4.3 Anwendungen auf Differentialgleichungen

Die Laplace-Transformation wird gerne benutzt, um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

zu lösen, wobei die „Inhomogenität“ f höchstens exponentiell wachsen sollte. In der Regel werden die Startwerte $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ vorgeschrieben.

Die Laplacetransformation überführt die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung. Diese lässt sich lösen, und dann gelangt man dann durch Rücktransformation auch zu einer Lösung der Differentialgleichung.

Wir beginnen mit einer Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + ay = f(t), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(0) = A.$$

Man kann schrittweise vorgehen:

1. **Laplace-Transformation**

   Sei $y(t)$ eine Lösung, $Y(z) := \mathcal{L}[y(t)]$ und $F(z) := \mathcal{L}[f(t)]$. Wendet man auf beide Seiten der DGL die Laplace-Transformation an, so erhält man:

   $$(z \cdot Y(z) - y(0)) + a \cdot Y(z) = F(z),$$

   also

   $$(z + a) \cdot Y(z) - A = F(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

   Die gewonnene Gleichung wird nach $Y(z)$ aufgelöst:

   $$Y(z) = \frac{F(z) + A}{z + a}.$$

3. **Rücktransformation**

   Schließlich wird die Urbildfunktion $y(t)$ zu $Y(z)$ gesucht:

   $$\frac{F(z) + A}{z + a} \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; y(t).$$

Bemerkung: Die allgemeine Lösung der DGL setzt sich aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Das Verfahren der Laplace-Transformation liefert gleich die allgemeine Lösung, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

4.3.1. Beispiel

Wir betrachten die DGL $y'+2y=2t-4$, mit der Anfangsbedingung $y(0)=1$.

1. Schritt: Laplace-Transformation!

$$z\cdot Y(z)-1+2\cdot Y(z)=\mathcal{L}[2t-4]=2/z^2-4/z.$$

2. Schritt: Lösung im Bildbereich!

$$\begin{aligned}(z+2)\cdot Y(z)-1 &= 2/z^2-4/z,\\ \text{also}\quad Y(z) &= \frac{2}{z^2(z+2)}-\frac{4}{z(z+2)}+\frac{1}{z+2}.\end{aligned}$$

3. Schritt: Rücktransformation:

Hierfür benötigen wir die folgenden Partialbruchzerlegungen:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1/(a-b)}{z-a}-\frac{1/(a-b)}{z-b}$$

und

$$\frac{1}{z^2(z-a)}=\frac{-1/a^2}{z}+\frac{-1/a}{z^2}+\frac{1/a^2}{z-a}\,.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-2t}\,,\\ \frac{1}{z(z+2)}=\frac{1/2}{z}-\frac{1/2}{z+2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ \text{und}\quad \frac{1}{z^2(z+2)}=\frac{-1/4}{z}+\frac{1/2}{z^2}+\frac{1/4}{z+2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; -\frac{1}{4}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}e^{-2t}.\end{aligned}$$

So erhalten wir

$$Y(z)\bullet\!\!-\!\!\circ\; t-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}-2(1-e^{-2t})=t-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}e^{-2t}.$$

Im allgemeinen Fall überführen wir die DGL

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=f(t)$$

in die algebraische Gleichung

$$P(z)\cdot Y(z)-Q(z)=F(z)$$

über, wobei $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ das „charakteristische Polynom“ der DGL ist, $Q(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n-1$, dessen Koeffizienten sich aus den a_i und den Startwerten zusammensetzen, und $F(z)$ die Laplacetransformierte von f. Es folgt

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{F(z)}{P(z)}.$$

Durch Rücktransformation berechnen wir daraus $y(t)$. Setzen wir $u := \mathscr{L}^{-1}(1/P)$, so erhalten wir

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{Q(z)}{P(z)}\Big] + (u * f)(t).$$

Dabei ist Q/P rational, und die nötigen Methoden für die Rücktransformation haben wir schon gesehen. Die Berechnung von $u * f$ kann schwierig werden, lässt sich aber häufig vermeiden.

Wir betrachten nun eine DGL 2. Ordnung:

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad \text{mit Anfangswerten } y(0) = A \text{ und } y'(0) = B.$$

Auch hier gibt es die drei Schritte:

1. **Laplace-Transformation:**

$$(z^2 \cdot Y(z) - z \cdot A - B) + a \cdot (z \cdot Y(z) - A) + b \cdot Y(z) = F(z),$$

also $(z^2 + az + b) \cdot Y(z) - (z + a)A - B = F(z)$.

