3 Die Fouriertransformation

3.1 Uneigentliche Integrale

Bisher konnten nur beschränkte Funktionen über abgeschlossenen Intervallen integriert werden. Wir wollen nun den Integralbegriff auf Funktionen über beliebigen begrenzten oder unbegrenzten Intervallen ausdehnen. Dabei wird auch zugelassen, dass die zu integrierende Funktion unbeschränkt ist.

Definition:

a) Die Funktion f sei stetig auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$. Wenn dann der Grenzwert

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx$$

existiert, nennen wir f ***(uneigentlich) integrabel*** über $(a, b]$. Analog nennen wir eine auf $[a, b)$ stetige Funktion (uneigentlich) integrabel, wenn

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

existiert. Die Zahl

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

bezeichnen wir in beiden Fällen als ***(uneigentliches) Integral*** von f über (a, b). Man sagt dann auch: Das uneigentliche Integral konvergiert. Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das uneigentliche Integral divergiert.

Eine entsprechende Definition treffen wir für Funktionen, die auf jedem abgeschlossenen Teilintervall stückweise stetig sind. In der Nähe des „fehlenden“ Randpunktes braucht die Funktion nicht beschränkt zu bleiben.

b) Die Funktion f sei auf $[a, \infty)$ erklärt und (stückweise) stetig; wenn dann der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\, dx$ existiert, so schreiben wir

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\, dx.$$

Wenn f auf $\mathbb{R}$ definiert und (stückweise) stetig ist und es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{a} f(x)\, dx$$

existieren, so definieren wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^a f(x)\,dx.$$

Auch in diesem Fall sprechen wir vom uneigentlichen Integral.

3.1.1. Beispiele

A. Es ist

$$\int_1^r e^{-x}\,dx = -\int_1^r (e^{-x})'\,dx = -(e^{-r} - e^{-1}),$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen $1/e$ für $r \to \infty$. Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$.

Analog ist

$$\int_{-\infty}^{-1} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{-1}(e^x)'\,dx = \lim_{r\to\infty}(e^{-1} - e^{-r}) = e^{-1}.$$

B. $\ln(x)$ ist eine Stammfunktion für $1/x$, und daher ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \longrightarrow +\infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Genauso strebt $\displaystyle\int_1^R \frac{1}{t}\,dt = \ln(R) - \ln(1) = \ln(R)$ für $R \to +\infty$ gegen $+\infty$.

Die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 dx/x$ und $\int_1^\infty dx/x$ divergieren also beide.

C. Wir betrachten $f(x) := 1/x^s$ auf $(0,1]$ und auf $[1,\infty)$ für verschiedene $s > 0$, $s \neq 1$.

Ist $0 < s < 1$, so ist

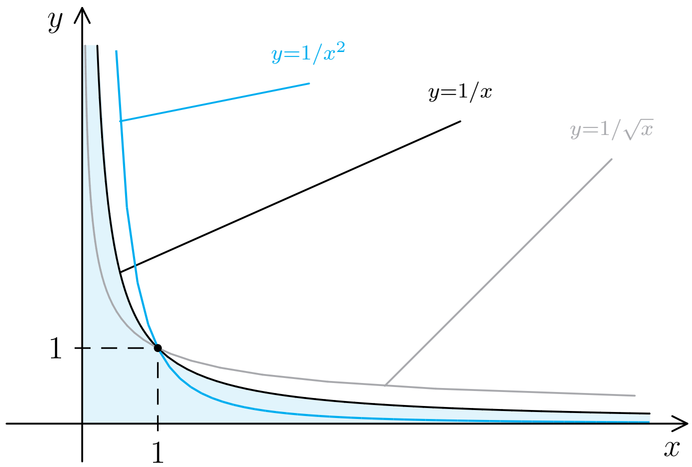
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0+}\frac{1-\delta^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s},$$

also z.B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{1-1/2} = 2$, während

$$\int_1^R \frac{1}{x^s}\,dx = -\frac{1}{s-1}\cdot\left(\frac{1}{R^{s-1}} - \frac{1}{1^{s-1}}\right) = \frac{R^{1-s}}{1-s} \text{ für } R \to \infty \text{ gegen } +\infty \text{ strebt.}$$

Ist $s > 1$, so drehen sich die Verhältnisse um. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ divergiert und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert. Das bedeutet, dass insbesondere das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert.

Man kann sich dieses Verhalten leicht an Hand der folgenden Skizze merken:



D. Sei nun $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Dann ist $f(-x) = -f(x)$, also $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0$.

Aber $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert nicht, denn es ist

$$\int_a^R f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_a^R = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R^2}{1+a^2},$$

und dieser Ausdruck strebt für $R \to \infty$ gegen Unendlich.

3.1.2 Satz. *Wenn $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf jedem abgeschlossenen Intervall stückweise stetig ist und das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ endlich ist, dann existiert das Integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Man sagt in diesem Fall, dass f ***absolut integrabel*** ist.

3.1.3. Beispiele

A. Wir zeigen die Konvergenz des „Fehlerintegrals“ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Für $x \geq 1$ ist $x^2 \geq x$, also $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Für $x \leq -1$ ist $|x|^2 \geq |x|$, also $x^2 = |x|^2 \geq |x| = -x$ und damit $-x^2 \leq x$. Damit ist dort $e^{-x^2} \leq e^x$.

Weil die Integrale $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ und $\int_{-\infty}^{-1} e^x\,dx$ existieren, folgt die Konvergenz des Fehlerintegrals.

B. Sei $f(x) := (\sin x)/x$. Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^{k\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx &= \sum_{\nu=1}^{k} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \\ &\geq \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu\pi} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\,,\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt für $k \to \infty$ gegen Unendlich.

Man kann also den obigen Satz nicht auf f anwenden.

Setzen wir $F(x) := \int_1^x \sin t\,dt$, so ist F differenzierbar, $F(1) = 0$, $F'(x) = \sin x$ und

$$|F(x)| = |\cos(1) - \cos(x)| \leq 2.$$

Wir benutzen nun partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{t}\cdot F'(t)\,dt = \frac{F(t)}{t}\Big|_1^x - \int_1^x \Big(-\frac{F(t)}{t^2}\Big)\,dt \\ &= \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt\,.\end{aligned}$$

Da F beschränkt ist und $1/x$ für $x \to \infty$ gegen Null konvergiert, brauchen wir nur den zweiten Term zu betrachten. Es ist $|F(t)/t^2| \leq 2/t^2$, und

$$\int_1^x \frac{2}{t^2}\,dt = -\frac{2}{t}\Big|_1^x = 2 - \frac{2}{x}$$

strebt für $x \to \infty$ gegen 2. Also konvergiert $\int_1^\infty F(t)/t^2\,dt$ und damit auch das Integral $\int_1^\infty (\sin t)/t\,dt$.