2.3 Konvergenzverhalten von Fourierreihen

Wir diskutieren die folgenden Fragen:

- Unter welchen Umständen konvergiert eine Fourierreihe einer Funktion?
- Wann kann man eine stückweise stetige Funktion f aus ihrem Spektrum, also der Familie ihrer Fourierkoeffizienten wiedergewinnen? Wann gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathbf{j}\,k\omega t} \quad ?$$

Zuerst erinnern wir uns an den Begriff der Konvergenz einer Reihe:

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt ***konvergent*** gegen ein $a \in \mathbb{C}$, wenn die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ gegen a konvergiert, wenn also gilt:

$$S_n \longrightarrow a \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Wir schreiben dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a.$$

2.3.1. Beispiel

Sei $0 < q < 1$. Dann ist $1/q > 1$ und es gibt ein $\delta > 0$, so dass $1/q = 1 + \delta$ ist. Daraus folgt, dass $1/q^n = (1/q)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \cdots \geq 1 + n\delta$ ist, und dieser Ausdruck wird mit wachsendem n beliebig groß. Und das bedeutet wiederum, dass q^n mit wachsendem n beliebig klein wird, dass die Folge (q^n) also gegen Null konvergiert.

Weil $(1-q) \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=1}^{n+1} q^i = 1 - q^{n+1}$ ist, folgt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Lässt man nun $n \to \infty$ gehen, so erhält man die Gleichung $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \dfrac{1}{1-q}$.

Man spricht von der „geometrischen Reihe“.

Es sei auch noch an folgende Tatsachen erinnert:

- Ist bekannt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so muss die Folge (a_k) gegen Null konvergieren.

- Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe von reellen oder komplexen Zahlen, $c_k > 0$, $|a_k| \leq c_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent (Majorantenkriterium).
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert, aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert.
- Ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine Reihe positiver reeller Zahlen und gibt es ein $C > 0$, so dass $\sum_{k=0}^{n} c_k \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so ist die Reihe konvergent.

Definition:

1) Seien $f_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ irgendwelche Funktionen. Wir nennen die ***Funktionenreihe*** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ***punktweise konvergent*** gegen eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

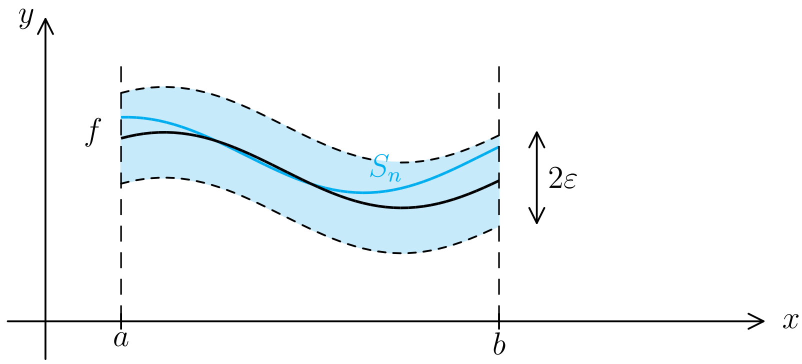
für alle $x \in [a, b]$ gilt.

2) Angenommen, alle f_k aus (1) seien stetig. Dann nennen wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ***gleichmäßig gegen*** f ***konvergent***, wenn gilt:

$$\max_{a \leq x \leq b} \Big| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x) \Big| \longrightarrow 0 \ \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Anschaulich bedeutet die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe $\sum f_k$ gegen eine Grenzfunktion f, dass sich die Graphen der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig auf dem Definitionsintervall dem Graphen der Grenzfunktion f annähern. Aber wie beschreibt man die Annäherung an einen Graphen? Ein geeignetes Mittel ist – zumindest bei reellwertigen Funktionen – der sogenannte „ε-Schlauch“ (= Parallelstreifen der Dicke ε):

$$U_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \, : \, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$



Die Mathematiker drücken die gleichmäßige Konvergenz dann so aus: Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ der Graph von $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ im ε-Schlauch $U_\varepsilon(f)$ verläuft.

