2 Vektorbündel

2.1 Lokale Trivialisierungen

Definition

Sei X eine (n-dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein ***Vektorbündel vom Rang*** q über X ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E, zusammen mit einer surjektiven differenzierbaren Abbildung $\pi : E \to X$, so dass gilt:

1. Für jedes $x \in X$ trägt die Faser $E_x := \pi^{-1}(x)$ die Struktur eines q-dimensionalen Vektorraumes.

2. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$ mit folgenden Eigenschaften:

   (a) Für jedes $x \in U$ ist $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to \mathbb{R}^q$ ein $\mathbb{R}$-Isomorphismus.

   (b) $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi$ auf $\pi^{-1}(U)$.

Die Abbildung φ nennt man eine ***lokale Trivialisierung*** oder ***Bündelkarte***, die Abbildung π nennt man ***Bündelabbildung***. Die Mannigfaltigkeit X heißt ***Basis***, E heißt ***Totalraum*** des Bündels.

2.1.1. Satz

Sei $\pi : E \to X$ eine surjektive differenzierbare Abbildung (zwischen Mannigfaltigkeiten). E ist genau dann ein Vektorbündel vom Rang q über X, wenn es eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X und lokale (differenzierbare) Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ gibt, so dass gilt:

Zu jedem Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ gibt es eine differenzierbare Abbildung

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}) \quad \textit{mit} \quad \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{v}^\top)$$

für $x \in U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$.

Beweis: 1) Sei E ein Vektorbündel über X. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X und lokale Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$. Sei

$$\Lambda_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^q \to U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^q.$$

Dann ist $(\Lambda_{\alpha\beta})_x : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ für jedes $x \in U_{\alpha\beta}$ ein $\mathbb{R}$-VR-Isomorphismus, der bezüglich der Standardbasen durch eine Matrix $g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ beschrieben wird.

Weil $(g_{\alpha\beta})_{\nu\mu}(x) = \mathrm{pr}_\nu(\Lambda_{\alpha\beta}(x)(\mathbf{e}_\mu))$ ist, folgt auch, dass $g_{\alpha\beta}$ differenzierbar ist.

2) Sei umgekehrt ein System von lokalen Trivialsierungen mit differenzierbaren Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ gegeben. Dann kann man auf diesem Wege jede Faser E_x mit einer Vektorraum-Struktur versehen, so dass die Trivialisierungen faserweise Vektorraum-Isomorphismen sind. ∎

2.1.2. Konstruktionslemma

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $q \in \mathbb{N}$. Zu jedem $x \in X$ sei ein q-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum E_x gegeben, es sei $E := \dot{\bigcup}_{x\in X} E_x$ und $\pi : E \to X$ die kanonische Projektion. Weiter sei $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von X. Zu jedem $\alpha \in A$ gebe es eine bijektive Abbildung $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$, die auf jeder Faser einen $\mathbb{R}$-VR-Isomorphismus induziert, zu jedem Paar $(\alpha, \beta) \in A \times A$ mit $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$ gebe es eine differenzierbare Abbildung $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$, so dass gilt:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{v}^\top).$$

Dann gibt es auf E eine (eindeutig bestimmte) differenzierbare Struktur, so dass E ein Vektorbündel vom Rang q über X mit Bündelprojektion π und lokalen Trivialisierungen φ_α ist.

Beweis: Man kann annehmen, dass A abzählbar ist und dass es lokale Karten $\psi_\alpha : U_\alpha \to B_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Dann ist

$$\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to B_\alpha \times \mathbb{R}^q \quad \text{mit} \quad \widetilde{\varphi}_\alpha := (\psi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\alpha$$

eine Karte für E. Die Kartenwechsel

$$\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} = (\psi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (\psi_\beta \times \mathrm{id})^{-1}$$

sind Diffeomorphismen.

