1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.0 Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$

Zur Erinnerung:

Eine ***Norm*** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum E ist eine Funktion $N : E \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $N(v) \geq 0$ für jedes $v \in E$, und $N(v) = 0 \iff v = 0$,
2. $N(\alpha\, v) = |\alpha| \cdot N(v)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in E$,
3. $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ für $v, w \in E$ (Dreiecks-Ungleichung).

Ein ***normierter Vektorraum*** ist ein Vektorraum E, auf dem eine Norm gegeben ist.

Ein typisches Beispiel ist die kanonische euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, gegeben durch $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$. Aber auch auf dem Raum $M_n(\mathbb{R})$ der n-reihigen quadratischen Matrizen haben wir eine solche Norm:

Für eine Matrix $A = \left(a_{ij} \,\middle|\, {\scriptstyle i=1,\ldots,n \atop j=1,\ldots,n} \right) \in M_n(\mathbb{R})$ setzen wir $\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$. Das ist nichts anderes als die gewöhnliche euklidische Norm von A in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Ist E ein Vektorraum mit einer Norm $\|\ldots\|_E$, so versteht man unter der (offenen) ***Kugel*** mit Radius r um x_0 die Menge

$$B_r(x_0) := \{x \in E \,:\, \|x - x_0\|_E < r\}.$$

Mit $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ sei das kanonische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dann gilt die „Ungleichung von Cauchy-Schwarz“:

$$|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2 .$$

Definition

Seien E, F zwei endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Normen $\|\ldots\|_E$ bzw. $\|\ldots\|_F$, sowie $f : E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann nennen wir

$$\|f\|_{\text{op}} := \sup\{\|f(x)\|_F \,:\, \|x\|_E \leq 1\}$$

die ***Operator-Norm*** von f.

1.0.1. Satz

Die Operator-Norm ist eine Norm, und für $x \in E$ ist $\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_E$. Ist $g : H \to E$ eine weitere lineare Abbildung, so ist $\|f \circ g\|_{\text{op}} \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|g\|_{\text{op}}$.

Beweis: 1) Offensichtlich ist stets $\|f\|_{\text{op}} \geq 0$ und $\|f\|_{\text{op}} = 0 \iff f = 0$.

2) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\|\alpha f\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|(\alpha f)(x)\|_F = |\alpha| \cdot \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = |\alpha| \cdot \|f\|_{\text{op}}$.

3) Es ist

$$\|f+g\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|(f+g)(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \big(\|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F\big) \leq \|f\|_{\text{op}} + \|g\|_{\text{op}}.$$

4) Ist $x \neq 0$ ein beliebiger Vektor, so ist

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|f\Big(\frac{x}{\|x\|_E}\Big)\|_F \leq \|f\|_{\text{op}}, \text{ also } \|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_E.$$

5) Es ist $\|f \circ g\|_{\text{op}} = \sup_{\|u\|_H \leq 1} \|f(g(u))\|_F \leq \sup_{\|u\|_H \leq 1} \|f\|_{\text{op}} \cdot \|g(u)\|_E = \|f\|_{\text{op}} \cdot \|g\|_{\text{op}}$. ∎

Jede Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $f_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^\top$.[1] Ist $n = m$, so kann man $\|A\|_{\text{op}} := \|f_A\|_{\text{op}}$ setzen und zeigen, dass $\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|$ ist.

Eine Teilmenge $U \subset E$ heißt ***offen***, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Kugel $B_\varepsilon(x)$ ganz in U enthalten ist. Eine Funktion $f : U \to F$ heißt ***stetig*** in $x_0 \in U$, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \text{ so dass } f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \text{ ist.}$$

Definition

Seien E und F zwei endlich-dimensionale normierte Vektorräume, $U \subset E$ offen und $x_0 \in U$. Eine Funktion $f : U \to F$ heißt ***differenzierbar*** in x_0, falls es eine Abbildung $\Delta : U \to \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ gibt, so dass gilt:

1. $f(x) = f(x_0) + \Delta(x)(x - x_0)$ für alle $x \in U$.
2. Δ ist stetig in x_0.

Die lineare Abbildung $Df(x_0) := \Delta(x_0) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ heißt die ***(totale) Ableitung*** von f in x_0.

[1] Ich verwende vorwiegend Zeilenvektoren. In Spaltenschreibweise hätte man hier die Zuordnung $\mathbf{x}^\top \mapsto A \cdot \mathbf{x}^\top$.

Die Ableitung ist eindeutig bestimmt: Gibt es zwei Darstellungen

$$f(x) - f(x_0) = \Delta_1(x)(x - x_0) = \Delta_2(x)(x - x_0),$$

so ist $\big(\Delta_1(x) - \Delta_2(x)\big)(x - x_0) \equiv 0$. Sei $v \in E$ beliebig gewählt. Für $x = x_0 + tv$ ist dann

$$t \cdot \big(\Delta_1(x)(v) - \Delta_2(x)\big)(v) \equiv 0,$$

woraus für $t \neq 0$ folgt: $\Delta_1(x_0 + tv)(v) = \Delta_2(x_0 + tv)(v)$. Lässt man t gegen Null gehen, so folgt aus der Stetigkeit der Δ_i: $\Delta_1(x_0)(v) = \Delta_2(x_0)(v)$. Da das für alle $v \in E$ gilt, ist $\Delta_1(x_0) = \Delta_2(x_0)$.

Ist $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$, so kann man eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezüglich der Standardbasen durch eine Matrix A beschreiben, so dass $L = f_A$ ist. Es ist dann $A = \big(a_{ij} \,:\, i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n\big)$ mit $a_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet L(\mathbf{e}_j)$, denn es gilt:

$$\mathbf{e}_i \bullet L(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \bullet (\mathbf{e}_j \cdot A^\top) = \mathbf{e}_i \cdot A \cdot \mathbf{e}_j^\top = \mathbf{e}_i \cdot (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^\top = a_{ij}.$$

Im Falle einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ (mit einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$) wird dementsprechend die Ableitung $Df(\mathbf{x}_0)$ durch eine Matrix, die ***Jacobi-Matrix*** oder ***Funktionalmatrix*** $J_f(\mathbf{x}_0)$ beschrieben.

Die Vektoren

$$D_j f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{x_j}(\mathbf{x}_0) := Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) \in \mathbb{R}^m$$

nennt man die ***partiellen Ableitungen*** von f in $\mathbf{x}_0$.

Schreibt man $f = (f_1, \ldots, f_m)$ und $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$, so sieht man, dass $Df_i(\mathbf{x}_0) = \Delta_i(\mathbf{x}_0)$ ist, für $i = 1, \ldots, m$, also $Df(\mathbf{x}_0) = \big(Df_1(\mathbf{x}_0), \ldots, Df_m(\mathbf{x}_0)\big)$.

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion, so ist

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \big(Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_1), \ldots, Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_n) = (f_{x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}_0)\big).$$

Diesen Vektor nennt man auch den ***Gradienten*** von f in $\mathbf{x}_0$ und bezeichnet ihn mit $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Allgemein ist

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten wieder eine differenzierbare Funktion $f : U \to F$ (mit $U \subset E$ offen). Ist $v \in E$, so nennt man $D_v f(x_0) := Df(x_0)(v) \in F$ die ***Richtungsableitung*** von f in x_0 in Richtung v.

1.0.2. Satz

Es ist $D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_0+tv) - f(x_0)\big)$.

Beweis: Es ist

$$f(x_0+tv) - f(x_0) = \Delta(x_0+tv)(tv) = t\cdot\Delta(x_0+tv)(v),$$

wegen der Stetigkeit von Δ in x_0 also

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_0+tv) - f(x_0)\big) = \lim_{t\to 0} \Delta(x_0+tv)(v) = \Delta(x_0)(v) = D_v f(x_0).$$

∎

Speziell gilt im $\mathbb{R}^n$: $D_{\mathbf{e}_j} f(\mathbf{x}_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, für $j = 1,\ldots,n$.

Existieren alle partiellen Ableitungen von f, so heißt f partiell differenzierbar. Eine total differenzierbare Funktion ist stetig und partiell differenzierbar. Eine partiell differenzierbare Funktion braucht weder stetig noch total differenzierbar zu sein.