2.3.2. Beispiel

Die Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$f_0(x) := 1 \quad \text{und} \quad f_k(x) := x^k - x^{k-1} \text{ für } k \geq 1.$$

Dann ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = 1 + (x-1) + (x^2 - x) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n$.

Ist $0 \leq x < 1$, so strebt $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ gegen Null. Für $x = 1$ strebt die Summe gegen 1. Das bedeutet, dass die Funktionenreihe punktweise gegen die unstetige Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

konvergiert. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, da die f_k aus jedem ε-Schlauch um f irgendwann herauslaufen.

Beschränkt man die Folge der f_k aber auf ein abgeschlossenes Intervall $[0, a]$ mit $a < 1$, so wird die Konvergenz dort gleichmäßig.

Es gilt:

2.3.3 Satz (Weierstraß-Kriterium):

Es seien stetige Funktionen $f_k : [a,b] \to \mathbb{C}$ gegeben. Wenn Zahlen $c_k > 0$ existieren, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert und

$$\max_{a \leq x \leq b} |f_k(x)| \leq c_k$$

für alle k gilt, so konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine stetige Grenzfunktion f.

2.3.4. Beispiel

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, weil $\sum_k 1/k^2 < \infty$ ist.

Die folgende Ungleichung sagt etwas über das Verhalten der Fourierkoeffizienten $c_k(f)$ für $|k| \longrightarrow \infty$ aus, nämlich:

2.3.5 Satz. *Wenn $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und T-periodisch ist, so gilt die* ***Besselsche Ungleichung****:*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere strebt $c_k(f)$ für $|k| \longrightarrow \infty$ gegen Null.

Beweis. Wir rechnen ein Integral aus, und zwar

$$
\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \int_0^T \Big| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega k t} \Big|^2 dt \\
&= \int_0^T |f(t)|^2\, dt - 2 \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{Re}\Big(\overline{c_k(f)} \int_0^T f(t) e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}\, dt\Big) \\
&\quad + \sum_{k,l=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_l(f)} \underbrace{\int_0^T e^{\mathbf{j}\,(k-l)\omega t} dt}_{=0,\text{ wenn } k\neq l,\ =T \text{ sonst}} \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt - 2T \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 + T \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt - T \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2
\end{aligned}
$$

Daraus können wir die Behauptung ablesen. □

Mit erheblich mehr Aufwand kann man die Bessel'sche Ungleichung folgendermaßen verbessern:

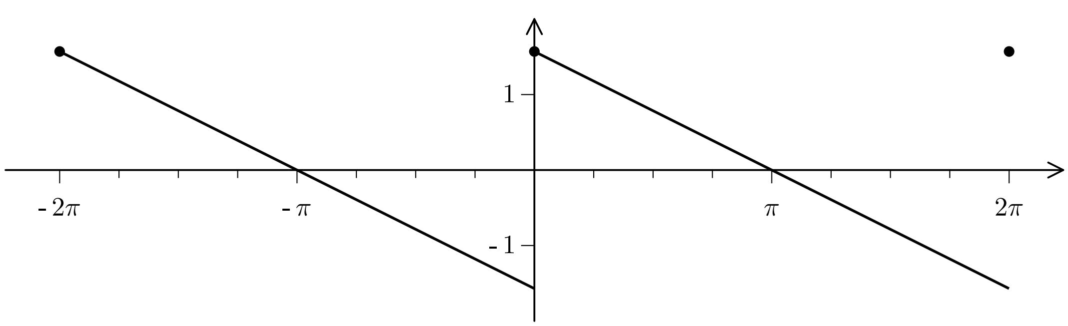
2.3.6 Satz (Parseval'sche Gleichung, Vollständigkeitsrelation):
Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und T-periodisch, so gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt.$$

Nun wenden wir uns der Konvergenz von Fourierreihen zu.