E wird mit einer Topologie versehen, indem man die Mengen $\pi^{-1}(U_\alpha)$ mit der Produkttopologie versieht Das funktioniert, weil die Kartenwechsel Homöomorphismen sind. Die so entstehende Topologie ist eine Hausdorff-Topologie: Seien $p, q \in E$, $p \neq q$. Liegen beide Punkte in einer Faser E_x, so liegen sie in der gleichen Koordinatenumgebung, und es gibt natürlich disjunkte Umgebungen. Ist $p \in E_x$ und $q \in E_y$ (mit $x \neq y$), so gibt es disjunkte Umgebungen $V = V(x)$ und $W = W(y)$, und $\pi^{-1}(V)$ und $\pi^{-1}(W)$ sind disjunkte Umgebungen von p und q. Dass E das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, folgt daraus, dass dies für den $\mathbb{R}^n$ gilt und die Überdeckung abzählbar ist. Damit ist E tatsächlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Weil $\psi_\alpha \circ \pi \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\top) = \psi_\alpha \circ \mathrm{pr}_1 \circ (\psi_\alpha^{-1} \times \mathrm{id}) = \mathbf{x}$ ist, ist π eine differenzierbare Abbildung. Außerdem sind die Bündelkarten $\varphi_\alpha = (\psi_\alpha \times \mathrm{id})^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_\alpha$ differenzierbar. Damit ist alles gezeigt. ∎

2.1.3. Beispiel

In jedem Punkt x einer Mannigfaltigkeit ist der (n-dimensionale) Tangentialraum $T_x(X)$ gegeben. Nun sei $T(X) := \dot{\bigcup}_{x\in X} T_x(X)$. Überdeckt man X durch lokale Koordinaten (U_α, ψ_α), so erhält man Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ durch

$$\varphi_\alpha\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big|_x\Big) := \big(x, (a_1, \ldots, a_n)^\top\big).$$

Dann ist

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, J_{\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}} \cdot \mathbf{v}^\top).$$

Das so beschriebene Vektorbündel $T(X)$ nennt man das ***Tangentialbündel*** von X.

Definition

Ein ***Vektorbündel-Homomorphismus*** (zwischen Vektorbündeln E und F über einer Mannigfaltigkeit X) ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : E \to F$, so dass gilt:

1. $\pi_F \circ \Phi = \pi_E$.
2. Für alle $x \in X$ ist $\Phi_x : E_x \to F_x$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Ist Φ zusätzlich bijektiv und auch Φ^{-1} ein Vektorbündel-Homomorphismus, so spricht man von einem (Vektorbündel-)***Isomorphismus***.

2.1.4. Satz

Eine Abbildung $\Phi : E \to F$ (zwischen Vektorbündeln über X) ist genau dann ein Vektorbündel-Homomorphismus (bzw. -Isomorphismus), wenn es zu jeder offenen Teilmenge $U \subset X$, zu der es Trivialisierungen $\varphi : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$ und $\psi : \pi_F^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^p$ (im Falle eines Isomorphismus mit $p = q$) gibt, eine differenzierbare Abbildung $h : U \to M_{p,q}(\mathbb{R})$ (bzw. $H : U \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$) gibt, so dass gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, h(x) \bullet \mathbf{v}^\top).$$

BEWEIS: 1) Sei $\Phi : E \to F$ ein Vektorbündel-Homomorphismus. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) &= \pi_F \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) \\ &= \pi_E \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) \;=\; x \end{aligned}$$

und für festes $x \in U$ ist

$$\mathbf{v}^\top \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = \psi_x \circ \Phi_x \circ \varphi_x^{-1}(\mathbf{v}^\top)$$

eine lineare Abbildung, die man in der Form $\mathbf{v}^\top \mapsto h(x) \bullet \mathbf{v}^\top$ mit $h(x) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ schreiben kann.

2) Ist das Kriterium erfüllt, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$, Trivialisierungen φ_α von E und ψ_α von F und differenzierbare Abbildungen $h_\alpha : U_\alpha \to M_{p,q}(\mathbb{R})$, so dass gilt:

$$\psi_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_F \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) &= \pi_F \circ \psi_\alpha^{-1}(x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \\ &= \mathrm{pr}_1(x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \;=\; x \;=\; \pi_E \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top), \end{aligned}$$

also $\pi_F \circ \Phi = \pi_E$. Dass Φ auf jeder Faser linear ist, ist ebenfalls klar. ∎

