3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

3.1 Der Differentialformenkalkül

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine q-dimensionale Differentialform auf B ist eine differenzierbare Abbildung $\omega : B \to A^q(\mathbb{R}^n)$ (eigentlich sogar eine differenzierbare Abbildung $\omega : B \to B \times A^q(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \omega = \mathrm{id}_B$, aber man kann ω mit $\mathrm{pr}_2 \circ \omega$ identifizieren). Man kann eine solche q-Form immer folgendermaßen beschreiben:

$$\omega = \sum_{0 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} a_{j_1 \ldots j_q}\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q},$$

mit differenzierbaren Funktionen $a_{j_1 \ldots j_q} : B \to \mathbb{R}$.

Definition

X und Y seien differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Dann wird jeder q-Form $\omega \in \Omega^q(Y)$ eine q-Form $\Phi^*\omega \in \Omega^q(X)$ zugeordnet, durch

$$(\Phi^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_q) := \omega_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1, \ldots, \Phi_{*,x}v_q).$$

Man spricht vom „Rücktransport“ oder vom „Pullback“ oder von der „Liftung“. $\Phi^*\omega$ ist also die „zurückgeholte“ oder „geliftete“ q-Form.

3.1.1. Satz

Die „Liftung“ $\Phi^* : \Omega^q(Y) \to \Omega^q(X)$ hat folgende Eigenschaften:

1. *Φ^* ist $\mathbb{R}$-linear.*
2. *Ist f eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf Y und $\omega \in \Omega^q(Y)$, so ist*

$$\Phi^*(f \cdot \omega) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi^*(\omega).$$

3. *Ist f eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf Y, so ist $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$.*
4. *Ist $\varphi \in \Omega^p(Y)$ und $\psi \in \Omega^q(Y)$, so ist $\Phi^*(\varphi \wedge \psi) = (\Phi^*\varphi) \wedge (\Phi^*\psi)$.*

Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften folgen sofort aus der Definition, die dritte Eigenschaft haben wir am Ende von Abschnitt 1.3 bewiesen, denn die hier gegebene Definition von Φ^* stimmt auf 1-Formen mit der früher gegebenen Definition überein.

Sind $y_1, \ldots, y_m$ lokale Koordinaten auf Y, so kann man $\Phi_j := y_j \circ \Phi$ setzen. Dann ist $\Phi^*(dy_j) = d\Phi_j$, für $j = 1, \ldots, m$.

Zu Eigenschaft (4): Sind $\omega_1, \ldots, \omega_q$ Pfaffsche Formen auf Y, so ist

$$\begin{aligned}
&(\Phi^*\omega_1 \otimes \cdots \otimes \Phi^*\omega_q)_x(v_1, \ldots, v_q) = \\
&\quad = (\Phi^*\omega_1)_x(v_1) \cdots (\Phi^*\omega_q)_x(v_q) \\
&\quad = (\omega_1)_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1) \cdots (\omega_q)_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_q) \\
&\quad = (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q)_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1, \ldots, \Phi_{*,x}v_q).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\Phi^*(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q) = (\Phi^*\omega_1) \wedge \ldots \wedge (\Phi^*\omega_q)$ und dann allgemein $\Phi^*(\varphi \wedge \psi) = (\Phi^*\varphi) \wedge (\Phi^*\psi)$ ist. ∎

3.1.2. Folgerung 1

Sei $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Koordinatensystem auf $U \subset X$, $\psi = (y_1, \ldots, y_m)$ ein Koordinatensystem auf $V \subset Y$, $\Phi(U) \subset V$ und $\Phi_i := y_i \circ \Phi$ für $i = 1, \ldots, m$.

Ist $\omega \in \Omega^q(Y)$ und $\omega|_V = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q}\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$, so ist

$$(\Phi^*\omega)|_U = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q}.$$

Bemerkungen dazu: Ist ω eine q-Form auf X und (U, φ) eine Karte für X, so gibt es eine q-Form $\omega^{(\varphi)}$ auf $B := \varphi(U)$, so dass gilt:

$$\omega|_U = \varphi^*(\omega^{(\varphi)}).$$

Ist $\omega^{(\varphi)} = \sum a_{i_1 \ldots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, so ist also

$$\omega|_U = \sum (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi)\, d(x_{i_1} \circ \varphi) \wedge \ldots \wedge d(x_{i_q} \circ \varphi).$$

Da wir die Koordinatenfunktionen x_i in zweierlei Bedeutung verwenden, also nicht zwischen x_i und $x_i \circ \varphi$ unterscheiden, kommt so die bekannte Darstellung einer Differentialform in lokalen Koordinaten zustande.

