2.2 Vektorfelder und dynamische Systeme

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang q.

Definition

Sei $U \subset X$ offen. Ein ***stetiger (bzw. differenzierbarer) Schnitt*** in E über U ist eine stetige (bzw. differenzierbare) Abbildung $s : U \to E$ mit $\pi_E \circ s = \mathrm{id}_U$.

Die Menge aller differenzierbaren Schnitte in E über U wird mit $\Gamma(U, E)$ bezeichnet.

2.2.1. Satz

Sei (φ_α) ein System von Trivialisierungen für E und $(g_{\alpha\beta})$ das zugehörige System von Übergangsfunktionen.

Ist $s \in \Gamma(X, E)$, so gibt es ein System von differenzierbaren Funktionen $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^q$ mit

$$\varphi_\alpha \circ s(x) = (x, s_\alpha(x)) \quad \text{für } x \in U_\alpha.$$

Über $U_{\alpha\beta}$ ist dann

$$s_\alpha(x)^\top = g_{\alpha\beta}(x) \cdot s_\beta(x)^\top.$$

Jedes System von Funktionen s_α, das die zweite Bedingung erfüllt, bestimmt (über die erste Gleichung) einen differenzierbaren Schnitt in E.

Beweis: Die Existenz der Funktionen s_α (mit $s_\alpha(x) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \circ s(x)$) ist klar. Und dann ist

$$\begin{aligned}
(x, s_\alpha(x)^\top) &= \varphi_\alpha \circ s(x) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta \circ s(x) \\
&= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, s_\beta(x)^\top) \\
&= (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot s_\beta(x)^\top).
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt das System der s_α mit der obigen Übergangsbedingung gegeben, so wird durch

$$s(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, s_\alpha(x)) \text{ (über } U_\alpha)$$

der Schnitt s definiert. Die Wohldefiniertheit folgt wie üblich aus der Übergangsbedingung. ∎

Bemerkung: Ist $U \subset X$ offen, so ist $\Gamma(U, E)$ offensichtlich ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist f eine differenzierbare Funktion auf U und $s \in \Gamma(U, E)$, so liegt $f \cdot s$ mit $(f \cdot s)(x) := f(x) \cdot s(x)$ wieder in $\Gamma(U, E)$. Diese Multiplikation von differenzierbaren Funktionen mit Schnitten erfüllt auch alle Eigenschaften, nur ist der Raum der differenzierbaren Funktionen auf U kein Körper, sondern ein Ring. Man spricht dann von einer „Modulstruktur“. $\Gamma(U, E)$ ist ein $C^\infty(U)$***-Modul***.

2.2.2. Beispiel

Sei $E = T(X)$ das Tangentialbündel von X. Ist $U \subset X$ offen, so versteht man unter einem ***Vektorfeld*** auf U einen (differenzierbaren) Schnitt $\xi \in \mathscr{X}(U) := \Gamma(U, T(X))$.

Es wird dann jedem Punkt $p \in U$ ein Tangentialvektor

$$\xi_p := \xi(p) = \sum_\nu a_\nu(p) \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big|_p \in T_p(X)$$

zugeordnet. Sei $\varphi : T(X)|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ eine von einer Karte (U, ψ) induzierte Trivialisierung. Dann ist

$$\varphi(\xi_p) = \varphi\big(\sum_\nu a_\nu(p) \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big|_p\big) = (p, \big(a_1(p), \ldots, a_n(p)\big)^\top).$$

Ein Vektorfeld ξ auf U liefert folgendermaßen auch eine Abbildung $\mathscr{L}_\xi : \mathscr{C}^\infty(U) \to \mathscr{C}^\infty(U)$:

$$(\mathscr{L}_\xi f)(p) := \xi_p(f).$$

Die Abbildung $\mathscr{L}_\xi$ ist offensichtlich $\mathbb{R}$-linear, und es gilt:

$$\big(\mathscr{L}_\xi(f \cdot g)\big)(p) = \xi_p(fg) = f(p) \cdot \xi_p(g) + \xi_p(f) \cdot g(p) = \big(f \cdot (\mathscr{L}_\xi g) + (\mathscr{L}_\xi f) \cdot g\big)(p).$$

Also ist $\mathscr{L}_\xi$ eine „Derivation“ auf $\mathscr{C}^\infty(U)$. Man nennt $\mathscr{L}_\xi(f)$ auch die ***Lie-Ableitung*** von f in Richtung ξ.

Die Lie-Ableitung hat noch folgende Eigenschaften:

1. Ist c eine konstante Funktion auf U und $\xi \in \mathscr{X}(U)$, so ist $\mathscr{L}_\xi(c) \equiv 0$.
2. Ist $\xi \in \mathscr{X}(U)$, $V \subset U$ offen, $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ und $f|_V = 0$, so ist $\mathscr{L}_\xi f|_V = 0$.

Beweis: Übungsaufgabe! ∎

Definition

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang q, $U \subset X$ offen. Ein System $S = \{s_1, \ldots, s_q\}$ von Schnitten in E über U heißt ein ***Rahmen*** oder eine ***Basis*** über U, falls $\{s_1(x), \ldots, s_q(x)\}$ für jedes $x \in U$ eine Basis von E_x ist.

Ist $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ eine Trivialisierung, so erhält man durch

$$s_i(x) := \varphi^{-1}(x, \mathbf{e}_i) \text{ für } i = 1, \ldots, q$$

einen Rahmen für E über U.

Ist umgekehrt ein Rahmen $\{s_1, \ldots, s_q\}$ über U gegeben, so kann man eine Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ definieren durch

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{q} a_i s_i(x)\Big) := (x, (a_1, \ldots, a_q)^\top).$$

Es ist noch die Differenzierbarkeit von φ zu zeigen: Dazu sei $V \subset U$ offen und $\psi : E|_V \to V \times \mathbb{R}^q$ eine lokale Trivialisierung. Es gibt dann differenzierbare Abbildungen $s_i^{(\psi)} = (s_{1i}, \ldots, s_{qi})^\top : V \to \mathbb{R}^q$ mit

$$\psi \circ s_i(x) = \big(x, s_i^{(\psi)}(x)\big) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, q.$$

Die Matrix $S(x) := \big(s_1^{(\psi)}(x), \ldots, s_q^{(\psi)}(x)\big) \in M_q(\mathbb{R})$ ist invertierbar und hängt differenzierbar von $x \in V$ ab. Die Cramer'sche Regel liefert für jedes $x \in V$ und jedes ν eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{a}_\nu(x) = (a_{1\nu}(x), \ldots, a_{q\nu}(x))$ der Gleichung $S(x) \cdot \mathbf{a}_\nu^\top(x) = \mathbf{e}_\nu^\top$, die ebenfalls differenzierbar von x abhängt. Dann ist

$$\psi^{-1}(x, \mathbf{e}_\nu^\top) = \psi^{-1}\big(x, \sum_{i=1}^{q} a_{i\nu}(x) s_i^{(\psi)}(x)\big) = \sum_{i=1}^{q} a_{i\nu}(x) s_i(x),$$

und für $A(x) := (\mathbf{a}_1^\top, \ldots, \mathbf{a}_q^\top)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi^{-1}(x, \mathbf{c}^\top) &= \varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{q} c_\nu \psi^{-1}(x, \mathbf{e}_\nu^\top)\Big) \\
&= \varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{q} c_\nu \sum_{i=1}^{q} a_{i\nu}(x) s_i(x)\Big) \\
&= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{q} \big(\sum_{\nu=1}^{q} a_{i\nu}(x) c_\nu\big) s_i(x)\Big) \\
&= \Big(x, \big(\sum_{\nu=1}^{q} a_{1\nu}(x) c_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{q} a_{q\nu}(x) c_\nu\big)^\top\Big) \\
&= (x, A(x) \cdot \mathbf{c}^\top).
\end{aligned}$$

Also ist φ differenzierbar.

Definition

Sei ξ ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit X. Eine ***Integralkurve*** von ξ durch $x_0 \in X$ ist ein stetig differenzierbarer Weg $\alpha : I \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. I ist ein offenes Intervall, und es gibt ein $t_0 \in I$ mit $\alpha(t_0) = x_0$.
2. Es ist $\dot{\alpha}(t) = \alpha_{*,t}(\partial/\partial t) = \xi_{\alpha(t)}$ für alle $t \in I$.

2.2.3. Satz (Translationsinvarianz)

Sei $\alpha : I \to X$ eine Integralkurve des Vektorfeldes ξ. Dann ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ auch $\beta(t) := \alpha(t - t_0)$ eine Integralkurve.

