4 Die Laplace-Transformation

4.1 Definitionen, Beispiele und Regeln

In der Wirklichkeit hat man es meist mit Signalen zu tun, die erst zu einem bestimmten Zeitpunkt ausgelöst werden. Um solche Einschaltvorgänge zu berücksichtigen, betrachtet man Funktionen, die für $t < 0$ verschwinden. Um außerdem eine größere Menge von Funktionen transformieren zu können, fügt man einen „konvergenzerzeugenden Faktor“ $e^{-\alpha t}$ ein. Zusammen ergibt das die ***Laplacetransformation***

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathscr{L}f(\alpha + \mathbf{j}\,\sigma) := \mathscr{F}[f(t)e^{-\alpha t}](\sigma) = \int_0^\infty f(t)e^{-(\alpha+\mathbf{j}\,\sigma)t}\,dt.$$

Definition: Unter einer ***L-Funktion*** verstehen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f(t) = 0$ für $t < 0$.
2. f ist stückweise stetig für $t \geq 0$, insbesondere existiert $f(0+)$.
3. Das ***Laplace-Integral*** $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ konvergiert für wenigstens ein $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > 0$ absolut.

Ist $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$, so ist $|f(t)e^{-st}| \leq |f(t)e^{-s_0 t}|$. Konvergiert also das Laplace-Integral $\mathscr{L}f(s_0)$ absolut, so auch $\mathscr{L}f(s)$ für jedes s mit $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$. Ist also f eine L-Funktion, so gibt es eine kleinste reelle Zahl α_0, so dass $\mathscr{L}f(s)$ für alle s mit $\text{Re}\,s > \alpha_0$ definiert ist, aber in keinem Punkt $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}\,s < \alpha_0$. Das genaue Konvergenzgebiet von $\mathscr{L}f$ ist also die Halbene

$$R_{\alpha_0} := \{s \mid \text{Re}\,s > \alpha_0\}.$$

Der Rand gehört entweder ganz dazu oder überhaupt nicht. Da $f(t) = 0$ für $t < 0$ ist, kann auch die ganze Ebene als Konvergenzgebiet vorkommen. Man nennt α_0 die ***Abszisse absoluter Konvergenz*** für das Laplace-Integral von f.

Definition: Eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \to \mathbb{C}$ ***wächst höchstens exponentiell (von der Ordnung*** a***)***, wenn es Konstanten $a > 0$, $M > 0$ und $T > 0$ gibt, so dass $|f(t)| \leq M \cdot e^{at}$ für $t \geq T$ gilt.

4.1.1 ***Satz:*** *Wächst die (stückweise stetige) Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ höchstens exponentiell, so ist f eine L-Funktion, deren Abszisse absoluter Konvergenz $\leq a$ ist.*

Beweis. f wachse höchstens exponentiell von der Ordnung a. Ist $z = \alpha + \mathbf{j}\,\sigma$, mit $\alpha > a$, so gibt es Konstanten T und M, so dass für $t \geq T$ gilt:

$$|f(t)e^{-zt}| = |f(t)| \cdot e^{-\alpha t} \leq M \cdot e^{(a-\alpha)t} = M \cdot e^{-|a-\alpha|t}.$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist (absolut) integrierbar, denn es ist

$$\lim_{R\to\infty} \int_T^R e^{-|a-\alpha|t}\,dt = \lim_{R\to\infty} \Big(-\frac{1}{|a-\alpha|} \cdot e^{-|a-\alpha|t}\Big)\Big|_T^R = \frac{1}{|a-\alpha|} \cdot e^{-|a-\alpha|T}.$$

$\square$

Bemerkung: Für Funktionen, die auf $(-\infty, 0)$ verschwinden, gilt:

a) Wachsen die Funktionen f und g höchstens exponentiell, so auch $f+g$ und fg.

b) Polynome (und erst recht alle beschränkten Funktionen) wachsen höchstens exponentiell.

   Ist nämlich $p(t)$ ein Polynom, so strebt der Quotient $p(t)/e^t$ für $t \to \infty$ gegen Null, und es muss zu jedem $M > 0$ ein $T > 0$ geben, so dass $|p(t)| \leq M \cdot e^t$ für $t \geq T$ gilt.

c) Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar. Wächst die Ableitung f' höchstens exponentiell, so gilt dies auch für f (mit gleicher Ordnung).

   Ist nämlich $|f'(t)| \leq M \cdot e^{at}$ für $t \geq T$, so kann man folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(T) + \int_T^x f'(t)\,dt| \leq |f(T)| + M \int_T^x e^{at}\,dt \\ &\leq |f(T)| + \frac{M}{a} e^{ax} \leq M^* e^{ax} \end{aligned}$$

   für eine geeignete Konstante M^* und $x \geq T$.

d) Wachsen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ höchstens exponentiell, so auch die Faltung

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du.$$

   Auf den Beweis verzichten wir hier.

- Die Funktionen $1/t$ und e^{t^2} gehören nicht zur Klasse der höchstens exponentiell wachsenden Funktionen.