3.1.3. Folgerung 2

Ist $n = m$, so gilt mit den Bezeichnungen von Folgerung 1:

$$\Phi^*(a\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (a \circ \Phi) \cdot \big((\det J_{\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}}) \circ \varphi\big) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beweis: Es ist

$$
\begin{aligned}
d\Phi_1 \wedge \ldots \wedge d\Phi_n &= \\
&= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n}\big((\Phi_1\circ\varphi^{-1})_{x_{i_1}}\circ\varphi\big)\cdots\big((\Phi_n\circ\varphi^{-1})_{x_{i_n}}\circ\varphi\big)\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\big((\Phi_1\circ\varphi^{-1})_{x_{\sigma(1)}}\circ\varphi\big)\cdots\big((\Phi_n\circ\varphi^{-1})_{x_{\sigma(n)}}\circ\varphi\big)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n \\
&= \big((\det J_{\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}})\circ\varphi\big)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.
\end{aligned}
$$

■

3.1.4. Satz

$\Phi : X \to Y$ und $\Psi : Y \to Z$ seien differenzierbare Abbildungen, $\omega \in \Omega^q(W)$. Dann ist

$$(\Psi\circ\Phi)^*\omega = \Phi^*(\Psi^*\omega).$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\big((\Psi\circ\Phi)^*\omega\big)_x(v_1,\ldots,v_q) &= \omega_{\Psi\circ\Phi(x)}\big((\Psi\circ\Phi)_{*,x}v_1,\ldots,(\Psi\circ\Phi)_{*,x}v_q\big) \\
&= (\Psi^*\omega)_{\Phi(x)}\big(\Phi_{*,x}v_1,\ldots,\Phi_{*,x}v_q\big) \\
&= \big(\Phi^*(\Psi^*\omega)\big)_x(v_1,\ldots,v_q).
\end{aligned}
$$

■

3.1.5. Satz

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ gibt es eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $d = d_U^q : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Ist $f \in \Omega^0(U)$ eine Funktion, so ist $d_U^0 f = df$ das bekannte Differential.*
2. *Ist $\omega \in \Omega^p(U)$ und $\varphi \in \Omega^q(U)$, so ist*

$$d_U^{p+q}(\omega\wedge\varphi) = d_U^p\omega\wedge\varphi + (-1)^p\omega\wedge d_U^q\varphi.$$

3. *Es ist $d_U^{q+1}\circ d_U^q = 0$.*
4. *Ist $V \subset U$ offen und $\omega \in \Omega^q(U)$, so ist $d_V^q(\omega|_V) = (d_U^q\omega)|_V$.*

Beweis: 1) **Eindeutigkeit**:

Wenn d_U^q auf jeder Koordinatenumgebung U eindeutig bestimmt ist, dann ist d_U^q wegen der Eigenschaft (4) auch auf jeder beliebigen offenen Teilmenge $U \subset X$ festgelegt. Es reicht also, die Eindeutigkeit auf Koordinatenumgebungen zu zeigen.

Ist $\omega = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_q\le n} a_{i_1\ldots i_q}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}$, so muss gelten:

$$\begin{aligned}
d_U^q\omega &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_q\le n} d_U^q\big(a_{i_1\ldots i_q}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}\big)\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_q\le n} \big(da_{i_1\ldots i_q}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q} + a_{i_1\ldots i_q}\, d_U^q(dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q})\big)\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_q\le n} da_{i_1\ldots i_q}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q},
\end{aligned}$$

denn es ist $d_U^q(dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}) = 0$, wie ein simpler Induktionsbeweis (unter Verwendung der Eigenschaften (1), (2) und (3)) zeigt.

Existenz:

Wir definieren zunächst $d = d_U^q$ auf einer Koordinatenumgebung durch die oben gewonnene Gleichung. Das ist möglich, wegen der eindeutig bestimmten Basisdarstellung der Differentialformen. Es ist klar, dass d dann linear ist, und dass df das Differential von f ist.

Wir benutzen eine abgekürzte Schreibweise:

$$a_I := a_{i_1\ldots i_q} \quad\text{und}\quad dx_I := dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q},$$

für $I := (i_1,\ldots,i_q)$ mit $1\le i_1<\ldots<i_q\le n$.

Ist $\omega = a_I\, dx_I$ und $\varphi = b_J\, dx_J$, so ist

$$\begin{aligned}
d(\omega\wedge\varphi) &= d(a_Ib_J\, dx_I\wedge dx_J)\\
&= d(a_Ib_J)\wedge dx_I\wedge dx_J\\
&= \big[(da_I)b_J + a_I(db_J)\big]\wedge dx_I\wedge dx_J\\
&= (da_I\wedge dx_I)\wedge(b_J dx_J) + db_J\wedge(a_I\, dx_I)\wedge dx_J\\
&= d\omega\wedge\varphi + (-1)^p\omega\wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