2. **Lösung im Bildbereich:** $Y(z) = \dfrac{F(z) + (z + a)A + B}{z^2 + az + b}$.

3. **Rücktransformation:**

Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall: Das charakteristische Polynom $P(z) = z^2 + az + b$ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen, d.h. es ist

$$P(z) = (z - s_1)(z - s_2) \quad \text{mit } s_1, s_2 \in \mathbb{R} \text{ und } s_1 \neq s_2.$$

Dann ist $a = -(s_1 + s_2)$, und es gilt:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \Big[\frac{1}{z - s_1} - \frac{1}{z - s_2}\Big] \bullet\!\!-\!\!\circ\; u(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \big(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\big).$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{z + a}{P(z)} &= \frac{z - s_1 - s_2}{(z - s_1)(z - s_2)} = \frac{1}{z - s_2} - \frac{s_2}{(z - s_1)(z - s_2)} \\
&= \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \Big[\frac{s_1 - s_2}{z - s_2} - \frac{s_2}{z - s_1} + \frac{s_2}{z - s_2}\Big] \\
&= \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \Big[\frac{s_1}{z - s_2} - \frac{s_2}{z - s_1}\Big] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \big[s_1\, e^{s_2 t} - s_2\, e^{s_1 t}\big].
\end{aligned}$$

Dann ist

$$y(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \Big[\big(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\big) * f(t) + (B - A s_2)\, e^{s_1 t} + (A s_1 - B)\, e^{s_2 t} \Big].$$

2. Fall: $P(z)$ besitzt ein relle Nullstelle mit Vielfachheit 2, d.h. es ist

$$P(z) = (z - s)^2 \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $a = -2s$, und es gilt:

$$\frac{z + a}{P(z)} = \frac{(z - s) - s}{(z - s)^2} = \frac{1}{z - s} - \frac{s}{(z - s)^2}\,,$$

also

$$Y(z) = \frac{F(z)}{P(z)} + \frac{A}{z - s} + \frac{(B - As)}{(z - s)^2}\,.$$

Bekannlich gilt $t\, e^{st} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\Big(\frac{1}{z - s}\Big)' = \frac{1}{(z - s)^2}$. Damit folgt:

$$y(t) = t\, e^{st} * f(t) + A\, e^{st} + (B - As)\, t\, e^{st}.$$

3. Fall: $P(z)$ besitzt eine komplexe (nicht-reelle) Nullstelle $s = \alpha + \mathbf{j}\,\beta$. Dann ist automatisch $\overline{s} = \alpha - \mathbf{j}\,\beta$ die zweite Nullstelle (weil $P(z)$ reelle Koeffizienten hat). Es ist

$$z^2 + az + b = (z - s)(z - \overline{s}) = z^2 - (s + \overline{s})z + s\overline{s}, \qquad \text{also } a = -(s + \overline{s}) = -2\alpha.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{z + a}{P(z)} \cdot A + \frac{1}{P(z)} \cdot B = \frac{A(z - \alpha)}{P(z)} + \frac{B - \alpha A}{P(z)}\,.$$

Weil $s\overline{s} = \alpha^2 + \beta^2$ ist, ist $P(z) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 = (z - \alpha)^2 + \beta^2$. Wir verwenden jetzt die Formeln

$$\sin(\beta t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\beta}{z^2 + \beta^2}, \ \cos(\beta t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z^2 + \beta^2} \ \text{ und } \ e^{\alpha t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathscr{L} f(z - \alpha).$$

So erhalten wir

$$y(t) = \frac{1}{\beta}\, e^{\alpha t} \sin(\beta t) * f(t) + A\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{B - \alpha A}{\beta}\, e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

4.3.2. Beispiele

A. Wir betrachten die DGL $y'' + y' - 2y = e^{-2t}$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$. Hier ist

$P(z) = z^2 + z - 2 = (z-1)(z+2)$, mit den reellen Nullstellen $s_1 = 1$, $s_2 = -2$,

sowie $A = B = 1$.