Beispiele:

a) Wir beginnen mit der Heavisidefunktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathscr{L}H(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t}\,dt = \frac{-1}{s}\,e^{-s\,t}\,\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad (\text{für } \operatorname{Re} s > 0)$$

b) Für $a > 0$ definieren wir die modifizierte Heavisidefunktion H_a durch

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann erhalten wir

$$\mathscr{L}H_a(s) = \int_a^\infty e^{-s\,t}\,dt = \frac{-1}{s}\,e^{-s\,t}\,\Big|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (\text{für } \operatorname{Re} s > 0)$$

oder:

$$H_a(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{e^{-as}}{s}.$$

c) Die Bedingung $f(t) = 0$ für $t < 0$ (erreichbar durch Multiplikation mit der Heaviside-Funktion) sei künftig automatisch vorausgesetzt.

Für $\omega > 0$ sei $f(t) = \sin(\omega t)$. Dann errechnen wir

$$\begin{aligned} \mathscr{L}f(s) &= \int_0^\infty \sin(\omega t)\,e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{2\mathbf{j}}\left(\int_0^\infty e^{(\mathbf{j}\,\omega - s)t}\,dt - \int_0^\infty e^{-(\mathbf{j}\,\omega + s)t}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\mathbf{j}}\Big(\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega - s}\,e^{(\mathbf{j}\,\omega - s)t}\,\Big|_0^\infty + \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega + s}\,e^{-(\mathbf{j}\,\omega + s)t}\,\Big|_0^\infty\Big) \\ &= -\frac{1}{2\mathbf{j}}\Big(\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega - s} + \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega + s}\Big) \;=\; \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \qquad \text{für } \operatorname{Re} s > 0\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} & \sin(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ \text{und analog} \quad & \cos(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{\omega^2 + s^2}\,. \end{aligned}$$

d) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine periodische, stückweise stetige Funktion. Ist T die Periode, so gilt für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}f(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \;=\; \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^T f(t+kT)e^{-s(t+kT)}\,dt \;=\; \left(\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt\right)\sum_{k=0}^\infty e^{-kTs}\\ &= \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt\end{aligned}$$

e) Ist $k>0$ ganzzahlig und setzen wir $f_k(t)=t^k$, so finden wir

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f_k)(s) &= \int_0^\infty t^k e^{-s\,t}\,dt\\ &= \frac{-1}{s}t^k e^{-s\,t}\,\Big|_0^\infty + \frac{k}{s}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-s\,t}\,dt\\ &= \frac{k}{s}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-s\,t}\,dt = \frac{k}{s}\mathscr{L}(f_{k-1})(s) \text{ für } \operatorname{Re} s>0\,.\end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir damit:

$$\mathscr{L}(f_k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}} \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s)>0.$$

f) Sei nun $g_a(t):=e^{at}$. Dann ist

$$\mathscr{L}(g_a)(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)\,t}\,dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)\,t}\,\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad \text{für } \operatorname{Re} s > a\,.$$

Wir schreiben auch

$$g_a(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}\,.$$

Wir stellen nun einige Rechenregeln für die Laplacetransformation zusammen, ähnlich wie bei der Fouriertransformation. Alle vorkommenden Funktionen mögen für $t<0$ verschwinden und höchstens exponentiell wachsen.

4.1.2 *Satz (Eigenschaften der Laplace-Transformation):*

Sei $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$. Dann gilt:

1. *Linearität:* $a\cdot f(t)+b\cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a\cdot F(s)+b\cdot G(s).$
2. *Ähnlichkeitssatz:*
$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\cdot F(\frac{1}{a}s). \qquad (\text{für } a\in\mathbb{R},\ a>0\ )$$
3. *Verschiebungssatz (Verschiebung im Zeitbereich):*
$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-sT}\cdot F(s). \qquad (\text{für } T\in\mathbb{R}\ )$$
(Man beachte, dass $f(t-T)$ links vom Nullpunkt abgeschnitten werden muss!)

4. *Dämpfungssatz (Verschiebung im Bildbereich):*

$$e^{-ct} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s+c). \qquad (\text{für } c \in \mathbb{C}\ )$$

Beweis. 1) ist trivial.

2) Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt \;=\; \frac{1}{a}\int_0^\infty f(at)e^{-(s/a)at}\cdot a\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-(s/a)\tau}\,d\tau \;=\; \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}). \end{aligned}$$

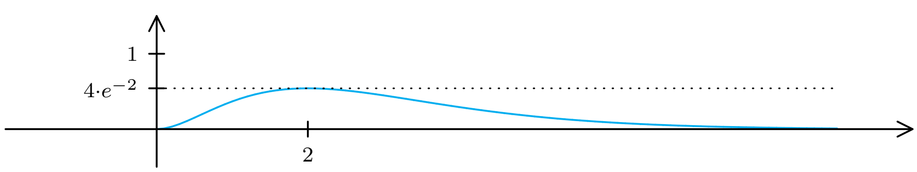
3) Für $T \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t-T)] &= \int_0^\infty f(t-T)e^{-st}\,dt \;=\; \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+T)}\,d\tau \\ &= e^{-sT}\cdot\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \;=\; e^{-sT}\cdot F(s). \end{aligned}$$

4) Schließlich ist $\mathscr{L}[e^{-ct}f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-(s+c)t}\,dt = F(s+c)$.