Betrachten wir folgendes **Beispiel:**

Sei $\quad f_0(x) := \dfrac{\pi - x}{2} \quad$ für $0 \leq x < 2\pi$ (und mit Periode 2π fortgesetzt).



f_0 ist eine ungerade Funktion mit Fourierreihe $f_0 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, denn es ist

$$b_k(f_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{1}{k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Reihe hat bei Null den Wert 0, während $f(0) = \pi/2$ ist. Eine Funktion, die die von uns bisher gestellten Bedingungen erfüllt, wird also im allgemeinen nicht einmal punktweise durch ihre Fourierreihe dargestellt.

Man könnte bei dem oben gegebenen Beispiel vermuten, das liege an der Unstetigkeit der Sägezahnfunktion. Aber auch, wenn man von der Funktion f die Stetigkeit voraussetzt, kann man nicht schließen, dass sie durch ihre Fourierreihe dargestellt wird. Ein erstes Beispiel hierfür wurde von P. du Bois-Reymond 1876 gefunden, womit eine alte Vermutung von J. Fourier widerlegt wurde. Es muss eine stärkere Bedingung gestellt werden. Die Bedingung der Differenzierbarkeit ist hinreichend, aber zu restriktiv. Wir werden weiter unten ein „Mittelding" zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit kennenlernen, das die Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Fourierreihe impliziert.

Wir stellen zuerst die „Fouriersummen"

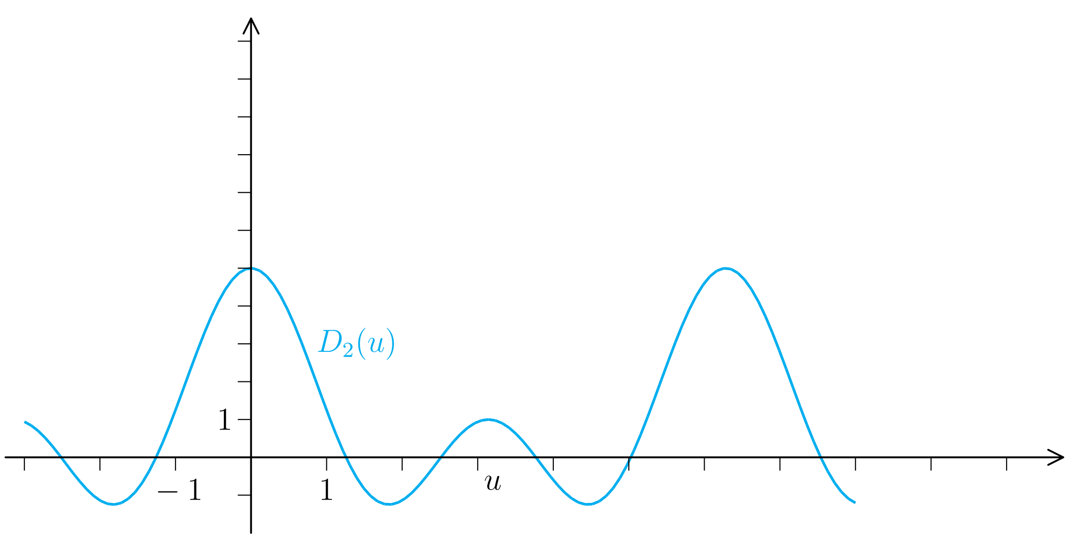
$$S_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,kt}$$