Beweis: Wir setzen $s := t - t_0$. Dann ist $\overset{\bullet}{\beta}(t) = \overset{\bullet}{\alpha}(s) = \xi_{\alpha(s)} = \xi_{\beta(t)}$. ∎

Sei $x_0 \in X$ und (U, φ) eine Karte in x_0 mit $\varphi(x_0) = \mathbf{0}$. In den lokalen Koordinaten habe ξ die Gestalt

$$\xi|_U = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Setzt man dann $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \big(\xi_1(\varphi^{-1}(\mathbf{x})), \ldots, \xi_n(\varphi^{-1}(\mathbf{x}))\big)$, so ist $\mathbf{F} : G := \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ist $\mathbf{y}(t)$ Lösung der „autonomen" (d.h. zeitunabhängigen) DGL

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0},$$

so gilt für $\alpha(t) := \varphi^{-1}(\mathbf{y}(t))$:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\alpha}(t) &= (\varphi^{-1})_* \mathbf{y}'(t) \;=\; (\varphi^{-1})_* \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu\big(\varphi^{-1}(\mathbf{y}(t))\big) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu\big(\alpha(t)\big) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \;=\; \xi_{\alpha(t)}, \end{aligned}$$

sowie $\alpha(0) = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = x_0$.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt:

Sei ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf X und $x_0 \in X$. Dann gibt es eine Integralkurve $\alpha : I \to X$ von ξ mit $0 \in I$ und $\alpha(0) = x_0$. Ist $\beta : J \to X$ eine weitere Integralkurve von ξ mit $0 \in J$ und $\beta(0) = x_0$, so stimmen α und β auf $I \cap J$ überein.

Definition

Sei ξ ein Vektorfeld auf X. Ein ***lokaler Fluss*** von ξ in $x_0 \in X$ besteht aus einer offenen Umgebung $B = B(x_0) \subset X$, einem $\varepsilon > 0$ (das auch $= +\infty$ werden darf) und einer differenzierbaren Abbildung $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to X$, so dass gilt:

1. Für jedes $x \in B$ ist $\alpha_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ mit $\alpha_x(t) := \Phi(t, x)$ eine Integralkurve von ξ mit $\alpha_x(0) = x$.

2. Für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert $\Phi_t(x) := \Phi(t, x)$ einen Diffeomorphismus Φ_t von B auf eine offene Menge $\Phi_t(B) \subset X$.

Ist der lokale Fluss $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to X$ gegeben, so gewinnt man das zugehörige Vektorfeld ξ_Φ auf B durch

$$\xi_\Phi(x) := \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi_t(x) \quad (\, = \overset{\bullet}{\alpha}_x(0) \,).$$

Ist umgekehrt das Vektorfeld ξ auf X gegeben, so liefert der erweiterte Existenzsatz (siehe Analysis 3, 2.2), dass es zu gegebenem $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ und eine stetige Abbildung $\Phi : U \to X$ gibt, so dass für jedes $x \in B$ die Kurve $\alpha_x(t) := \Phi(t, x)$ die eindeutig bestimmte Lösung der durch ξ festgelegten DGL mit $\alpha_x(0) = x$ ist.

Dass Φ differenzierbar ist, folgt aus einem weiteren Satz aus der Theorie der DGLn: *Ist F k-mal stetig differenzierbar, so hängen die Lösungen der „autonomen" DGL $y' = F(y)$ k-mal stetig differenzierbar von den Anfangswerten ab*

Dass Φ_t ein Diffeomorphismus (und damit das Bild von B unter Φ_t offen) ist, ergibt sich aus dem folgenden Lemma:

2.2.4. Lemma

Ist $\Phi : U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to X$ wie oben definiert, so gilt:

$$\Phi_0 = \mathrm{id}_B \quad \textit{und} \quad \Phi_{t+s}(x) = \Phi_t \circ \Phi_s(x),$$

für alle $s, t, s+t \in I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon)$ und alle $x \in B$, für die Φ_t in $\Phi_s(x)$ definiert ist.

BEWEIS: Offensichtlich ist $\Phi_0(x) = \Phi(0, x) = \alpha_x(0) = x$.

Seien nun s, t und $s + t$ Elemente von I_ε, sowie $x \in B$. Dieses x halten wir fest. Weil Φ stetig und $\Phi(0, x) = x$ ist, liegt $\Phi(s, x)$ für genügend kleines s wieder in B. Wir halten auch ein solches s fest. Dann gilt:

$\alpha(t) := \Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_t(\alpha_x(s)) = \alpha_{\alpha_x(s)}(t)$ und $\beta(t) := \Phi_{t+s}(x) = \alpha_x(s + t)$ zwei Integralkurven von ξ mit $\alpha(0) = \alpha_x(s) = \beta(0)$. Wegen des Eindeutigkeitssatzes muss $\alpha(t) = \beta(t)$ für alle t sein, für die beide Seiten definiert sind. Also ist $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t \circ \Phi_s(x)$. ∎

Ist $y = \Phi_s(x) \in \Phi_s(B) \cap B$, so ist Φ_{-s} in y definiert und $\Phi_{-s} \circ \Phi_s(x) = x$. Also ist Φ_{-s} die Umkehrung von Φ_s und Φ_s ein Diffeomorphismus. Damit ist aber auch $\Phi_s(B)$ offen.

Definition

Ein ***Fluss*** oder eine ***lokale 1-Parameter-Gruppe*** ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : D \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. D ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times X$, und für alle $x \in X$ ist

$$I_x := \{t \in \mathbb{R} \,:\, (t, x) \in D\}$$

ein offenes Intervall mit $0 \in I_x$.

2. Für $x \in X$ und $s \in I_x$ liegt $t \in \mathbb{R}$ genau dann in $I_{\Phi(s,x)}$, wenn $t+s$ in I_x liegt, und dann ist $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t\big(\Phi_s(x)\big)$. Außerdem ist $\Phi_0(x) = x$ für jedes $x \in X$.

   Dabei sei $\Phi_t : X \to X$ jeweils definiert durch $\Phi_t(x) := \Phi(t,x)$.

3. Definiert man $\alpha_x : I_x \to X$ durch $\alpha_x(t) := \Phi(x,t)$, so ist $\xi : X \to T(X)$ mit $\xi(x) := \dot{\alpha}_x(0)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf X.

Ein Fluss $\Phi_1 : D_1 \to X$ soll größer als ein Fluss $\Phi_2 : D_2 \to X$ heißen, falls $D_2 \subset D_1$ und $\Phi_1|_{D_2} = \Phi_2$ ist. Ein Fluss heißt ***maximal***, falls er maximal bezüglich dieser Ordnung ist. Ist $D = \mathbb{R} \times X$, so spricht man von einem ***globalen Fluss*** oder einem ***dynamischen System***.

2.2.5. Satz

Sei ξ ein Vektorfeld auf X. Für $x \in X$ sei I_x die Vereinigung aller offenen Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, zu denen eine Integralkurve $\alpha : I \to X$ von ξ mit $\alpha(0) = x$ existiert. Dann gibt es auch eine „maximale" Integralkurve $\alpha_x : I_x \to X$ von ξ mit $\alpha_x(0) = x$. Es sei $D := \{(t,x) : x \in X \text{ und } t \in I_x\}$ und $\Phi_\xi : D \to X$ definiert durch $\Phi_\xi(t,x) := \alpha_x(t)$. Dann ist Φ_ξ ein maximaler Fluss.

BEWEIS: Wir geben hier nur eine Beweisskizze an:

Sei $x \in X$ fest und

$$I := \{t \in I_x : (t,x) \text{ im Innern von } D,\ \Phi \text{ differenzierbar nahe } (t,x)\}.$$

Wir zeigen, dass $I = I_x$ ist. Wegen der Existenz lokaler Flüsse ist $I \neq \varnothing$, und nach Definition ist I offen. Nun sei $s \in I_x$ ein Häufungspunkt von I. Wählt man $s' \in I$ nahe genug bei s, so gibt es um $\Phi_x(s')$ einen lokalen Fluss von ξ, in dessen Definitionsbereich $\Phi_x(s)$ liegt. Das bedeutet, dass auch s in I liegt.

Damit ist D offen und Φ auf D differenzierbar. Weil $\alpha_x : I_x \to X$ immer eine maximale Integralkurve ist, ist Φ maximal. ∎

Die Zuordnung $\xi \to \Phi_\xi$ ist offensichtlich bijektiv (zwischen den Vektorfeldern auf X und den maximalen Flüssen auf X.

2.2.6. Satz

Ist X kompakt, so ist Φ_ξ ein globaler Fluss.

BEWEIS: Sei X kompakt und Φ ein Fluss von ξ. Dann enthält D auf jeden Fall eine Menge der Gestalt $(-\varepsilon,\varepsilon) \times X$. Durch $\Phi(t,x) := \Phi(t/2, \Phi(t/2,x))$ kann man den Fluss auf $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times X$ ausdehnen. So fährt man fort und erhält schließlich einen globalen Fluss auf $\mathbb{R} \times X$. ∎

Ist $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ ein ***dynamisches System*** auf X, so gilt:

1. $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$,
2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Insbesondere ist jede Abbildung Φ_t ein Diffeomorphismus, mit $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$. Man nennt deshalb das System $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auch eine ***(globale) 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen*** auf X.