Weiter gilt in lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$:

$$\begin{aligned}
ddf &= d\Big(\sum_i \big((f\circ\varphi^{-1})_{x_i}\circ\varphi\big)\, dx_i\Big)\\
&= \sum_i d\big((f\circ\varphi^{-1})_{x_i}\circ\varphi\big)\wedge\, dx_i\\
&= \sum_{i,j} \big((f\circ\varphi^{-1})_{x_ix_j}\circ\varphi\big)\, dx_j\wedge\, dx_i\\
&= \sum_{j<i} \Big(\big((f\circ\varphi^{-1})_{x_ix_j} - (f\circ\varphi^{-1})_{x_jx_i}\big)\circ\varphi\Big)\, dx_j\wedge\, dx_i \;=\; 0,
\end{aligned}$$

wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen, und daher

$$\begin{aligned} dd(a_I\,dx_I) &= d(da_I \wedge dx_I) \\ &= dda_I \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Aus dem ersten Teil des Beweises von Satz 3.1.6 (für den man nur die Existenz von d auf Koordinatenumgebungen braucht) folgt, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist.

Ist $U \subset X$ eine beliebige offene Menge, $V \subset U$ eine Koordinatenumgebung und $\omega \in \Omega^q(U)$, so setzt man $(d_U\omega)|_V := d_V(\omega|_V)$. Weil die lokale Definition unabhängig von den Koordinaten ist, ist d_U wohldefiniert. ∎

3.1.6. Satz

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung und $\omega \in \Omega^q(Y)$, so ist

$$d^q_U(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d^q_V\omega) \text{ für jede offene Menge } V \subset Y \text{ und } U := \Phi^{-1}(V).$$

Beweis: Sei zunächst $V \subset Y$ eine Koordinatenumgebung mit lokalen Koordinaten $y_1, \ldots, y_m$. Ist $\omega = a\,dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$, so ist

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= d\big((a \circ \Phi)\,d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q}\big) \\ &= d(a \circ \Phi) \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q} + (a \circ \Phi)\,d(d\Phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{i_q}) \\ &= \Phi^*(da) \wedge \Phi^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \Phi^*(dy_{i_q}) \\ &= \Phi^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}) \;=\; \Phi^*(d\omega). \end{aligned}$$

Ist $V \subset Y$ eine beliebige offene Menge und $W \subset V$ eine Koordinatenumgebung, so gilt für $M := \Phi^{-1}(W)$: $(\Phi^*\omega)|_M = \Phi^*(\omega|_W)$, und deshalb auch

$$\begin{aligned} d_U(\Phi^*\omega)|_M &= d_M\big((\Phi^*\omega)|_M\big) \;=\; d_M\big(\Phi^*(\omega|_W)\big) \;=\; \Phi^*\big(d_W(\omega|_W)\big) \\ &= \Phi^*\big((d_V\omega)|_W\big) \;=\; \Phi^*(d_V\omega)|_M. \end{aligned}$$

∎

Fortan werden wir immer einfach d statt d^q_U schreiben.

3.1.7. Lemma von Poincaré

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $\mathbf{0}$. Ist $\omega \in \Omega^q(U)$ und $d\omega = 0$, so gibt es eine Differentialform $\varphi \in \Omega^{q-1}(U)$ mit $d\varphi = \omega$.

Beweis: Wir benutzen folgende Idee: Es gibt eine Abbildung

$$I : \Omega^q(U) \to \Omega^{q-1}(U) \quad \text{mit} \quad \omega = I(d\omega) + d(I\omega).$$

Ist dann $d\omega = 0$, so ist $\omega = d(I\omega)$.

Es reicht, Formen vom Typ $\omega = a\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ (zunächst für $i_1 < \ldots < i_q$) zu betrachten. Dann setzen wir

$$I\omega := \Bigl(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr)\, P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}),$$

mit

$$P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Es ist $d(P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x})) = q\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu a(t\mathbf{x}) \cdot D_j(tx_\nu) = t \cdot D_j a(t\mathbf{x}).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= d\Bigl(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr) \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \Bigl(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr) \cdot dP_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\int_0^1 t^{q-1} \frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr)\, dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \Bigl(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\int_0^1 t^{q} D_j a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr)\, dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \Bigl(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Bigr) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (D_j a)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Ist $j < i_1$, so ist

$$\begin{aligned} P_{j,i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) &= x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^{\nu} x_{i_\nu}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}. \end{aligned}$$