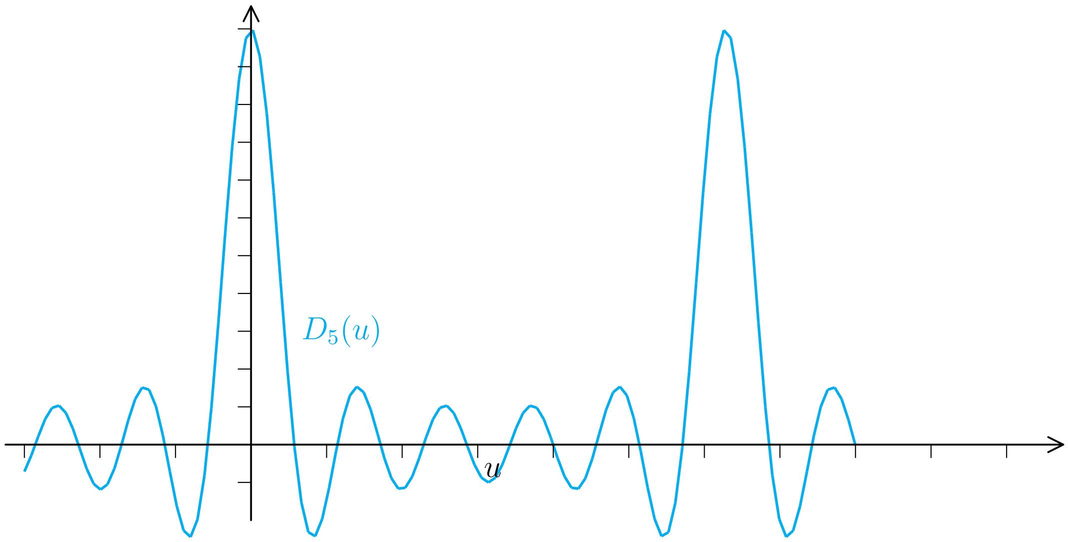
einer 2π-periodischen Funktion mit Hilfe des sogenannten „Dirichletkerns" dar:

Definition: Die Funktion

$$D_n(u) := \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathbf{j}\,ku}$$

wird als ***Dirichlet-Kern*** bezeichnet.





Es gilt

a) D_n ist 2π-periodisch, $D_n(-u) = D_n(u)$ (trivial),

b) $\int_0^{2\pi} D_n(u)du = 2\pi$ (weil nur der Term $k = 0$ einen Beitrag liefert),

c) $D_n(u) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}$ (vgl. Übungsaufgabe auf Blatt 1).

2.3.7 Dirichlet'sche Integralformel:

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion. Dann ist

$$S_n f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)D_n(u)\,du.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
S_n f(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathbf{j}\,kt} = \sum_{k=-n}^{n}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-\mathbf{j}\,ks}\,ds\Big)e^{\mathbf{j}\,kt} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(s)\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathbf{j}\,k(t-s)}\Big)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_n(t-s)\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{2\pi-t} f(t+u)D_n(u)\,du \qquad \text{(Substitution } u = s-t\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)D_n(u)\,du \qquad \text{(Periodizität, Verschiebung um } t-\pi\text{).}
\end{aligned}$$

□

Die Multiplikation des Integranden $f(t+u)$ mit dem Dirichlet-Kern $D_n(u)$ führt dazu, dass bei der Auswertung des Integrals die Anteile von f in der Nähe von t viel stärker gewichtet werden. Mit wachsendem n verstärkt sich der Effekt.

Anmerkung: Eine Zuordnung der Gestalt $f \mapsto \int_a^b f(u)D(u)\,du$ bezeichnet man in der Mathematik als „Integral-Operator". Man kann das auch in der Form $\int_a^b(\dots)D(u)\,du$ schreiben. Die Funktion D nennt man dann den „Kern" des Integral-Operators. Daher rührt der Name „Dirichlet-Kern".

