3.3 Das Abtasttheorem

In der Praxis kennt man von einer zeitabhängigen Funktion f (einem Signal) meist nur diskret „abgetastete“ Werte $f(n\Delta)$, mit festem $\Delta > 0$ und ganzzahligem n. Unter welchen Bedingungen kann man f aus den abgetasteten Werten rekonstruieren?

Eine solche Frage ist wichtig bei der CD-Technik, beim ISDN-Telefon oder der Bildverarbeitung. In all diesen Fällen muss man kontinuierliche Information (ein auf einem Intervall definiertes Signal) digitalisieren, also f durch die Werte $f(n\Delta)$ ersetzen, um sie mit Computern verarbeiten zu können. Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen man vermeiden kann, Information oder Qualität zu verlieren.

Definition: Ein Zeitsignal $f(t)$ erfüllt die ***Abtast-*** oder ***Nyquist-Bedingung*** für ein $\Delta > 0$, falls gilt:

1. f besitzt ***endliche Bandbreite***, d.h. es gibt ein $\Omega > 0$, so dass $\widehat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$ ist.
2. Die ***Abtastfrequenz*** $\dfrac{2\pi}{\Delta}$ ist mindestens doppelt so groß wie Ω, d.h.: $\Delta\Omega \leq \pi$.

Das Abtasttheorem von Claude Shannon (Harry Nyquist, Edmund Taylor Whittaker, Wladimir Alexandrowitsch Kotelnikow) besagt, dass man ein Signal f endlicher Bandbreite aus den Werten $f(n\Delta)$ rekonstruieren kann, wenn nur Δ nicht zu groß gewählt wird.

3.3.1 ***Satz (Abtasttheorem v. Shannon):*** *Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut integrabel und $\widehat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$, so gilt für jedes Δ mit $0 < \Delta \leq \pi/\Omega$:*
Wenn die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n\,\Delta)|$ konvergiert, so ist

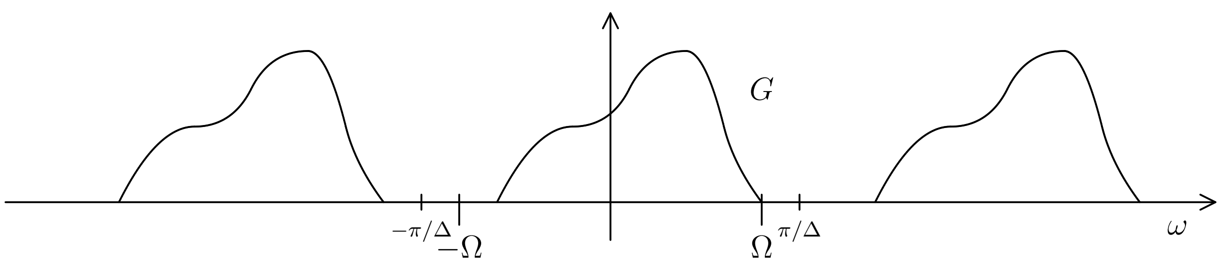
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\,\Delta)\,\mathrm{si}\Big(\frac{\pi}{\Delta}(t - n\Delta)\Big)$$

für alle t.

Beweis. Wir sehen uns die Funktion

$$G(\omega) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega - 2n\frac{\pi}{\Delta})$$

an. Zu jedem $\omega \in \mathbb{R}$ gibt es nur ein n, so dass $\omega - 2n\pi/\Delta$ in $[-\Omega, \Omega]$ liegt. Bei festem ω ist deshalb nur ein Term der Summe ungleich 0. Also ist G überall stetig. Außerdem ist die Funktion T-periodisch, mit $T = 2\pi/\Delta$.



