3.2 Die Fouriertransformierte

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***absolut integrabel***, falls sie stückweise stetig und $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ ist.

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrabel. Dann bezeichnen wir die durch

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\, dx$$

definierte Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ als die ***Fouriertransformierte*** von f.

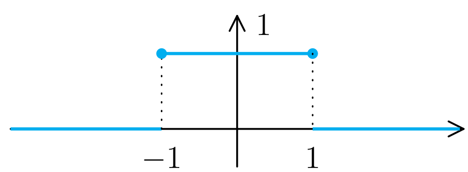
Man nennt f die ***Originalfunktion*** und $\widehat{f}$ die ***Bildfunktion*** oder ***Spektralfunktion***. $f = f(t)$ ist im sogenannten „Zeitbereich“ angesiedelt, die Fouriertransformierte $\widehat{f} = \widehat{f}(\omega)$ im „Spektralbereich“. Man schreibt auch: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\omega)$.

Wir studieren wichtige Eigenschaften dieser Funktion. Zunächst einige

3.2.1. Beispiele

A. Wir beginnen mit dem „Rechteck-Impuls“

$$\pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$



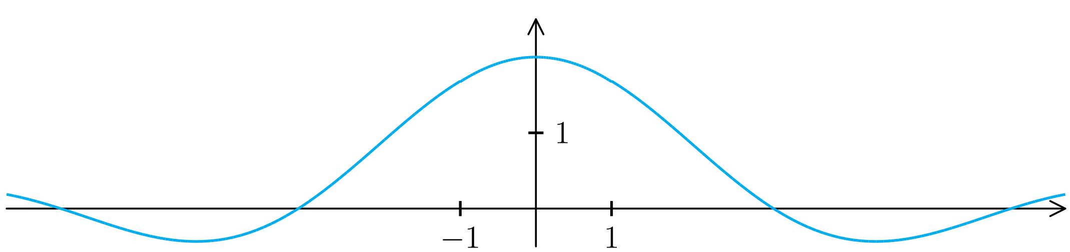
Die Fourier-Transformierte $\widehat{\pi}$ ist gegeben durch

$$\widehat{\pi}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\, dt = \frac{\mathbf{j}}{\omega} \cdot e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\mathbf{j}}{\omega} \cdot (e^{-\mathbf{j}\,\omega} - e^{\mathbf{j}\,\omega}) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega).$$

Mit der Schreibweise $\mathrm{si}(x) := \sin x / x$ erhalten wir:

$$\pi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{\pi}(\omega) = 2\,\mathrm{si}(\omega)\,.$$

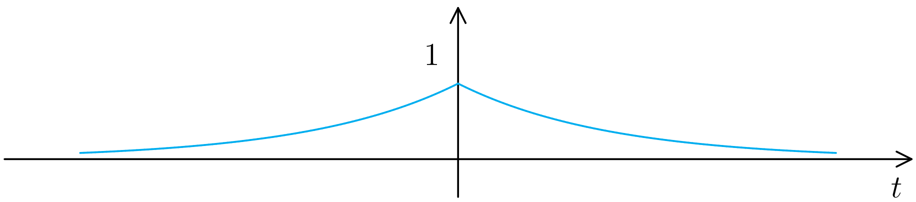
Der Graph von $\widehat{\pi}$ sieht folgendermaßen aus:



B. Als nächstes betrachten wir den symmetrisch abfallenden Impuls

$$f(t) := e^{-a|t|}.$$

f ist integrierbar und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-at}\,dt = 2\cdot \frac{e^{-at}}{-a}\Big|_0^{\infty} = 2/a.$