Ist $i_\mu < j < i_{\mu+1}$, so ist

$$dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} = (-1)^{\mu} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_\mu} \wedge dx_j \wedge dx_{i_{\mu+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$$

und

$$\begin{aligned}
P_{j,i_1\dots i_q}(\mathbf{x}) \;&:=\; (-1)^\mu P_{i_1\dots i_\mu,j,i_{\mu+1}\dots i_q}(\mathbf{x}) \\
&= (-1)^\mu \Big(\sum_{\nu=1}^{\mu} (-1)^{\nu-1} x_{i_\nu} (-1)^{\mu-1} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&\quad + (-1)^\mu x_j \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&\quad + \sum_{\nu=\mu+1}^{q} x_{i_\nu} (-1)^\mu dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \Big) \\
&= x_j \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} + \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^{\nu-1} x_{i_\nu} \, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
I(d\omega) \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x}) \, dt \Big) x_j \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^\nu \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x}) \, dt \Big) x_{i_\nu} \, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&= \int_0^1 \Big(t^q \cdot \sum_{j=1}^{n} (D_j a)(t\mathbf{x}) x_j \Big) \, dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x}) \, dt \Big) \, dx_j \wedge P_{i_1\dots i_q}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}
d(I\omega) + I(d\omega) \;&= \\
&= \int_0^1 \Big(q t^{q-1} a(t\mathbf{x}) + t^q \cdot \sum_{j=1}^{n} (D_j a)(t\mathbf{x}) x_j \Big) \, dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q D_j a(t\mathbf{x}) \, dt \Big) \, dx_j \wedge P_{i_1\dots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x}) \, dt \Big) \, dx_j \wedge P_{i_1\dots i_q}(\mathbf{x}) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \Big(t^q a(t\mathbf{x}) \Big) \, dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \;=\; \omega.
\end{aligned}$$

∎

Definition

Eine Differentialform ω vom Grad p heißt ***geschlossen***, wenn $d\omega = 0$ ist. Sie heißt ***exakt***, wenn es eine Differentialform φ vom Grad $p-1$ mit $d\varphi = \omega$ gibt.

3.1.8. Satz

Auf einer Mannigfaltigkeit X ist jede exakte Differentialform geschlossen.

Ist ω eine geschlossene Differentialform auf X, so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$, so dass $\omega|_U$ exakt ist.

Der Beweis ist klar, jeder Punkt von X besitzt eine Umgebung, die diffeomorph zu einem sternförmigen Gebiet ist.

3.2 Orientierungen

Definition

Zwei **geordnete** Basen $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ eines n-dimensionalen Vektorraumes V heißen ***gleichorientiert***, falls der durch $T(a_i) = b_i$ gegebene Automorphismus von V eine positive Determinante besitzt.

Die Menge der geordneten Basen von V wird durch die Relation „gleichorientiert“ in zwei Äquivalenzklassen zerlegt. Basen in zwei verschiedenen Klassen gehen durch einen Automorphismus mit negativer Determinante auseinander hervor. Die Äquivalenzklasse der geordneten Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ bezeichnen wir mit $[a_1, \ldots, a_n]$. Eine „Orientierung“ von V ist durch die Auswahl einer geordneten Basis und damit durch die Auswahl einer der beiden Klassen gegeben.

Definition

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mit $\mathrm{Or}(V)$ bezeichnet man die Menge der beiden Äquivalenzklassen von geordneten Basen von V. Ihre Elemente bezeichnet man als die beiden ***Orientierungen*** von V.

Ist $\beta \in \mathrm{Or}(V)$ eine Orientierung von V, so nennt man die andere Orientierung die ***entgegengesetzte Orientierung*** und bezeichnet sie mit $-\beta$.

Normalerweise kann keine der beiden Orientierungen ausgezeichnet werden. Der $\mathbb{R}^n$ hat hier eine Sonderstellung inne. Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ heißt ***positiv orientiert***, wenn sie in der Orientierungsklasse $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]$ der (in natürlicher Weise geordneten) Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ liegt. Zum Beispiel beschreibt $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ die positive Orientierung des $\mathbb{R}^3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]$ aber die negative Orientierung.

3.2.1. Satz

Ist V ein n-dimensionaler orientierter Vektorraum mit Skalarprodukt, so gibt es genau eine alternierende n-Form Ω_V, so dass

$$\Omega_V(a_1, \ldots, a_n) = 1$$

für jede positiv orientierte ON-Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ von V ist.

BEWEIS: Wir wählen eine spezielle positiv orientierte ON-Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ und die dazu duale Basis $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$. Dann setzen wir

$$\Omega_V := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

Offensichtlich ist $\Omega_V(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine andere (ebenfalls positiv orientierte) ON-Basis, so geht sie aus $(a_1, \ldots, a_n)$ durch eine spezielle orthogonale

Transformation T mit $\det(T) = 1$ hervor (vgl. Lineare Algebra). Andererseits gilt allgemein:

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(Ta_1, \ldots, Ta_n) = \det(T) \cdot \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(a_1, \ldots, a_n).$$

Also ist auch $\Omega_V(b_1, \ldots, b_n) = 1$. ∎

Definition

Die n-Form Ω_V heißt die durch die Orientierung und das Skalarprodukt bestimmte ***Volumenform*** von V. Speziell wird die durch das euklidische Skalarprodukt und die positive Orientierung des $\mathbb{R}^n$ bestimmte Volumenform Δ als ***Determinantenform*** bezeichnet.