1.0.3. Allgemeine Kettenregel

Seien E, F, H endlich-dimensionale normierte Vektorräume, $U \subset E$ offen, $f : U \to F$ in $x_0 \in U$ differenzierbar, $V \subset F$ offen, $f(U) \subset V$ und $g : V \to H$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : U \to H$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$D(g\circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

bzw. im Falle $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ und $H = \mathbb{R}^k$

$$J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0).$$

Ist $E = \mathbb{R}$ (also $\mathbf{f}$ ein differenzierbarer „Weg“) und $H = \mathbb{R}$ (also g eine skalare Funktion), so ist $g \circ \mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine skalare Funtion von einer Veränderlichen, also

$$(g\circ\mathbf{f})'(t_0) = \nabla g(\mathbf{f}(t_0)) \bullet \mathbf{f}'(t_0) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{x_\nu}(\mathbf{f}(t_0)) f'_\nu(t_0).$$

Ist $U \subset E$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt differenzierbar, so erhält man die abgeleitete Funktion $Df : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R})$ mit $Df : x \mapsto Df(x)$. Ist sie stetig, so nennt man f ***stetig differenzierbar***. Ist f partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen stetig, so folgt daraus, dass f stetig (total) differenzierbar ist.

1.0.4. Satz von der Umkehrabbildung

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist $\mathbf{x}_0 \in M$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ und $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so gibt es offene Umgebungen $U(\mathbf{x}_0) \subset M$ und $V(\mathbf{y}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

1. $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ *für alle* $\mathbf{x} \in U$.
2. $\mathbf{f} : U \to V$ *ist bijektiv.*
3. $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ *ist wieder differenzierbar.*
4. *Für* $\mathbf{x} \in U$ *und* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ist* $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$.

Die Definition höherer Ableitungen ist schwieriger.

Sei wieder E ein endlich-dimensionaler (normierter) $\mathbb{R}$-Vektorraum und $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}) = \{\lambda : E \to \mathbb{R} \text{ linear}\}$ der ***Dualraum*** von E. Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von E, so wird durch $\alpha^i(a_j) := \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ die ***duale Basis*** $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ definiert. Insbesondere ist $\dim(E) = \dim(E^*)$. Ist $E = \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ die Standardbasis und $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ die duale Basis. Dann ist $\varepsilon^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Ist E beliebig endlich-dimensional, aber mit einem Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$ versehen, so gibt es zu jeder Linearform $\lambda \in E^*$ einen eindeutig bestimmten Vektor $a \in E$, so dass $\lambda(x) = \langle a\, , \, x \rangle$ für alle $x \in E$ gilt.

Beweis: Für $a \in E$ wird auf jeden Fall durch $\lambda_a(x) := \langle a\, , \, x \rangle$ eine Linearform $\lambda_a \in E^*$ definiert. Die Zuordnung $a \mapsto \lambda_a$ liefert eine lineare Abbildung $F : E \to E^*$. Ist $\lambda_a = F(a) = 0$, so ist $\langle a\, , \, x \rangle = 0$ für alle $x \in E$, insbesondere $\langle a\, , \, a \rangle = 0$. Das kann nur sein, wenn $a = 0$ ist. Also ist F injektiv, und weil E und E^* die gleiche Dimension besitzen, muss F sogar ein Isomorphismus sein. ■

Wir bezeichnen den Raum der $\mathbb{R}$-bilinearen Abbildungen von $E \times E$ nach $\mathbb{R}$ mit $L_2(E, \mathbb{R})$ (Raum der ***Bilinearformen***).

1.0.5. Satz

Durch $\Phi(L)(v, w) := L(v)(w)$ wird ein Isomorphismus

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*) \to L_2(E, \mathbb{R})$$

definiert.

Beweis: Ist $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*)$, so ist die Zuordnung $(v, w) \mapsto L(v)(w)$ bilinear. Also haben wir zumindest eine Abbildung $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*) \to L_2(E, \mathbb{R})$.

Sind L_1, L_2 zwei lineare Abbildungen von E nach E^*, so ist

$$\begin{aligned}\Phi(L_1+L_2)(v,w) &= (L_1+L_2)(v)(w) \;=\; \big(L_1(v)+L_2(v)\big)(w)\\ &= L_1(v)(w)+L_2(v)(w) \;=\; \Phi(L_1)(v,w)+\Phi(L_2)(v,w),\end{aligned}$$

also $\Phi(L_1+L_2)=\Phi(L_1)+\Phi(L_2)$. Analog zeigt man, dass $\Phi(\alpha\cdot L)=\alpha\cdot\Phi(L)$ ist. Damit ist Φ linear.

Sei umgekehrt $b : E\times E\to\mathbb{R}$ eine Bilinearform. Ist $v\in E$ fest, so ergibt die Zuordnung $w\mapsto b(v,w)$ eine Linearform $\lambda_v^b\in E^*$. Durch $L_b(v):=\lambda_v^b$ erhält man eine lineare Abbildung $L_b : E\to E^*$, und durch $\Psi(b):=L_b$ eine Abbildung

$$\Psi : L_2(E,\mathbb{R})\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,E^*).$$

Nun sieht man:

$$\Phi(L_b)(v,w)=L_b(v)(w)=\lambda_v^b(w)=b(v,w),\ \text{ also } \Phi(L_b)=b,$$

und

$$\begin{aligned}\Psi\circ\Phi(L)(v)(w) &= L_{\Phi(L)}(v)(w) \;=\; \lambda_v^{\Phi(L)}(w)\\ &= \Phi(L)(v,w) \;=\; L(v)(w),\ \text{ also } \Psi\circ\Phi(L)=L.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass Φ bijektiv und damit ein Isomorphismus ist. ∎

Sei jetzt $U\subset E$ offen und $f : U\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn die abgeleitete Funktion

$$Df : U\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R})=E^*$$

in einem Punkt $x_0\in U$ erneut differenzierbar ist, dann ist $D(Df)(x_0)$ ein Element aus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,E^*)\cong L_2(E,\mathbb{R})$.

Im Falle $E=\mathbb{R}^n$ ist $Df(\mathbf{x})\in(\mathbb{R}^n)^*$ für jedes $\mathbf{x}\in U$ eine Linearform, deren Basisdarstellung wie folgt aussieht:

$$Df(\mathbf{x})=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x})\varepsilon^\nu.$$

Ist F ein k-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{b_1,\dots,b_k\}$ und $\mathbf{f} : U\to F$ eine differenzierbare Abbildung, so ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})=f_1(\mathbf{x})b_1+\cdots+f_k(\mathbf{x})b_k$ für $\mathbf{x}\in U$, mit differenzierbaren Funktionen $f_i : U\to\mathbb{R}$, und es folgt für $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,F)$:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})=\sum_{\mu=1}^{k}Df_\mu(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})b_\mu=\sum_{\mu=1}^{k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}(f_\mu)_{x_\nu}(\mathbf{x}_0)v_\nu\Big)b_\mu.$$

Das wenden wir auf die Bildung der 2. Ableitung, also der Ableitung von $\mathbf{f}=Df$ an: $D(Df)(\mathbf{x}_0)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,(\mathbb{R}^n)^*)$ ist gegeben durch

$$D(Df)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})(\mathbf{w})=\sum_{\mu=1}^{n}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}(f_{x_\mu})_{x_\nu}(\mathbf{x}_0)v_\nu\Big)w_\mu=\sum_{\nu,\mu}f_{x_\nu x_\mu}(\mathbf{x}_0)v_\nu w_\mu.$$

Die zugehörige Bilinearform $D^2 f(\mathbf{x}_0) := D(Df)(\mathbf{x}_0) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist also die Hesse-Form, die man von der Untersuchung lokaler Extremwerte her kennt. Es ist $D^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot H_f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{w}^\top$, mit $H_f(\mathbf{x}) = \big(f_{x_\nu x_\mu}(\mathbf{x}) \;\big|\; \nu, \mu = 1, \ldots, n\big)$.

Die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ wird mit $\mathscr{C}^1(U)$ bezeichnet. Induktiv definiert man für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ den Raum $\mathscr{C}^k(U)$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen und schließlich den Raum $\mathscr{C}^\infty(U)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf U. Man kann zeigen, dass f genau dann in $\mathscr{C}^k(U)$ liegt, wenn alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k existieren und stetig sind.

Eine Folgerung aus dem Umkehrsatz ist der Satz über implizite Funktionen. Dazu betrachten wir ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : G \to \mathbb{R}^m$, also ein System von m nichtlinearen Gleichungen für $k + m$ Variable. Die Gleichungen schaffen Abhängigkeiten zwischen den Variablen, und man kann versuchen, z.B. die Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ als differenzierbare Funktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_k$ darzustellen.

Den Satz der ersten k Variablen $x_1, \ldots, x_k$ fassen wir zu einem Vektor $\mathbf{x}$, den der folgenden m Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ zu einem Vektor $\mathbf{y}$ zusammen. Dann definieren wir:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{k+m}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right).$$

1.0.6. Satz über implizite Funktionen

Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sei das Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ gegeben. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ und die Matrix $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ regulär, so gibt es Umgebungen $U(\mathbf{x}_0)$, $V(\mathbf{y}_0)$ mit $U \times V \subset G$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{g} : U \to V$, so dass gilt:

1. $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.
2. *Für* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$ *gilt:* $\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

   Insbesondere ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ *für* $\mathbf{x} \in U$.
3. *Es ist* $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ *auf* U.