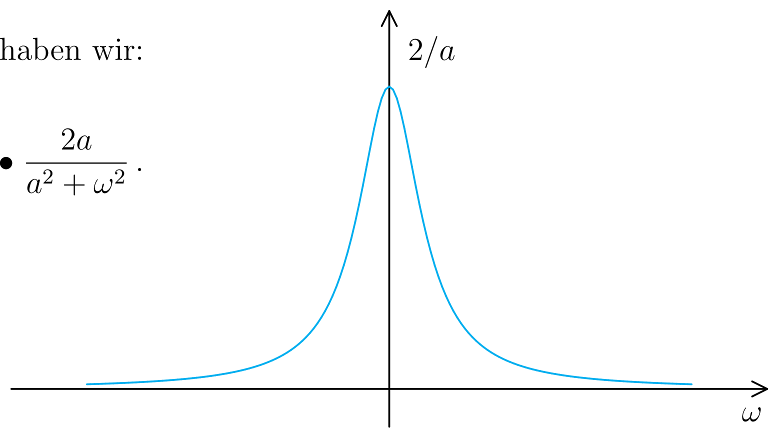


Die Fourier-Transformierte ist gegeben durch

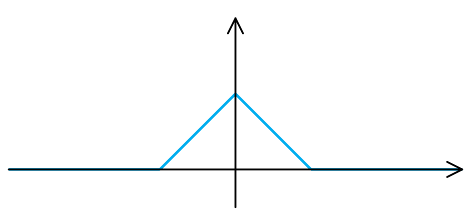
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\,dt \;=\; \int_0^{\infty} e^{-(a+\mathbf{j}\,\omega)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(-a+\mathbf{j}\,\omega)t}\,dt \\
&= -\frac{1}{a+\mathbf{j}\,\omega}e^{-(a+\mathbf{j}\,\omega)t}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-a+\mathbf{j}\,\omega}e^{-(-a+\mathbf{j}\,\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{a+\mathbf{j}\,\omega} - \frac{1}{-a+\mathbf{j}\,\omega} \;=\; \frac{-2a}{-\omega^2-a^2} \;=\; \frac{2a}{\omega^2+a^2}.
\end{aligned}$$

Also haben wir:

$$e^{-a|t|} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.$$



C. Sei $f(t) := \begin{cases} 1+t & \text{für } -1 \le t \le 0, \\ 1-t & \text{für } 0 \le t \le 1, \\ \;\;0 & \text{sonst.} \end{cases}$



Es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx &= \int_0^1 x\cdot\Big(-\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\Big)'\,dx \;=\; -\frac{x}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\Big|_0^1 + \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}\int_0^1 e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx \\
&= -\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega} - \frac{1}{(\mathbf{j}\,\omega)^2}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega} + \frac{1}{\omega^2}\big(e^{-\mathbf{j}\,\omega}-1\big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} xe^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx &= \int_{-1}^{0} x\cdot\Big(-\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\Big)'\,dx \;=\; -\frac{x}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}\int_{-1}^{0} e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx\\ &= -\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{\mathbf{j}\,\omega} - \frac{1}{(\mathbf{j}\,\omega)^2}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,\Big|_{-1}^{0} \;=\; -\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{\mathbf{j}\,\omega} + \frac{1}{\omega^2}\big(1-e^{\mathbf{j}\,\omega}\big).\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-1}^{1} f(x)e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx\\ &= \int_{-1}^{0} e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx + \int_{-1}^{0} xe^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx - \int_{0}^{1} xe^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx\\ &= -\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{\mathbf{j}\,\omega} + \frac{1}{\omega^2}\big(1-e^{\mathbf{j}\,\omega}\big)\\ &\quad -\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}e^{-\mathbf{j}\,\omega} - \frac{1}{\omega^2}\big(e^{-\mathbf{j}\,\omega}-1\big)\\ &= \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega}\big(-1+e^{\mathbf{j}\,\omega}-e^{\mathbf{j}\,\omega}-e^{-\mathbf{j}\,\omega}+1+e^{-\mathbf{j}\,\omega}\big) + \frac{1}{\omega^2}\big(2-e^{\mathbf{j}\,\omega}-e^{-\mathbf{j}\,\omega}\big)\\ &= -\frac{1}{\omega^2}\big(e^{\mathbf{j}\,\omega}-2+e^{-\mathbf{j}\,\omega}\big) \;=\; -\frac{1}{\omega^2}\big(e^{\mathbf{j}\,\omega/2}-e^{-\mathbf{j}\,\omega/2}\big)^2\\ &= -\frac{1}{\omega^2}\big(2\mathbf{j}\,\sin(\omega/2)\big)^2 \;=\; \frac{4}{\omega^2}\sin^2(\omega/2) \;=\; \big(\mathrm{si}(\omega/2)\big)^2.\end{aligned}$$

Wir stellen nun einige Rechenregeln zur Fouriertransformation zusammen. Dabei setzen wir alle Funktionen als stückweise stetig und integrabel voraus.