Wir berechnen die Fourierreihe von G. Sei $a := \Delta/(2\pi)$ das Inverse der Abtast-Frequenz. Dann ist $2\pi a = \Delta = 2\pi/T$ die Frequenz der Funktion G, und als Fourierkoeffizienten von G erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
c_k(G) &= \frac{1}{T}\int_0^T G(\omega)e^{-\mathbf{j}\,k\Delta\omega}\,d\omega \;=\; a\int_0^T \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega - 2n\frac{\pi}{\Delta})e^{-\mathbf{j}\,k\Delta\omega}\,d\omega \\
&= a\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^T \widehat{f}(\omega - nT)\,e^{-\mathbf{j}\,k(2\pi/T)\omega}\,d\omega \\
&= a\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-nT}^{-(n-1)T} \widehat{f}(u)\,e^{-\mathbf{j}\,k\Delta u}\,du \qquad \text{(Substitution } u = \omega - nT\text{)} \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u)e^{-\mathbf{j}\,k\Delta u}\,du \\
&= 2\pi a\cdot f(-k\,\Delta) \qquad \text{(Fourier-Umkehrformel)}
\end{aligned}
$$

Die Fourier-Umkehrformel ist anwendbar, denn $\widehat{f}$ ist absolut integrabel und stetig.

Da die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n\,\Delta)|$ konvergiert, konvergiert die Funktionen-Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\,\Delta)e^{-\mathbf{j}\,k\,\Delta\omega}$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen eine stetige Funktion F (mit Periode $T = 2\pi/\Delta$). Andererseits hat die Fourierreihe von G die Gestalt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G)e^{\mathbf{j}\,k\Delta\omega} = 2\pi a\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(-k\,\Delta)e^{\mathbf{j}\,k\,\Delta\omega} = 2\pi a\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\,\Delta)e^{-\mathbf{j}\,k\,\Delta\omega},$$

und da sie auch gleichmäßig konvergiert, stellt sie die Funktion G überall dar.

Wir setzen wir

$$\pi_{T/2}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < T/2 = 1/(2a) = \pi/\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$\widehat{f}(\omega) = G(\omega)\pi_{T/2}(\omega) = 2\pi a\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\,\Delta)\pi_{T/2}(\omega)e^{-\mathbf{j}\,k\,\Delta\omega}$$

Multiplizieren wir mit $e^{\mathbf{j}\,\omega t}$ und integrieren über ω, so ergibt die Umkehrformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\,\omega t}\,d\omega = a\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\,\Delta)\int_{-T/2}^{T/2} e^{\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)\omega}\,d\omega.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-T/2}^{T/2} e^{\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)\omega}\,d\omega &= \frac{1}{\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)}e^{\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)\omega}\Big|_{\omega=-T/2}^{T/2}\\ &= \frac{1}{\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)}\left(e^{\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)T/2}-e^{-\mathbf{j}\,(t-k\,\Delta)T/2}\right)\\ &= \frac{2}{t-k\,\Delta}\sin\Big((t-k\Delta)T/2\Big) = \frac{1}{a}\mathrm{si}\Big((t-k\Delta)T/2\Big).\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Reihendarstellung ein, so folgt mit $T = 1/a$ und $T/2 = \pi/\Delta$ die Behauptung.

□

Manchmal muss der gewöhnliche Funktionsbegriff erweitert werden.

Definition: Eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt ***stark abfallend*** oder eine ***Testfunktion***, falls es für alle $p, q \in \mathbb{N}$ ein $M > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|x^p f^{(q)}(x)| \le M \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{S}$ sei die Menge aller Testfunktionen.

Die Funktion e^{-x^2} gehört z.B. zu $\mathcal{S}$, und natürlich jede beliebig oft differenzierbare Funktion, die außerhalb eines abgeschlossenen Intervalls verschwindet. Linearkombinationen von Funktionen aus $\mathcal{S}$ liegen wieder in $\mathcal{S}$, und mit f gehört auch die Ableitung f' zu $\mathcal{S}$. Außerdem gehört das Produkt eines Elementes von $\mathcal{S}$ mit einem Polynom stets wieder zu $\mathcal{S}$. Offensichtlich existiert zu jedem $f \in \mathcal{S}$ die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$, und auch sie liegt wieder in $\mathcal{S}$.

Ist f stetig und absolut integrierbar, so wird durch

$$T_f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt, \qquad (\text{für } \varphi \in \mathcal{S}\,)$$

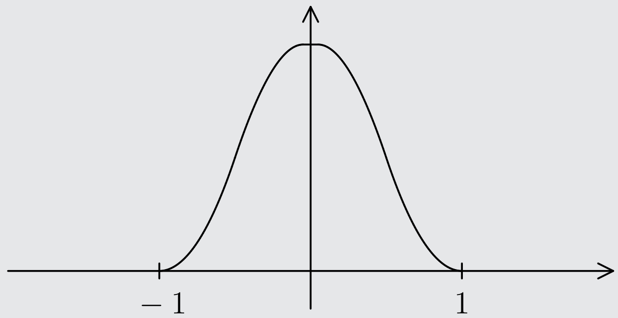
eine lineare Abbildung (ein Funktional, ein Operator) $T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ definiert.