Der Satz über implizite Funktionen lässt sich immer anwenden, sobald eine m-reihige Unterdeterminante von $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ existiert, die nicht verschwindet. Nach einer Vertauschung der Koordinaten sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann wendet man den Satz an und bekommt eine implizite Funktion. Anschließend macht man die Koordinatenvertauschung rückgängig.

Wir nennen ein beschränktes Gebiet $P \subset \mathbb{R}^n$ ein ***Parametergebiet***, falls jeder Randpunkt von P auch ein Randpunkt von $\overline{P}$ ist.

Definition

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein ***glattes p-dimensionales parametrisiertes Flächenstück***, falls es ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\varphi}(P) = S$ gibt, so dass gilt:

1. $\boldsymbol{\varphi}$ ist injektiv.
2. $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = p$ für alle $\mathbf{u} \in P$.
3. Ist $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\mathbf{u}_\nu \in P$ eine Folge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$, so ist auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$.

Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset B$, $0 \le q < n$ und $p := n - q$.

M heißt eine p-dimensionale ***Untermannigfaltigkeit***, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_q : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

1. $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \,:\, f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_q(\mathbf{x}) = 0\}$.
2. Die Vektoren $\nabla f_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla f_q(\mathbf{x})$ sind in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M \cap U$ linear unabhängig.

Ist $p = n - 1$, so spricht man von einer ***Hyperfläche***.

1.0.7. Satz

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Teilmenge $M \subset B$ ist genau dann eine p–dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und einen Diffeomorphismus $\mathbf{F} : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{F}(U \cap M) = \{\mathbf{y} \in V \,:\, y_{p+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

Beweis:

1) Sei M eine Untermannigfaltigkeit und $U = U(\mathbf{x}_0)$ eine Umgebung, so dass $M \cap U = \{f_1 = \ldots = f_{n-p} = 0\}$ ist, $\nabla f_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla f_{n-p}(\mathbf{x})$ linear unabhängig. Nach geeigneter Nummerierung der Koordinaten ist $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, und die Funktionalmatrix von $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{n-p})$ hat die Gestalt

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) \;\Big|\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{**}}(\mathbf{x}) \right),$$

mit $\det\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{**}}(\mathbf{x}_0) \right) \neq 0$.

Wir definieren $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}) := (\mathbf{x}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}))$. Dann ist

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}) = \left(\begin{array}{c|c} E_{n-d} & \mathbf{O} \\ \hline \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{**}}(\mathbf{x}) \end{array} \right)$$

und $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Also ist $\mathbf{F}$ ein lokaler Diffeomorphismus und

$$\mathbf{F}(M \cap U) = \{(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^{**}) \in \mathbf{F}(U) \,:\, \mathbf{y}^{**} = \mathbf{0}\}.$$

2) Ist umgekehrt ein Diffeomorphismus $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, mit

$$\mathbf{F}^{-1}\big(\{\mathbf{y} \in V \,:\, y_{p+1} = \ldots = y_n = 0\}\big) = U \cap M,$$

so setzen wir $f_i := F_{p+i}$ für $i = 1, \ldots, n-p$. Dann ist $M = \{f_1 = \ldots = f_{n-p} = 0\}$, und da $J_{\mathbf{F}}$ regulär ist, sind $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{n-p}$ linear unabhängig. ∎

1.0.8. Satz

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M \cap U$ ein p-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück ist.

Beweis: 1) Es gebe eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0)$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-p} : U \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \,:\, f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_{n-p}(\mathbf{x}) = 0\}$.
2. $\nabla f_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla f_{n-p}(\mathbf{x})$ sind in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M \cap U$ linear unabhängig.

Sei $q := n - p$. Dann ist $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_q)$ eine stetig differenzierbare Abbildung von U nach $\mathbb{R}^q$. Ist $\mathbf{x}_0 \in M \cap U$, so gilt nach Voraussetzung $\operatorname{rg} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = q$. O.B.d.A. kann man annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} (f_1)_{x_{p+1}}(\mathbf{x}_0) & \cdots & (f_1)_{x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_q)_{x_{p+1}}(\mathbf{x}_0) & \cdots & (f_q)_{x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

ist. Setzen wir $\mathbf{x}' := (x_1, \ldots, x_p)$ und $\mathbf{x}'' := (x_{p+1}, \ldots, x_n)$, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0') \subset \mathbb{R}^p$, eine Umgebung $V = V(\mathbf{x}_0'') \subset \mathbb{R}^q$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{g} : U \to V$, so dass $(U \times V) \cap M = \{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in U \times V \,:\, \mathbf{x}'' = \mathbf{g}(\mathbf{x}')\}$ ist. Durch $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}') := (\mathbf{x}', \mathbf{g}(\mathbf{x}'))$ gewinnt man eine lokale Parametrisierung von M in $\mathbf{x}_0$.

2) Sei umgekehrt $P \subset \mathbb{R}^p$ ein Parametergebiet und $\boldsymbol{\varphi} : P \to U \cap M$ eine glatte Parametrisierung. Dann ist $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = p$ für $\mathbf{u} \in P$. Ist $\mathbf{u}_0 \in P$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so kann man die Koordinaten geeignet wählen, so dass $\operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbb{R}^p \times \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ ist. Das bedeutet, dass $\det J_{\mathrm{pr}_1 \circ \boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) \neq 0$ ist.

Wir definieren $\mathbf{F} : P \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) + (\mathbf{0}, \mathbf{v})$. Für beliebiges $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ist dann

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \begin{pmatrix} J_{\mathrm{pr}_1 \circ \boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) & 0 \\ J_{\mathrm{pr}_2 \circ \boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) & 1 \end{pmatrix},$$

also $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \neq 0$. Das bedeutet, dass $\mathbf{F}$ ein lokaler Diffeomorphismus in $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ ist.

$\mathbf{F}$ bildet also insbesondere eine Umgebung $V = V(\mathbf{u}_0, \mathbf{0})$ diffeomorph auf eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0)$ (die o.B.d.A. mit der Umgebung U aus dem Satz übereinstimmt) ab. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(U \cap M) &= \mathbf{F}^{-1}\big(\{\mathbf{x} \in U \,:\, \exists\, \mathbf{u} \in P \text{ mit } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}\} \\ &= \mathbf{F}^{-1}\big(\{\mathbf{x} \in U \,:\, \exists\, \mathbf{u} \in P \text{ mit } \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \mathbf{x}\}\big) \\ &= \mathbf{F}^{-1}\Big(\mathbf{F}\big((P \times \{\mathbf{0}\}) \cap V\big)\Big) \;=\; (P \times \{\mathbf{0}\}) \cap V \\ &= \{\mathbf{y} \in V \,:\, y_{p+1} = \ldots = y_n = 0\}. \end{aligned}$$

■

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt ***relativ offen*** in M, falls es eine offene Menge $\widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $U = \widehat{U} \cap M$ ist. Unter der ***Relativtopologie*** auf M versteht man das System aller relativ offenen Teilmengen von M. Stetige Funktionen auf M bzw. stetige Abbildungen von M in einen $\mathbb{R}^k$ werden mit Hilfe dieser Relativtopologie erklärt. Eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung nennt man einen ***Homöomorphismus***.

Im $\mathbb{R}^n$ ist man gewohnt, Begriffe wie Stetigkeit eventuell auch mit Folgen zu beschreiben (Folgenkriterium für die Stetigkeit). Kommt jetzt die Relativtopologie ins Spiel, so kann man nur dann mit Folgen arbeiten, wenn es gelingt, Folgenkonvergenz allein mit Hilfe offener Mengen (also ohne Benutzung einer Norm) zu beschreiben. Das ist tatsächlich möglich: Eine Folge von Punkten $\mathbf{x}_\nu$ konvergiert (bezogen auf ein bestimmtes System $\mathscr{O}$ offener Mengen) gegen einen Punkt $\mathbf{x}_0$, wenn es zu jeder offenen Menge $W \in \mathscr{O}$ mit $\mathbf{x}_0 \in W$ ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathbf{x}_\nu \in W$ für alle $\nu \geq \nu_0$ gilt.

1.0.9. Satz

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Relativtopologie, $\mathbf{x}_0 \in M$, $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung und $\boldsymbol{\varphi} : P \to U \cap M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $\boldsymbol{\varphi}$ ein Homöomorphismus, also $\boldsymbol{\varphi}^{-1} : U \cap M \to P$ stetig.