3.2.2 Satz. *Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen wie oben gefordert. Dann erfüllt die Fouriertransformierte die folgenden Regeln:*

a) *Linearität:*
$$\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g} \quad \text{und} \quad \widehat{\lambda f} = \lambda\widehat{f}.$$

b) *Dilatationsregel: Ist $a \neq 0$, und $f_a(x) := f(ax)$, so ist*
$$\widehat{f_a}(\omega) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{\omega}{a}\Big).$$

c) *1. und 2. Translationsregel: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\tau_{x_0}f(x) = f(x+x_0)$, so ist*
$$\widehat{\tau_{x_0}f}(\omega) = e^{\mathbf{j}\,\omega x_0}\widehat{f}(\omega).$$
Ist $\omega_0 \in \mathbb{R}$, so gilt
$$\big(f\cdot e^{\mathbf{j}\,\omega_0 x}\big)^\wedge = \widehat{f}(\omega-\omega_0).$$

d) *Wenn f gerade ist (also $f(-x) = f(x)$), so ist $\widehat{f}$ reellwertig. Ist f ungerade (also $f(-x) = -f(x)$), so hat $\widehat{f}$ nur rein imaginäre Werte.*

Beweis. besteht aus einfachen Integrationen. □

Die folgende Eigenschaft ist einer der Hauptgründe für die Einführung der Fouriertransformation.

3.2.3 Satz (1. Differentiationssatz, Transformierte der Ableitung):
a) Ist f k-mal stetig differenzierbar und $f^{(k)}$ wieder integrabel, so gilt

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (\mathbf{j}\,\omega)^k \widehat{f}(\omega)$$

Beweis. Wir rechnen für $k = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_r^R f'(x)e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\,dx &= f(x)e^{-\mathbf{j}\,\omega x}\Big|_r^R - (-\mathbf{j}\,\omega)\int_r^R f(x)e^{-\mathbf{j}\,\omega x}dx \\ &= f(R)e^{-\mathbf{j}\,\omega R} - f(r)e^{-\mathbf{j}\,\omega r} + (\mathbf{j}\,\omega)\int_r^R f(x)e^{-\mathbf{j}\,\omega x}dx\end{aligned}$$

Da f integrabel ist, muss

$$\lim_{R\to\infty} f(R) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r\to-\infty} f(r) = 0$$

sein. Daraus folgt: $\widehat{f'} = \mathbf{j}\,\omega \cdot \widehat{f}$. Der allgemeine Fall folgt induktiv. □

3.2.4 Satz (2. Differentiationssatz, Ableitung der Transformierten):
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, und für ein ganzzahliges $k \geq 0$ sei die Funktion $g(x) := x^k f(x)$ absolut integrabel. Dann ist $\widehat{f}$ k-mal stetig differenzierbar und

$$\widehat{f}^{(k)} = (-\mathbf{j}\,)^k\, \widehat{g}.$$

Beweis. Da $\left|\dfrac{\partial}{\partial\omega}\big(f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\big)\right| = |(-\mathbf{j}\,t)\cdot f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega t}| = |t\cdot f(t)|$ integrabel ist, ist das „Parameterintegral $\omega \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\,dt$ nach einem allgemeinen Satz differenzierbar und kann abgeleitet werden, indem man unter dem Integralzeichen differenziert.

Die Formel folgt aus

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}\Big(f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\Big)\,dt \\ &= -\mathbf{j}\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega t}\,dt \;=\; -\mathbf{j}\,\widehat{g}(\omega) \quad \text{für } g(t) := tf(t).\end{aligned}$$

□

Als eine schöne Anwendung dieser Differentiationssätze berechnen wir die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-ax^2}$.

