4.2 Faltung und Rücktransformation

4.2.1 ***Faltungssatz:*** *Wachsen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ höchstens exponentiell (und ist insbesondere $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$), so ist die Laplacetransformierte der Faltung*

$$f * g(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

gegeben durch

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}f \cdot \mathscr{L}g.$$

Beweis. Sei $F := \mathscr{L}f$ und $G := \mathscr{L}g$. Dann können wir umformen:

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du \cdot \int_0^\infty g(v)e^{-sv}\,dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-s(u+v)}\,dv\,du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(w-v)g(v)e^{-sw}\,dv\,dw \\ &= \int_0^\infty e^{-sw}(f * g)(w)\,dw \;=\; \mathcal{L}(f * g)(s). \end{aligned}$$

Bei der Substitution $w = u + v$ ist zu beachten, dass $f(w - v) = 0$ für $w - v \leq 0$ (also $0 \leq w \leq v$) ist. Deshalb kann die Integration über w immer von Null bis Unendlich erstreckt werden.

□

Der Faltungssatz ist bei der Behandlung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differenzialgleichungen von großer Bedeutung, wie wir noch sehen werden.

Wir untersuchen noch das Verhalten der Laplacetransformierten $F(s)$ einer Funktion f für $\operatorname{Re} s \longrightarrow \infty$.

4.2.2 ***Satz:***

a) *Wächst f höchstens exponentiell, so ist*

$$\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} \mathscr{L}f(s) = 0.$$

b) *Sei f differenzierbar, f' höchstens exponentiell wachsend und $F = \mathscr{L}f$.*

Ist f in 0 stetig, so ist $\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} sF(s) = f(0)$.

Ist f' absolut integrierbar, so ist $\lim_{s \to 0,\, \operatorname{Re} s \geq 0} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t)$.

Beweis. Zu a): Es gibt Zahlen $c, M, t_0 > 0$, so dass $|f(t)| \le Me^{ct}$ für $t \ge t_0$ ist.

Wir wählen ein beliebiges a mit $0 < a < t_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |F(s)| &\le \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} s)\,t}|f(t)|\,dt \\ &= \int_0^a e^{-(\operatorname{Re} s)\,t}|f(t)|\,dt + \int_a^{t_0} e^{-(\operatorname{Re} s)\,t}|f(t)|\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-(\operatorname{Re} s)\,t}|f(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Es sei $\operatorname{Re}(s) > 0$. Dann ist $e^{-(\operatorname{Re} s)\,t}|f(t)| \le |f(t)|$, und für $a \to 0$ strebt deshalb das erste Integral gegen Null.

Ist a fest und $\operatorname{Re}(s)$ groß genug, so wird das zweite Integral sehr klein.

Das dritte Integral kann durch

$$M\int_{t_0}^\infty e^{(c-\operatorname{Re} s)t}\,dt \le \frac{M}{\operatorname{Re}(s) - c}$$

abgeschätzt werden, wobei $\operatorname{Re}(s) > c$ sein sollte. Aber auch dieser Ausdruck wird beliebig klein, wenn $\operatorname{Re}(s)$ genügend groß ist.

Zu b): Ist f stetig, so ist $s \cdot F(s) - f(0) = \mathscr{L}f'(s)$. Die Behauptung folgt nun aus a) (indem man f durch f' ersetzt).

Zu c): Für beliebiges $R > 0$ ist $f(R) - f(0) = \displaystyle\int_0^R f'(t)\,dt$, also

$$\lim_{R\to\infty} f(R) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)\,dt.$$

Ferner ist

$$sF(s) - f(0) = \int_0^\infty e^{s\,t}\,f'(t)\,dt.$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} sF(s) - \lim_{t\to\infty} f(t) &= sF(s) - f(0) - \big(\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)\big) \\ &= \int_0^\infty e^{-s\,t}f'(t)\,dt - \int_0^\infty f'(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty (e^{-s\,t} - 1)f'(t)\,dt. \end{aligned}$$

Da $e^{-st} - 1$ für $s \to \infty$ gegen Null konvergiert, strebt (wie man durch sorgfältige Analyse bestätigen kann) auch das letzte Integral für $s \to \infty$ gegen Null. $\square$

Es soll jetzt um die folgende Frage gehen:

> Unter welchen Umständen kann man zu einer Funktion F eine Funktion f finden, deren Laplacetransformierte gerade die Funktion F ist? Und wenn ja, wie berechnet man f?

