_X (*\alpha) \wedge (**\beta) \;=\; (-1)^{p(n-p)} \int_X (*\alpha)\wedge\beta \\ &= \int_X \beta \wedge (*\alpha) \;=\; \langle \beta\,,\,\alpha\rangle \;=\; \langle \alpha\,,\,\beta\rangle. \end{aligned}$$

∎

Definition

Sei X eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Das ***Codifferential***

$$\delta = \delta_p : \Omega^p(X) \to \Omega^{p-1}(X)$$

wird definiert durch $\quad \delta := (-1)^{n(p+1)+1} * d *$.

4.2.8. Satz

Ist X kompakt, $\varphi \in \Omega^{p-1}(X)$ und $\psi \in \Omega^p(X)$, so ist $\quad \langle d\varphi\,,\,\psi\rangle = \langle \varphi\,,\,\delta\psi\rangle$.

Beweis: Sei $\sigma_p : \Omega^p(X) \to \Omega^p(X)$ definiert durch $\sigma_p(\alpha) := (-1)^{np+p}\cdot\alpha$. Dann ist $\sigma_{n-p} = \sigma_p$ und deshalb $*_p \circ \sigma_p = \sigma_{n-p} \circ *_p$, sowie $*_{n-p} \circ *_p = \sigma_p$.

Für $\omega \in \Omega^{n-p+1}(X)$ ist daher

$$(-1)^p\omega = (-1)^p \, **\sigma_{n-p+1}\omega = (-1)^{p+n(p-1)+(p-1)} **\omega = (-1)^{n(p+1)+1} **\omega.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt nun:

$$\begin{aligned} \langle d\varphi\,,\,\psi\rangle &= \int_X d\varphi \wedge *\psi \;=\; \int_X \big(d(\varphi\wedge *\psi) - (-1)^{p-1}\varphi \wedge d*\psi\big) \\ &= (-1)^p \int_X \varphi \wedge d*\psi \;=\; \int_X \varphi \wedge \big((-1)^{n(p+1)+1} **d*\psi \\ &= \int_X \varphi \wedge *\delta\psi \;=\; \langle \varphi\,,\,\delta\psi\rangle. \end{aligned}$$

∎

Die Definition des Codifferentials ist in der Literatur nicht einheitlich. Hier ist es als adjungierter Operator zu d festgelegt.

Definition

Sei X eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $t : \mathscr{X}(X) \to \Omega^1(X)$ der kanonische Isomorphismus. Dann definiert man:

1. Ist f eine differenzierbare Funktion auf X, so heißt

$$\nabla f = \mathbf{grad}\, f := t^{-1}(df)$$

der ***Gradient*** von f.

2. Ist ξ ein Vektorfeld auf X, so heißt die Funktion

$$\operatorname{div} \xi := -\delta(t\xi)$$

die ***Divergenz*** von ξ.

3. Ist $\dim X = 3$ und ξ ein Vektorfeld auf X, so nennt man

$$\mathbf{rot}\, \xi := t^{-1} * d(t\xi)$$

die ***Rotation*** von ξ.

Ist η ein weiteres Vektorfeld auf X, so nennt man

$$\xi \times \eta := t^{-1} * (t\xi \wedge t\eta)$$

das ***Vektorprodukt*** von ξ und η.

Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ ist $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

Weil $\delta = - * d*$ im Falle $p = 1$ ist, folgt außerdem im $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= * d * (\xi_1\, dx_1 + \cdots + \xi_n\, dx_n) \\
&= * d\Big(\sum_{i=1}^n \xi_i (-1)^{i-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\Big) \\
&= * \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Nebenbei haben wir hier (im $\mathbb{R}^n$) auch folgende Formeln bewiesen:

$$\boxed{* t(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i (-1)^{i-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = \Lambda_\xi}$$

und

$$\boxed{\operatorname{div}\xi = *d\Lambda_\xi.}$$

Ist $n = 3$, so ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= t^{-1} * d(\xi_1\,dx_1 + \xi_2\,dx_2 + \xi_3\,dx_3) \\
&= t^{-1} * \Big(\big(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}\big)\,dx_2\wedge dx_3 + \big(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\big)\,dx_1\wedge dx_3 \\
&\qquad + \big(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\big)\,dx_1\wedge dx_2\Big) \\
&= t^{-1}\Big(\big(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}\big)\,dx_1 + \big(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\big)\,dx_2 + \big(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\big)\,dx_3\Big) \\
&= \Big(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^3$ ist außerdem $* * \alpha = \alpha$ für jede 1-Form und jede 2-Form, und deshalb $*\Lambda_\eta = t\eta$. Also ist $t^{-1} * \Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} = \mathbf{rot}\,\xi = t^{-1} * d(t\xi)$. Daraus folgt:

$$\boxed{\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} = d(t\xi) \quad (\text{im } \mathbb{R}^3).}$$