Ist $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ die duale Basis zur Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\Delta = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n.$$

Ist M eine (n, n)-Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, so ist

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(M),$$

denn es ist ja $\varepsilon^\nu(\mathbf{x}) = x_\nu$.

Es sei weiterhin V ein n-dimensionaler orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gibt es bekanntlich einen kanonischen Isomorphismus zwischen V und V^*. Jedem Vektor $a \in V$ wird die durch $\lambda_a(v) = \langle a \, , \, v \rangle$ bestimmte Linearform $\lambda_a \in V^*$ zugeordnet. Die Zuordnung hängt nur vom Skalarprodukt ab, die Orientierung spielt dabei keine Rolle. Das Skalarprodukt muss auch nicht unbedingt positiv definit sein. Es reicht, dass eine nicht entartete Bilinearform vorliegt (z.B. das Minkowski-Produkt im $\mathbb{R}^4$: $\langle x \, , \, y \rangle_m := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$).

Wir wollen nun den Raum $A^{n-1}(V)$ untersuchen. Dabei brauchen wir nicht nur das Skalarprodukt, sondern auch die Orientierung. Es sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die zugehörige duale Basis.

Eine Basis von $A^{n-1}(V)$ bilden die n verschiedenen $(n-1)$-Formen

$$\omega^i := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei das Dach über α^i wie üblich bedeutet, dass dieser Faktor weggelassen werden soll. Man erhält also die Formen

$$\omega^1 = \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \omega^2 = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \ldots, \quad \omega^n = \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1}.$$

3.2.2. Satz (Die kanonische $(n-1)$-Form zu einem Vektor)

Es gibt zu jedem Vektor $v \in V$ genau eine $(n-1)$-Form $\Lambda_v \in A^{n-1}(V)$, so dass gilt:

$$\varphi \wedge \Lambda_v = \varphi(v) \cdot \Omega_V, \qquad \text{für alle } \varphi \in V^*.$$

In Koordinaten: Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis, sowie $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$, so ist

$$\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

BEWEIS: Der Eindeutigkeitsbeweis liefert auch gleich die Formel:

Wenn es eine Form $\Lambda_v = \sum_{j=1}^{n} c_j \omega^j$ mit der geforderten Eigenschaft gibt, so muss für $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$ gelten:

$$\begin{aligned} v_i \cdot \Omega_V &= \alpha^i(v) \cdot \Omega_V \\ &= \alpha^i \wedge \Lambda_v \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \ldots \wedge \alpha^n \\ &= c_i \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Omega_V. \end{aligned}$$

Also ist dann $\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n$.

Da jede Linearform φ eine Linearkombination der α^i ist, folgt ganz leicht, dass die so definierte Form Λ_v die gewünschte Eigenschaft hat. ∎

Speziell gilt: Ist λ_a die durch $\lambda_a(v) = \langle a\,,\, v \rangle$ gegebene Linearform, so ist

$$\boxed{\lambda_a \wedge \Lambda_v = \langle a\,,\, v \rangle \Omega_V.}$$

3.2.3. Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir benutzen das euklidische Skalarprodukt und als Orthonormalbasis die Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ der Einheitsvektoren. Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\lambda_{\mathbf{a}} = a_1 \varepsilon^1 + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^2$$

und

$$\Lambda_{\mathbf{a}} = a_1 \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + a_2 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + a_3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= a_1(v_2w_3 - v_3w_2) + a_2(v_3w_1 - v_1w_3) + a_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a}). \qquad \text{(Laplace-Entwicklung)}\end{aligned}$$

Außerdem ist $\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \Lambda_{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\Delta$.

3.2.4. Satz

Sind $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, so gibt es genau einen Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{a} = \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a}) = \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

für alle Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

BEWEIS: Durch $\mathbf{a} \mapsto \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a})$ wird eine Linearform gegeben. Es muss also einen (eindeutig bestimmten) Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ geben, so dass $\lambda_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{a})$ ist. Wir setzen dann $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \mathbf{z}$. ■

Man nennt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ das ***Vektorprodukt*** von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

3.2.5. Satz (Eigenschaften des Vektorproduktes)

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$.
2. $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *ist bilinear und alternierend.*
3. $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.
4. *Ist $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^3$, so gilt:*

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \text{ \textit{und} } \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2.$$

BEWEIS: 1) Die Komponenten von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sind die drei Zahlen $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{e}_i = \Lambda_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{v},\mathbf{w})$, $i = 1,2,3$. Dabei ist $\Lambda_{\mathbf{e}_1} = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$, $\Lambda_{\mathbf{e}_2} = \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1$ und $\Lambda_{\mathbf{e}_3} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$.

2) ergibt sich aus den Eigenschaften der Determinantenform.

3) Es ist

$$\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \Delta(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$$

und analog auch $\mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \Delta(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$.