Beide Sätze sind auf f anwendbar. Es entsteht:

$$\widehat{f'} = \mathbf{j}\,\omega \widehat{f}.$$

Zum anderen ist aber $f'(x) = -2axf(x)$, also $\widehat{f'} = -2a\,\widehat{xf} = -2a\mathbf{j}\,\widehat{f}\,'$. Damit ist $\widehat{f}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\widehat{f}\,' = -\frac{\omega}{2a}\widehat{f}.$$

Betrachten wir dazu die Ableitung der Funktion $g(\omega) := \widehat{f}(\omega) \cdot e^{\omega^2/(4a)}$, so finden wir, dass $g'(\omega) = 0$ ist, also $g(\omega) = C$ eine Konstante. Damit haben wir aber

$$\widehat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/(4a)}.$$

Dabei ist

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

also

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/(4a)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}f\left(\frac{\omega}{2a}\right).$$

Wir tragen hier den Beweis der Formel $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ nach:

Dabei müssen wir etwas tricksen. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt.$$

Die Ableitung dieses Parameter-Integrals bildet man wie üblich durch Differentiation unter dem Integral. So erhält man

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\int_0^1 2x \cdot e^{-(1+t^2)x^2}\,dt \\
&= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\,dt \\
&= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du \qquad \text{(Substitution } tx = u\text{)}.
\end{aligned}$$

Einerseits ist jetzt

$$-\int_0^x F'(t)\,dt = F(0) - F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - F(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$$

und andererseits gilt – mit $f(t) := \int_0^t e^{-u^2}\,du$ – die Beziehung

$$\begin{aligned} -\int_0^x F'(t)\,dt &= \int_0^x \Big(2e^{-t^2}\int_0^t e^{-u^2}\,du\Big)\,dt \\ &= 2\int_0^x f'(t)f(t)\,dt \;=\; 2\int_{f(0)}^{f(x)} v\,dv \\ &= f(x)^2 \;=\; \Big(\int_0^x e^{-u^2}\,du\Big)^2. \end{aligned}$$

Zusammen liefert das die Gleichung

$$\Big(\int_0^x e^{-u^2}\,du\Big)^2 = \frac{\pi}{4} - F(x).$$

Da $F(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt daraus

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Wir beantworten jetzt die Frage, wann man eine integrable Funktion f aus ihrer Fouriertransformierten zurückgewinnen kann. Dazu beachten wir

3.2.5 Satz (Parsevalsche Gleichung): *Angenommen, es seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut integrabel, also $|f|$ und $|g|$ integrabel, ebenso $|fg|$. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\widehat{g}(\eta)\,d\eta.$$

Beweis. Wir setzen die Definition der Fouriertransformierten ein und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(\omega)e^{-\mathbf{j}\omega\eta}\,d\eta\right)\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(\omega)e^{-\mathbf{j}\omega\eta}d\omega\right)\,d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\widehat{g}(\eta)\,d\eta \end{aligned}$$

Dass die Vertauschung der Integrationsreihenfolge unter den gegebenen Voraussetzungen möglich ist, wird in der Mathematik bewiesen.

□

Damit können wir die Umkehrformel aufstellen:

3.2.6 Satz(Umkehrformel): *Wenn $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$* ***stetig*** *ist und eine absolut integrierbare Fouriertransformierte besitzt, dann gilt*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega x}\,d\omega.$$

Beweis. Wir setzen $g(x) := e^{-ax^2}$ (mit $a > 0$). Dann ist $\widehat{g}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\eta^2/(4a)}$. Wenden wir die Parsevalgleichung auf f und g an, so ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-a\omega^2}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\eta^2/(4a)}\, d\eta = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2a}\, y) e^{-y^2/2}\, dy.$$

Dabei wurde die Substitution $\eta = \sqrt{2a}y$ benutzt.

Da f als stetig und $\widehat{f}$ als absolut integrabel vorausgesetzt wurde, darf man a auf beiden Seiten gegen 0 gehen lassen. Dann folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, d\omega = \sqrt{2\pi} f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = 2\pi f(0).$$

Das ist die behauptete Formel für $x = 0$.