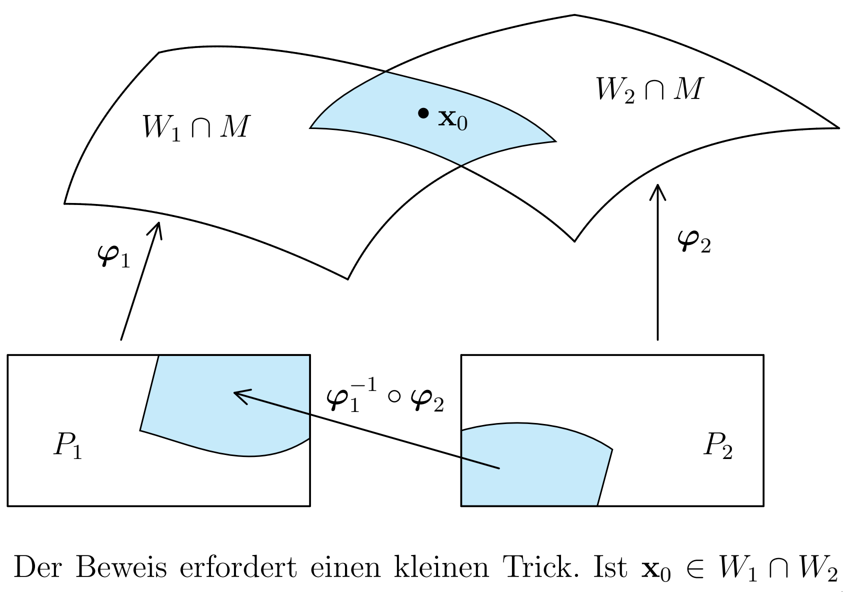
Beweis: Sei $\mathbf{y}_0 \in U \cap M$ beliebig vorgegeben und $\mathbf{y}_\nu$ eine Folge in $U \cap M$, die (in der Relativtopologie) gegen $\mathbf{y}_0$ konvergiert. Dann konvergiert sie offensichtlich auch in der gewöhnlichen Topologie des $\mathbb{R}^n$. Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\mathbf{u}_\nu \in P$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) = \mathbf{y}_\nu$, und es gibt ein $\mathbf{u}_0 \in P$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{y}_0$. Eigenschaft (3) des parametrisierten Flächenstücks besagt, dass $\mathbf{u}_\nu$ gegen $\mathbf{u}_0$ konvergiert. Weil $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}_\nu) = \mathbf{u}_\nu$ und $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{u}_0$ ist, ist damit alles gezeigt. ∎

1.0.10. Satz

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subset B$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. W_1, W_2 seien zwei offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $W_1 \cap W_2 \cap M \neq \varnothing$, so dass es lokale Parametrisierungen $\boldsymbol{\varphi}_1 : P_1 \to W_1 \cap M$ und $\boldsymbol{\varphi}_2 : P_2 \to W_2 \cap M$ gibt. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2 : \boldsymbol{\varphi}_2^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap M) \to \boldsymbol{\varphi}_1^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap M)$$

ein Diffeomorphismus.



Beweis: Der Beweis erfordert einen kleinen Trick. Ist $\mathbf{x}_0 \in W_1 \cap W_2 \cap M$ und $\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so können wir annehmen, dass die ersten k Zeilen von $J_{\boldsymbol{\varphi}_1}(\mathbf{u}_0)$ linear unabhängig sind. Anschaulich bedeutet das, dass M in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ wie ein Graph über einem Gebiet G des $\mathbb{R}^k$ aussieht. Ist nämlich lokal $\boldsymbol{\varphi}_1 = (\mathbf{g}, \mathbf{h})$, mit

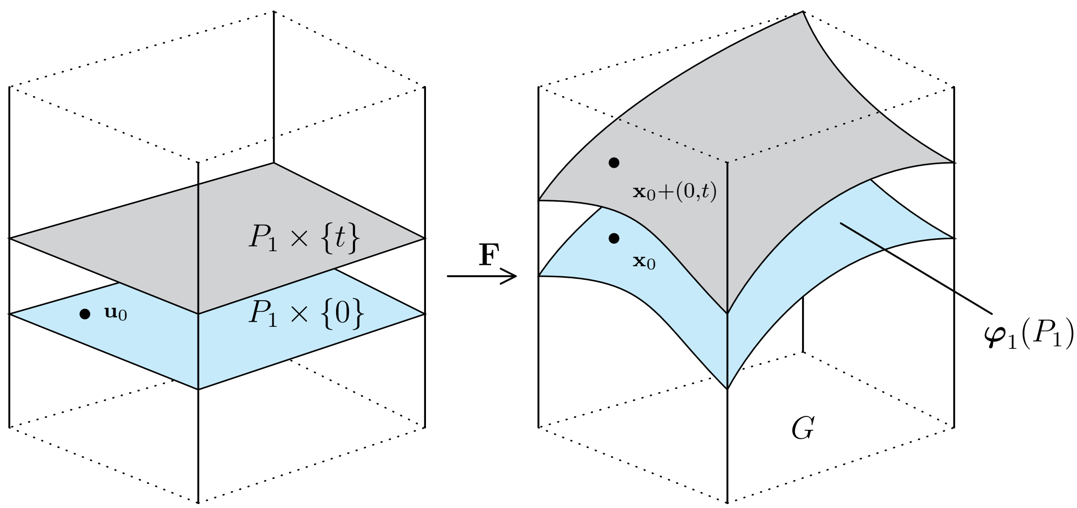
Werten in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ und invertierbarem $\mathbf{g}$, so ist $\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) = \big(\mathbf{w}', \mathbf{f}(\mathbf{w}')\big)$, mit $\mathbf{w}' = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ und $\mathbf{f} = \mathbf{h} \circ \mathbf{g}^{-1}$.

Wir definieren $\mathbf{F} : P_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) := \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) + (\mathbf{0}, \mathbf{t})$.

Dann bildet $\mathbf{F}$ die Schichten $P_1 \times \{\mathbf{t}\}$ auf entsprechend verschobene Exemplare von $\boldsymbol{\varphi}_1(P_1)$ ab. Es ist $\mathbf{F}(\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$ und

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) = \left(J_{\boldsymbol{\varphi}_1}(\mathbf{u}_0) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ E_{n-k} \end{matrix} \right),$$

also $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) \neq 0$. Das bedeutet, dass $\mathbf{F}$ eine offene Umgebung $U \times U^*$ von $(\mathbf{u}_0, \mathbf{0})$ diffeomorph auf eine offene Umgebung W von $\mathbf{x}_0$ abbildet. Dabei kann man U so klein wählen, dass $W \cap M$ in $W_1 \cap W_2 \cap M$ enthalten ist.



Es gibt einen Punkt $\mathbf{v}_0 \in P_2$ mit $\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v}_0) = \mathbf{x}_0$. Da $\boldsymbol{\varphi}_2$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung V von $\mathbf{v}_0$ in P_2 mit $\boldsymbol{\varphi}_2(V) \subset W$. Die Abbildung $\mathbf{F}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2 : V \to U \times U^*$ ist stetig differenzierbar und bildet V nach $P_1 \times \{\mathbf{0}\}$ ab. Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein $\mathbf{u} \in P_1$ mit $\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v})$, und dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v}) &= \mathbf{F}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \;=\; (\mathbf{u}, \mathbf{0}) \\ &= (\boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v}), \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2$ auf V stetig differenzierbar ist. Und genauso zeigt man, dass $\boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1$ stetig differenzierbar ist. ∎

Definition

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion $h : M \to \mathbb{R}$ heißt ***differenzierbar***, falls $h \circ \boldsymbol{\varphi}$ für jede Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi}$ differenzierbar ist.

Diese Definition ist nach dem obigen Satz unabhängig von der Parametrisierung. Ist nämlich $f \circ \boldsymbol{\varphi}$ differenzierbar und $\boldsymbol{\psi}$ eine andere Parametrisierung, so ist auch $f \circ \boldsymbol{\psi} = (f \circ \boldsymbol{\varphi}) \circ (\boldsymbol{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\psi})$ differenzierbar.

Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\boldsymbol{\varphi} : P \to U \cap M$ eine lokale Parametrisierung, so nennt man $\xi := \boldsymbol{\varphi}^{-1} : U \cap M \to P$ ein ***Koordinatensystem*** für M. Schreibt man $\xi = (x_1, \ldots, x_k)$, so heißen die Funktionen $x_i : U \cap M \to \mathbb{R}$ ***Koordinatenfunktionen***. Sie sind natürlich allesamt differenzierbare Funktionen.

1.0.11. Beispiele

A. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar und $M := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times \mathbb{R}^k : \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$ der Graph von f. Wir definieren $F : U \times \mathbb{R}^k \to U \times \mathbb{R}^k$ durch $F\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}\big) := \big(\mathbf{x}, \mathbf{y} - f(\mathbf{x})\big)$. Dann ist F ein Diffeomorphismus mit $F^{-1}\big(\mathbf{v}, \mathbf{w}\big) = \big(\mathbf{v}, \mathbf{w} + f(\mathbf{v})\big)$. Außerdem ist $F(M) = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \,:\, \mathbf{w} = \mathbf{0}\}$. Damit ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Hier kommt man mit einer einzigen Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : U \to M$ (mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$) und damit auch mit einem einzigen Koordinatensystem aus.