4) Aus (2) ergibt sich, dass $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ senkrecht steht. Sei nun $A = \{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$, also $\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$.

A ist genau dann positiv orientiert, wenn $\Delta(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) > 0$ ist. Weil die $\mathbf{a}_i$ die Zeilen einer Orthogonalmatrix bilden, muss dann sogar $\Delta(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) = 1$ gelten.

Es muss $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = c_{12} \cdot \mathbf{a}_3$ sein, mit einem geeigneten Faktor $c_{12} \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$c_{12} = c_{12} \cdot (\mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \bullet \mathbf{a}_3 = \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1.$$

Die beiden anderen Fälle gehen genauso. ∎

3.2.6. Satz

$\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} = \Lambda_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$.

Beweis: Wir rechnen die Formel „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \varepsilon^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \varepsilon^j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \\
&= \Lambda_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

∎

3.2.7. Satz

1. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}$.
2. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

Beweis: 1) Es ist

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \Lambda_{\mathbf{x}\times\mathbf{y}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\lambda_{\mathbf{x}} \wedge \lambda_{\mathbf{y}})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) \cdot \lambda_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}) - \lambda_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}) \cdot \lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}) \\
&= (\mathbf{v} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{y}) - (\mathbf{v} \bullet \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{x}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2) Für $j = 1, 2, 3$ ist

$$\begin{aligned}
\big((\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{e}_i\big) \bullet \mathbf{e}_j &= \Delta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \Delta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
&= (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_i & \mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_j \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{e}_i & \mathbf{w} \bullet \mathbf{e}_j \end{pmatrix} \\
&= \big((\mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_i)\mathbf{w} - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{e}_i)\mathbf{v}\big) \bullet \mathbf{e}_j,
\end{aligned}$$

und daher $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{e}_i = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_i)\mathbf{w} - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{e}_i)\mathbf{v}$. Da dies für alle i gilt, folgt die gewünschte Formel aus der Linearität in $\mathbf{u}$. ∎

Definition

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Unter einer ***Orientierung*** μ von X versteht man die Wahl von Orientierungen μ_x für jeden Tangentialraum $T_x(X)$, so dass es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und differenzierbare Vektorfelder $\xi_1, \ldots, \xi_n$ auf U gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt:

$$[(\xi_1)_x, \ldots, (\xi_n)_x] = \mu_x.$$

Eine Mannigfaltigkeit X heißt ***orientierbar***, falls für X eine Orientierung gewählt werden kann.

Definition

Sei μ eine Orientierung auf X. Eine Karte (U, φ) mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ heißt ***positiv orientiert***, falls für alle $x \in U$ gilt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_x \right] = \mu_x.$$

3.2.8. Satz

Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas für X gibt, bei dem alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind (also positive Funktionaldeterminante haben).

BEWEIS: 1) Sei μ eine Orientierung von X. Man kann einen Atlas finden, der nur aus positiv orientierten Karten besteht. Da dann alle Karten (U, φ) mit $x \in U$ auf $T_x(X)$ die gleiche Orientierung induzieren, müssen die Kartenwechsel positive Funktionaldeterminante haben.

2) Sei umgekehrt ein Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von X gegeben, so dass $\det J_{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}} > 0$ auf $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist. Dann definieren alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ mit $x \in U_\alpha$ auf $T_x(X)$ die gleiche Orientierung, die wir mit μ_x bezeichnen. Durch $\mu : x \mapsto \mu_x$ wird eine Orientierung auf X gegeben, denn auf jeder Kartenumgebung ist sie durch ein n-Tupel differenzierbarer Vektorfelder festgelegt. ∎

Bemerkung: Sei ω eine n-Form auf X. Ist (U, φ) eine Karte, so ist $\omega|_U = \varphi^*(\omega^{(\varphi)})$, mit einer n-Form $\omega^{(\varphi)} = a_\varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ auf $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. ω verschwindet genau dann in $x \in U$, wenn $a_\varphi(\varphi(x)) = 0$ ist.

Ist f eine differenzierbare Funktion auf X, so ist $(f \cdot \omega)^{(\varphi)} = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot \omega^{(\varphi)}$.

3.2.9. Satz

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit X ist genau dann orientierbar, wenn es auf X eine nirgends verschwindende n-Form gibt.

BEWEIS: 1) Sei ω_0 eine nirgends verschwindende n-Form auf X, $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ein Atlas für X. Dann gibt es zu jedem $\iota \in I$ eine nirgends verschwindende differenzierbare Funktion h_ι auf $B_\iota = \varphi_\iota(U_\iota) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $(\omega_0)^{(\varphi_\iota)} = h_\iota \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ist. Indem man notfalls die Koordinate x_n durch $-x_n$ ersetzt, kann man erreichen, dass stets $h_\iota > 0$ auf B_ι ist.