Ist $\alpha_x : \mathbb{R} \to X$ mit $\alpha_x(t) := \Phi(t, x)$ eine Integralkurve (oder „Flusslinie“) von Φ, so nennt man die Bildmenge $\alpha_x(\mathbb{R})$ die ***Bahn*** oder den ***Orbit*** von x. X ist disjunkte Vereinigung der Bahnen von Φ.

2.2.7. Satz

Sei $\alpha_x : \mathbb{R} \to X$ Flusslinie eines dynamischen Systems Φ auf X. Entweder ist α_x konstant, oder es ist $\overset{\bullet}{\alpha}_x(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (also α_x eine Immersion), und dann ist genau eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt:

1. *α_x ist injektiv,*
2. *α_x ist periodisch.*

Beweis: Sei α_x nicht konstant, $t_0 \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes andere $t \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\alpha_x(t + t_0) = \Phi(t + t_0, x) = \Phi(t_0, \Phi(t, x)) = \Phi_{t_0}(\alpha_x(t)).$$

Daraus folgt:

$$(\Phi_{t_0})_* \overset{\bullet}{\alpha}_x(0) = \overset{\bullet}{\alpha}_x(t_0).$$

Das bedeutet: Entweder ist $\overset{\bullet}{\alpha}_x(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, oder es ist $\overset{\bullet}{\alpha}_x(t) \equiv \mathbf{0}$ (und damit α_x konstant, was wir ausgeschlossen hatten). Also ist α_x eine Immersion.

Ist α_x nicht injektiv, so gibt es Zahlen $t_1 < t_2$ mit $\alpha_x(t_1) = \alpha_x(t_2)$. Dann ist $\Phi_{t_1}(x) = \Phi_{t_2}(x)$, also $\Phi_{t_1 - t_2}(x) = x$. Es ergibt sich:

$$\alpha_x(t) = \Phi_t(x) = \Phi_{t+(t_1-t_2)}(x) = \alpha_x(t + (t_1 - t_2)),$$

d.h. α_x ist periodisch. ∎

Definition

Sei X eine Mannigfaltigkeit, $U \subset X$ offen. Sind $\xi, \eta \in \mathscr{X}(U)$, so wird die ***Lie-klammer*** $[\xi, \eta] \in \mathscr{X}(U)$ definiert durch

$$\mathscr{L}_{[\xi,\eta]} := \mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi.$$

Es muss gezeigt werden, dass so tatsächlich ein Vektorfeld definiert wird. Sei $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{[\xi,\eta]}$. Dann ist $\mathscr{L}$ offensichtlich eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $C^\infty(U)$ auf sich. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta(fg) - \mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi(fg) \;= \\
&\quad= \mathscr{L}_\xi\big(g\cdot(\mathscr{L}_\eta f) + f\cdot(\mathscr{L}_\eta g)\big) - \mathscr{L}_\eta\big(g\cdot(\mathscr{L}_\xi f) + f(\mathscr{L}_\xi g)\big)\\
&\quad= (\mathscr{L}_\xi g)(\mathscr{L}_\eta f) + g\cdot(\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta f) + (\mathscr{L}_\xi f)(\mathscr{L}_\eta g) + f\cdot(\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta g)\\
&\quad\; -(\mathscr{L}_\eta g)(\mathscr{L}_\xi f) - g\cdot(\mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi f) - (\mathscr{L}_\eta f)(\mathscr{L}_\xi g) - f\cdot(\mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi g)\\
&\quad= g\cdot\big(\mathscr{L}_{[\xi,\eta]} f\big) + f\cdot\big(\mathscr{L}_{[\xi,\eta]} g\big).
\end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{L}$ eine Derivation.

Zu jeder Derivation $\mathscr{L}$ gibt es genau ein Vektorfeld ζ mit $\mathscr{L} = \mathscr{L}_\zeta$: Man definiere ζ durch $\zeta_p(f) := (\mathscr{L}f)(p)$. Dann ist ζ_p für jedes p eine Derivation in p, also ein Tangentialvektor. Schreibt man $\zeta_p = \sum_\nu a_\nu(p)\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$, so ist $a_\nu(p) = \zeta_p(x_\nu) = (\mathscr{L}x_\nu)(p)$, also a_ν differenzierbar. Das zeigt, dass ζ ein Vektorfeld ist.

Ist $\mathscr{L}_{\zeta_1} = \mathscr{L}_{\zeta_2}$, so ist offensichtlich $\zeta_1 = \zeta_2$.

Damit ist das Vektorfeld $[\xi,\eta]$ wohldefiniert.

2.2.8. Satz

Die Lieklammer besitzt folgende Eigenschaften:

1. *Die Abbildung* $(\xi,\eta) \mapsto [\xi,\eta]$ *ist* $\mathbb{R}$*-bilinear.*
2. *Es ist* $[\xi,\eta] = -[\eta,\xi]$ *(Anti-Kommutativität).*
3. $[\xi,[\eta,\lambda]] + [\eta,[\lambda,\xi]] + [\lambda,[\xi,\eta]] = 0$ *(Jacobi-Identität).*

Beweis: (1) und (2) sind trivial.

3) Es ist

$$\begin{aligned}
[\xi,[\eta,\lambda]] &= [\xi,\eta\lambda-\lambda\eta] = \xi\eta\lambda - \xi\lambda\eta - \eta\lambda\xi + \lambda\eta\xi,\\
[\eta,[\lambda,\xi]] &= [\eta,\lambda\xi-\xi\lambda] = \eta\lambda\xi - \eta\xi\lambda - \lambda\xi\eta + \xi\lambda\eta\\
\text{und}\quad [\lambda,[\xi,\eta]] &= [\lambda,\xi\eta-\eta\xi] = \lambda\xi\eta - \lambda\eta\xi - \xi\eta\lambda + \eta\xi\lambda.
\end{aligned}$$

Addiert man die rechten Seiten, so kommt offensichtlich Null heraus. ∎

Definition

Einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit einem zusätzlichen Produkt $[\ldots,\ldots]$ versehen ist, das die obigen Eigenschaften besitzt, bezeichnet man als ***Liealgebra***.

Wir wollen die obigen Begriffe und Ergebnisse auf Liegruppen anwenden.

Sei G eine Liegruppe, $g \in G$ ein festes Element. Die Abbildung $i_g : G \to G$ mit $i_g(x) := gxg^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus und zugleich ein Gruppenhomomorphismus. Man bezeichnet i_g auch als ***inneren Automorphismus*** von G.

Die Abbildungen $L_g : h \mapsto gh$ (bzw. $R_g : h \mapsto hg$) bezeichnet man als ***Linkstranslationen*** (bzw. ***Rechtstranslationen***). Offensichtlich ist $i_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Definition

Sei G eine Liegruppe. Ein Vektorfeld $\xi \in \mathscr{X}(G)$ heißt ***links-invariant***, falls gilt:

$$(L_a)_{*,x}(\xi_x) = \xi_{ax}, \text{ für alle } a, x \in G.$$

Mit $L(G)$ sei der Vektorraum der links-invarianten Vektorfelder auf G bezeichnet.

Ist ξ links-invariant und $f \in \mathscr{X}(G)$, so ist

$$\mathscr{L}_\xi(f \circ L_a)(x) = \xi_x(f \circ L_a) = (L_a)_*\xi_x(f) = \xi_{ax}(f) = (\mathscr{L}_\xi f)(ax) = (\mathscr{L}_\xi f) \circ L_a(x),$$

also $\mathscr{L}_\xi(f \circ L_a) = (\mathscr{L}_\xi f) \circ L_a$.

2.2.9. Satz

$L(G)$ ist eine Liealgebra (mit der Lieklammer für Vektorfelder).

Beweis: Sind ξ und η zwei links-invariante Vektorfelder auf G, so folgt

$$\begin{aligned} \text{Ł}_{[\xi,\eta]}(f \circ L_a) &= \mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta(f \circ L_a) - \mathscr{L}_\eta \circ L_\xi(f \circ L_a) \\ &= \mathscr{L}_\xi(\mathscr{L}_\eta f \circ L_a) - \mathscr{L}_\eta(\mathscr{L}_\xi f \circ L_a) \\ &= (\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta f) \circ L_a - (\mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi f) \circ L_a \\ &= (\mathscr{L}_{[\xi,\eta]} f) \circ L_a, \end{aligned}$$

für jedes $a \in G$. Also ist auch $[\xi, \eta]$ links-invariant. ∎

2.2.10. Satz

Die (lineare) Abbildung $\varepsilon : L(G) \to T_e(G)$ mit $\xi \mapsto \xi_e$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: 1) Injektivität: Ist $\xi \in L(G)$ und $\xi_e = 0$, so ist $\xi_x = (L_x)_*\xi_e = 0$ für alle $x \in G$, also $\xi = 0$.