Ist $x \neq 0$, so betrachten wir $\tau_x f(t) = f(t + x)$. Es ist $\widehat{\tau_x f} = e^{\mathbf{j}\omega x} \widehat{f}$ und deshalb

$$f(x) = \tau_x f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\tau_x f}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{\mathbf{j}\omega x}\, d\omega.$$

Das ist die Umkehrformel.

□

Ist f nur **stückweise stetig differenzierbar** (und absolut integrierbar), so gilt das allgemeinere **Fourier-Integral-Theorem:**

$$\begin{aligned} M_f(x) &= \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathbf{j}\omega x}\, d\omega \\ &:= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega) e^{\mathbf{j}\omega x}\, d\omega \qquad \text{(Cauchy'scher Hauptwert).} \end{aligned}$$

Eine interessante Anwendung der Umkehrformel ist die folgende Aussage:

3.2.7 Satz:. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und absolut integrabel, $A > 0$ und $\widehat{f}$ außerhalb des Intervalls $[-A, A]$ identisch Null, so ist f sogar beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. Zunächst ist klar, dass $\widehat{f}$ selbst und jede der Funktionen $x^k \widehat{f}(x)$ absolut integrabel ist. Mit dem 2. Differentiationssatz folgt daraus, dass die Fouriertransformierte $\widehat{\widehat{f}}$ von $\widehat{f}$ beliebig oft differenzierbar ist. Es gilt aber:

$$2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathbf{j}\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-\mathbf{j}\omega(-x)}\, dx = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

□

Definition: Sind $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei absolut integrable Funktionen, so definiert man ihre ***Faltung*** $f * g$ durch

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Dass $f * g(x)$ unter den gegebenen Voraussetzungen für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert und selbst wieder eine absolut integrable Funktion darstellt, wird in der Theorie der uneigentlichen Integrale bewiesen.

Man kann außerdem zeigen: Ist $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt < \infty$, so ist $f * g$ stetig und beschränkt.

Nun gilt, ähnlich wie bei der periodischen Faltung:

3.2.8 Satz (Faltungssatz): *Sind $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut integrabel, so ist*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

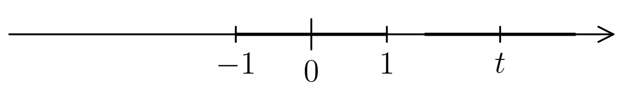
Auf den Beweis verzichten wir hier.

3.2.9. Beispiel

Sei $\pi(x) := 1$ auf $[-1, 1]$ (und $= 0$ sonst) der „Rechteckimpuls“. Dann ist

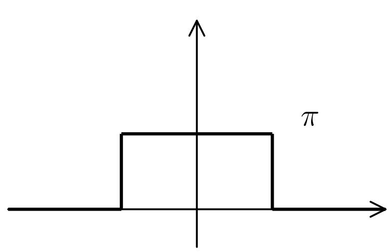
$$\begin{aligned}(\pi * \pi)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(s)\pi(t-s)\,ds = \int_{-1}^{1} \pi(t-s)\,ds \\ &= -\int_{t+1}^{t-1} \pi(u)\,du = \int_{t-1}^{t+1} \pi(u)\,du.\end{aligned}$$

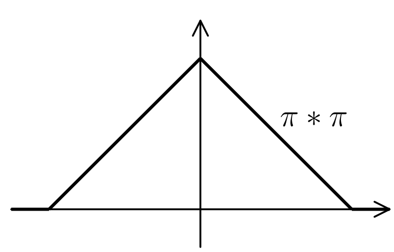
Das Integral verschwindet, wenn $|t| \geq 2$, weil sich dann $[-1, 1]$ und $[t-1, t+1]$ nicht treffen.