Auf $\varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} h_\kappa \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n &= (\varphi_\kappa^{-1})^* \omega_0 \; = \; (\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1})^* (\varphi_\iota^{-1})^* \omega_0 \\ &= (\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1})^* (h_\iota \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) \\ &= \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) \cdot (h_\iota \circ \varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n . \end{aligned}$$

Weil h_ι und h_κ positiv sind, muss $\det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) > 0$ sein, der Atlas ist orientiert.

2) Jetzt sei vorausgesetzt, dass X orientierbar ist, und (U_ι, φ_ι) sei ein orientierter Atlas. Weiter sei $(f_\iota)_{\iota \in I}$ eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Für jedes $\iota \in I$ ist $\omega_\iota := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ eine n-Form auf U_ι. Auf $U_\iota \cap U_\kappa$ ist $\omega_\iota = d_{\iota\kappa} \cdot \omega_\kappa$, mit $d_{\iota\kappa} = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) \circ \varphi_\kappa > 0$. Die Form $f_\iota \cdot \omega_\iota$ ist eine n-Form auf X mit Träger in U_ι. Wir setzen

$$\omega_0 := \sum_{\iota \in I} f_\iota \cdot \omega_\iota .$$

Sei $x \in X$, I_0 die endliche Menge aller $\iota \in I$ mit $x \in \mathrm{Tr}(f_\iota)$ und $\iota_0 \in I_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\omega_0)_x &= \sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) \cdot (\omega_\iota)_x \\ &= \Big(\sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) d_{\iota,\iota_0}(x) \Big) \cdot (\omega_{\iota_0})_x . \end{aligned}$$

Weil $f_\iota(x) \geq 0$, $\sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) = 1$ und $d_{\iota,\iota_0}(x) > 0$ ist, folgt: $(\omega_0)_x \neq 0$. ∎

Ist X zusammenhängend, so nennt man zwei nirgends verschwindende n-Formen ω_1, ω_2 äquivalent, falls es eine überall positive stetige Funktion f auf X gibt, so dass $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ ist. Eine Orientierung von X entspricht der Auswahl einer Äquivalenzklasse.

Es ist relativ leicht, Beispiele von orientierbaren Mannigfaltigkeiten anzugeben. Schwieriger ist es, die Nicht-Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit zu beweisen. Da hilft der folgende kleine Satz:

3.2.10. Satz

Sei X eine orientierbare Mannigfaltigkeit, (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten. Sind U und V zusammenhängend, so kann $\det J_{\psi \circ \varphi^{-1}}$ *auf $\varphi(U \cap V)$ nirgends das Vorzeichen wechseln.*

Beweis: Die Koordinaten auf U bzw. V seien mit $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ bezeichnet.

Sei $x_0 \in U$ vorgegeben. Es gibt eine Orientierung μ auf X, so dass

$$[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{x_0}] = \mu_{x_0}$$

ist. Wir setzen

$$M := \{x \in U \,:\, [\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{x}] = \mu_x\}.$$

Definitionsgemäß ist $M \neq \varnothing$. Ist nun $y_0 \in M$, so gibt es eine offene, zusammenhängende Umgebung $W = W(y_0) \subset U$ und über W eine differenzierbare Basis $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ von Vektorfeldern, so dass $[\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)] = \mu_x$ für alle $x \in W$ gilt. Die Determinante der Transformationsmatrix zwischen den beiden Basen ist differenzierbar (Cramer'sche Regel) und $\neq 0$. Weil sie in y_0 positiv ist, gilt das auf ganz W. Damit liegt W in M, d.h., M ist offen in U.

Die gleiche Prozedur mit der umgekehrten Orientierung zeigt, dass auch $U \setminus M$ offen, also M abgeschlossen in U ist. Damit ist $M = U$. Eine entsprechende Aussage gilt für V und $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$.

Die Basen auf U und V sind also entweder in jedem Punkt positiv oder in jedem Punkt negativ orientiert.

Sei $f := \operatorname{sign} \det J_{\psi \circ \varphi^{-1}}$ auf $\varphi(U \cap V)$. Sind beide Karten positiv orientiert oder beide negativ orientiert, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. Sind sie entgegengesetzt orientiert, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv -1$. Auf jeden Fall ist f konstant. ∎

3.2.11. Beispiele

A. Wir wollen zeigen, dass die Sphäre S^{n-1} orientierbar ist.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir die $(n-1)$-Form Λ, wobei $\Lambda_{\mathbf{x}}$ die dem Vektor $\mathbf{x}$ kanonisch zugeordnete $(n-1)$-Form ist. Dann ist

$$\Lambda_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i (-1)^{i+1} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Ist $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ und $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ eine Basis von $T_{\mathbf{x}}(S^{n-1})$, so ist $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und daher

$$\Lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \det\bigl(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\bigr) \neq 0. \qquad \text{(Laplace-Entwicklung)}$$

Also ist $\omega_0 := j^*\Lambda$ eine nirgends verschwindende $(n-1)$-Form auf S^{n-1}, und S^{n-1} ist damit orientierbar.