Wir nennen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ***stückweise glatt***, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, so dass gilt:

1. $f|_{(x_{i-1},x_i)}$ ist stetig differenzierbar.
2. Für $i = 1, \dots, n$ existieren die Grenzwerte
$$f(x_i-) := \lim_{x\to x_i, x<x_i} f(x) \quad \text{und} \quad f'(x_i-) := \lim_{x\to x_i, x<x_i} \frac{f(x)-f(x_i-)}{x-x_i}.$$
3. Für $i = 0, \dots, n-1$ existieren die Grenzwerte
$$f(x_i+) := \lim_{x\to x_+, x>x_i} f(x) \quad \text{und} \quad f'(x_i+) := \lim_{x\to x_i, x>x_i} \frac{f(x)-f(x_i+)}{x-x_i}.$$

Ist f stückweise glatt, so definiert man:
$$M_f(x) := \frac{1}{2}\big(f(x-)+f(x+)\big).$$
Das ist bei Sprungstellen der Mittelwert zwischen dem Grenzwert von links und dem Grenzwert von rechts. Ist f in x stetig, so ist $M_f(x) = f(x)$.

2.3.8 Hauptsatz der Harmonischen Analyse: *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise glatt und periodisch mit Periode 2π. Dann konvergiert die Fourierreihe von f* ***punktweise*** *gegen M_f.*

Beweis. Am einfachsten lässt sich das in einem Punkt x_0 zeigen, in dem f differenzierbar ist.

Nach der Dirichlet'schen Integralformel ist
$$\begin{aligned} S_n f(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x_0+u)\,du - \frac{f(x_0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\big[f(x_0+u)-f(x_0)\big]\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n+\frac{1}{2})u\big) g(u)\,du \end{aligned}$$
mit der stetigen und außerhalb von 0 differenzierbaren Funktion
$$g(u) := \frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\cdot\frac{u}{\sin(u/2)}.$$
Nach einem Satz von Riemann und Lesbesgue konvergiert $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nu)g(u)\,du$ für $n \to \infty$ gegen Null. Daraus folgt die Konvergenz der Fourierreihe im Punkt x_0.

In den Sprungstellen von f zeigt man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(x+) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du \\ \text{und}\quad \frac{1}{2}f(x-) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+u)D_n(u)\,du. \end{aligned}$$

Die Addition der beiden Formeln ergibt (mit der Dirichlet'schen Integralformel) auch in diesem Fall die Behauptung.

□

Darüber hinaus kann man zeigen:

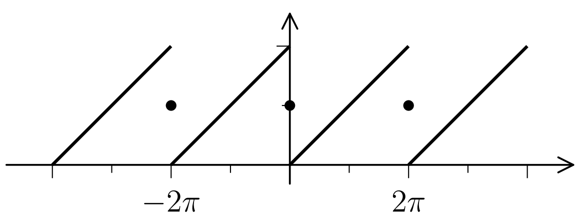
2.3.9 Satz. *Ist f stückweise glatt und periodisch, so konvergiert die Fourierreihe von f* ***auf jedem abgeschlossenen Intervall, auf dem f stetig ist, gleichmäßig*** *gegen f.*

Beispiele:

a) Die Sägezahnfunktion $S(t) := t$ auf $[0, 2\pi)$ hat – wenn man sie periodisch fortsetzt – eine Unstetigkeitsstelle bei 0. Es ist

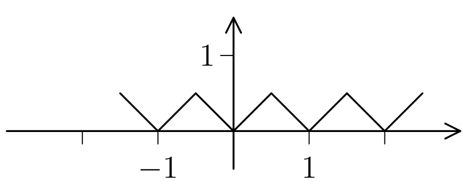
$$S(0+) = 0 \quad \text{und} \quad S(0-) = 2\pi, \text{ also } M_S(0) = \pi.$$

Weil S stückweise glatt ist, konvergiert die Fourierreihe von S überall gegen M_S.



b) Die „Zackenfunktion" h sei gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 1/2, \\ 1-x & \text{für } 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$



Sie ist stetig und stückweise glatt, also sogar eine stückweise stetig differenzierbare Funktion.