2) Surjektivität: Sei $v \in T_e(G)$ vorgegeben. Für $x \in G$ sei $\xi_x := (L_x)_*v$. Zu zeigen ist, dass dadurch ein links-invariantes Vektorfeld ξ auf G definiert wird.

Die Funktion $g : G \times G \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x, y) := f \circ L_x(y) = f(xy)$, ist differenzierbar. Sei nun $x \in G$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Koordinatensystem auf

$U = U(x) \subset G$ und $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ ein Koordinatensystem auf $V = V(e)$ mit $\psi(e) = \mathbf{0}$. Außerdem sei

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} \Big|_e .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \xi_x(f) &= (L_x)_{*,e} v(f) = v(f \circ L_x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} \Big|_e (f \circ L_x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial(g \circ (\varphi \times \psi)^{-1})}{\partial y_\nu} (\varphi(x), \mathbf{0}) \end{aligned}$$

differenzierbar in x, also ξ ein Vektorfeld.

Nun zur Links-Invarianz:

$$(L_g)_{*,a}\xi_a = (L_g)_{*,a}(L_a)_{*,e}\xi_e = (L_g \circ L_a)_{*,e}\xi_e = (L_{ga})_{*,e} v = \xi_{ga}.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

2.2.11. Satz

Sei ξ ein links-invariantes Vektorfeld auf der Liegruppe G. Ist $\alpha : I \to G$ eine Integralkurve von ξ, so ist auch $\beta := L_g \circ \alpha : I \to G$ eine Integralkurve von ξ.

Beweis: Es ist

$$(L_g \circ \alpha)^\bullet(t) = (L_g)_* \overset{\bullet}{\alpha}(t) = (L_g)_* \xi_{\alpha(t)} = \xi_{L_g \circ \alpha(t)}.$$

Also ist $L_g \circ \alpha$ eine Integralkurve. ■

Definition

Eine ***1-Parameter-Gruppe*** in G ist ein Liegruppen-Homomorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to G$. Speziell ist dann $\alpha(0) = e$.

Bemerkung: Ein Liegruppen-Homomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen Liegruppen, der zugleich differenzierbar ist.

2.2.12. Satz

Sei $\mathscr{P}_G$ die Menge aller 1-Parameter-Gruppen in G. Dann ist die durch $\alpha \mapsto \overset{\bullet}{\alpha}(0)$ gegebene Abbildung $\mathscr{P}_G \to L(G)$ bijektiv.

Beweis: 1) Surjektivität: Sei $v \in L(G)$ und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes ξ (mit $\xi_e = v$), mit $\alpha(0) = e$. Dann ist $\overset{\bullet}{\alpha}(0) = v$. Sei nun $\alpha_1(t) := \alpha(s)\alpha(t)$ und $\alpha_2(t) := \alpha(s+t)$, für $|s| < \varepsilon/2$ und $|t| < \varepsilon/2$. Dann ist $\alpha_1(0) = \alpha(s) = \alpha_2(0)$, und es gilt:

$$\overset{\bullet}{\alpha}_1(t) = (L_{\alpha(s)} \circ \alpha)^{\bullet}(t) = (L_{\alpha(s)})_* \overset{\bullet}{\alpha}(t) = (L_{\alpha(s)})_*(L_{\alpha(t)})_* v = \xi_{\alpha_1(t)}$$

und

$$\overset{\bullet}{\alpha}_2(t) = \overset{\bullet}{\alpha}(s+t) = \xi_{\alpha(s+t)} = \xi_{\alpha_2(t)}.$$

Das bedeutet, dass α_1 und α_2 Integralkurven von ξ durch $\alpha(s)$ sind. Daraus folgt, dass $\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)$ für kleine s, t gilt.

Ist t „groß“, so setzen wir $\widehat{\alpha}(t) := \alpha(t/n)^n$, mit genügend großem n. Dabei hängt die Definition von $\widehat{\alpha}$ nicht von dem gewählten n ab, denn es ist

$$\alpha(\frac{t}{n})^n = \alpha(m \cdot \frac{t}{mn})^n = \alpha(\frac{t}{mn})^{mn} = \alpha(n \cdot \frac{t}{mn})^m = \alpha(\frac{t}{m})^m.$$

Offensichtlich ist $\widehat{\alpha}$ eine 1-Parameter-Gruppe in G, die nahe 0 mit α übereinstimmt, und es ist $\widehat{\alpha}^{\bullet}(0) = \overset{\bullet}{\alpha}(0) = v$.

2) Injektivität.

Sei α eine 1-Parameter-Gruppe mit $\overset{\bullet}{\alpha}(0) = v$, und ξ das durch v bestimmte links-invariante Vektorfeld. Dann ist

$$\beta(s) := \alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s) = (L_{\alpha(t)} \circ \alpha)(s),$$

also

$$\overset{\bullet}{\alpha}(t) = \overset{\bullet}{\beta}(0) = (L_{\alpha(t)})_* \overset{\bullet}{\alpha}(0) = \xi_{\alpha(t)}.$$

Damit ist α Integralkurve von ξ mit $\alpha(0) = e$. Diese Integralkurve ist durch v eindeutig bestimmt. ∎

Definition

Die ***Exponentialabbildung*** $\exp : L(G) \to G$ wird definiert durch $\exp(v) := \alpha_v(1)$, wobei α_v die 1-Parameter-Gruppe mit $\overset{\bullet}{\alpha}_v(0) = v$ ist.

2.2.13. Satz

Ist $v \in L(G)$ und ξ das zugehörige linksinvariante Vektorfeld, so ist $\alpha_v(t) = \exp(tv)$, und α_v ist die Integralkurve von ξ durch e.

Beweis: Es ist $\exp(tv) = \alpha_{tv}(1)$. Wir müssen also zeigen, dass $\alpha_{tv}(1) = \alpha_v(t)$ ist. Dazu sei $\beta_t(s) := \alpha_v(st)$. Dann ist

$$\beta_t(s+s') = \alpha_v(st+s't) = \alpha_v(st)\alpha_v(s't) = \beta_t(s)\beta_t(s'),$$

also β_t eine 1-Parameter-Gruppe. Außerdem ist $\dot{\beta}_t(s) = t \cdot \dot{\alpha}_v(st)$, also $\dot{\beta}_t(0) = t \cdot \dot{\alpha}_v(0) = tv$. Damit ist $\beta_t = \alpha_{tv}$ und daher $\alpha_{tv}(1) = \beta_t(1) = \alpha_v(t)$.

Dass α_v Integralkurve von ξ_v ist, wurde oben schon gezeigt. ∎

2.2.14. Satz

Sei $v \in L(G)$. Dann wird durch $\Phi(t,g) := L_g \circ \exp(tv)$ ein globaler Fluss für das durch v bestimmte linksinvariante Vektorfeld ξ gegeben.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $t \mapsto \alpha_g(t) := \Phi(t,g)$ für jedes feste g eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Integralkurve von ξ mit $\alpha_g(0) = g$ ist. Für $g = e$ haben wir das oben schon gezeigt. Ist aber g beliebig, so ist auch $\alpha_g = L_g \circ \alpha_e$ wieder eine Integralkurve von ξ, mit $\alpha_g(0) = g$. ∎

Man kann zeigen, dass die Exponentialabbildung $\exp : L(G) \to G$ differenzierbar ist: Dazu benutzen wir die Liegruppe $G \times L(G)$, deren Gruppenstruktur komponentenweise erklärt wird. Für $(g,v) \in G \times L(G)$ wird die Linkstranslation $L_{(g,v)} : G \times L(G) \to G \times L(G)$ gegeben durch $L_{(g,v)}(h,w) = (gh, w+v)$. Also ist

$$(L_{(g,v)})_{*,(\alpha(t),w)}(\dot{\alpha}(t),u) = \big((L_g)_{*,\alpha(t)}\dot{\alpha}(t),u\big) = \big((L_g \circ \alpha)'(t),u\big).$$

Durch $F_{(g,v)} = \big((L_g)_{*,e}v, 0\big) \in T_g(G) \oplus T_v(L(G))$ wird ein differenzierbares Vektorfeld F auf $G \times L(G)$ definiert.