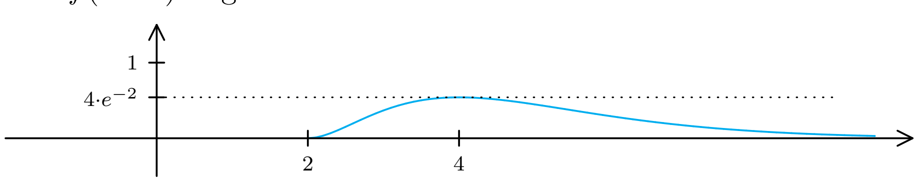
□

Sei etwa $f(t) = t^2e^{-t}$.



Dann sieht $f(3t)$ folgendermaßen aus,

und $f(t-2)$ folgendermaßen:



Wegen $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{2}{s^3}$ finden wir als Laplacetransformierte zu $f(t) = e^{-t}t^2$:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) = \frac{2}{(1+s)^3}\,.$$

Mit den gewonnenen Regeln folgt:

$$f(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{2/3}{(1+s/3)^3} = \frac{18}{(3+s)^3}$$

und

$$f(t-2) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-2s}F(s) = \frac{2e^{-2s}}{(1+s)^3} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > -1.$$

Wie die Fouriertransformation führt auch die Laplacetransformation eine Differentiation wieder in eine Multiplikation über:

4.1.3 ***Satz:*** *Die Funktion f verschwinde für $t < 0$ und sei stückweise stetig differenzierbar für $t \geq 0$. Außerdem wachse f' höchstens exponentiell. Dann existiert $F := \mathscr{L}f$, und es gilt:*

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s \cdot F(s) - f(0+).$$

Beweis. Mit f' wächst auch f höchstens exponentiell von gleicher Ordnung a, ist also eine L-Funktion. Ist $\operatorname{Re} s > a$, so ist

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}f'(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \\
&= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})\,dt \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + s\cdot\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \;=\; -f(0+) + s\cdot F(s).
\end{aligned}$$

□

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht:

4.1.4 ***Satz:*** *f verschwinde für $t < 0$ und sei n-mal stückweise stetig differenzierbar für $t \geq 0$. Außerdem wachse $f^{(n)}$ höchstens exponentiell. Dann wächst auch f höchstens exponentiell, und mit $F = \mathscr{L}f$ gilt:*

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n \cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f(0+) - s^{n-2}\cdot f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

4.1.5 ***Satz:*** *Die Funktion $h(t)$ sei stetig für $t > 0$, und es existiere der einseitige Grenzwert $h(0+)$. Wenn h höchstens exponentiell wächst, dann existiert die Laplace-Transformierte $H(s)$ von $h(t)$, und damit auch die Laplace-Transformierte von*

$$f(t) := \int_0^t h(\tau)\,d\tau,$$

und es gilt:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}H(s).$$

Beweis. Da $f'(t) = h(t)$ für $t > 0$ ist, folgt aus den Voraussetzungen und den vorangegangenen Sätzen, dass die Laplace-Transformierte $F(s)$ von f existiert. Außerdem ist f in $t = 0$ stetig, mit $f(0) = 0$.

Also ist $H(s) = s \cdot F(s)$ und $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) = \dfrac{1}{s} H(s)$.

□

Beispiel: Es ist $(\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$, also

$$\mathscr{L}[\sin^2 t](s) = \frac{1}{s} \cdot \mathscr{L}[\sin 2t](s) = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Bei der Differentiation und Integration im Bildbereich erhält man ähnliche Ergebnisse. Allerdings benötigt man dazu den Begriff der komplexen Differentiation, den wir hier nicht in voller Allgemeinheit einführen konnten. In einfachen Fällen geht es aber wie im Reellen, es ist

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (1/z)' = -1/z^2, \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

und $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$.

In diesem Sinne gilt:

4.1.6 ***Satz:*** *Aus der Beziehung* $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$ *folgt:*

$$t^n \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (-1)^n \cdot F^{(n)}(s).$$

Auf den Beweis verzichten wir hier, weil er mathematische Methoden erfordert, die uns nicht zur Verfügung stehen.

4.1.7. Beispiele

A. Es gilt $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{1}{s-a}$. Damit folgt:

$$-te^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \left(\frac{1}{s-a}\right)' = -\frac{1}{(s-a)^2}$$

und

$$t^2 e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \left(\frac{1}{s-a}\right)'' = \frac{2}{(s-a)^3}.$$

B. Sei $f(t) := t^2 \sin(\omega t)$ für $t \geq 0$.

Aus der Beziehung $\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ folgt dann:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)'' = \left(\frac{-2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right)' = \frac{-2\omega(s^2+\omega^2)^2 + 8s^2\omega(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^4}$$

$$= \frac{-2\omega(\omega^2-3s^2)}{(s^2+\omega^2)^3}.$$