Die zugehörige Fourierreihe

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2}\cos(2\pi k\,x)$$

konvergiert gleichmäßig gegen h, insbesondere müssen die Werte der Funktion und die Werte der Fourierreihe überall übereinstimmen. Für $x = 0$ erhalten wir daher

$$\sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{2}\Big(\frac{1}{4} - h(0)\Big) = \frac{\pi^2}{8}$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k>0 \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2},$$

also

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Fourier-Theorie liefert uns die Summe einer Reihe, die wir mit Mitteln der elementaren Analysis kaum herausbekommen hätten.

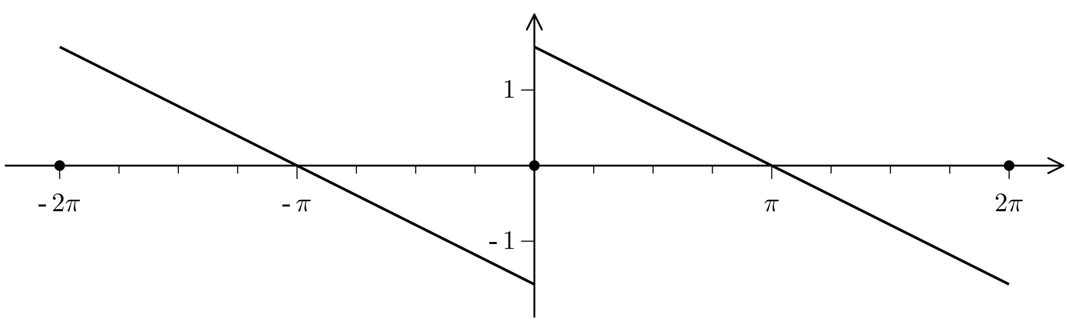
Das Gibbs-Phänomen:

Der Mangel an Gleichmäßigkeit im Konvergenzverhalten der Fourierreihe einer Funktion mit Sprungstellen lässt sich quantitativ beschreiben:

Wir betrachten als Beispiel noch einmal die stückweise glatte (und periodisch fortgesetzte) Funktion

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{für } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = 2\pi, \end{cases}$$

die wir jetzt schon so abgeändert haben, dass sie mit ihrem Mittelwert übereinstimmt.

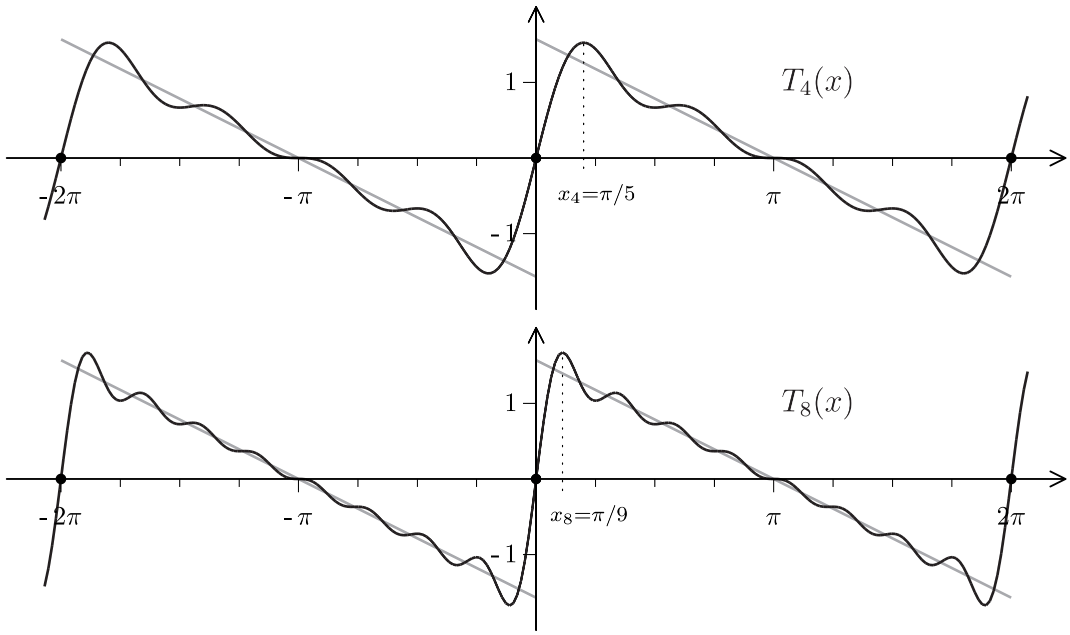


f_0 ist eine ungerade Funktion mit Fourierreihe $f_0 \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