Weil $*$ und t Isomorphismen sind, gilt: Ist $\Lambda_\xi = \Lambda_\eta$, so ist $\xi = \eta$.

4.2.9. Formeln der klassischen Vektoranalysis

Im $\mathbb{R}^3$ sei f eine differenzierbare Funktion, ξ und η Vektorfelder. Dann gilt:

1. $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f = \mathbf{0}$.
2. $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\xi = 0$.
3. $\mathbf{rot}(f\cdot\xi) = f\cdot\mathbf{rot}(\xi) + \mathbf{grad}\,f\times\xi$.
4. $\operatorname{div}(\xi\times\eta) = \mathbf{rot}\,\xi\bullet\eta - \xi\bullet\mathbf{rot}\,\eta$.
5. $\operatorname{div}(f\cdot\xi) = \mathbf{grad}\,f\bullet\xi + f\cdot\operatorname{div}\xi$.

BEWEIS: 1) $0 = ddf = d\big(t(\mathbf{grad}\,f)\big) = \Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f}$, also $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f = (0,0,0)$.

2) $0 = dd\big(t(\xi)\big) = d(\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi}) = (\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\xi)dV$, also $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,A = 0$.

3) Es ist

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathbf{rot}(f\cdot\xi)} &= d\big(t(f\cdot\xi)\big) = d\big(f\cdot t(\xi)\big) \\
&= df\wedge t(\xi) + f\cdot d\,t(\xi) \\
&= t(\mathbf{grad}\,f)\wedge t(\xi) + f\cdot\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} \\
&= \Lambda_{\mathbf{grad}\,f\times\xi} + \Lambda_{f\cdot\mathbf{rot}\,\xi} \\
&= \Lambda_{\mathbf{grad}\,f\times\xi + f\cdot\mathbf{rot}\,\xi}.
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}(\xi \times \eta))dV &= d(\Lambda_{\xi\times\eta}) \\ &= d\big(t(\xi) \wedge t(\eta)\big) \\ &= dt(\xi) \wedge t(\eta) - t(\xi) \wedge dt(\eta) \\ &= \Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} \wedge t(\eta) - t(\xi) \wedge \Lambda_{\mathbf{rot}\,\eta} \\ &= (\mathbf{rot}\,\xi \bullet \eta - \xi \bullet \mathbf{rot}\,\eta)dV,\end{aligned}$$

denn es ist $t\xi \wedge \Lambda_\eta = (\xi \bullet \eta)\, dV$.

5) Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}(f \cdot \xi))dV &= d(\Lambda_{f\cdot\xi}) \;=\; d(f \cdot \Lambda_\xi) \\ &= df \wedge \Lambda_\xi + f \cdot d\Lambda_\xi \\ &= t(\mathbf{grad}\, f) \wedge \Lambda_\xi + f \cdot (\operatorname{div}\xi)dV \\ &= (\mathbf{grad}\, f \bullet \xi + f \cdot \operatorname{div}\xi)dV.\end{aligned}$$

■

Auf Mannigfaltigkeiten sehen die Differentialoperatoren etwas anders aus.

In einem Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$ wird jedem Vektor $v \in V$ kanonisch eine Linearform $\lambda_v \in V^*$ durch $\lambda_v(w) = \langle v\,,\, w\rangle$ zugeordnet. Das überträgt sich auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten in Form des Isomorphismus $t : \mathscr{X}(X) \to \Omega^1(X)$. Es ist also $t\xi(\eta) = \gamma(\xi, \eta)$, und daher

$$\gamma(\nabla f, \eta) = \gamma(t^{-1}df, \eta) = t(t^{-1}df)(\eta) = df(\eta) = \mathscr{L}_\xi(f).$$

Die kovarianten Komponenten von $\xi = \nabla f$ sind die Koeffizienten $\xi_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ von df.