Ist φ_v die 1-Parameter-Gruppe zu $v \in L(G)$, so ist

$$\begin{aligned}(L_{\varphi_v(t)})_{*,e}v &= (L_{\varphi_v(t)})_{*,e}\dot{\varphi}_v(0) = (L_{\varphi_v(t)} \circ \varphi_v)'(0) = \frac{d}{ds}\Big|_0 \varphi_v(t)\varphi_v(s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_0 \varphi_v(t+s) = \dot{\varphi}_v(t).\end{aligned}$$

Für $(g,v) \in G \times L(G)$ sei nun $\alpha = \alpha_{(g,v)} : \mathbb{R} \to G \times L(G)$ definiert durch $\alpha(t) = \alpha_{(g,v)}(t) := \big(L_g \circ \varphi_v(t), v\big) = \big(g \cdot \varphi_v(t), v\big)$. Dann ist

$$\begin{aligned}F_{\alpha(t)} &= F_{(g\cdot\varphi_v(t),v)} = \big((L_{g\cdot\varphi_v(t)})_{*,e}v, 0\big) \\ &= \big((L_g)_{*,\varphi_v(t)} \circ (L_{\varphi_v(t)})_{*,e}v, 0\big) = \big((L_g)_{*,\varphi_v(t)}\dot{\varphi}_v(t), 0\big) \\ &= \big((L_g \circ \varphi_v)'(t), 0\big) = \dot{\alpha}(t),\end{aligned}$$

also α die Integralkurve von F mit $\alpha(0) = (g,v)$.

Damit ist $\Phi(t; g, v) := \alpha_{(g,v)}(t) = \big(g \cdot \varphi_v(t), v\big)$ der Fluss von F und insbesondere differenzierbar. Also ist auch die Abbildung

$$v \mapsto \mathrm{pr}_1(\Phi(1; e, v)) = \varphi_v(1) = \exp(v)$$

differenzierbar.

Für $v \in L(G)$ sei $h_v(t) := tv$. Durch $v \mapsto h_v'(0)$ wird ein Isomorphismus $L(G) \cong T_eL(G)$ definiert. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\exp_* v = \exp_* h_v'(0) = (\exp \circ h_v)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(tv) = v,$$

also exp in der Nähe von 0 sogar ein Diffeomorphismus.

2.2.15. Satz

Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, also $L(G) = T_E(G) = M_n(\mathbb{R})$. Für $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ist dann $[A,B] = AB - BA$.

Beweis: Ist $B \in G$ gegeben, $L_B : G \to G$ die Links-Translation, $X \in M$ und $\alpha_X(t) := \exp(tX)$, also $\alpha_X'(0) = X$, so ist

$$(L_B)_* X = \frac{d}{dt}\Big|_0 B \cdot \alpha_X(t) = BX.$$

Für $A \in M$ sei ξ_A das zugehörige links-invariante Vektorfeld mit $(\xi_A)_E = A$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\xi_A} f(X) &= (\xi_A)_X(f) \ = \ (L_X)_{*,E}(\xi_A)_E(f) \\ &= (\xi_A)_E(f \circ L_X) \ = \ \alpha_A'(0)(f \circ L_X) \\ &= (f \circ L_X \circ \alpha_A)'(0), \text{ für } X \in G \text{ und } f \in \mathscr{C}^\infty(G). \end{aligned}$$

Ist f Einschränkung einer linearen Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ auf G, so ist

$$\mathscr{L}_{\xi_A} f(X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 F(X \cdot \alpha_A(t)) = F(XA) = F \circ R_A(X).$$

Insbesondere ist $\mathscr{L}_{\xi_A} f(E_n) = F(A)$. Weil $\mathscr{L}_{\xi_B} f = F \circ R_B$ und dies wieder Einschränkung einer Linearform ist, folgt:

$$\mathscr{L}_{\xi_A} \circ \mathscr{L}_{\xi_B} f(E_n) = \mathscr{L}_{\xi_A}(F \circ R_B)(E_n) = F \circ R_B(A) = F(AB).$$

Das Lieklammerprodukt $[A, B]$ von Elementen $A, B \in M$ ist gegeben durch

$$[\xi_A, \xi_B]_E = [A, B] = (\xi_{[A,B]})_E.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F([A,B]) &= \mathscr{L}_{\xi_{[A,B]}} f(E_n) \\ &= (\mathscr{L}_{\xi_A} \circ \mathscr{L}_{\xi_B} f - \mathscr{L}_{\xi_B} \circ \mathscr{L}_{\xi_A} f)(E_n) \\ &= F(AB) - F(BA) \ = \ F(AB - BA). \end{aligned}$$

Da dies für alle Linearformen F gilt, ist $[A, B] = AB - BA$. ∎

Ist $A \in L(G) = M_n(\mathbb{R})$, so ist

$$\alpha_A(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

eine differenzierbare Kurve in G, mit $\alpha_A(0) = E$ und $\alpha'_A(t) = A \cdot \alpha_A(t)$. Außerdem ist $\alpha_A(s) \cdot \alpha_A(t) = \alpha_A(s+t)$, also $t \mapsto \alpha_A(t)$ die (eindeutig bestimmte) Ein-Parameter-Gruppe zu A in G. Damit ist $A \mapsto \alpha_A(1) = \exp(A)$ die Exponentialabbildung der Liegruppe G, also

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n .$$

2.3 Tensorfelder

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum und $V^{**} = L(V^*, \mathbb{R})$ der Bidualraum. Es gibt eine kanonische Abbildung

$$j : V \to V^{**}, \text{ mit } j(v)(\varphi) := \varphi(v).$$

Offensichtlich ist j linear, und wenn $j(v) = 0$ ist, so ist $\varphi(v) = 0$ für alle Linearformen $\varphi \in V^*$. Schreibt man $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$, mit einer beliebigen Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V, und ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis von V^*, so ist $0 = \alpha^i(v) = v_i$ für alle i, also $v = 0$. Das zeigt die Injektivität, und aus Dimensionsgründen ist j dann ein Isomorphismus.

Auf diese Weise kann man V und V^{**} miteinander identifizieren.

Definition
Eine Abbildung

$$\varphi : (V^*)^p \times V^q \to \mathbb{R},$$

die in jedem Argument linear (insgesamt also $(p+q)$-fach multilinear) ist, heißt ein ***p-fach kontravarianter*** und ***q-fach kovarianter Tensor*** (über V). Die Menge aller dieser Tensoren sei mit $T^{p,q}(V)$ bezeichnet.

2.3.1. Beispiele

A. Eine Linearform $\varphi \in V^*$ ist ein 1-fach kovarianter Tensor.

Ist ein Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$ auf V gegeben, so können wir jedem Vektor $a \in V$ eine Linearform λ_a zuordnen, durch

$$\lambda_a(x) := \langle a \, , \, x \rangle.$$

Der Vektorraum $T^{0,q}(V)$ aller q-fach kovarianten Tensoren wird auch mit $L_q(V; \mathbb{R})$ bezeichnet (Raum der q-fachen Multilinearformen über V).

B. Ein 1-fach kontravarianter Tensor ist ein Element des Bidualraumes V^{**} und kann deshalb auch als Vektor aufgefasst werden.

Definition
Sind $f_1, \ldots, f_q$ Linearformen auf V, so wird deren ***Tensorprodukt*** $f_1 \otimes \ldots \otimes f_q \in L_q(V; \mathbb{R})$ definiert durch

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_q)(v_1, \ldots, v_q) := f_1(v_1) \cdots f_q(v_q).$$

2.3.2. Satz

Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *eine Basis von* V *und* $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *die dazu duale Basis, so bilden die Tensorprodukte* $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_q}$ *mit* $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ *eine Basis des Raumes* $L_q(V;\mathbb{R})$. *Insbesondere ist* $\dim L_q(V;\mathbb{R}) = n^q$.

Beweis: 1) Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_q} c_{i_1\ldots i_q}\alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_q} = 0$. Setzt man q-Tupel $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q})$ ein, so erhält man $c_{j_1\ldots j_q} = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_q$.

2) Ist φ eine beliebige q-fache Multilinearform, so setzen wir

$$\psi := \sum_{i_1,\ldots,i_q} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q})\alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_q}.$$

Dann ist $(\psi - \varphi)(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_q$, also $(\psi - \varphi)(v_1, \ldots, v_q) = 0$ für alle $v_1, \ldots, v_q$, und damit $\varphi = \psi$. ∎

Definition

Eine Multilinearform $\varphi \in L_q(V;\mathbb{R})$ heißt ***alternierend*** oder ***schiefsymmetrisch***, falls für $i = 1, \ldots, q-1$ gilt:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_q) = -\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_q).$$

Da man beliebige Permutationen aus Vertauschungen zusammensetzen kann, folgt:

2.3.3. Satz

Sei $\varphi \in L_q(V;\mathbb{R})$ *alternierend.*

1. $\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_q)$ *für alle Permutationen* $\sigma \in S_q$.
2. $\varphi(x_1, \ldots, x_q) = 0$, *falls zwei Argumente gleich sind.*

Definition

Es sei $A^q(V) \subset L_q(V;\mathbb{R})$ der Unterraum aller alternierenden q-fachen Multilinearformen auf V.