An den Unstetigkeitsstellen schießen die Partialsummen der Fourierreihe um einen unangenehm hohen Betrag über das Ziel hinaus, und die Approximation wird mit wachsendem n sogar schlechter. Das liegt daran, dass $S_n f$ jeweils an der Stelle $x_n := \pi/(n+1)$ sein erstes Maximum rechts von Null hat und der Wert $S_n f(x_n)$

für $n \to \infty$ gegen einen Wert oberhalb der Zahl $\int_0^\pi (\sin u)/u\,du = 1.85193705\ldots$ strebt. Er liegt damit um ca. 18% über $1.570796327 = \dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to 0+} f_0(x)$.

Dieses Verhalten wird das ***Gibbs'sche Phänomen*** genannt, und es ist bei allen unstetigen, stückweise glatten, periodischen Funktionen zu beobachten. Es folgt eine Illustration mit zwei solchen Partialsummen.



Erwähnt werden soll noch ein Konvergenzbegriff, der besonders gut an die Fouriertheorie angepasst ist. Ist f stückweise stetig, so kann man f die Zahl

$$||f||_2 := \Big(\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}$$

zuordnen, die sogenannte L^2***-Norm***. In einem Vektorraum ist die „Norm“ eines Vektors dessen Länge (und wird manchmal auch als „Betrag“ des Vektors bezeichnet). Im vorliegenden Fall ist f Element eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes von Funktionen auf $[0,T]$, und die Norm lässt sich nicht mehr so einfach geometrisch deuten. In gewisser Weise ist sie ein Maß für die Energie des Signals, das durch f beschrieben wird. Die Norm der Differenz $f-g$ zweier Signale bezeichnet dann die energetische Differenz zwischen diesen Signalen.

Bezeichnet man das N-te Fourierpolynom von f mit $S_N f$, so gilt:

$$||S_N f - f||_2 = \Big(\frac{1}{T}\int_0^T |S_N f(t) - f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \to 0 \text{ für } N \to \infty.$$

Man sagt, dass die Fourierreihe „im quadratischen Mittel“ gegen die Funktion konvergiert.

Ist P irgendein trigonometrisches Polynom vom Grad N, so ist

$$||S_N f - f||_2 \leq ||P - f||_2.$$

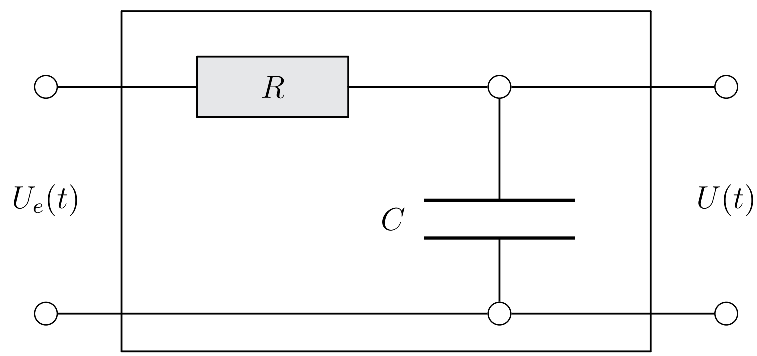
Die Fourierpolynome approximieren f unter allen trigonometrischen Polynomen am besten!