Bemerkung: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem zweiten Teil des Beweises. Die Übergangsfunktionen von E seien mit $g_{\alpha\beta}$ bezeichnet, die von F mit $\gamma_{\alpha\beta}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (x, h_\alpha(x) \bullet \mathbf{v}^\top) &= \psi_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) \\ &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ \psi_\beta \circ \Phi \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, \mathbf{v}^\top) \\ &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ \psi_\beta \circ \Phi \circ \varphi_\beta^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \bullet \mathbf{v}^\top) \\ &= (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, h_\beta(x) \bullet g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \bullet \mathbf{v}^\top) \\ &= (x, \gamma_{\alpha\beta}(x) \bullet h_\beta(x) \bullet g_{\alpha\beta}(x)^{-1} \bullet \mathbf{v}^\top), \end{aligned}$$

also

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) \bullet h_\beta(x) = h_\alpha(x) \bullet g_{\alpha\beta}(x).$$

2.1.5. Satz

Das System der Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ eines Vektorbündels zur Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ erfüllt die folgende „Cozykel-Bedingung“:

$$g_{\alpha\beta}(x) \bullet g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \text{ für } x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

BEWEIS: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma^{-1} = \varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\gamma^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma^{-1}),$$

die über $U_{\alpha\beta\gamma}$ gilt. ∎

2.1.6. Existenzsatz

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X und $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ ein System von differenzierbaren Funktionen, das die Cozykel-Bedingung erfüllt.

Dann gibt es ein Vektorbündel $\pi : E \to X$ vom Rang q mit Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ und Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$. Das Bündel ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: Auf $\widetilde{E} := \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \{\alpha\} \times \mathbb{R}^q$ wird eine Äquivalenzrelation erklärt:

$$(x, \alpha, \mathbf{v}) \sim (y, \beta, \mathbf{w}) \ :\Longleftrightarrow \quad x = y \text{ und } \mathbf{w}^\top = g_{\beta\alpha}(x) \bullet \mathbf{v}^\top.$$

Es sei $E := E/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : E \to X$ definiert durch $\pi\bigl([x, \alpha, \mathbf{v}]\bigr) := x$. Diese Projektion ist wohldefiniert, und die Fasern haben die Struktur q-dimensionaler Vektorräume. Für $\alpha \in A$ sei $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ definiert durch $[x, \alpha, \mathbf{v}] \mapsto (x, \mathbf{v})$. Das ist offensichtlich eine wohldefinierte bijektive Abbildung. Über $U_{\alpha\beta}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) &= \varphi_\alpha\bigl([x, \beta, \mathbf{w}]\bigr) \\
&= \varphi_\alpha\bigl([x, \alpha, \mathbf{v}]\bigr) \quad (\text{mit } \mathbf{w} = g_{\beta\alpha}(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \\
&= (x, \mathbf{v}) \ = \ (x, g_{\alpha\beta}(x) \bullet \mathbf{w}^\top).
\end{aligned}$$

Seien zwei Bündel E und F vom Rang q mit den gleichen Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ gegeben, mit Trivialisierungen φ_α und ψ_α. Über $U_{\alpha\beta}$ ist dann

$$\theta_{\alpha\beta}(x, \mathbf{v}^\top) := \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \mathbf{v}^\top)$$

und

$$\varrho_{\alpha\beta}(x, \mathbf{v}^\top) := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \mathbf{v}^\top).$$

Also ist $\theta_{\alpha\beta} \circ \varrho_{\alpha\beta}^{-1} = \mathrm{id}$.

Definiert man $\Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to F|_{U_\alpha}$ durch $\Phi_\alpha := \psi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta &= \psi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \ = \ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ (\psi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \\
&= \psi_\alpha^{-1} \circ \theta_{\alpha\beta} \circ \varrho_{\alpha\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha = \Phi_\alpha.
\end{aligned}$$

Damit wird durch $\Phi|_{E|_{U_\alpha}} := \Phi_\alpha$ eine differenzierbare Abbildung $\Phi : E \to F$ definiert. Weil $\psi_\alpha \circ \Phi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, \mathbf{v}^\top)$ ist, ist Φ ein Bündel-Homomorphismus (und natürlich sogar ein Isomorphismus). ∎

Definition

Ein Vektorbündel E heißt ***trivial***, falls $E \cong X \times \mathbb{R}^q$ ist.