Dabei ist folgende Aussage wichtig:

4.2.3 ***Satz:*** *Die Funktion f wachse höchstens exponentiell, und F sei ihre Laplacetransformierte. Ist F die Nullfunktion, so ist schon $f = 0$.*

Zwei verschiedene Funktionen können also nicht die gleiche Laplacetransformierte haben.

Beweis. Natürlich soll wieder $f(t) = 0$ für $t < 0$ sein. Da f höchstens exponentiell wächst, ist f eine L-Funktion. Das bedeutet, dass es ein $c > 0$ gibt, so dass $f_1(t) := f(t)e^{-ct}$ absolut integrabel ist. Und das wiederum bedeutet, dass die Fouriertransformierte von f_1 existiert. Dann gilt:

$$\widehat{f_1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\,dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(c+\mathbf{j}\,\omega)t}\,dt = F(c + \mathbf{j}\,\omega) = 0$$

Die Fourier-Unkehrformel besagt, dass $f_1 = 0$. Aber dann ist auch $f = 0$.

$\square$

Jetzt können wir die Laplace-Rücktransformation für rationale Funktionen durchführen. Wir erinnern uns an den

Fundamentalsatz der Algebra: *Jedes Polynom f vom Grade $n \geq 1$ lässt sich in Linearfaktoren zerlegen:*

$$f(z) = c(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_k)^{r_k}$$

mit ***komplexen*** *Nullstellen $z_1, ..., z_k$ und Vielfachheiten $r_1, .., r_k \in \mathbb{N}$, so dass $r_1 + ... + r_k = n$ ist.*

4.2.4. Beispiele

A. $f(z) = z^3 + z^2 + 5z + 9 + 12\mathbf{j}$ hat die Darstellung

$$f(z) = \big(z - (1 - 2\mathbf{j}\,)\big)(z - 3\mathbf{j}\,)(z + 2 + \mathbf{j}\,).$$

Hier ist $n = 3$ und $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Die Nullstellen sind

$$z_1 = 1 - 2\mathbf{j}\,, \quad z_2 = 3\mathbf{j} \quad \text{und} \quad z_3 = -(2 + \mathbf{j}\,).$$

B. $f(z) = z^4 + 2(3 - \mathbf{j}\,)z^3 + 3(3 - 4\mathbf{j}\,)z^2 - 2(3 + 10\mathbf{j}\,)z - 10$ ist zerlegbar als

$$f(z) = (z + 3 - \mathbf{j}\,)(z + 3 + \mathbf{j}\,)(z - \mathbf{j}\,)^2 = (z - z_1)(z - \overline{z}_1)(z - z_2)^2,$$

mit $z_1 = -3 + \mathbf{j}$ und $z_2 = \mathbf{j}$. Hier ist $n = 4$, $r_1 = r_2 = 1$ und $r_3 = 2$.

Man beachte, dass man die Zerlegung in Linearfaktoren zwar theoretisch immer durchführen kann, dass dies in der Praxis aber häufig nicht gelingt. Bei quadratischen Polynomen erhält man die Nullstellen durch Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung. Bei kubischen Polynomen versucht man, eine Nullstelle zu erraten und dann das Problem mittels Polynomdivision zu reduzieren. Biquadratische Gleichungen sind auch noch leicht lösbar, aber in allen anderen Fällen wird es schwierig oder unmöglich. Man braucht diese Zerlegung aber, wenn man den folgenden Satz anwenden will:

4.2.5 ***Satz (Partialbruchzerlegung):*** *Sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion mit zwei Polynomen $P(z)$ und $Q(z)$, so dass der Grad von P kleiner als der von Q ist. Q habe die Linearfaktorzerlegung*

$$Q(z) = c(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{r_k}.$$

Dann lässt sich R folgendermaßen schreiben:

$$R(z) = \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{A_{m,1}}{z - z_m} + \frac{A_{m,2}}{(z - z_m)^2} + \dots + \frac{A_{m,r_m}}{(z - z_m)^{r_m}} \right),$$

mit geeigneten Koeffizienten $A_{m,i} \in \mathbb{C}$.