3.3.2 ***Satz:*** *Man kann die Funktionswerte von f aus den Integralen $T_f[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{S}$ wieder berechnen, oder anders ausgedrückt: Sind f, g zwei stetige und absolut integrierbare Funktionen, und ist $T_f[\varphi] = T_g[\varphi]$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$, so ist auch $f = g$.*

Beweis. Man kann eine Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. $\varphi(t) \ge 0$ für alle t und $\varphi(t) = 0$ für $|t| \ge 1$.
2. $\varphi(-t) = \varphi(t)$ für alle t.
3. $\varphi(t)$ monoton wachsend für $-1 < t < 0$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1$.

5. $\varphi^{(q)}(0) = 0$ für alle $q \geq 1$.



Wir setzen $\varphi_\varepsilon(t) := (1/\varepsilon) \cdot \varphi(t/\varepsilon)$. Dann hat φ_ε ähnliche Eigenschaften wie φ, verschwindet aber außerhalb eines Intervalls der Länge 2ε, und das Maximum bei 0 wächst mit fallendem ε. Das Integral über die ganze Achse behält immer den Wert 1.

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t-t_0)\,dt - f(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(t)-f(t_0)\big)\varphi_\varepsilon(t-t_0)\,dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)\big(f(t)-f(t_0)\big)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi(s)\big(f(s\varepsilon+t_0)-f(t_0)\big)\,ds,
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt gegen 0 für $\varepsilon \to 0$.

Also ist

$$f(t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t-t_0)\,dt.$$

□

Das lineare Funktional T_f ist somit nur eine andere Erscheinungsform der Funktion f. Wir tun so, als wäre beides das Gleiche. Das erlaubt es, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern:

Definition: Ein lineares Funktional $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ nennt man eine ***verallgemeinerte Funktion*** oder ***(temperierte) Distribution***.

Bemerkung: Eigentlich ist unsere Definition der verallgemeinerten Funktionen unvollständig. Wir müssten genaugenommen noch fordern, dass T in folgendem Sinne stetig ist: Wenn (φ_n) in $\mathcal{S}$ gegen φ konvergiert, dann konvergiert auch $T[\varphi_n]$ in $\mathbb{C}$ gegen $T[\varphi]$.

Wir werden hier auf die Überprüfung dieser Bedingung verzichten.

Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$. Wir haben gesehen, dass wir jede stetige, absolut integrierbare Funktion f auch als Distribution auffassen können. Umgekehrt geht das nicht! Es gibt Distributionen, die keiner Funktion entsprechen.

Beispiel. Durch

$$\delta[\varphi] := \varphi(0)$$

wird eine Distribution definiert, die sogenannte ***Dirac'sche δ-Distribution***.

Sei

$$\pi_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le 1/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $\pi_\varepsilon(t) := (1/\varepsilon) \cdot \pi_1(t/\varepsilon)$, sowie

$$F_\varepsilon[\varphi] := T_{\pi_\varepsilon}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\pi_\varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(t)\,dt.$$

Dann ist F_ε eine Distribution, und es gilt:

$$\begin{aligned} F_\varepsilon[\varphi] - \delta[\varphi] &= F_\varepsilon[\varphi] - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\varphi(t) - \varphi(0)\big)\pi_\varepsilon(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \big(\varphi(t) - \varphi(0)\big)\pi_1(t/\varepsilon)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\varphi(\varepsilon u) - \varphi(0)\big)\pi_1(u)\,du \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \big(\varphi(\varepsilon u) - \varphi(0)\big)\,du \;\to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

In gewissem Sinne konvergiert also π_ε gegen δ. Wäre δ eine Funktion, so müsste gelten:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \ne 0, \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Aber eine solche Funktion gibt es nicht! Die Distributionen sind also wirklich „verallgemeinerte Funktionen".