2.1.7. Satz

Das Bündel E sei (bezüglich der Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)$) durch Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ gegeben. E ist genau dann trivial, wenn es differenzierbare Funktionen $h_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ gibt, so dass gilt:

$$g_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x) \bullet h_\beta(x)^{-1} \text{ für } x \in U_{\alpha\beta}.$$

Beweis: Die Einheitsmatrix dient als Übergangsfunktion für das triviale Bündel. Die Behauptung folgt dann aus der lokalen Beschreibung von Vektorbündel-Isomorphismen. ∎

Wir wollen nun zu einem Vektorbündel E das „duale Bündel" E^* konstruieren. Dazu erinnern wir uns an den Begriff der dualen linearen Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ (mit $f^*(\lambda) := \lambda \circ f$). Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von W, so gibt es dazu die dualen Basen $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ von V^* und $\{\beta^1, \ldots, \beta^m\}$ von W^*, mit $\alpha^i(a_j) = \delta_{ij}$ und $\beta^k(b_l) = \delta_{kl}$.

f werde bezüglich der Basen durch eine Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ beschrieben,

$$f(a_\nu) = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} b_\mu,$$

und f^* bezüglich der dualen Basen durch eine Matrix $A^* = (a^*_{\nu\mu})$:

$$f^*(\beta^\mu) = \sum_{\nu=1}^{n} a^*_{\nu\mu} \alpha^\nu.$$

Dabei ist $a^*_{\nu\mu} = (f^*\beta^\mu)(a_\nu) = (\beta^\mu \circ f)(a_\nu) = a_{\mu\nu}$, also $A^* = A^\top$.

Ist $\iota_q : \mathbb{R}^q \to (\mathbb{R}^q)^*$ der durch $\iota_q(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ definierte Isomorphismus, so ist $\iota_q(\mathbf{e}_\nu) = \varepsilon^\nu$ (wobei $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^q\}$ die duale Basis zur Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ ist).

Sei nun E ein Vektorbündel über X mit lokalen Trivialisierungen

$$\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$$

und Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$. Das ***duale Bündel*** E^* wird definiert als Vereinigung $E^* := \dot{\bigcup\limits_{x \in X}} E^*_x$, mit Trivialisierungen $\widetilde{\varphi}_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ mit

$$(\widetilde{\varphi}_\alpha)_x := \iota_q^{-1} \circ \big((\varphi_\alpha)^*_x\big)^{-1} : E^*_x \to \mathbb{R}^q.$$

Die Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ von E^* kann man nun berechnen. Weil

$$((\varphi_\alpha)^*_x)^{-1} \circ (\varphi_\beta)^*_x = ((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^*_x)^{-1}$$

bezüglich $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^q\}$ durch $\big(g_{\alpha\beta}(x)^\top\big)^{-1}$ beschrieben wird, gilt dies auch für

$$(\widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1})_x = \iota_q^{-1} \circ ((\varphi_\alpha)_x^*)^{-1} \circ (\varphi_\beta)_x^* \circ \iota_q$$

bezüglich $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$.

2.1.8. Beispiel

Das ***Cotangentialbündel*** $T^*(X)$ ist das duale Bündel zum Tangentialbündel $T(X)$.

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung (zwischen Mannigfaltigkeiten), $\pi : E \to Y$ ein Vektorbündel vom Rang q. Dann versteht man unter dem ***inversen Bild*** von E über X das Bündel

$$f^*E := X \times_Y E = \{(x, e) \in X \times E \,:\, f(x) = \pi(e)\}.$$

Die Bündelprojektion $\widehat{\pi} : f^*E \to X$ ist gegeben durch $\widehat{\pi}(x, e) := x$.

Die Faser von f^*E über $x \in X$ ist gegeben durch $(f^*E)_x = E_{f(x)}$. Daher ist das „geliftete Bündel" (das inverse Bild von E) trivial über den Fasern $f^{-1}(y)$.