Dementsprechend sind die kontravarianten Komponenten ξ^i von ξ gegeben durch $\xi^i = \sum_{j=1}^n g^{ij}\xi_j = \sum_{j=1}^n g^{ji}\xi_j$, und in lokalen Koordinaten ist

$$\nabla f = \Big(\sum_{j=1}^n g^{j\,1}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^n g^{j\,n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big).$$

Im V haben wir auch jedem Vektor $\mathbf{v}$ eine alternierende $(n{-}1)$-Form $\Lambda_{\mathbf{v}}$ zugeordnet, und das lässt sich ebenso auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

4.2.10. Satz

Zu jedem Vektorfeld ξ auf X gibt es eine eindeutig bestimmte $(n-1)$-Form Λ_ξ auf X mit

$$t(\eta) \wedge \Lambda_\xi = \gamma(\eta, \xi) \cdot \Omega_X.$$

Ist $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ ein lokales Koordinatensystem, so ist

$$(\Lambda_\xi)_\varphi = \sqrt{\det G_\varphi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \xi^k (-1)^{k+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit ergibt sich wie folgt: Ist Λ_ξ mit der gewünschten Eigenschaft gegeben und

$$\Lambda_\xi = \sum_{k=1}^{n} a_k\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

so ist einerseits

$$dx_i \wedge \Lambda_\xi = (-1)^{i+1} a_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

und andererseits $t^{-1}(dx^i) = (g^{i1}, \ldots, g^{in})$, also

$$\gamma(t^{-1}(dx_i), \xi)\, \Omega_X = \Big(\sum_{k,l} g^{ik} g_{kl} \xi^l\Big) \cdot \Omega_X = \xi^i \cdot \sqrt{\det G_\varphi}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Daraus folgt: $a_i = \sqrt{\det G_\varphi}(-1)^{i+1}\xi^i$.

Ist umgekehrt Λ_ξ so gegeben und $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$, so ist

$$t(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\eta^i\Big)\, dx_k,$$

also

$$\begin{aligned} t(\eta) \wedge \Lambda_\xi &= \sum_{i,k} g_{ik}\eta^i \xi^k \cdot \sqrt{\det G_\varphi}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \gamma(\eta, \xi)\, \Omega_X \end{aligned}$$

Das zeigt die Existenz. ∎

4.2.11. Satz

Ist $g := \det G_\varphi$, so hat die Divergenz in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\, \xi^k)}{\partial x_k}\ ,$$

und es gilt die Formel $\quad d(\Lambda_\xi) = (\operatorname{div} \xi)\, \Omega_X$.

Beweis: Es ist

$$d(\Lambda_\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\, \xi^k)}{\partial x_k}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\, \xi^k)}{\partial x_k}\, \Omega_X.$$

Auf der anderen Seite ist $\operatorname{div}\xi = *d*(t\xi)$, und das muss man Schritt für Schritt ausrechnen. Nach Definition ist zunächst

$$\begin{aligned} *(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n)\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) \cdot \Omega_X &= dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge t\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) \\ &= g_{ik}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dx_i \\ &= (-1)^{n-i}\frac{1}{\sqrt{g}} g_{ik}\Omega_X \end{aligned}$$

Also ist

$$*(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-i}\frac{1}{\sqrt{g}}\, g_{ik}\, dx_k$$

und – weil $**\alpha = (-1)^{n-1}\alpha$ auf $\Omega^{n-1}(X)$ ist –

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1}\frac{1}{\sqrt{g}}\, g_{ik}\, * dx_k.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $g^{\nu i}$ und addiert über i, so erhält man:

$$*dx_\nu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\sqrt{g}\, g^{\nu i}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} *t\xi &= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu * dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\sqrt{g}\, g^{\nu i}\xi_\nu\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\sqrt{g}\, \xi^i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d*t\xi &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^i)}{\partial x_\mu}\, dx_\mu \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^i)}{\partial x_i} \cdot \Omega_X. \end{aligned}$$

Weil $*(f\,\Omega_X) = f$ ist, folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^n$ ist $g = 1$ und es kommen die bekannten Formeln heraus.

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi : G \to \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so kann man $\widetilde{G}$ als parametrisierte Mannigfaltigkeit auffassen. Als Beispiel seien die ebenen Polarkoordinaten genannt:

$$\varphi(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$