4.2.6. Beispiel

Sei $R(z) = \dfrac{z^2}{z^4 - 1}$.

Hier ist $Q(z) = z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z - \mathbf{j}\,)(z + \mathbf{j}\,)$ und $P(z) = z^2$. So erhalten wir den Ansatz

$$R(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z - \mathbf{j}} + \frac{D}{z + \mathbf{j}}.$$

Die Koeffizienten finden wir wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned}
R(z) &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z - \mathbf{j}} + \frac{D}{z + \mathbf{j}} \\
&= \frac{A(z+1)(z^2+1) + B(z-1)(z^2+1) + C(z+\mathbf{j}\,)(z^2-1) + D(z-\mathbf{j}\,)(z^2-1)}{z^4-1} \\
&= \frac{A(z^3+z^2+z+1) + B(z^3-z^2+z-1)}{z^4-1} \\
&\quad + \frac{C(z^3+\mathbf{j}\,z^2-z-\mathbf{j}\,) + D(z^3-\mathbf{j}\,z^2-z+\mathbf{j}\,)}{z^4-1} \\
&= \frac{(A+B+C+D)z^3 + (A-B+\mathbf{j}\,C-\mathbf{j}\,D)z^2}{z^4-1} \\
&\quad + \frac{(A+B-C-D)z + A - B - \mathbf{j}\,C + \mathbf{j}\,D}{z^4-1}.
\end{aligned}$$

Das ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & + & B & + & C & + & D & = & 0 \\ A & - & B & + & \mathbf{j}\,C & - & \mathbf{j}\,D & = & 1 \\ A & + & B & - & C & - & D & = & 0 \\ A & - & B & - & \mathbf{j}\,C & + & \mathbf{j}\,D & = & 0 \end{array}$$

Dies reduziert sich auf die Gleichungen

$$A+B=0, \quad C+D=0, \quad 2\mathbf{j}\,(C-D)=1 \quad \text{und} \quad 2(A-B)=1,$$

die durch

$$A=\frac{1}{4}, \quad B=-\frac{1}{4}, \quad C=\frac{-\mathbf{j}}{4} \quad \text{und} \quad D=\frac{\mathbf{j}}{4}$$

gelöst werden. Somit ist

$$R(z)=\frac{1/4}{z-1}-\frac{1/4}{z+1}-\frac{\mathbf{j}\,/4}{z-\mathbf{j}}+\frac{\mathbf{j}\,/4}{z+\mathbf{j}}.$$

Besitzt der Nenner von R nur einfache Nullstellen, so findet man ein einfacheres Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten.

4.2.7 ***Satz:*** *Sei $R=P/Q$ eine rationale Funktion. Hat Q nur die einfachen Nullstellen $s_1, ..., s_k$, so gilt:*

$$R(z)=\frac{P(s_1)/Q'(s_1)}{z-s_1}+\cdots+\frac{P(s_k)/Q'(s_k)}{z-s_k}.$$

Beweis. Wir schreiben

$$R(z)=\frac{A_1}{z-s_1}+\cdots+\frac{A_k}{z-s_k}$$

und finden dann

$$A_1=\lim_{z\to s_1}(z-s_1)R(z)=\lim_{z\to s_1}(z-s_1)\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to s_1}\frac{P(z)}{(Q(z)-Q(s_1))/(z-s_1)}=\frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}.$$

Genauso argumentiert man für die anderen Koeffizienten.