Sei nun $|t| < 2$. Ist etwa $t > 0$, so ist der Überlappungsbereich das Intervall $[t-1, 1]$ mit der Länge $1 - (t-1) = 2 - |t|$, und diese Länge ist der Wert des Integrals. Aus Symmetriegründen erhält man für negatives t das gleiche Ergebnis. Deshalb ist

$$(\pi * \pi)(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{für } |t| \leq 2 \\ 0 & \text{für } |t| > 2. \end{cases}$$

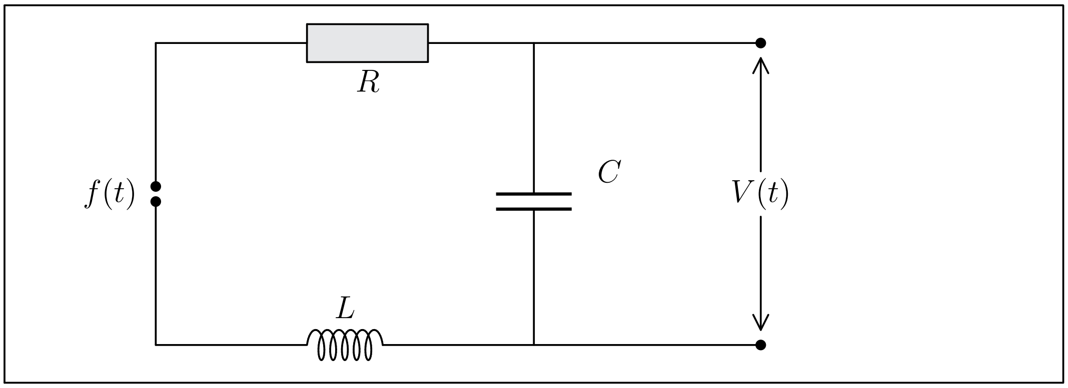




Damit ist $(\pi * \pi)(t) = 2 \cdot f(t/2)$, wobei f die Dreiecksfunktion aus Beispiel C vom Anfang dieses Paragraphen ist. Es folgt: $\widehat{\pi * \pi}(\omega) = 2 \cdot \big(2\,\widehat{f}(2\omega)\big) = 4 \cdot \mathrm{si}^2(\omega)$. Mit dem Faltungssatz geht es noch einfacher:

$$\widehat{\pi * \pi}(\omega) = \big(\widehat{\pi}(\omega)\big)^2 = \big(2\,\mathrm{si}(\omega)\big)^2 = 4 \cdot \mathrm{si}^2(\omega).$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir den **RCL-Schaltkreis**:



Wir analysieren einen Stromkreis aus Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C. Gefragt ist nach der Ausgangs-Spannung V am Kondensator, wenn die Eingangs-Spannung f angelegt wird.

Das Ohm'sche Gesetz liefert die Differenzialgleichung

$$LC\,V'' + RC\,V' + V = f.$$

Die Anwendung der Fouriertransformation auf diese Gleichung führt auf

$$\big(LC(\mathbf{j}\,\omega)^2 + RC(\mathbf{j}\,\omega) + 1\big)\widehat{V} = \widehat{f},$$

also

$$\widehat{V} = \frac{1}{LC\Big((\mathbf{j}\,\omega)^2 + \frac{R}{L}(\mathbf{j}\,\omega) + \frac{1}{LC}\Big)}\,\widehat{f}.$$

Wir berechnen nun die Fouriertransformierte einer gedämpften Schwingung

$$h(x) = \begin{cases} e^{-ax}\sin(bx) & \text{wenn} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{wenn} \quad x < 0 \end{cases},$$

für $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

Bekanntlich ist $\sin(bx) = \dfrac{1}{2\mathbf{j}}\big(e^{\mathbf{j}\,bx} - e^{-\mathbf{j}\,bx}\big)$, also $h(x) = \dfrac{1}{2\mathbf{j}}e^{-ax}\big(e^{\mathbf{j}\,bx} - e^{-\mathbf{j}\,bx}\big)$ (für $x \ge 0$). Sei

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Bei der Berechnung des symmetrisch abfallenden Impulses (Beispiel B) hatten wir herausgefunden:

$$e^{-ax} \cdot H(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega) := \frac{1}{a + \mathbf{j}\,\omega}\,.$$