1. Schritt (Laplace-Transformation):

Für $f(t) := e^{-2t}$ ergibt sich die Laplacetransformierte

$$F(z) := \mathscr{L}f(z) = \frac{1}{z+2}\,.$$

Die transformierte Gleichung hat also die Gestalt

$$P(z) \cdot Y(z) - (z+2) = \frac{1}{z+2}\,.$$

2. Schritt: (Lösung im Bildraum):

$$Y(z) = \frac{z+2}{P(z)} + \frac{1}{P(z)(z+2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\,.$$

Beim zweiten Term führen wir eine Partialbruchentwicklung durch:

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}\,,$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{9} \\ C &= \lim_{z\to -2} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{3} \\ \text{und} \quad B &= \lim_{z\to -2} \left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\lim_{z\to -2} \frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{9}\,. \end{aligned}$$

So bekommen wir die Lösung

$$y(t) = \frac{10}{9}\,e^t - \frac{1}{9}\,e^{-2t} - \frac{t}{3}\,e^{-2t}\,.$$

B. Betrachtet werde die Differentialgleichung $y'' - 2y' + 2y = \sin(3t)$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.

Die Laplacetransformierte von $f(t) = \sin(3t)$ ist die Funktion $F(z) = \dfrac{3}{z^2+9}$, das charakteristische Polynom ist

$$P(z) = z^2 - 2z + 2 = \big(z - (1 + \mathbf{j}\,)\big) \cdot \big(z - (1 - \mathbf{j}\,)\big) = (z - 1)^2 + 1.$$

Da die Anfangswerte $= 0$ sind, erhalten wir die transformierte Gleichung $P(z) \cdot Y(z) = F(z)$, und damit

$$Y(z) = \frac{3}{\big((z-1)^2 + 1\big)(z^2 + 9)} = \mathscr{L}[e^t \sin t] \cdot \mathscr{L}[\sin(3t)].$$

Das liefert die Lösung $y(t) = e^t \sin t * \sin(3t)$.

Da die Faltung schwer zu berechnen ist, versuchen wir es mit der bewährten Partialbruchzerlegung. Das geht entweder mit dem Ansatz

$$\frac{1}{\big((z-1)^2 + 1\big)(z^2 + 9)} = \frac{A}{z - (1 + \mathbf{j}\,)} + \frac{B}{z - (1 - \mathbf{j}\,)} + \frac{C}{z - 3\mathbf{j}} + \frac{D}{z + 3\mathbf{j}}$$

oder mit dem Ansatz

$$\frac{1}{\big((z-1)^2 + 1\big)(z^2 + 9)} = \frac{Kz + L}{z^2 - 2z + 2} + \frac{Mz + N}{z^2 + 9}\,.$$

Mit der Limesformel erhält man aus dem ersten Ansatz

$$\begin{aligned} A &= \frac{-(9/2)\mathbf{j} - 1}{85}, \quad B = \frac{(9/2)\mathbf{j} - 1}{85}, \\ C &= \frac{(7/6)\mathbf{j} + 1}{85} \quad \text{und} \quad D = \frac{-(7/6)\mathbf{j} + 1}{85}\,, \end{aligned}$$

und über ein lineares Gleichungssystem erhält man aus dem zweiten Ansatz

$$Kz + L = \frac{1}{85}(11 - 2z) \quad \text{und} \quad Mz + N = \frac{1}{85}(2z - 7).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{85}\Big(\frac{6z - 21}{z^2 + 9} + \frac{33 - 6z}{(z-1)^2 + 1}\Big) \\ &= \frac{1}{85}\Big(\frac{(2/3)z - (7/3)}{(z/3)^2 + 1} - \frac{6(z-1) - 27}{(z-1)^2 + 1}\Big) \\ &= \frac{1}{85}\Big(2\frac{z/3}{(z/3)^2 + 1} - \frac{7/3}{(z/3)^2 + 1} - 6\frac{z - 1}{(z-1)^2 + 1} + \frac{27}{(z-1)^2 + 1}\Big) \end{aligned}$$

und

$$y(t) = \frac{1}{85}\big(6\cos(3t) - 7\sin(3t) - 6\,e^t \cos t + 27\,e^t \sin t\big).$$

Mit ähnlichen Methoden kann man auch **Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung** behandeln.

Für eine $n \times n$-Matrix $\mathcal{A}$ betrachten wir das System

$$\vec{y}\,' = \mathcal{A} \cdot \vec{y} + \vec{b}(t)$$

wobei $\vec{b}$ ein Vektor von höchstens exponentiell wachsenden Funktionen sein soll. Wir stellen die Startbedingung $\vec{y}(0) := \vec{y}_0$.