□

4.2.8. Beispiele

A. Sei $R(z)=\dfrac{z^2}{z^4-1}$.

Dann ist $P(z)=z^2$, $Q(z)=z^4-1$ und $Q'(z)=4z^3$. Die Nullstellen von Q sind $s_1=1$, $s_2=-1$, $s_3=\mathbf{j}$ und $s_4=-\mathbf{j}$. Also folgt

$$\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{1}{4}, \quad \frac{P(-1)}{Q'(-1)}=-\frac{1}{4}, \quad \frac{P(\mathbf{j}\,)}{Q'(\mathbf{j}\,)}=\frac{1}{4\mathbf{j}}=-\frac{\mathbf{j}}{4} \quad \text{und} \quad \frac{P(-\mathbf{j}\,)}{Q'(-\mathbf{j}\,)}=\frac{\mathbf{j}}{4}.$$

B. Sei $R(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4+1}$. Hier ist $P(z) = z^2+1$, $Q(z) = z^4+1$ und $Q'(z) = 4z^3$.

Es ist $Q(z) = (z^2 - \mathbf{j})(z^2 + \mathbf{j})$. Eine Wurzel aus $\mathbf{j} = e^{\mathbf{j}\,\pi/2}$ ist die Zahl $s_1 := e^{\mathbf{j}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{j})$. Also ist $z^2 - \mathbf{j} = (z-s_1)(z+s_1)$, und Q besitzt die Nullstellen

$$s_1 = \frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad s_2 = -s_1 = -\frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad s_3 = \overline{s_1} = \frac{1-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \quad s_4 = \overline{s_2} = \frac{-1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}.$$

Es ist stets $|s_i| = 1$ und deshalb $1/s_i = \overline{s}_i$. Damit finden wir

$$\frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} = \frac{s_1^2+1}{4s_1^3} = \frac{\overline{s_1}(\mathbf{j}+1)}{4\mathbf{j}} = \frac{(1-\mathbf{j})^2}{4\sqrt{2}} = -\frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}.$$

Genauso folgt:

$$\frac{P(s_2)}{Q'(s_2)} = \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)} = \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \frac{P(s_4)}{Q'(s_4)} = \frac{-\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}.$$

Also ist

$$R(z) = \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{z-\frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{z+\frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{z-\frac{1-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{z+\frac{1-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}}\right).$$

Die Partialbruchzerlegung ist für uns wichtig, weil wir mit ihrer Hilfe für gewisse rationale Funktionen die (Laplace-)Rücktransformierte ermitteln können:

4.2.9 ***Satz:*** *Gegeben sei eine rationale Funktion R von der Form $R = P/Q$, das Nennerpolynom Q habe nur einfache Nullstellen. Dann ist R zerlegbar in der Form*

$$R(z) = \frac{A_1}{z-s_1} + \cdots + \frac{A_k}{z-s_k},$$

und $R(z)$ ist die Laplacetransformierte der Funktion

$$f(t) := A_1\, e^{s_1 t} + \cdots + A_k\, e^{s_k t}.$$

d.h., es gilt: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z)$.

Beweis. Die Laplacetransformation ist linear, und es gilt: $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1/(z-a)$. □

Der Fall rationaler Funktionen mit einem Nennerpolynom mit mehrfachen Nullstellen ergibt sich nun aus folgender Regel:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z) \implies -t\cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F' \ \text{ und } \ (-t)^k \cdot f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F^{(k)}, \text{ für } k \ge 1.$$

4.2.10 ***Folgerung:*** *Sei*

$$R(z) = \sum_{m=1}^{k} \Big(\frac{A_{m,1}}{z - z_m} + \frac{A_{m,2}}{(z - z_m)^2} + \cdots + \frac{A_{m,r_m}}{(z - z_m)^{r_m}} \Big)$$

rational. Dann gilt:

$$R(z) \bullet\!\!-\!\!\circ \sum_{m=1}^{k} \Big(A_{m,1}\, e^{s_m t} + A_{m,2}\, t\, e^{s_m t} + \cdots + \frac{A_{m,r_m}}{(r_m - 1)!}\, t^{r_m - 1}\, e^{s_m t} \Big)$$

Beweis. Es gilt: $(-t)^k\, e^{st} \circ\!\!-\!\!\bullet \Big(\frac{1}{z - s}\Big)^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{(z - s)^{k+1}}$. Daraus folgt die Behauptung.

□

Uns fehlt allerdings in diesem Fall noch eine einfachere Berechnungsmethode für die Koeffizienten $A_{m,i}$.