Zum Schluss eine interessante **Anwendung der Fourierreihen:**

Der ***Tiefpassfilter***

Dies ist ein Schaltkreis, der aus einem Widerstand R und einem Kondensator mit Kapazität C besteht. Sein Zweck besteht darin, Anteile hoher Frequenz in der Fourierzerlegung der Eingangsspannung „herauszufiltern“, d.h.: Die Fourierzerlegung der Ausgangsspannung enthält Anteile mit hoher Frequenz nur mit kleinem Gewichtsfaktor.

Tiefpassfilter benutzt man beim Bau von Lautsprechern.



Die Ausgangsspannung $U(t)$ und die Eingangsspannung $U_e(t)$ sind durch die Differentialgleichung

$$RC\,\dot{U} + U = U_e$$

miteinander verbunden. Nehmen wir jetzt an, dass U_e stetig, T-periodisch und stückweise stetig differenzierbar sei, so schreiben wir $U_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathbf{j}\,\omega kt}$. Setzen wir auch für U eine Fourierreihe an, $U(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{\mathbf{j}\,\omega kt}$, so entsteht zwischen den Fourierkoeffizienten beider Funktionen die Beziehung

$$(\mathbf{j}\,RC\omega k + 1)d_k = c_k, \quad \text{also} \;\; d_k = \frac{c_k}{1 + \mathbf{j}\,\omega RCk}$$

Die Fourierkoeffizienten von U gehen also aus denen von U_e durch Multiplikation mit den Faktoren $m_k := \dfrac{1}{1 + \mathbf{j}\,\omega RCk}$ hervor. Wir erinnern uns, dass solche Produkte bei der Faltung vorkommen. Im vorliegenden Fall entsteht also U aus U_e durch Faltung mit der Funktion

$$h(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k e^{\mathbf{j}\,\omega k t}.$$

Man nennt h die „Übertragungsfunktion" des Systems, es ist $U = h * U_e$.

Sei nun $T = 2\pi/\omega$ und

$$h_T(t) := \frac{T}{RC(1-e^{-T/RC})} \cdot e^{-t/RC} \quad \text{für } 0 \le t \le T \text{ (und } T\text{-periodisch fortgesetzt).}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T h_T(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega k t}\,dt &= \frac{1}{RC(1-e^{-T/RC})}\int_0^T e^{-(\frac{1}{RC}+\mathbf{j}\,\omega k)t}\,dt \\
&= \frac{1}{RC(1-e^{-T/(RC)})} \cdot \frac{1}{1/(RC)+\mathbf{j}\,\omega k}\left(-e^{-(1/(RC)+\mathbf{j}\,\omega k)t}\Big|_0^T\right) \\
&= m_k \cdot \frac{1-e^{-(1/(RC)+\mathbf{j}\,\omega k)T}}{1-e^{-T/(RC)}} \;=\; m_k \quad \text{(weil } T = 2\pi/\omega \text{ ist).}
\end{aligned}$$

Also ist $h_T = h$.

Je größer der Betrag von k wird, desto kleiner wird $|m_k| = \dfrac{1}{|1+\mathbf{j}\,RC\omega k|}$, so dass Anteile von hoher Frequenz (d.h. großes $\omega\, k$) kleines Gewicht erhalten und unterdrückt, also herausgefiltert werden, während Anteile mit niedriger Frequenz weniger geschwächt „durchlaufen". Daher rührt der Name „Tiefpassfilter" für die oben skizzierte Anordnung.

Als Beispiel betrachten wir nun als Input U_e den 2-Weg-gleichgerichteten Sinus, $U_e(t) = U_0|\sin(\omega t)|$. Der Konvergenzsatz ist anwendbar, da U_e stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Die Fourierentwicklung ist gegeben durch

$$U_e \sim -\frac{2U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}e^{2\mathbf{j}\,\omega k t}.$$

Wir erhalten dann

$$U(t) = -\frac{2U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2\mathbf{j}\,\omega RCk)(4k^2-1)}e^{2\mathbf{j}\,\omega k t}$$

Das ist die Fourierdarstellung zu U.