Wir betrachten nun eine Distribution $T = T_f$, die zu einer **stetig differenzierbaren** Funktion f gehört. Ist auch f' absolut integrierbar, so können wir f' als Distribution auffassen:

$$\begin{aligned} T_{f'}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt \\ &= f(t)\varphi(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt \;=\; -T_f[\varphi']. \end{aligned}$$

Wir haben ein Gesetz gefunden, das sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern lässt.

Definition: Ist $T \in \mathcal{D}$ eine beliebige Distribution, so definiert man die ***Ableitung*** T' von T durch

$$T'[\varphi] := -T[\varphi'].$$

Bei stetig differenzierbaren Funktionen mit absolut integrierbarer Ableitung ist die distributionelle Ableitung nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung.

Beispiel: Wir beginnen mit der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

f ist stetig differenzierbar, aber leider nicht absolut integrierbar. Da jedoch mit $\varphi \in \mathcal{S}$ auch $t^n\varphi(t)$ für jedes $n \geq 0$ eine stark abfallende Funktion ist, wird auch durch

$$T_f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^2\varphi(t)\,dt$$

eine Distribution definiert.

Nun ist

$$\begin{aligned} (T_f)'[\varphi] &= -T_f[\varphi'] = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^2\varphi'(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\cdot[(t^2\varphi(t))\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2t\varphi(t)\,dt] \\ &= \int_0^{\infty} t\varphi(t)\,dt = T_{f'}[\varphi]. \end{aligned}$$

Auch hier ist die distributionelle Ableitung gleich der gewöhnlichen Ableitung. Die Funktion

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

ist stetig, aber nicht absolut integrierbar. Wie schon f selbst definiert f' aber dennoch eine Distribution.

f' hat eine Knick-Stelle und ist daher im gewöhnlichen Sinne nicht mehr differenzierbar, wohl aber im Distributions-Sinne:

$$\begin{aligned} (T_{f'})'[\varphi] &= -T_{f'}[\varphi'] = -\int_0^{\infty} t\varphi'(t)\,dt \\ &= -[(t\varphi(t))\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt] \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt = T_H[\varphi], \end{aligned}$$

wobei H die sogenannte ***Heaviside-Funktion*** ist, definiert durch

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

H ist nun nicht einmal mehr stetig! Dennoch ist T_H eine Distribution. Man beachte aber, dass H durch T_H nicht mehr eindeutig bestimmt ist. Wir können den Wert von H in $t = 0$ beliebig abändern, ohne dass sich T_H ändert.

Nichts kann uns daran hindern, T_H erneut zu differenzieren:

$$(T_H)'[\varphi] = -T_H[\varphi'] = -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt = -\varphi(t)\,\Big|_0^\infty = \varphi(0).$$

Also ist $(T_H)' = \delta$ die Dirac-Distribution!

Und nun differenzieren wir δ ein weiteres Mal:

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0).$$

Offensichtlich kann man das beliebig oft so weitertreiben und erhält schließlich

$$\delta^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \cdot \varphi^{(n)}(0).$$

Distributionen sind immer beliebig oft differenzierbar.

Ist f stetig und absolut integrierbar, so existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$. Sie ist stetig und beschränkt und definiert daher eine Distribution, und es gilt:

$$\begin{aligned} T_{\widehat{f}}[\varphi] &= \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\int_{-\infty}^\infty f(s)e^{-\mathbf{j}\,st}\,ds\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(s)\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)e^{-\mathbf{j}\,st}\,dt\,ds \;=\; \int_{-\infty}^\infty f(s)\widehat{\varphi}(s)\,ds \;=\; T_f[\widehat{\varphi}]. \end{aligned}$$

Also bietet sich folgende Verallgemeinerung der Fourier-Transformation an:

Definition: Ist T eine Distribution, so wird ihre ***Fourier-Transformierte*** $\widehat{T}$ definiert durch

$$\widehat{T}[\varphi] := T[\widehat{\varphi}].$$

Beispiel: Wir berechnen die Fourier-Transformierte der Dirac-Distribution. Es ist

$$\widehat{\delta}[\varphi] = \delta[\widehat{\varphi}] \;=\; \widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\,dt = T_1[\varphi],$$

also $\widehat{\delta} = 1$.