Speziell ist $A^0(V) = \mathbb{R}$, $A^1(V) = V^*$ und $A^q(V) = 0$ für $q > n$.

Definition

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in V^*$ Linearformen, so setzt man

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q = \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \lambda_{\sigma(q)}.$$

2.3.4. Satz

Es ist

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big).$$

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Determinante.

2.3.5. Folgerung

$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q$ *ist alternierend, und für* $\sigma \in S_q$ *ist*

$$\lambda_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \lambda_{\sigma(q)} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q.$$

Beweis: Die Determinante

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big)$$

ist alternierend in den Zeilen (also den λ_i) und den Spalten (also den v_j). ∎

Sei $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$. Sind die i_ν paarweise verschieden, so versteht man unter $\delta(i_1, \ldots, i_q)$ das (eindeutig bestimmte) Vorzeichen derjenigen Permutation, die $(i_1, \ldots, i_q)$ auf $(j_1, \ldots, j_q)$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$ abbildet. Stimmen zwei der i_ν überein, so setzt man $\delta(i_1, \ldots, i_q) = 0$.

2.3.6. Hilfssatz 1

Ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *die duale Basis zu* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *und* $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, *so ist*

$$\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} \neq \{j_1, \ldots, j_q\}, \\ \delta(i_1, \ldots, i_q) & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}. \end{cases}$$

Beweis: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} \neq \{j_1, \ldots, j_q\}$, so ist $\alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_{\sigma(q)}}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0$ für jedes $\sigma \in S_q$. Sei daher $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) &= \delta(i_1, \ldots, i_q)\alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) \\ &= \delta(i_1, \ldots, i_q) \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha^{j_1}(a_{j_{\sigma(1)}}) \cdots \alpha^{j_q}(a_{j_{\sigma(q)}}) \\ &= \delta(i_1, \ldots, i_q),\end{aligned}$$

denn von der Summe bleibt nur der Summand mit $\sigma = \mathrm{id}$ übrig. ∎

2.3.7. Hilfssatz 2

Ist $\varphi \in A^q(V)$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und

$$\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = 0 \text{ für } 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n,$$

so ist $\varphi = 0$.

Beweis: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, so ist

$$\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = \delta(i_1, \ldots, i_q) \cdot \varphi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0.$$

Sind nun $x_j = x_{j1}a_1 + \cdots + x_{jn}a_n$, $j = 1, \ldots, q$, beliebige Vektoren, so ist

$$\varphi(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i_1, \ldots, i_q} x_{1i_1} \cdots x_{qi_q}\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = 0.$$

∎

2.3.8. Satz

Die Formen $\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$ bilden eine Basis von $A^q(V)$. Insbesondere ist $\dim(A^q(V)) = \binom{n}{q}$.

Beweis: 1) Lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} c_{i_1 \ldots i_q}\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q} = 0.$$

Dann ist

$$0 = \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} c_{i_1 \ldots i_q}\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}\Big)(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = c_{j_1 \ldots j_q} \text{ für } j_1 < \ldots < j_q.$$

2) Erzeugendensystem: Sei $\varphi \in A^q(V)$. Dann definieren wir $\psi \in A^q(V)$ als

$$\psi := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q})\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}.$$

Dann sieht man sofort: $\psi = \varphi$.

Die Dimension von $A^q(V)$ ist die Anzahl der q-Tupel $(i_1, \ldots, i_q)$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$. Jedes solche q-Tupel bestimmt genau eine q-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$, und zu jeder der Mengen gibt es nur eine zulässige Anordnung der Elemente. ∎

2.3.9. Satz

Sei W ein beliebiger Vektorraum und $h : V^* \times \ldots \times V^* \to W$ eine q-fach multilineare, alternierende Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\widehat{h} : A^q(V) \to W$ mit

$$\widehat{h}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_q) = h(f_1, \ldots, f_q).$$

Beweis: Die lineare Abbildung $\widehat{h}$ wird durch Festlegung auf den Elementen einer Basis definiert. Das ergibt auch schon die Eindeutigkeit. Wir müssen nur sehen, dass die gewünschte Eigenschaft erfüllt ist. Ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ eine Basis von V^*, so gilt für Elemente $f_\nu = \sum_{i_\nu} a_{\nu,i_\nu} \alpha^{i_\nu}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_q) &= \widehat{h}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_q} a_{1,i_1} \cdots a_{q,i_q} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}\Big) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_q} a_{1,i_1} \cdots a_{q,i_q} \widehat{h}(\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_q} a_{1,i_1} \cdots a_{q,i_q} h(\alpha^{i_1}, \ldots, \alpha^{i_q}) \\
&= h\Big(\sum_{i_1} a_{1,i_1} \alpha^{i_1}, \ldots, \sum_{i_q} a_{q,i_q} \alpha^{i_q}\Big) \;=\; h(f_1, \ldots, f_q).
\end{aligned}$$

∎

2.3.10. Satz

Es gibt genau eine bilineare Abbildung $\Phi : A^p(V) \times A^q(V) \to A^{p+q}(V)$ mit

$$\Phi(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p\,,\, g_1 \wedge \ldots \wedge g_q) = f_1 \wedge \ldots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_q.$$

Beweis: Für $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p) \in (V^*)^p$ sei $g_\mathbf{u} : (V^*)^q \to A^{p+q}(V)$ definiert durch

$$g_\mathbf{u}(w_1, \ldots, w_q) := u_1 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_q.$$

Weil $g_\mathbf{u}$ q-fach multilinear und alternierend ist, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widehat{g}_\mathbf{u} : A^q(V) \to A^{p+q}(V)$ mit

$$\widehat{g}_{\mathbf{u}}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) = g_{\mathbf{u}}(w_1, \ldots, w_q).$$

Die Abbildung $h : (V^*)^p \to L(A^q(V), A^{p+q}(V))$ mit $h(\mathbf{u}) := \widehat{g}_{\mathbf{u}}$ ist p-fach multilinear und alternierend. Also gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widehat{h} : A^p(V) \to L(A^q(V), A^{p+q}(V))$ mit $\widehat{h}(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) := \widehat{g}_{\mathbf{u}}$.

Für $\omega \in A^p(V)$ und $\psi \in A^q(V)$ sei $\Phi(\omega, \psi) := \widehat{h}(\omega)(\psi)$. Offensichtlich ist Φ bilinear und (durch die Werte auf Basis-Elementen) eindeutig bestimmt. Es ist

$$\begin{aligned} \widehat{h}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p)(g_1 \wedge \ldots \wedge g_q) &= \widehat{g}_{(f_1,\ldots,f_p)}(g_1 \wedge \ldots \wedge g_q) \\ &= g_{(f_1,\ldots,f_p)}(g_1, \ldots, g_q) \\ &= f_1 \wedge \ldots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_q. \end{aligned}$$

Die Konstruktion beweist die Existenz, die Eindeutigkeit erhält man über Basisdarstellungen. ■

So erhält man das ***Dachprodukt***

$$A^p(V) \times A^q(V) \xrightarrow{\wedge} A^{p+q}(V), \text{ mit } (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi := \Phi(\varphi, \psi).$$

Dieses Produkt hat folgende Eigenschaften:

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$.
2. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$ für $\omega \in A^p(V)$, $\varphi \in A^q(V)$. (Antikommutativgesetz).
3. Für Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ ist $\varphi \wedge \psi = \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$.

Die Eigenschaften (1) und (2) folgen ganz leicht für Basisformen und dann wegen der Bilinearität für beliebige Formen.

Sei nun X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$T^{p,q}(X) := \dot{\bigcup_{x \in X}} T^{p,q}(T_x(X)).$$

Wie üblich kann man auf $T^{p,q}(X)$ die Struktur eines differenzierbaren Vektorbündels einführen.

Definition

Ein ***p-fach kontravariantes und q-fach kovariantes Tensorfeld*** auf X ist ein differenzierbarer Schnitt $\mathsf{T} \in \Gamma(X, T^{p,q}(X))$. Die Menge solcher Tensorfelder bezeichnet man mit $\mathscr{T}^{p,q}(X)$.

Bemerkung: Die Tensorfelder über X bilden einen Modul über $\mathscr{C}^\infty(X)$.

Analog bildet man das Vektorbündel $A^q(X) := \dot{\bigcup_{x \in X}} A^q(T_x(X))$.

Definition

Eine ***q-dimensionale Differentialform*** (kurz: ***q-Form***) ist ein differenzierbarer Schnitt im Bündel $A^q(X)$. Man setzt $\Omega^q(X) := \Gamma(X, A^q(X))$.

Ist $\omega \in \Omega^p(X)$ und $\varphi \in \Omega^q(X)$, so wird $\omega \wedge \varphi \in \Omega^{p+q}(X)$ definiert durch $(\omega \wedge \varphi)_x := \omega_x \wedge \varphi_x$.

Es ist $T^{1,0}(X) = T(X)$ und $T^{0,1}(X) = T^*(X)$. Die Schnitte sind jeweils Vektorfelder oder 1-Formen. Ist (U, φ) eine Karte für X mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, so haben wir die Basen $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bzw. $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ von $\mathscr{T}^{1,0}(U)$ bzw. $\mathscr{T}^{0,1}(U)$. Ein Tensorfeld T hat über U die Darstellung

$$\mathsf{T}|_U = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \\ j_1,\ldots,j_q}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes \ldots \otimes dx_{j_q},$$

mit differenzierbaren Funktionen $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$.

Eine q-dimensionale Differentialform ω hat über U die Darstellung

$$\omega|_U = \sum_{0 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} a_{j_1\ldots j_q}\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q},$$

mit differenzierbaren Funktionen $a_{j_1\ldots j_q}$.

2.4 Unterbündel und Quotientenbündel

Definition

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang q. Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt ***Unterbündel*** vom Rang p, falls es einen p-dimensionalen Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^q$ gibt, so dass gilt:

Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und eine Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ von E über U mit $\varphi^{-1}(U \times W) = F|_U$ $(:= F \cap (E|_U)\,)$. Man spricht dann auch von einer ***angepassten Trivialisierung***.

2.4.1. Satz

Sei E ein Vektorbündel über X. Eine Teilmenge $F \subset E$ ist genau dann ein Unterbündel (vom Rang p), wenn gilt:

1. *Für jedes $x \in X$ ist $F_x \subset E_x$ ein p-dimensionaler Unterraum.*
2. *Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und einen Rahmen $\{s_1, \dots, s_q\} \subset \Gamma(U, E)$ für E, so dass für jedes $x \in U$ gilt: $\{s_1(x), \dots, s_p(x)\}$ ist eine Basis von F_x.*

Beweis: 1) Sei $F \subset E$ ein Unterbündel, $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^q$ eine angepasste Trivialisierung, $\varphi(F|_U) = U \times W$. Für jedes $x \in U$ ist dann $F_x = \varphi_x^{-1}(W)$ ein Unterraum von E_x. Man wähle eine Basis $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ von W und ergänze diese zu einer Basis $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+1}, \dots, \mathbf{a}_q\}$ von $\mathbb{R}^q$. Die Schnitte $s_i \in \Gamma(U, E)$ mit $s_i(x) := \varphi^{-1}(x, \mathbf{a}_i)$ liefern das Gewünschte.

2) Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt. Die Schnitte $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(U, E)$ eines lokalen Rahmens im Sinne des Kriteriums liefern eine Trivialisierung φ für E über U, durch

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{q} a_i \cdot s_i(x)\Big) := \big(x, (a_1, \dots, a_q)^\top\big).$$

Für $x \in U$ wird F_x nach Konstruktion von $s_1(x), \dots, s_p(x)$ erzeugt. Also ist $F|_U = \varphi^{-1}(U \times (\mathbb{R}^p \times \{\mathbf{0}\}))$ und F damit ein Unterbündel. ∎

Klar ist, dass ein Unterbündel eine Untermannigfaltigkeit und selbst ein Vektorbündel ist.

Sei E ein Vektorbündel vom Rang q über X und $F \subset E$ ein Unterbündel vom Rang r, sowie

$$E/F := \dot{\bigcup_{x \in X}} E_x/F_x \quad \text{und} \quad \overline{\pi} : E/F \to X \text{ sowie } p : E \to E/F$$

die kanonischen Projektionen. Wir wollen E/F so mit der Struktur eines Vektorbündels über X versehen, dass p ein Bündel-Homomorphismus ist.

Sei $\{s_1, \dots, s_q\}$ ein Rahmen für E über einer offenen Menge $U \subset X$, so dass $s_1, \dots, s_r$ das Unterbündel F über U erzeugen. Dann erzeugen $s_{r+1}, \dots, s_q$ ein weiteres (triviales) Unterbündel $Q \subset E|_U$. Für $x \in U$ ist $p_x : E_x \to E_x/F_x$ ein surjektiver Vektorraum-Homomorphismus mit $\operatorname{Ker}(p_x) = F_x$. Dann ist $\dim(E_x/F_x) = q-r$ und $\{p(s_{r+1}(x)), \dots, p(s_q(x))\}$ eine Basis von E_x/F_x. Damit ist $p : Q \to (E/F)|_U$ ein Bündel-Isomorphismus, und $(E/F)|_U$ erhält die Struktur eines trivialen Bündels.

Nun sei eine offene Überdeckung durch Vektorbündel-Karten $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ gegeben, so dass $F|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times (\mathbb{R}^r \times \{\mathbf{0}\}))$ ist. Sei $Q_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}^{q-r}))$. Dann induziert p Bündel-Isomorphismen $p_\alpha : Q_\alpha \to (E/F)|_{U_\alpha}$.

Sei $\operatorname{pr} : \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{q-r} \to \mathbb{R}^r$ die kanonische Projektion und $\psi_\alpha := \operatorname{pr} \circ \varphi_\alpha|_F : F|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Dies ist eine Trivialisierung von F über U_α. Die Übergangsfunktionen zu den φ_α und den ψ_α seien mit $G_{\alpha\beta}$, bzw. $g_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Dann gilt:

$$G_{\alpha\beta}(x) \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{0}^\top \end{pmatrix},$$

also

$$G_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x) & \sharp \\ 0 & h_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix},$$

mit differenzierbaren Funktionen $h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_{q-r}(\mathbb{R})$.

Ist $\sigma : U \times \mathbb{R}^q \to U \times \mathbb{R}^{q-r}$ definiert durch $\sigma(x, (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')^\top) := (x, (\mathbf{v}'')^\top)$ und $j_\alpha : Q_\alpha \hookrightarrow E|_{U_\alpha}$ die kanonische Injektion, so werden durch $\varrho_\alpha := \sigma \circ \varphi_\alpha \circ j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} : (E/F)|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{q-r}$ Trivialisierungen für E/F gegeben. Setzen wir $s_\nu^\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{e}_\nu^\top)$ und $\overline{s}_\nu^\alpha := p \circ s_\nu^\alpha$, so ist

$$\varrho_\alpha\Big(\sum_{\nu=r+1}^{q} c_\nu \overline{s}_\nu^\alpha(x)\Big) = \big(x, (c_{r+1}, \dots, c_q)^\top\big),$$

also

$$\varrho_\alpha^{-1}\big(x, \mathbf{c}^\top\big) = p \circ \varphi_\alpha^{-1}\big(x, (\mathbf{0}, \mathbf{c})^\top\big).$$

Weil $j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} \circ p : E|_{U_\alpha} \to E|_{U_\alpha}$ die identische Abbildung ist, folgt:

$$\begin{aligned} \varrho_\alpha \circ \varrho_\beta^{-1}(x, \mathbf{c}^\top) &= \sigma \circ \varphi_\alpha \circ j_\alpha \circ p_\alpha^{-1} \circ p \circ \varphi_\beta^{-1}(x, (\mathbf{0}, \mathbf{c})^\top) \\ &= \sigma \circ \varphi_\alpha \circ \mathrm{id} \circ \varphi_\alpha^{-1}\big(x, G_{\alpha\beta}(x) \bullet (\mathbf{0}, \mathbf{c})^\top\big) \\ &= \sigma\big(x, (\sharp, h_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{c}^\top)\big) \;=\; (x, h_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{c}^\top). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt, E/F ist ein Vektorbündel mit Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}$.

Definition

Sei $f : E \to F$ ein Vektorbündel-Homomorphismus. Dann setzt man

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \dot{\bigcup_{x \in X}} \operatorname{Ker}(f_x : E_x \to F_x) \\ \text{und} \qquad \operatorname{Im} f &:= \dot{\bigcup_{x \in X}} \operatorname{Im}(f_x : E_x \to F_x). \end{aligned}$$

Man spricht vom ***Kern*** und vom ***Bild*** eines Bündelhomomorphismus.

2.4.2. Satz

Sei X eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f : E \to F$ ein Homomorphismus zwischen Bündeln über X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $x \mapsto \operatorname{rg}(f_x)$ *ist konstant.*
2. $\operatorname{Ker} f \subset E$ *ist ein Unterbündel.*
3. $\operatorname{Im} f \subset F$ *ist ein Unterbündel.*

BEWEIS: OBdA sei $E = X \times \mathbb{R}^p$, $F = X \times \mathbb{R}^q$ und $f(x, \mathbf{v}^\top) = (x, A(x) \bullet \mathbf{v}^\top)$. Ist $\operatorname{Ker} f$ oder $\operatorname{Im} f$ ein Unterbündel, so muss offensichtlich $x \mapsto \operatorname{rg}(f_x)$ konstant.

Sei umgekehrt $\operatorname{rg}(f_x)$ konstant, etwa $= r$. Ist $x_0 \in X$, so gibt es linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ im $\mathbb{R}^p$, so dass die Vektoren $f_{x_0}(\mathbf{a}_1), \ldots, f_{x_0}(\mathbf{a}_r)$ eine Basis von $\operatorname{Im}(f_{x_0})$ bilden. Wir ergänzen die $\mathbf{a}_i$ zu einer Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ von $\mathbb{R}^p$. Des weiteren gibt es Vektoren $\mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_q \in \mathbb{R}^q$, so dass $\{f_{x_0}(\mathbf{a}_1), \ldots, f_{x_0}(\mathbf{a}_r), \mathbf{b}_{r+1}, \ldots, \mathbf{b}_q\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^q$ ist.

Die Schnitte $t_i(x) := f(x, \mathbf{a}_i)$, $i = 1, \ldots, r$, und $\widetilde{t}_j(x) := (x, \mathbf{b}_j)$, $j = r+1, \ldots, q$, in F sind in x_0 linear unabhängig und bilden deshalb aus Stetigkeitsgründen über einer offenen Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ einen Rahmen für F. Weil $\operatorname{rg}(f_x)$ konstant ist, bilden die t_i auf einer Umgebung $V = V(x_0) \subset U$ einen Rahmen für $\operatorname{Im}(f)$. Deshalb ist $\operatorname{Im} f$ ein Unterbündel.

Über V gibt es auch Funktionen β_{ki} mit

$$f(x, \mathbf{a}_k) = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ki}(x) f(x, \mathbf{a}_i), \text{ für } k = r+1, \ldots, q.$$

Weil man die β_{ki} als Lösung eines linearen Gleichungssystems nach der Cramer'schen Regel aus den $f(x, \mathbf{a}_\nu)$ gewinnen kann, sind sie auch differenzierbar. Die differenzierbaren Schnitte

$$\begin{aligned} s_k(x) &:= \big(x, \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{r} \beta_{ki}(x)\mathbf{a}_i\big),\ k = r+1, \dots, q \\ \text{und } \widetilde{s}_i &:= (x, \mathbf{a}_i),\ i = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

erzeugen E, und dabei erzeugen die s_k den Kern von f. Also ist $\operatorname{Ker} f$ ein Unterbündel. ∎

Definition
Eine Folge $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H$ von Vektorbündel-Homomorphismen heißt eine ***exakte Sequenz***, falls für jedes $x \in X$ die Folge $E_x \xrightarrow{f} F_x \xrightarrow{g} H_x$ eine exakte Sequenz ist (also $\operatorname{Im}(f_x) = \operatorname{Ker}(g_x)$).

In diesem Fall ist $\operatorname{rg}(f_x) + \operatorname{rg}(g_x) = \operatorname{rg}(F)$ konstant. Da $\operatorname{rg}(f_x)$ und $\operatorname{rg}(g_x)$ in der Nähe eines Punktes x_0 höchstens größere Werte als in x_0 selbst annehmen können, gilt das auch für die Summe. Also sind beide Ränge konstant, und $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind Unterbündel.

2.4.3. Beispiel

Sei $F \subset E$ ein Unterbündel. Dann ist die Sequenz $0 \to F \to E \to E/F \to 0$ exakt.

Ist $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, so kann man

$$Tf : T(X) \to f^*T(Y)$$

definieren durch $(Tf)_x := f_{*,x} : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y) = (f^*T(Y))_x$. Diese Abbildung ist fasertreu und in jeder Faser linear. Wir wollen noch zeigen, dass Tf eine differenzierbare Bündelabbildung ist.

Sind $\psi_0 : V \to \mathbb{R}^m$ und $\varphi_0 : U = f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$ Karten für Y bzw. X, so hat man Bündelkarten $\varphi : T(X)|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ mit $\varphi\big(\sum_\nu a_\nu (\partial/\partial x_\nu)|_x\big) := \big(x, (a_1, \dots, a_n)^\top\big)$ und analog $\psi : T(Y)|_V \to V \times \mathbb{R}^m$. Eine Trivialisierung $\widehat{\psi} : (f^*T(Y))|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ gewinnt man dann durch $\widehat{\psi}\big(\sum_\mu b_\mu (\partial/\partial y_\mu)|_{f(x)}\big) := \big(x, (b_1, \dots, b_m)^\top\big)$. Nun ist

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} \circ Tf \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{a}^\top) &= \widehat{\psi}\Big(f_{*,x} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big|_x\Big) \\ &= \widehat{\psi}\Big(\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(y_\mu \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu}\Big|_{f(x)}\Big) \\ &= (x, \psi_{f(x)}\Big(\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(y_\mu \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu}\Big|_{f(x)}\Big)) \\ &= \Big(x, (\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu, \dots, \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_\nu}(x) a_\nu)^\top\Big) \\ &= (x, J_{\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}}(\varphi_0(x)) \bullet \mathbf{a}^\top) \end{aligned}$$

Das zeigt, dass Tf ein Bündel-Homomorphismus ist.

2.4.4. Beispiele

A. Ist $Y \overset{j}{\hookrightarrow} X$ eine Untermannigfaltigkeit, so hat man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T(Y) \longrightarrow j^*T(X) \longrightarrow N_X(Y) \longrightarrow 0,$$

mit dem ***Normalenbündel*** $N_X(Y) := j^*T(X)/T(Y)$.

B. Sei $f : X \to Y$ eine Submersion. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T(f) \longrightarrow T(X) \xrightarrow{Tf} f^*T(Y) \longrightarrow 0,$$

da $f_{*,x}$ für jedes $x \in X$ surjektiv ist. Das Bündel $\operatorname{Ker}(Tf)$ nennt man auch das „Bündel der vertikalen Tangentialvektoren".

C. Ist $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, so ist π eine Submersion.

Behauptung: $\operatorname{Ker}(T\pi) \cong \pi^*E$.

BEWEIS: Sind e und v zwei Elemente von E_x, so wird durch $\alpha(t) := e + tv$ ein Weg in E_x mit $\alpha(0) = e$ und $\dot{\alpha}(0) = v$ definiert. Auf diese Weise kann man die Elemente von $E_x = E_{\pi(e)} = (\pi^*E)_e$ als Tangentialvektoren aus $T_e(E_x) \subset T_e(E)$ auffassen. Aus Dimensionsgründen ist dann sogar $T_e(E_x) \cong E_x$. Weil $\pi \circ \alpha$ konstant ist, ist $\pi_{*,e}(v) = 0$ für alle $v \in T_e(E_x)$, also $(\pi^*E)_e \subset (\operatorname{Ker}(T\pi))_e$. Wieder aus Dimensionsgründen folgt die Gleichheit. ∎

So erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi^*E \longrightarrow T(E) \xrightarrow{T\pi} \pi^*T(X) \longrightarrow 0.$$

Besonders interessant ist der Spezialfall $E = T(X)$. Mit der Projektion $\pi_X : T(X) \to X$ erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_X^*T(X) \longrightarrow T(T(X)) \xrightarrow{T\pi_X} \pi_X^*T(X) \longrightarrow 0.$$

Das zweite Tangentialbündel spielt eine wichtige Rolle in der Analytischen Mechanik.

Der „Konfigurationsraum" X eines mechanischen Systems ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und wird lokal durch n verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ beschrieben (das können z.B. die $3n$ kartesischen Koordinaten eines Systems von n Massenpunkten sein). Die Koordinaten von $T(X)$ bezeichnet man mit $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, die des „Phasenraums" $T^*(X)$ mit $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ (mit den „verallgemeinerten Impulsen" p_i). Auf $T(T(X))$ hat man dann die Koordinaten q_i, $\dot{q}_i$, dq_i und $d\dot{q}_i$.

Die 2-Form $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ definiert auf $T^*(X)$ eine sogenannte „symplektische Struktur“. Was das bedeutet, kann hier nicht weiter erklärt werden, es versteckt sich eine umfangreiche Theorie dahinter. Literatur dazu:

- Claude Godbillon: *Géométrie différentielle et mécanique analytique.* Hermann, Paris 1969.
- Ralph Abraham / Jerrold E. Marsden: *Foundations of Mechanics.* Benjamin, New York 1967.
- Lynn H. Loomis / Shlomo Sternberg: *Advanced Calculus.* Addison-Wesley 1968.
- R. Berndt: *Einführung in die Symplektische Geometrie.* Vieweg 1998.
- Jerrold E. Marsden / Tudor S. Ratiu: *Einführung in die Mechanik und Symmetrie.* Springer 1999.