Ist $\vec{Y}$ der Vektor der Laplacetransformierten der in $\vec{y}$ als Komponenten auftretenden Funktionen und $\vec{B}$ die Laplacetransformierte zu $\vec{b}$, so ist

$$z\,\vec{Y}(z) - \vec{y}_0 = \mathcal{A} \cdot \vec{Y}(z) + \vec{B}(z).$$

Damit ist $\vec{Y}$(z) Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems

$$\big(z\,\mathcal{E}_n - \mathcal{A}\big) \cdot \vec{Y}(z) = \vec{y}_0 + \vec{B}(z).$$

Ist $\det\big(z\,\mathcal{E}_n - \mathcal{A}\big) \neq 0$, so ist diese Lösung eindeutig bestimmt als

$$\vec{Y}(z) = \big(z\,\mathcal{E}_n - \mathcal{A}\big)^{-1} \cdot \big(\vec{y}_0 + \vec{B}(z)\big).$$

Mit der Laplace-Rücktransformation kann so die Lösung $\vec{y}\,(t)$ des DGL-Systems gewonnen werden.

4.3.3. Beispiel

Wir betrachten das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1' & = & 33y_1 & + & 48y_2 & + & t \\ y_2' & = & -24y_1 & - & 35y_2 & + & 1 \end{array}$$

mit den Startbedingungen $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = -1$. In Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 48 \\ -24 & -35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wendet man die Laplacetransformation an, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} z-33 & -48 \\ 24 & z+35 \end{pmatrix} \cdot \vec{Y}(z) = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 2z^2+1 \\ -z^2+z \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det \begin{pmatrix} z-33 & -48 \\ 24 & z+35 \end{pmatrix} = z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3)$, also

$$\begin{pmatrix} z-33 & -48 \\ 24 & z+35 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-1)(z+3)} \begin{pmatrix} z+35 & 48 \\ -24 & z-33 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\vec{Y}(z) &= \frac{1}{z^2(z-1)(z+3)}\begin{pmatrix} z+35 & 48 \\ -24 & z-33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2z^2+1 \\ -z^2+z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z^2(z-1)(z+3)} \cdot \begin{pmatrix} 2z^3+22z^2+49z+35 \\ -z^3-14z^2-33z-24 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Um die Rücktransformation durchführen zu können, empfiehlt sich die Partialbruchzerlegung.

Der Ansatz $\dfrac{A_1}{z-1}+\dfrac{B_1}{z+3}+\dfrac{C_1}{z}+\dfrac{D_1}{z^2} = \dfrac{2z^3+22z^2+49z+35}{z^2(z-1)(z+3)} = Y_1(z)$ liefert

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lim_{z\to 1}(z-1)Y_1(z) \;=\; 27, \\
B_1 &= \lim_{z\to -3}(z+3)Y_1(z) \;=\; -\frac{8}{9}, \\
D_1 &= \lim_{z\to 0} z^2 Y_1(z) \;=\; -\frac{35}{3} \\
\text{und}\quad C_1 &= \lim_{z\to 0}\Big(z^2 Y_1(z)\Big)' \;=\; -\frac{217}{9}\,.
\end{aligned}$$

Der Ansatz $\dfrac{A_2}{z-1}+\dfrac{B_2}{z+3}+\dfrac{C_2}{z}+\dfrac{D_2}{z^2} = \dfrac{-z^3-14z^2-33z-24}{z^2(z-1)(z+3)} = Y_2(z)$ liefert

$$\begin{aligned}
A_2 &= \lim_{z\to 1}(z-1)Y_2(z) \;=\; -18, \\
B_2 &= \lim_{z\to -3}(z+3)Y_2(z) \;=\; \frac{2}{3}, \\
D_2 &= \lim_{z\to 0} z^2 Y_2(z) \;=\; 8 \\
\text{und}\quad C_2 &= \lim_{z\to 0}\Big(z^2 Y_2(z)\Big)' \;=\; \frac{49}{3}\,.
\end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt jetzt

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}Y_1 \;=\; -\frac{217}{9} - \frac{35}{3}t + 27e^t - \frac{8}{9}e^{-3t} \\
\text{und}\quad y_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}Y_2 \;=\; \frac{49}{3} + 8t - 18e^t + \frac{2}{3}e^{-3t}.
\end{aligned}$$