B. $S^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ist die n-dimensionale Einheits-Sphäre. Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$. Dann ist $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \,:\, f(\mathbf{x}) = 0\}$. Weil $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ist, liegt eine Untermannigfaltigkeit vor.

Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \,:\, x_i > 0\} \\ \text{und} \quad U_i^- &:= \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \,:\, x_i < 0\}. \end{aligned}$$

Jeder Punkt auf der Sphäre liegt in einer der Mengen U_i^+ oder U_i^-. Sei $B := B_1(\mathbf{0})$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{\varphi}_i^\pm : B \to U_i^\pm$ definiert durch

$$\boldsymbol{\varphi}_i^\pm(u_1, \ldots, u_n) := (u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|\mathbf{u}\|^2}, u_i, \ldots, u_n).$$

Dann ist $\boldsymbol{\varphi}_i^\pm$ eine lokale Parametrisierung (klar, weil ein Graph parametrisiert wird). Als Koordinatensystem erhält man also $\xi_i^\pm : U_i^\pm \to B$ mit

$$\xi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) := (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}),$$

wobei das Dach bedeutet, dass der i-te Eintrag weggelassen wird.

Ein Wechsel von Parametrisierungen sieht z.B. (im Falle $j < i$) folgendermaßen aus:

$$\big(\boldsymbol{\varphi}_i^\pm\big)^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_j^\pm(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, \widehat{u_j}, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|\mathbf{u}\|^2}, u_i, \ldots, u_n).$$

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{x}_0 \in M$. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt ***Tangentialvektor*** an M im Punkte $\mathbf{x}_0$, falls es ein $\varepsilon > 0$ und einen stetig differenzierbaren Weg $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Die Spur von $\boldsymbol{\alpha}$ liegt ganz in M.
2. Es ist $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$.

1.0.12. Charakterisierung von Tangentialvektoren

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{x}_0 \in M$. Es sei $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung, so dass gilt:

a) Es gibt eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ mit $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0}) = U \cap M$ und $\operatorname{rg}(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = n - p$ für alle $\mathbf{x} \in U \cap M$.

b) Es gibt ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\varphi}(P) = U \cap M$.

Dann sind die folgenden Aussagen über einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ äquivalent:

1. *$\mathbf{v}$ ist ein Tangentialvektor an M im Punkte $\mathbf{x}_0$.*
2. *$\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.*
3. *$\mathbf{v} \in \operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $\mathbf{v}$ ein Tangentialvektor an M in $\mathbf{x}_0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und einen stetig differenzierbaren Weg $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, dessen Spur ganz in M liegt, so dass $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$ ist. Insbesondere ist dann $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv 0$ und $0 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$, also $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Weil $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{0}$ ist, also $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \circ D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = 0$, ist $\operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) \subset \operatorname{Ker} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Definitionsgemäß ist

$$\dim \operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) = p$$

und

$$\dim \operatorname{Ker} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = n - \operatorname{rg} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = n - (n - p) = p.$$

Daraus folgt, dass $\operatorname{Ker} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$ ist. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ liegt also auch in $\operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Sei $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$. Dann gibt es einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ mit $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Nun sei $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\boldsymbol{\alpha}(t) := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{w})$.

Dann liegt die Spur von $\boldsymbol{\alpha}$ in M, es ist $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Also ist $\mathbf{v}$ ein Tangentialvektor an M in $\mathbf{x}_0$. ∎

Bemerkung: Wir haben insbesondere gezeigt, dass die Tangentialvektoren an eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ (in einem beliebigen Punkt von M) einen p-dimensionalen Vektorraum bilden. Die anschauliche „Tangentialebene" in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ ist i.a. kein Vektorraum, sondern ein affiner Raum. Den Vektorraum der Tangentialvektoren in $\mathbf{x}_0$ erhält man, indem man die anschauliche Tangentialebene in den Nullpunkt verschiebt.

Definition

Den Vektorraum $T_{\mathbf{x}}(M)$ der Tangentialvektoren an M in $\mathbf{x}$ nennt man den ***Tangentialraum*** von M in $\mathbf{x}$.

1.0.13. Beispiele

A. Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Parametergebiet. Die identische Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) := \mathbf{u}$ kann man als Parametrisierung einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit auffassen. Deshalb ist $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

B. Im Falle der Sphäre $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, f(\mathbf{x}) = 0\}$ mit $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2 - 1$ ist

$$T_{\mathbf{x}_0}(S^n) = \operatorname{Ker} Df(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{v} \,:\, \mathbf{x}_0 \bullet \mathbf{v} = 0\}.$$

C. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$M := \{(\mathbf{x}, t) \in U \times \mathbb{R} \,:\, t = g(\mathbf{x})\}$$

der Graph von g und $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$ die Parametrisierung von M, so ist

$$T_{(\mathbf{x}_0, z_0)}(M) = \operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \{(\mathbf{v}, \nabla g(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\},$$

für $\mathbf{x}_0 \in U$ und $z_0 := g(\mathbf{x}_0)$.

D. Für das nächste Beispiel brauchen wir noch eine Differentiationsregel.

Sei $\boldsymbol{\Phi} : E \times E \to F$ eine bilineare Abbildung. Man kann auch für $\boldsymbol{\Phi}$ eine Operator-Norm einführen:

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\text{op}} := \sup\{\|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \,:\, \|\mathbf{x}\| \le 1 \text{ und } \|\mathbf{y}\| \le 1\}.$$

Setzt man $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| := \max(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|)$, so ist dies eine Norm auf $E \times E$, und für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ gilt:

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \le \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\text{op}} \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \le \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\text{op}} \cdot |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2.$$

Sei nun $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in E \times E$ ein fester Punkt. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) &= \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}-\mathbf{y}_0) \\ &= \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}-\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{y}-\mathbf{y}_0).\end{aligned}$$

Die Abbildung $L : E \times E \to F$ mit

$$L(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \mathbf{\Phi}(\mathbf{v},\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{w})$$

ist linear! Und für die Abbildung r mit $r(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \mathbf{\Phi}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ gilt die Beziehung

$$\lim_{(\mathbf{u},\mathbf{v})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{r(\mathbf{u},\mathbf{v})}{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|} = 0.$$

Daher ist $\mathbf{\Phi}$ in $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ differenzierbar, und

$$D\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{v},\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{w})\,.$$

Ist nun $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und sind $\mathbf{f},\mathbf{g} : B \to E$ zwei differenzierbare Abbildungen, so ist auch $\mathbf{\Phi} \circ (\mathbf{f},\mathbf{g}) : B \to F$ differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}D(\mathbf{\Phi}\circ(\mathbf{f},\mathbf{g}))(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) &= D\mathbf{\Phi}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0),\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \circ D(\mathbf{f},\mathbf{g})(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{\Phi}(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}),\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0),D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Produktregel. Haben f und g Werte in $\mathbb{R}$ und ist $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\Phi(x,y) := xy$, so erhält man die Beziehung

$$D(f\cdot g)(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\cdot Dg(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\cdot Df(\mathbf{x}_0)\,.$$

Wir betrachten jetzt die Menge

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A\cdot A^\top = E_n\},$$

die sogenannte ***orthogonale Gruppe***. Außerdem sei

$$\mathrm{Sym}(n) := \{B \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, B^\top = B\}$$

der Vektorraum der *symmetrischen* Matrizen (mit der Dimension $n(n+1)/2$). Definiert man $\mathbf{f} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n)$ durch $\mathbf{f}(A) := A\cdot A^\top - E_n$, so ist $O(n) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0})$.

Die Abbildung $\mathbf{\Phi} : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ mit $\mathbf{\Phi}(A,B) := A\cdot B$ ist bilinear. Weil $\mathbf{\Phi}$ differenzierbar mit $D\mathbf{\Phi}(A_0,B_0)(X,Y) = \mathbf{\Phi}(X,B_0) + \mathbf{\Phi}(A_0,Y)$ und $A \mapsto A^\top$ linear ist, folgt:

$$D\mathbf{f}(A_0)(Z) = \mathbf{\Phi}(Z,A_0^\top) + \mathbf{\Phi}(A_0,Z^\top) = Z\cdot A_0^\top + A_0\cdot Z^\top.$$

Die Ableitung $D\mathbf{f}(A_0) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n)$ ist surjektiv. Ist nämlich eine symmetrische Matrix S gegeben, so können wir $Z := \frac{1}{2}S\cdot A_0$ setzen. Dann ist tatsächlich

$$D\mathbf{f}(A_0)(Z) = \frac{1}{2}[S \cdot A_0 \cdot A_0^\top + A_0 \cdot A_0^\top \cdot S^\top] = S\,.$$

Also ist $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$, ihre Dimension beträgt

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Der Tangentialraum an $O(n)$ ist im Punkte $A_0 = E_n$ besonders leicht zu berechnen. Es ist

$$T_{E_n}(O(n)) = \operatorname{Ker} D\mathbf{f}(E_n) = \operatorname{Ker}(Z \mapsto Z + Z^\top) = \{Z \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, Z^\top = -Z\}.$$

Das ist der Vektorraum der *schiefsymmetrischen* Matrizen, er hat offensichtlich die Dimension $n(n-1)/2$.