Daraus folgt:

$$e^{-ax} e^{\mathbf{j}\,bx} \cdot H(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega - b) = \frac{1}{a + \mathbf{j}\,(\omega - b)}$$

und

$$e^{-ax} e^{-\mathbf{j}\,bx} \cdot H(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega + b) = \frac{1}{a + \mathbf{j}\,(\omega + b)},$$

also

$$\begin{aligned} h(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{h}(\omega) &= \frac{1}{2\mathbf{j}}\left[\frac{1}{(a+\mathbf{j}\,b) - \mathbf{j}\,b} - \frac{1}{(a+\mathbf{j}\,b) + \mathbf{j}\,b}\right] \\ &= \frac{2\mathbf{j}\,b}{2\mathbf{j}\big((a+\mathbf{j}\,\omega)^2 + b^2\big)} = \frac{b}{a^2 + b^2 - \omega^2 + 2a\omega\mathbf{j}}\,. \end{aligned}$$

Vergleicht man nun $\widehat{h}$ mit $\widehat{V}$, so kommt man zu folgender Fallunterscheidung:

1. Fall: Ist $\dfrac{1}{LC} > \dfrac{R^2}{4L^2}$, so setzen wir $a = \dfrac{R}{2L}$ und $b = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$.
Offensichtlich ist dann b reell und $a^2 + b^2 = 1/(LC)$. Daraus folgt:

$$\widehat{V}(\omega) = \frac{1}{bLC}\,\widehat{h}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{bLC}\,\widehat{h * f}(\omega).$$

Ist $f(s) := \begin{cases} 0 & \text{für } s < 0, \\ f_0 & \text{für } s \geq 0. \end{cases}$, so gilt

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{bLC}\,(h * f)(t) = \frac{1}{bLC}\int_0^\infty h(s)f(t-s)\,ds \\ &= \frac{1}{bLC}\int_0^\infty e^{-as}\sin(bs)f(t-s)\,ds \\ &= \frac{f_0}{bLC}\int_0^t e^{-as}\sin(bs)\,ds. \end{aligned}$$

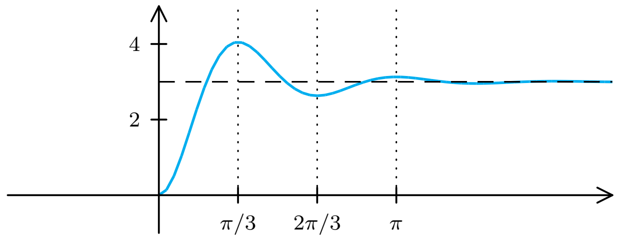
Eine Stammfunktion von $g(s) := e^{-as}\sin(bs)$ ist die Funktion

$$G(s) := \frac{-e^{-as}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bs) + b\cos(bs)\big), \text{ mit } G(0) = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Setzt man das ein, so erhält man

$$V(t) = \frac{f_0}{b}\Big(-e^{-at}\big(a\sin(bt) + b\cos(bt)\big) + b\Big).$$

Hier sehen wir das Schaubild für $a = 1$ und $b = f_0 = 3$, also $V(t) = 3 - e^{-t}\big(\sin(3t) + 3\cos(3t)\big)$.



2. Fall: Es sei $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{R^2}{4L^2}$, also $R = 2\sqrt{L/C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\widehat{V} &= \frac{1}{LC\big[(\mathbf{j}\,\omega)^2 + (R/L)(\mathbf{j}\,\omega) + 1\big]} \cdot \widehat{f} \\ &= \frac{1}{-LC\omega^2 + 2\sqrt{LC}\,\mathbf{j}\,\omega + 1} \cdot \widehat{f} \;=\; \frac{1}{(\mathbf{j}\,\sqrt{LC}\omega + 1)^2} \cdot \widehat{f}\,.\end{aligned}$$