Man hat folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{cccc} & f^*E & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & E & \\ \widehat{\pi} & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

Ist $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von Y, so dass E über U_α trivial ist. Dann ist $\widehat{\mathscr{U}} := \{\widehat{U}_\alpha := f^{-1}(U_\alpha) \,:\, \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von X, so dass f^*E über $\widehat{U}_\alpha$ trivial ist: Ist $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ eine Trivialisierung von E, so kann man eine Trivialisierung $\widehat{\varphi}_\alpha : f^*E|_{\widehat{U}_\alpha} \to \widehat{U}_\alpha \times \mathbb{R}^q$ definieren durch

$$\widehat{\varphi}_\alpha(x, e) := \big(x, (\varphi_\alpha)_{f(x)}(e)\big).$$

Sei $(g_{\alpha\beta})$ das System der Übergangsfunktionen von E. Dann ist

$$\widehat{\varphi}_\alpha \circ \widehat{\varphi}_\beta^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) = \big(x, (\varphi_\alpha)_{f(x)} \circ (\varphi_\beta)_{f(x)}^{-1}(\mathbf{w}^\top\big) = (x, g_{\alpha\beta}(f(x)) \bullet \mathbf{w}^\top),$$

also $g_{\alpha\beta} \circ f$ Übergangsfunktion von f^*E.

2.1.9. Beispiel

Sei $j : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung einer Untermannigfaltigkeit Y in eine Mannigfaltigkeit X. Ist E ein Vektorbündel über X, so ist $E|_Y := j^*E$ die Einschränkung von E auf Y.

Wir wollen noch eine algebraische Konstruktion (die Bildung der direkten Summe) auf Vektorbündel übertragen:

$\pi_E : E \to X$ und $\pi_F : F \to X$ seien zwei Vektorbündel vom Rang p bzw. q. Dann nennt man

$$E \oplus F := \dot{\bigcup_{x \in X}} E_x \oplus F_x = \{(v,w) \in E \times F \,:\, \pi_E(v) = \pi_F(w)\} =: E \times_X F$$

die ***direkte Summe*** oder ***Whitney-Summe*** von E und F. Wir führen die Vektorbündel-Struktur auf $E \oplus F$ schrittweise ein:

1) Sei $E = X \times \mathbb{R}^p$ und $F = X \times \mathbb{R}^q$. Dann ist $E \oplus F = X \times \mathbb{R}^{p+q}$, mit der offensichtlichen Bündel-Struktur.

2) Es gebe globale Bündel-Isomorphismen $\varphi : E \to X \times \mathbb{R}^p$ und $\psi : F \to X \times \mathbb{R}^q$. Dann kann man $\varphi \times_X \psi : E \oplus F \to X \times \mathbb{R}^{p+q}$ definieren durch

$$\varphi \times_X \psi(v,w) := (x, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(v), \mathrm{pr}_2 \circ \psi(w)) \text{ für } (v,w) \in E_x \oplus F_x.$$

Das induziert auf $E \oplus F$ eine Bündelstruktur, so dass $\varphi \times_X \psi$ ein VB-Isomorphismus ist.

3) Es seien $\widetilde{\varphi} : E \to X \times \mathbb{R}^p$ und $\widetilde{\psi} : F \to X \times \mathbb{R}^q$ andere Trivialisierungen. Dann gibt es differenzierbare Abbildungen $g_1 : X \to \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ und $g_2 : X \to \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ mit

$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(x, \mathbf{v}^\top) = (x, g_1(x) \bullet \mathbf{v}^\top) \quad \text{und} \quad \widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}(x, \mathbf{w}^\top) = (x, g_2(x) \bullet \mathbf{w}^\top),$$

und es gilt:

$$(\widetilde{\varphi} \times_X \widetilde{\psi}) \circ (\varphi \times_X \psi)^{-1}(x, (\mathbf{v}, \mathbf{w})^\top) = (x, \begin{pmatrix} g_1(x) & 0 \\ 0 & g_2(x) \end{pmatrix} \bullet (\mathbf{v}, \mathbf{w})^\top).$$

4) Sind E und F beliebige Vektorbündel, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)$ von X und Trivialisierungen $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^p$ und $\psi_\alpha : F|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^q$. Die Trivialisierungen $\varphi_\alpha \times_{U_\alpha} \psi_\alpha$ liefern dann wegen (1), (2) und (3) die gewünschte Vektorbündel-Struktur auf $E \oplus F$.

Nach diesem Schema geht man immer vor, wenn man Vektorraum-Konstruktionen auf Bündel überträgt.