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir noch an den Existenz- und Eindeutgkeitssatz für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erinnern. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer ***Lösung*** der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

versteht man bekanntlich eine Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^k$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \,:\, t \in I\}$ liegt in G.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist differenzierbar, und es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ auf I.

Die Lösung heißt ***maximal***, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt.

In der obigen Situation genügt $\mathbf{F}$ einer ***Lipschitz-Bedingung*** mit Lipschitz-Konstante k, falls gilt:

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2)\| \le k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

$\mathbf{F}$ genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung gibt, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung genügt. Das ist z.B. der Fall, wenn $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar ist.

1.0.14. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Genügt $\mathbf{F}$ auf G lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass auf $I := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ existiert.

1.1 Topologische Räume

Definition

Sei X eine beliebige Menge. Unter einer ***Topologie*** auf X versteht man ein Sytem $\mathscr{O}$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

1. X und $\varnothing$ gehören zu $\mathscr{O}$.
2. Der Durchschnitt von endlich vielen Elementen von $\mathscr{O}$ gehört wieder zu $\mathscr{O}$.
3. Die Vereinigung von beliebig vielen Elementen von $\mathscr{O}$ gehört wieder zu $\mathscr{O}$.

Die Elemente von $\mathscr{O}$ bezeichnet man als ***offene Mengen***. Die Menge X, versehen mit einer Topologie, nennt man einen ***topologischen Raum***.

Eine Menge $W \subset X$ heißt ***Umgebung*** von $x \in X$, falls es eine offene Menge U mit $x \in U$ und $U \subset W$ gibt. Die Elemente von X nennt man ***Punkte***.

1.1.1. Beispiele

A. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (ein Beispiel ist der Raum $X = \mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$).

Ist $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$, so nennt man

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \,:\, d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

eine ε***-Umgebung*** von x_0. Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, falls es zu jedem Punkt $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x)$ ganz in U liegt.

a) Offensichtlich sind $\varnothing$ und X offen in X.

b) Seien U und V offen in X. Ist $x_0 \in U \cap V$, so gibt es Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so dass $U_{\varepsilon_1}(x_0) \subset U$ und $U_{\varepsilon_2}(x_0) \subset V$ ist. Setzt man $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so liegt $U_\varepsilon(x_0)$ in $U \cap V$.

c) Sei $(U_\iota)_{\iota \in I}$ ein System von offenen Mengen in X. Ist $x_0 \in U := \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$, so gibt es ein $\iota_0 \in I$, so dass x_0 in U_{ι_0} liegt. Dann gibt es auch ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0)$ in U_{ι_0} und damit erst recht in U enthalten ist. Also ist U offen.

Also ist jeder metrische Raum X auch ein topologischer Raum.

B. Sei X eine beliebige Menge und $\mathscr{O} := \{\varnothing, X\}$. Offensichtlich ist $\mathscr{O}$ eine Topologie auf X (man spricht von der „Klumpen-Topologie“). Das zeigt, dass es auf ein und derselben Menge ganz unterschiedliche Topologien geben kann.

C. Sei $X = \mathbb{C}$. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt Zariski-offen, falls sie leer ist oder ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus U$ höchstens endlich viele Punkte enthält.

Weil $(\mathbb{C} \setminus M_1) \cap (\mathbb{C} \setminus M_2) = \mathbb{C} \setminus (M_1 \cup M_2)$ und $\bigcup_{\iota \in I}(\mathbb{C} \setminus M_\iota) = \mathbb{C} \setminus \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$ ist, folgt ganz offensichtlich, dass die Zariski-offenen Mengen eine Topologie auf $\mathbb{C}$ bilden, die man auch als ***Zariski-Topologie*** bezeichnet.

D. Sei X eine beliebige Menge und $\mathscr{O} := P(X)$ die Potenzmenge von X. Das ergibt einen topologischen Raum, in dem jede Menge offen ist. Man spricht von der ***diskreten Topologie***.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt ein ***Hausdorffraum***, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten von X disjunkte Umgebungen gibt.

Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum. Ist nämlich $x_1 \neq x_2$, so ist $d := d(x_1, x_2) > 0$. Wählt man dann $\varepsilon < d/2$, so ist $U_\varepsilon(x_1) \cap U_\varepsilon(x_2) = \varnothing$.

Andererseits ist $\mathbb{C}$ mit der Zariski-Topologie kein Hausdorffraum. Die Hausdorff-Eigenschaft hängt als nicht an der zugrunde liegenden Menge, sondern allein an der Topologie.

Die Hausdorff-Eigenschaft ist wichtig, wenn man mit Folgen arbeiten möchte. Ein Element $x_0 \in X$ ***Grenzwert*** einer Folge von Punkten $x_n \in X$, wenn es zu jeder Umgebung $U = U(x_0)$ ein n_0 gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ gilt. In einem Hausdorffraum ist der Grenzwert (wenn er existiert) eindeutig bestimmt: Sind nämlich x_0, y_0 beides Grenzwerte der Folge (x_n), so muss $x_0 = y_0$ sein, denn andernfalls gäbe es Umgebungen U von x_0 und V von y_0 mit $U \cap V = \varnothing$, obwohl doch beide Umgebungen fast alle x_n enthalten müssen.

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt ***abgeschlossen***, falls $X \setminus A$ offen ist.

1.1.2. Satz

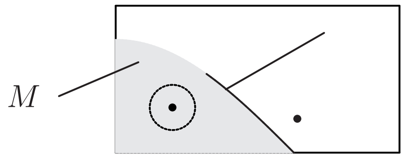
Die abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum X haben folgende Eigenschaften:

1. *X und $\varnothing$ sind abgeschlossen.*
2. *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen.*
3. *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen.*

Der Beweis ist trivial.

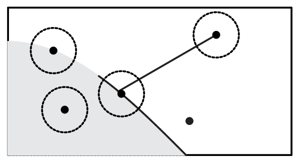
Sei jetzt X ein beliebiger topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge, sowie x_0 ein beliebiger Punkt von X.

1) x_0 heißt ***innerer Punkt*** von M, falls es eine Umgebung von x_0 gibt, die ganz in M liegt.



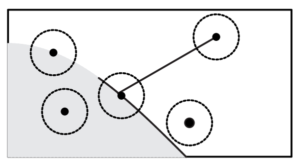
← innerer Punkt

2) x_0 heißt ***Häufungspunkt*** von M, falls für jede Umgebung U von x_0 gilt: $(U \setminus \{x_0\}) \cap M \neq \varnothing$.



← Häufungspunkte

3) x_0 heißt ***Berührungspunkt*** von M, falls jede Umgebung von x_0 wenigstens einen Punkt von M enthält.



← Berührungspunkte

Jeder innere Punkt ist auch ein Häufungspunkt, aber die Umkehrung gilt i.a. nicht. Jeder Häufungspunkt ist ein Berührungspunkt, aber nicht nicht unbedingt umgekehrt. Ein Berührungspunkt x_0 von M, der kein Häufungspunkt von M ist, besitzt eine Umgebung U, so dass $U \cap M = \{x_0\}$ ist. Dann nennt man x_0 einen ***isolierten Punkt*** von M.

Definition

Die Menge M° der inneren Punkte von M heißt ***offener Kern*** von M.

Die Menge $\overline{M}$ der Berührungspunkte von M heißt ***abgeschlossene Hülle*** von M.

Die inneren Punkte und isolierte Punkte von M gehören immer zu M. Für Häufungspunkte trifft das nicht unbedingt zu.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ besteht aus den Häufungspunkten und den isolierten Punkten von M. Also ist $\overline{M}$ die Vereinigung von M mit allen Häufungspunkten von M.

Definition

Die Menge $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt der ***Rand*** von M.

Ein Punkt x liegt also genau dann im Rand von M, wenn jede Umgebung von x sowohl M als auch $X \setminus M$ trifft. Es ist $M \cup \partial M = \overline{M}$ und $M \setminus \partial M = M^\circ$.

1.1.3. Beispiele

A. Ist $M = [a, b) \subset \mathbb{R}$, so ist $M^\circ = (a, b)$, $\overline{M} = [a, b]$ und $\partial M = \{a, b\}$.

B. Sei $M = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $M^\circ = \varnothing$, $\overline{M} = [a, b]$ und $\partial M = [a, b]$.

Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***stetig*** in $x_0 \in X$, falls es zu jeder Umgebung $V = V(f(x_0)) \subset Y$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $f(U) \subset V$ gibt.

f heißt stetig auf X, falls f in jedem Punkt von X stetig ist. Ist f außerdem bijektiv und f^{-1} stetig, so spricht man von einem ***Homöomorphismus*** (oder einer ***topologischen Abbildung***).

Auf metrischen Räumen entspricht die Definition der Stetigkeit in einem Punkt dem üblichen ε-δ-Kriterium. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen beliebigen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ auch $f^{-1}(V)$ offen in X ist.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt ***zusammenhängend***, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen zerlegen lässt.

X heißt ***wegzusammenhängend***, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg (also eine stetige Abbildung) $\alpha : [0, 1] \to X$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$ gibt.

1.1.4. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: Wir können annehmen, dass f surjektiv und $f(X) = Y$ ist. Sei $Y = Y_1 \cup Y_2$ eine disjunkte Zerlegung in zwei offene Teilmengen. Dann sind $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ und $X_2 = f^{-1}(Y_2)$ offen und disjunkt, und es ist $X_1 \cup X_2 = X$. Weil X zusammenhängend ist, muss eine der beiden Mengen X_1, X_2 leer sein, etwa X_1. Dann muss aber auch $Y_1 = \varnothing$ sein. Also ist Y zusammenhängend. ■

1.1.5. Satz

Ist ein topologischer Raum wegzusammenhängend, so ist er auch zusammenhängend.

Beweis: Sei X wegzusammenhängend und $X = X_1 \cup X_2$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen. Sind X_1 und X_2 beide nicht leer, so gibt es Punkte $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$. Nach Voraussetzung gibt es einen Verbindungsweg $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = x_1$ und $\alpha(1) = x_2$.

Weil $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist auch $|\alpha| := \alpha([0,1])$ zusammenhängend. Aber durch $|\alpha| = (|\alpha| \cap X_1) \cup (|\alpha| \cap X_2)$ wird eine Zerlegung von $|\alpha|$ in zwei disjunkte (relativ) offene und nicht-leere Teilmengen gegeben. Das kann nicht sein. ∎

Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Definition

Ein topologischer Raum heißt ***kompakt***, falls er ein Hausdorffraum ist und jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

1.1.6. Hilfssatz

Sei X ein topologischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann ist K auch abgeschlossen. Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A auch kompakt.

Beweis: 1) Sei $x_0 \in X \setminus K$. Aus der Hausdorff-Eigenschaft folgt, dass es zu jedem $x \in K$ offene Umgebungen $U_x = U_x(x_0)$ und $V_x = V_x(x)$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$. Die Mengen V_x bilden eine offene Überdeckung von K. Da man mit endlich vielen Überdeckungselementen auskommt, liefert deren Vereinigung eine offene Umgebung von K, deren Durchschnitt mit der Umgebung $U = U(x_0)$, die man als Durchschnitt endlich vieler U_x erhält, leer ist. Also ist $U \subset X \setminus K$. Das bedeutet, dass $X \setminus K$ offen ist.

2) Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist $(U_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von A, so bilden die Mengen U_ι zusammen mit der Menge $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X. Wegen der Kompaktheit von X müssen schon endlich viele U_ι die Menge A überdecken. ∎

1.1.7. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_\iota)_{\iota \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Dann sind alle Mengen $U_\iota := f^{-1}(V_\iota)$ offen in X, und sie überdecken K. Endlich viele reichen schon aus: $K \subset U_{\iota_1} \cup \ldots \cup U_{\iota_N}$. Ist $y = f(x) \in f(K)$, so finden wir ein ν mit $x \in U_{\iota_\nu}$. Dass $U_{\iota_\nu} = f^{-1}(V_{\iota_\nu})$ ist, bedeutet aber, dass $f(x)$ in V_{ι_ν} liegt. Also wird $f(K)$ von $V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_N}$ überdeckt. ∎

Definition

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Ein System $\mathscr{U}$ von Umgebungen von x_0 heißt ***Umgebungsbasis*** von x_0, falls es zu jeder Umgebung $U = U(x_0)$ eine Umgebung $V \in \mathscr{U}$ mit $x_0 \in V \subset U$ gibt. Der Raum X erfüllt das ***1. Abzählbarkeitsaxiom***, falls jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Bemerkungen:

1. Jeder metrische Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Man wähle einfach die Umgebungen $U_{1/n}(x_0)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

2. Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom und ist Y ein beliebiger topologischer Raum, so ist $f : X \to Y$ genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) in X, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

   Beweis: 1) Sei f stetig in x_0 und (x_n) eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Sei V eine Umgebung von $f(x_0)$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$. Ist n_0 groß genug, so liegt x_n für $n \geq n_0$ in U, also $f(x_n)$ in V. Das zeigt, dass $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

   2) Nun sei das Kriterium erfüllt, V eine Umgebung von $f(x_0)$ und (U_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0. Wenn f in x_0 nicht stetig ist, dann gibt es in jedem Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset U_n$ ein x_n mit $f(x_n) \notin V$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x_0, aber $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x_0)$. Das ist ein Widerspruch. ∎

1.1.8. Satz

Sei X ein kompakter Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann besitzt jede unendliche Folge in X eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei (x_n) eine unendliche Folge in X. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, dass die x_n paarweise verschieden sind. Wir nehmen zunächst an, dass die Folge keinen Häufungspunkt besitzt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung $U_n = U_n(x_n)$, die außer x_n selbst keinen anderen Punkt der Folge enthält. Und natürlich gibt es zu jedem Punkt $x \in X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Umgebung $V_x = V_x(x)$, die keinen der Folgenpunkte enthält.

Die Mengen U_n und V_x bilden eine offene Überdeckung von X. Weil K kompakt ist, kommt man mit endlich vielen Überdeckungselementen aus. Aber andererseits kann man von den unendlich vielen Mengen U_n keine weglassen. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun x_0 ein Häufungspunkt der Folge. Ist (U_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0, so kann man in jedem Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ ein Element x_{n_k} der Folge finden. Das liefert eine Teilfolge, die gegen x_0 konvergiert. ■

1.1.9. Satz

Sei X ein beliebiger topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist (x_n) eine Folge in A, die gegen einen Punkt $x_0 \in X$ konvergiert, so gehört x_0 zu A.

Beweis: 1) Sei A abgeschlossen und (x_n) eine Folge in A, die gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert. Wenn x_0 in der offenen Menge $X \setminus A$ liegt, so gibt es eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X \setminus A$. Andererseits müssen die Punkte x_n für große n in U liegen. Das ist ein Widerspruch.

2) A erfülle das Kriterium. Wir müssen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Sei $x_0 \in X \setminus A$ und (U_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0. Wenn jede der Umgebungen U_n einen Punkt $x_n \in A$ enthält, dann gewinnt man eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Das bedeutet, dass x_0 in A liegen muss. Widerspruch! Also liegt eine komplette Umgebung von x_0 in $X \setminus A$. ■

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathscr{B}$ von offenen Teilmengen von X heißt ***Basis der Topologie*** von X, falls jede offene Menge in X Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$ ist. Der Raum X erfüllt das ***2. Abzählbarkeitsaxiom***, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

Erfüllt ein Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das erste. Die Umkehrung gilt nicht. Selbst metrische Räume brauchen das 2. Axiom nicht zu erfüllen. Sie tun dies aber, wenn sie eine abzählbare dichte Teilmenge enthalten (M ist dicht in X, wenn $\overline{M} = X$ ist). Insbesondere erfüllt der $\mathbb{R}^n$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so kann man Y mit der von X induzierten Relativtopologie versehen. Y heißt dann kompakt, falls Y in der Relativtopologie ein kompakter topologischer Raum ist.

Definition

Ein Hausdorffraum X heißt ***lokal-kompakt***, falls jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

1.1.10. Satz

Der Hausdorffraum X sei lokal-kompakt und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann gibt es eine Folge (K_n) von kompakten Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n \subset K_{n+1}^\circ$.*
2. *$X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Man spricht dann von einer „kompakten Ausschöpfung“.

BEWEIS: 1) Sei $\mathscr{B} = (B_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Basis von X, und

$$J := \{ i \in I \,:\, \overline{B}_i \text{ kompakt } \}.$$

Wir wollen zeigen, dass $(B_j)_{j \in J}$ immer noch eine Basis von X ist.

Dazu sei eine beliebige offene Menge $S \subset X$ vorgegeben. Ist $x \in S$, so gibt es eine offene Umgebung $W = W(x) \subset S$ und eine kompakte Menge K mit $W \subset K$ (weil X lokal-kompakt ist). Also ist $\overline{W}$ kompakt. Weiter ist W Vereinigung von gewissen Basis-Elementen $B_i \in \mathscr{B}$, $i \in I_0$. Weil dann $\overline{B}_i \subset \overline{W}$ für jedes $i \in I_0$ kompakt ist, gehören alle $i \in I_0$ zu J. Da S Vereinigung solcher W's ist, folgt die Behauptung.