Setzt man

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ xe^{-ax} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

mit $a = 1/\sqrt{LC}$, so erhält man

$$\begin{aligned}\widehat{h_1}(\omega) &= \int_0^\infty xe^{-(a+\mathbf{j}\,\omega)x}\,dx \;=\; \frac{-e^{-(a+\mathbf{j}\,\omega)x}}{(a+\mathbf{j}\,\omega)^2}\big((a+\mathbf{j}\,\omega)x + 1\big)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{(a+\mathbf{j}\,\omega)^2} \;=\; \frac{LC}{(1+\mathbf{j}\,\omega\sqrt{LC})^2}.\end{aligned}$$

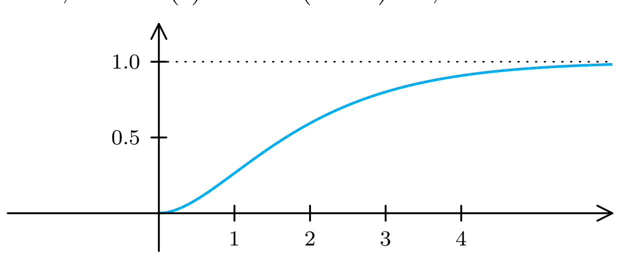
Das liefert die Beziehung $\widehat{V} = a^2\widehat{h_1}\,\widehat{f} = a^2\widehat{h_1 * f}$, also

$$V(t) = a^2 h_1 * f(t) = a^2 \int_0^\infty se^{-as} f(t-s)\,ds$$

Ist nun wieder $f = f_0$ auf $[0,\infty)$ und $f = 0$ sonst, so entsteht als Lösung

$$V(t) = f_0 a^2 \int_0^t se^{-as}\,ds = f_0(1 - (1+at)e^{-at})$$

Für $a = f_0 = 1$, also $V(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$, sieht das Schaubild von V so aus:



3. Fall: Sei jetzt $\dfrac{1}{LC} < \dfrac{R^2}{4L^2}$. Setzt man $a = \dfrac{R}{2L}$ und $b = \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}}$, so ist b reell, $a^2 - b^2 = 1/(LC)$ und

$$\widehat{V} = \frac{1}{LC\big((\mathbf{j}\,\omega)^2 + (R/L)\cdot(\mathbf{j}\,\omega) + 1/(LC)\big)}\,\widehat{f} = \frac{1}{LC\big((\mathbf{j}\,\omega + a)^2 - b^2\big)}\,\widehat{f}.$$

Wir erinnern uns an die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2 \quad \text{und} \quad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$$

und setzen $h_2(x) = \dfrac{1}{bLC} e^{-ax}\sinh(bx) = \dfrac{1}{2bLC}\big(e^{-(a-b)x} - e^{-(a+b)x}\big)$ für $x \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \widehat{h}_2(\omega) &= \frac{1}{2bLC}\int_0^\infty \big(e^{-(\mathbf{j}\,\omega+(a-b))x} - e^{-(\mathbf{j}\,\omega+(a+b))x}\big)\,dx \\ &= \frac{1}{2bLC}\Big(\frac{1}{\mathbf{j}\,\omega + (a-b)} - \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega + (a+b)}\Big) = \frac{1}{LC\big((\mathbf{j}\,\omega + a)^2 - b^2\big)} \end{aligned}$$

und

$$V(t) = (h_2 * f)(t) = \frac{f_0}{bLC}\int_0^t e^{-as}\sinh(bs)\,ds,$$

wenn f wieder die Sprungfunktion mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

ist. Eine Stammfunktion von $g(s) = e^{-as}\sinh(bs)$ ist die Funktion

$$F(s) = \frac{-e^{-as}}{a^2 - b^2}\big(a\sinh(bs) + b\cosh(bs)\big).$$

So erhält man

$$V(t) = \frac{f_0}{bLC(a^2 - b^2)}\Big(b - e^{-at}\big(a\sinh(bt) + b\cosh(bt)\big)\Big).$$

Für $R = 4, L = 1, C = 1/3$ (also $a = 2$ und $b = 1$), sowie $f_0 = 1/3$ ist dann $V(t) = \big(1 - e^{2t}(2\sinh t + \cosh t)\big)/3 = (1 - 1.5e^{-t} + 0.5e^{-3t})/3$. Das Schaubild sieht in diesem Falle so aus: