2.2 Rechnen mit Fourierreihen

In diesem Abschnitt sollen alle Funktionen als stückweise stetig und T-periodisch vorausgesetzt werden. Stets sei $\omega = 2\pi/T$.

Wir setzen jetzt aus Funktionen neue Funktionen zusammen und schauen, wie sich das auf die zugehörigen Fourierreihen auswirkt.

2.2.1 Linearität: *Sind $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben, so ist*

$$\begin{aligned} c_k(f+g) &= c_k(f) + c_k(g) \\ \text{und} \quad c_k(\alpha f) &= \alpha \cdot c_k(f). \end{aligned}$$

Beweis. ergibt sich ganz einfach aus der Linearität des Integrals. □

2.2.2 Konjugation: $c_k(\overline{f}) = \overline{c_{-k}(f)}$.

Beweis. Man rechnet direkt nach:

$$c_k(\,\overline{f}\,) = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)} e^{-\mathbf{j}\,\omega k t}\,dt = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{\mathbf{j}\,\omega k t}\,dt} = \overline{c_{-k}(f)}.$$

2.2.3 Zeitumkehr: *Ist $f_-(t) := f(-t)$, so haben wir*

$$c_k(f_-) = c_{-k}(f)$$

Beweis. Wegen der Periodizität von f und von $e^{\mathbf{j}\,k\omega t}$ folgt die 2. Behauptung aus der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} c_k(f_-) &= \frac{1}{T}\int_0^T f_-(t) e^{-\mathbf{j}\,\omega k t}\,dt \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T f(-t) e^{\mathbf{j}\,\omega k(-t)}\,dt \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^{-T} f(u) e^{\mathbf{j}\,\omega k u}\,du \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(u) e^{\mathbf{j}\,\omega k u}\,du \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(u) e^{\mathbf{j}\,\omega k u}\,du \;=\; c_{-k}(f). \end{aligned}$$

□

2.2.4 Dilatation:

Sei $a > 0$. Dann setzen wir $f_a(t) := f(at)$ und erhalten für die zugeordnete Fourierreihe:

$$f_a \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega a k t}.$$

Die Fourierkoeffizienten bleiben also unverändert, nur die Frequenz wechselt von ω zu $\omega_a := a\omega$.

Beweis. Die Funktion f_a ist offensichtlich (T/a)-periodisch, und die zugehörige Frequenz ist $\omega_a = a\omega$.

$$\begin{aligned} c_k(f_a) &= \frac{a}{T}\int_0^{T/a} f(at)e^{-\mathbf{j}\,\omega akt}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}dt = c_k(f) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

□

2.2.5 Translation:

Sei $a > 0$. Dann setzen wir $\tau_a f(t) = f(a+t)$ und erhalten für die zugeordnete Fourierreihe:

$$\tau_a f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(e^{\mathbf{j}\,\omega ak} c_k(f)\right) e^{\mathbf{j}\,\omega kt}$$

Beweis. Auch bei der Translation benutzt man die Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} c_k(\tau_a f) &= \frac{1}{T}\int_0^{T} f(a+t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(s)e^{-\mathbf{j}\,\omega k(s-a)}ds \;=\; e^{\mathbf{j}\,\omega ak}\,\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(s)e^{-\mathbf{j}\,\omega ks}\,ds \\ &= e^{\mathbf{j}\,\omega ak}\,\frac{1}{T}\int_0^{T} f(s)e^{-\mathbf{j}\,\omega ks}\,ds = e^{\mathbf{j}\,\omega ak}c_k(f) \end{aligned}$$

□

2.2.6 Frequenzmodulation: *Wenn f mit $e^{\mathbf{j}\,n\omega t}$ multipliziert wird, ensteht*

$$e^{\mathbf{j}\,n\omega t} f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-n}(f)e^{\mathbf{j}\,\omega kt}$$

Beweis. Ähnlich wie bei der Translation.

□

Eine T-periodische Funktion f heißt ***gerade*** (bzw. ***ungerade***), falls $f(-t) = f(t)$ (bzw. $f(-t) = -f(t)$) für $0 \le t \le T$ ist.