2) Nach (1) gibt es eine abzählbare Basis $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von X, so dass $\overline{U}_i$ kompakt für jedes i ist. Wir setzen

$$K_1 := \overline{U}_1.$$

Ist K_n konstruiert und m_n die kleinste Zahl $\geq n+1$, so dass $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} U_i$ ist, so setzen wir

$$K_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{m_n} \overline{U}_i.$$

Die Mengen K_n sind dann kompakt und haben die gewünschten Eigenschaften. ∎

Wir kommen nun zu einem etwas komplizierteren Begriff. Betrachtet wird ein beliebiger topologicher Raum.

Seien $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ und $\mathscr{V} = (V_j)_{j \in J}$ zwei offene Überdeckungen von X. $\mathscr{V}$ heißt eine ***Verfeinerung*** von $\mathscr{U}$, falls es eine Abbildung $\tau : J \to I$ gibt, so dass $V_j \subset U_{\tau(j)}$ für alle $j \in J$ gilt.

Die Überdeckung $\mathscr{V} = (V_j)_{j \in J}$ heißt ***lokal-endlich***, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt, so dass $V_j \cap U$ nur für endlich viele Indizes $j \in J$ nicht leer ist.

Definition

Ein topologischer Raum heißt ***parakompakt***, falls er ein Hausdorffraum ist und jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

1.1.11. Satz

Sei X ein parakompakter topologischer Raum. Ist $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $x_0 \in X \setminus A$, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(x_0)$ und eine offene Menge V mit $A \subset V$ und $U \cap V = \varnothing$.

Beweis: Zu jedem Punkt $x \in A$ gibt es eine offene Umgebung $U_x = U_x(x)$ und eine offene Umgebung $V_x = V_x(x_0)$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$. Dann gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $(W_i)_{i \in I}$ der Überdeckung $\{X \setminus A\} \cup \{U_x : x \in A\}$ von X.

Sei V_0 eine Umgebung von x_0, die nur endlich viele W_i trifft, etwa $W_1, \ldots, W_N$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, N\}$ gibt es ein x_i mit $W_i \subset U_{x_i}$. Dann setze man

$$U := \bigcup_{\substack{i \in I \\ W_i \cap A \neq \varnothing}} W_i \quad \text{und} \quad V := V_0 \cap V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_N}.$$

Dann ist U eine offene Umgebung von A und V eine offene Umgebung von x_0, und nach Konstruktion ist $U \cap V = \varnothing$. ∎

Definition

Eine offene Menge V liegt ***relativ-kompakt*** in der offenen Menge U (in einem topologischen Raum X), falls $\overline{V}$ kompakt und in U enthalten ist. Man schreibt dann: $V \subset\subset U$.

1.1.12. Satz

Sei X ein lokal-kompakter topologischer Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist X parakompakt.

*Zu jeder offenen Überdeckung von X gibt es eine **abzählbare** lokal-endliche Verfeinerung, die aus **relativ-kompakten** offenen Teilmengen von X besteht.*

Beweis: Weil X lokal-kompakt ist und das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es eine Folge (K_n) von kompakten Teilmengen von X, so dass gilt:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$.
2. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Sei (U_i) eine offene Überdeckung von X. Die offenen Mengen

$$W_{i,n} := U_i \cap (K_{n+1}^\circ \setminus K_{n-2})$$

überdecken die kompakte Menge $K_n \setminus K_{n-1}^\circ$. Das erreicht man aber schon mit mit endlich vielen dieser Mengen, von denen jede in einem geeigneten U_i liegt. Außerdem überdecken die Mengen $W_i := U_i \cap K_3^\circ$ die kompakte Menge K_2, und auch von denen kann man endlich viele auswählen.

Es ist $K_2 \cup (K_3 \setminus K_2^\circ) \cup (K_4 \setminus K_3^\circ) \cup \ldots$. Nimmt man also die ausgewählten Mengen zusammen, so erhält man eine abzählbare Überdeckung von X, die eine Verfeinerung von (U_i) darstellt. Diese Überdeckung ist lokal-endlich, denn X ist disjunkte Vereinigung der offenen Mengen $K_n^\circ \setminus K_{n-1}$, und nur die Mengen $W_{i,n-1}$, $W_{i,n}$ und $W_{i,n+1}$ (von denen jeweils nur endlich viele als Überdeckungselemente ausgewählt wurden) liegen in $K_n^\circ \setminus K_{n-1}$.

Weil $W_{i,n}$ in der kompakten Menge K_{n+1} und W_i in K_3 liegt, liegen alle Überdeckungselemente relativ-kompakt in X. ■

1.1.13. Lemma

Sei X ein lokal-kompakter und parakompakter topologischer Raum. Ist $K \subset X$ kompakt und U eine offene Umgebung von K, so gibt es eine offene Umgebung W von K, die relativ-kompakt in U liegt.

Beweis: Weil X parakompakt ist, gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung $U_x = U_x(x)$ und eine offene Umgebung $V_x = V_x(X \setminus U)$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$. Weil X lokal-kompakt ist, gibt es außerdem eine offene Umgebung U'_x von x, so dass $\overline{U'_x}$ kompakt ist.

Sei $W_x := U_x \cap U'_x$. Dann ist W_x eine offene Umgebung von x, $\overline{W_x}$ kompakt und $W_x \cap V_x = \varnothing$. Die kompakte Menge K wird von endlich vielen Mengen $W_{x_1}, \ldots, W_{x_N}$ überdeckt. Sei $W := W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_N}$. Dann ist W eine offene Umgebung von K, $\overline{W}$ kompakt und $W \cap (V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_N}) = \varnothing$, also $\overline{W} \subset U$. ■

1.1.14. Satz

Sei X ein lokal-kompakter und parakompakter topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathscr{V} = (V_k)_{k \in K}$ mit einer Verfeinerungsabbildung $\tau : K \to I$, so dass V_k (für jedes $k \in K$) relativ-kompakt in $U_{\tau(k)}$ liegt.

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas kann man eine (beliebige) Verfeinerung $\mathscr{W} = (W_j)_{j \in J}$ mit einer Verfeinerungsabbildung $\sigma : J \to I$ finden, so dass W_j relativ-kompakt in $U_{\sigma(j)}$ liegt. Dann sei $\mathscr{V}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathscr{W}$. ■

Definition

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen lokal-kompakten topologischen Räumen heißt ***eigentlich***, falls mit jeder kompakten Teilmenge $K \subset Y$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

f heißt ***lokal eigentlich***, wenn es zu jedem $y \in Y$ eine kompakte Umgebung Q gibt, so dass $f^{-1}(Q)$ kompakt ist.

1.1.15. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen lokal-kompakten topologischen Räumen. Ist f lokal eigentlich, so bildet f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. Ist f außerdem noch injektiv und wird $f(X)$ mit der Relativtopologie von Y versehen, so ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus.

Beweis: 1) Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir zeigen, dass $\overline{f(A)} = f(A)$ ist. Dazu sei $z \in \overline{f(A)}$ beliebig vorgegeben. Da Y lokal-kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung $Q = Q(z) \subset Y$. Weil f lokal eigentlich ist, können wir annehmen, dass $f^{-1}(Q)$ ebenfalls kompakt ist. Weil A in X abgeschlossen ist, ist dann auch $f^{-1}(Q) \cap A$ kompakt, und daraus folgt, dass $f(f^{-1}(Q) \cap A)$ kompakt ist.

Offensichtlich ist $Q \cap f(A) = \{y \in Q : \exists\, x \in A \text{ mit } f(x) = y\} = f(f^{-1}(Q) \cap A)$. Der Punkt z liegt somit in $\overline{Q \cap f(A)} = Q \cap f(A) \subset f(A)$.

2) Sei f zusätzlich injektiv. Dann ist $f : X \to f(X)$ bijektiv, mit einer Umkehrung $g : f(X) \to X$. Weil $f(X)$ in Y abgeschlossen ist, ist jede (in der Relativtopologie) abgeschlossene Teilmenge von $f(X)$ abgeschlossen in Y.

Es ist zu zeigen, dass g stetig ist, dass also die Urbilder $g^{-1}(U)$ von offenen Teilmengen $U \subset X$ wieder offen sind. Wegen der Injektivität von f ist $g^{-1}(U) = f(U)$ und $f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U)$. Weil $A := X \setminus U$ abgeschlossen ist, folgt aus (1), dass auch $f(X) \setminus f(U)$ in $f(X)$ abgeschlossen und damit $f(U)$ relativ offen ist. Damit ist alles gezeigt. ∎