B. Sei $X = \mathbb{R}P^2$, mit den Karten

$$\varphi_0(x:y:z) := \Bigl(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Bigr), \quad \varphi_1(x:y:z) := \Bigl(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\Bigr) \text{ und } \varphi_2(x:y:z) := \Bigl(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\Bigr).$$

Die Definitionsbereiche $U_0 = \{x \neq 0\}$, $U_1 = \{y \neq 0\}$ und $U_2 = \{z \neq 0\}$ sind alle diffeomorph zum $\mathbb{R}^2$ und damit zusammenhängend.

Es ist $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(s,t) = \varphi_1(1:s:t) = \Bigl(\frac{1}{s}, \frac{t}{s}\Bigr)$, also

$$\det J_{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}}(s,t) = \det \begin{pmatrix} -1/s^2 & 0 \\ -t/s^2 & 1/s \end{pmatrix} = -1/s^3.$$

Diese Funktion nimmt auf $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, s \neq 0\}$ zwei verschiedene Vorzeichen an. Also ist $\mathbb{R}P^2$ nicht orientierbar.

Sei X eine n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine ***transversale*** oder ***äußere Orientierung*** von Y in $y_0 \in Y$ ist eine Orientierung auf $(N_X(Y))_{y_0}$. Eine ***innere Orientierung*** von Y in y_0 ist eine Orientierung auf $T_{y_0}(Y)$.

Hat man auf X eine feste Orientierung gewählt, so bedingen sich innere und transversale Orientierung gegenseitig. Wie, das kann willkürlich festgelegt werden. Man hat sich auf folgende Konvention geeinigt: Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $T_{y_0}(X)$, so dass die Restklassen $\overline{v}_{k+1}, \ldots, \overline{v}_n$ eine Basis von $(N_X(Y))_{y_0} = T_{y_0}(X)/T_{y_0}(Y)$ und die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $T_{y_0}(Y)$ bilden. Die transversale Orientierung $[\overline{v}_{k+1}, \ldots, \overline{v}_n]$ entspricht der inneren Orientierung $[v_1, \ldots, v_k]$, falls $[v_{k+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_k]$ die positive Orientierung von $T_{x_0}(X)$ ist.

Der Zusammenhang ist nicht spiegelungsinvariant. Kehrt man die Orientierung von X um, behält aber die von Y bei, so ändert sich die Richtung der transversalen Orientierung.

3.2.12. Satz

Sei X eine orientierbare Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Ist $N_X(Y)$ trivial, so ist auch Y orientierbar.

Beweis: Sei $\dim(X) = n$ und $q := \operatorname{codim}(Y, X)$. Dann gibt es globale Schnitte $\nu_1, \ldots, \nu_q \in \Gamma(Y, N_X(Y))$, die das Normalenbündel in jedem Punkt $y \in Y$ erzeugen.

Sei $\varepsilon : T(X)|_Y \to N_X(Y)$ die kanonische Projektion. Es gibt eine offene Überdeckung (U_α) von Y in X und Schnitte $N_\alpha^i \in \Gamma(U_\alpha, T(X))$ mit $\varepsilon(N_\alpha^i(y)) = \nu_i(y)$

für $y \in U_\alpha \cap Y$. Ist (e_α) eine Teilung der 1 zur Überdeckung (U_α), so setzen wir $N^i := \sum_\alpha e_\alpha N^i_\alpha|_Y$. Dann ist $N^i \in \Gamma(Y, T(X)|_Y)$ für $i = 1, \ldots, q$, und

$$\varepsilon(N^i(y)) = \sum_\alpha e_\alpha(y)\varepsilon(N^i_\alpha(y)) = \sum_\alpha e_\alpha(y)\nu_i(y) = \nu_i(y).$$

Sei ω eine nirgends verschwindende n-Form auf X. Dann sei die $(n-q)$-Form ω_0 auf Y definiert durch

$$(\omega_0)_y(v_1, \ldots, v_{n-q}) := \omega_y(N^1(y), \ldots, N^q(y), v_1, \ldots, v_{n-q}) \neq 0.$$

Offensichtlich ist dies eine nirgends verschwindende differenzierbare $(n-q)$-Form auf Y: Damit ist Y orientierbar. ∎

Ein Spezialfall ist die folgende Situation: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge, $f : B \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $c \in \mathbb{R}$ und $Y := f^{-1}(c) \neq \varnothing$. Ist $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in Y$, so ist Y eine orientierbare Untermannigfaltigkeit. Das Gradientenfeld von f definiert ein nirgends verschwindendes Normalenfeld auf Y. Das liefert z.B. auch eine Orientierung auf S^{n-1}.