Behauptung: Sei $B(z) := \frac{A_1}{z - s} + \frac{A_2}{(z - s)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(z - s)^r}$. Dann ist

$$A_i = \frac{1}{(r - i)!} \lim_{z \to s} \Big((z - s)^r B(z) \Big)^{(r-i)}.$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{C}$ und

$$\begin{aligned}
(z - s)^r B(z) &= A_1 (z - s)^{r-1} + A_2 (z - s)^{r-2} + \cdots + A_{r-1}(z - s) + A_r, \\
\big[(z - s)^r B(z)\big]' &= (r - 1) A_1 (z - s)^{r-2} + \cdots + 2 A_{r-2}(z - s) + A_{r-1}, \\
\big[(z - s)^r B(z)\big]'' &= (r - 1)(r - 2) A_1 (z - s)^{r-3} + \cdots + 2 A_{r-2}, \\
\big[(z - s)^r B(z)\big]^{(3)} &= (r - 1)(r - 2)(r - 3) A_1 (z - s)^{r-4} + \cdots + (2 \cdot 3)\, A_{r-3}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{z \to s} (z - s)^r B(z) = A_r, \quad \lim_{z \to s} \big[(z - s)^r B(z)\big]' = A_{r-1}, \quad \lim_{z \to s} \big[(z - s)^r B(z)\big]'' = 2\, A_{r-2},$$

und allgemein

$$\lim_{z \to s} \big[(z - s)^r B(z)\big]^{(k)} = k!\, A_{r-k}.$$

□

4.2.11. Beispiel

Sei $R(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$ mit $a > 0$.

Hier haben wir $R = P/Q$ mit $P = 1$ und $Q(z) = (z - a\mathbf{j})^2 (z + a\mathbf{j})^2$. Also hat Q zwei 2-fache Nullstellen bei $\pm a\mathbf{j}$. Es folgt zuerst

$$R(z) = \frac{A_{1,1}}{z - a\mathbf{j}} + \frac{A_{1,2}}{(z - a\mathbf{j})^2} + \frac{A_{2,1}}{z + a\mathbf{j}} + \frac{A_{2,2}}{(z + a\mathbf{j})^2}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \lim_{z \to a\mathbf{j}} (z - a\mathbf{j})^2 R(z) = \lim_{z \to a\mathbf{j}} \frac{1}{(z + a\mathbf{j})^2} = -\frac{1}{4a^2} \\ \text{und} \quad A_{1,1} &= \lim_{z \to a\mathbf{j}} \left[(z - a\mathbf{j})^2 R(z)\right]' = \lim_{z \to a\mathbf{j}} \left[\frac{1}{(z + a\mathbf{j})^2}\right]' = -\frac{2}{(2a\mathbf{j})^3} = \frac{-\mathbf{j}}{4a^3}. \end{aligned}$$

Da $R(x)$ reell für reelles x ist, folgt mit Symmetriebetrachtungen:

$$A_{2,1} = \overline{A_{1,1}} = \frac{\mathbf{j}}{4a^3} \quad \text{und} \quad A_{2,2} = \overline{A_{1,2}} = -\frac{1}{4a^2}.$$

Das liefert

$$R(z) = \frac{-1}{4a^2} \left(\frac{1}{(z - a\mathbf{j})^2} + \frac{\mathbf{j}/a}{z - a\mathbf{j}} + \frac{1}{(z + a\mathbf{j})^2} - \frac{\mathbf{j}/a}{z + a\mathbf{j}} \right)$$

und weiter

$$\begin{aligned} R(z) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & \frac{-1}{4a^2} \left(te^{\mathbf{j}at} + \frac{\mathbf{j}}{a} e^{\mathbf{j}at} + te^{-\mathbf{j}at} - \frac{\mathbf{j}}{a} e^{-\mathbf{j}at} \right) \\ = \quad & \frac{1}{4a^2} \Big(-t\big(e^{\mathbf{j}at} + e^{-\mathbf{j}at}\big) - \frac{\mathbf{j}}{a}\big(e^{\mathbf{j}at} - e^{-\mathbf{j}at}\big) \Big) \\ = \quad & \frac{1}{2a^2} \left(-t\cos(at) + \frac{1}{a}\sin(at) \right). \end{aligned}$$