2.2.7 Satz. *Sei f eine T-periodische Funktion.*

a) Ist f gerade, so ist $b_k = 0$ und damit $c_k(f)$ reell für alle $k > 0$.

b) Ist f ungerade, so ist $a_0 = 0$, $a_k = 0$ und damit $c_k(f)$ rein imaginär für alle $k > 0$.

Beweis. a) Ist f gerade, so ist $f(t)\sin(k\omega t)$ ungerade für alle $k > 0$ und daher

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = 0.$$

b) Ist f ungerade, so ist $f(t)\cos(k\omega t)$ ungerade für alle $k > 0$ und

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = 0.$$

Die Aussagen über die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k = c_k(f)$ gewinnt man aus den Formeln

$$\boxed{a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) \quad \text{und} \quad b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k),}$$

also

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathbf{j}\,b_k) \text{ für } k > 0.$$

□

Wir untersuchen nun, wie weit Fourierreihen gliedweise differenziert werden können.

Dabei erinnern wir uns an den Begriff der Stammfunktion und den „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“:

Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann man durch

$$F(t) := \int_a^t f(s)\,ds$$

eine stetig differenzierbare Funktion gewinnen, so dass $F' = f$ ist. Man nennt F in diesem Fall eine ***Stammfunktion*** von f. Es ist $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds = F(b) - F(a)$.

Ist nun f stückweise stetig, so ist F ebenfalls definiert und stetig. Die Ableitung von F existiert dort, wo f stetig ist. In den Sprungstellen von F existiert zumindest jeweils der Grenzwert von F' von links und von rechts.

Definition: Die Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***stückweise stetig differenzierbar***, falls gilt:

1. F ist überall stetig und außerhalb von endlich vielen Stellen $x_0, \ldots, x_n$ differenzierbar mit stetiger Ableitung.
2. In den Punkten x_i existiert jeweils der Grenzwert von F' von links und rechts.

Wir nennen die Ableitung von F wieder F', sie ist stückweise stetig.

Beispiel: Die Funktion $f(x) := |x|$ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar und ihre Ableitung existiert für alle $x \neq 0$. Es gilt $f'(x) = 1$, wenn $x > 0$ und $f'(x) = -1$, wenn $x < 0$. Der Grenzwert von f' bei $x = 0$ von links ist natürlich auch $= -1$, und der von rechts $= +1$.

2.2.8 Satz über die gliedweise Differenzierbarkeit von Fourierreihen:
Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, T-periodisch und stückweise stetig differenzierbar, so ist

$$c_k(f') = \mathbf{j}\,\omega k c_k(f) \quad \text{und} \quad f' \sim \mathbf{j}\,\omega \sum_{k\in\mathbb{Z}} k c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega kt}.$$

Man erhält die Fourierreihe von f' aus der von f durch gliedweises Differenzieren!

Beweis. Wir unterteilen das Intervall $[0, T]$ in Differenzierbarkeitsbereiche von f. Sind $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ die Stellen, an denen f keine eindeutige Ableitung hat, so haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\,dt &= f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} + \mathbf{j}\,\omega k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\,dt \\
&= f(t_j)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt_j} - f(t_{j-1})e^{-\mathbf{j}\,\omega kt_{j-1}} + \mathbf{j}\,\omega k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\,dt
\end{aligned}$$

Wenn wir über $j = 1, \ldots, N$ summieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k(f') &= \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\,dt = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}\,dt \\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{T}\big(f(t_j)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt_j} - f(t_{j-1})e^{-\mathbf{j}\,\omega kt_{j-1}}\big) + \mathbf{j}\,\omega k\, c_k(f) \\
&= \mathbf{j}\,\omega k c_k(f),
\end{aligned}$$

denn die Werte von $f(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}$ stimmen in 0 und T überein. Insbesondere ist $c_0(f') = 0$.

□

Achtung: Dieser Satz gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn f nicht als stetig vorausgesetzt wird. Ist etwa $S(t) = t$ die Sägezahnfunktion, die in Abschnitt 2.1 behandelt wurde, so wird $S'(t) = 1$, wo immer S' existiert. Damit wird

$$\begin{aligned}
c_0(S') &= \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1 \\
\text{und} \quad c_k(S') &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}\,dt = -\frac{1}{\mathbf{j}\,k\omega T}\,e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}\Big|_0^T = 0 \text{ für } k > 0,
\end{aligned}$$

während aber $c_k(S) = \mathbf{j}/k$ für $k \neq 0$ ist, also $\mathbf{j}\,\omega k c_k(S) = -\omega \neq c_k(S')$ für alle $k \neq 0$.

Das Folgende kann als „Gegenstück“ zum Differentiationssatz angesehen werden:

2.2.9 Satz über die Fourierentwicklung von Stammfunktionen:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei T-periodisch und stückweise stetig, und es sei $\int_0^T f(s)\,ds = 0$. Dann ist auch

$$F(t) := \int_0^t f(s)ds$$

periodisch mit Periode T, und die Fourierreihe von F ist gegeben durch

$$F \sim c_0(F) - \frac{\mathbf{j}}{\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega k t}.$$

Hierbei ist

$$c_k(F) = -\frac{\mathbf{j}}{k\omega}\, c_k(f) \text{ für } k \neq 0, \quad \text{und} \quad c_0(F) = -\frac{1}{T}\int_0^T t f(t)dt.$$

Beweis. Zunächst sehen wir:

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(s)ds = \underbrace{\int_0^T f(s)ds}_{=F(T)=0} + \int_T^{t+T} f(s)ds = \int_0^t f(s)ds = F(t)$$

Damit ist erkannt, dass auch F die Periode T hat. Für die Fourierkoeffizienten gilt jetzt, da der Differentiationssatz auf F anwendbar ist:

$$c_k(f) = c_k(F') = k\omega\mathbf{j} \cdot c_k(F), \text{ also } c_k(F) = -\frac{\mathbf{j}}{k\omega} c_k(f), \text{ wenn } k \neq 0 \text{ ist.}$$

Seien $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ so gewählt, dass f auf den Teilintervallen (t_{j-1}, t_j) stetig ist. Dann erhält man mit partieller Integration:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} F(t)\,dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} t' \cdot F(t)\,dt = t \cdot F(t)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} tF'(t)\,dt.$$

Summieren wir dies über alle j, so folgt:

$$\begin{aligned} c_0(F) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt \;=\; \frac{1}{T}\Big(\sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(t)\,dt\Big) \\ &= \frac{1}{T}\Big(\sum_{j=1}^N \big(t_j F(t_j) - t_{j-1}F(t_{j-1})\big) - \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} tF'(t)\,dt\Big) \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^T t f(t)\,dt, \end{aligned}$$

denn es ist $F(T) = 0$ (Voraussetzung) und daher

$t_1F(t_1) + \big(t_2F(t_2) - t_1F(t_1)\big) + \cdots + \big(T \cdot F(T) - t_{N-1}F(t_{N-1})\big) = 0.$

Das bedeutet, dass die Fourierreihe von f gliedweise integriert werden darf!

2.2.10. Beispiele

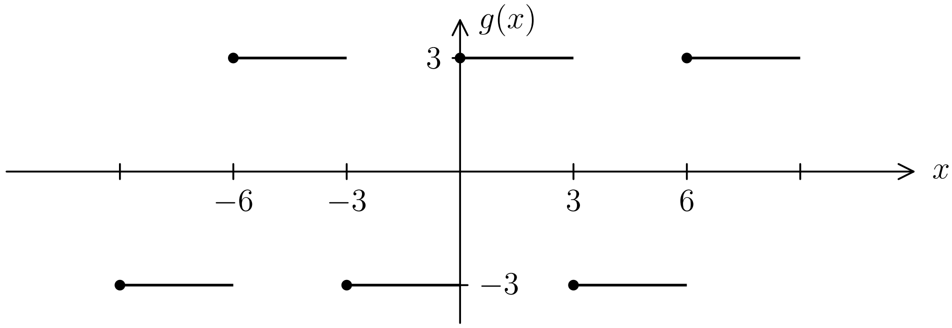
A. Wir können mit den oben hergeleiteten Regeln die Fourierreihen solcher Funktionen berechnen, die mit schon bekannten „verwandt" sind.

Sei etwa

$$g(x) := \begin{cases} 3 & \text{wenn } 0 \leq x < 5 \\ -3 & \text{wenn } -5 \leq x < 0. \end{cases},$$

mit der Periode $T = 10$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Im Bild:



Ist nun P_1 die in Abschnitt 2.1 behandelte „Pulsfunktion", mit Amplitude 1, Periode $T = 1$ und Frequenz $\omega = 2\pi$, sowie $c_k(P_1) = -2\mathbf{j}\,/(\pi k)$ für ungerades k und $= 0$ für gerades k, so haben wir

$$g(x) = 3P_1\Big(\frac{x}{10}\Big) = 3 \cdot (P_1)_{1/10}(x).$$

Die Regel für die Dilatation mit Faktor $a = 1/10$ ist anwendbar und liefert uns die zu g gehörige Fourierreihe. g hat die Amplitude 3, die Periode 10 und Frequenz $\omega_a = 2\pi/T = \pi/5$. Dann ist

$$c_k(g) = 3 \cdot c_k(P_1) = \frac{-6\mathbf{j}}{\pi k} \text{ für ungerades } k, \quad \text{und } g \sim -\frac{6\mathbf{j}}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{e^{\mathbf{j}\,k(\pi/5)t}}{k}.$$

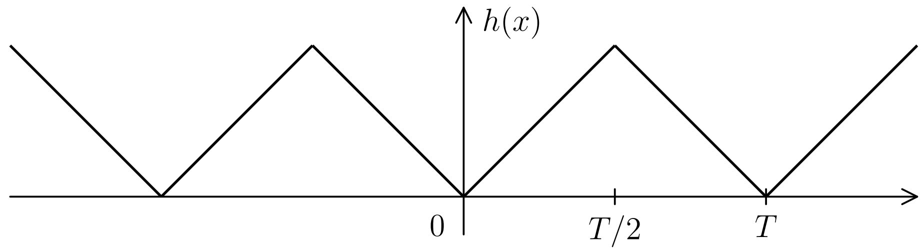
Da g eine ungerade Funktion ist, ist $a_k = 0$. Mit der Formel $b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k)$ erhält man die reelle Form:

$$g \sim \frac{12}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{\sin(\pi k t/5)}{k}.$$

B. Die „Zackenfunktion" h ist gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } 0 \leq x \leq T/2, \\ T - x, & \text{wenn } T/2 \leq x \leq T. \end{cases}$$

Dabei sei $T > 0$ und h T-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Die Frequenz ist $\omega = 2\pi/T$.



Wir sehen, dass die Ableitung von h außerhalb der Werte $mT/2$ mit $m \in \mathbb{Z}$ existiert, und dort gilt $h'(x) = P_1(x/T)$, wobei P_1 wieder für die Pulsfunktion steht. Also gilt für die Fourierreihe von h':

$$h' = (P_1)_{1/T} \sim -\frac{2\mathbf{j}}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{e^{\mathbf{j}\,k(2\pi/T)x}}{k}$$

Da $\displaystyle\int_0^T h'(x)\,dx = \int_0^{T/2} dx - \int_{T/2}^T dx = \frac{T}{2} - \big(T - \frac{T}{2}\big) = 0$ ist, kann man den Satz von der Fourierreihe für Stammfunktionen auf h und h' anwenden.

Für $k \neq 0$ erhalten wir dann

$$c_k(h) = -\frac{\mathbf{j}}{\omega k}\, c_k(h') = -\frac{\mathbf{j}\,T}{2\pi k} \cdot \frac{-2\mathbf{j}}{k\pi} = -\frac{T}{\pi^2 k^2}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} c_0(h) &= -\frac{1}{T}\int_0^T t \cdot h'(t)\,dt \;=\; -\frac{1}{T}\Big[\int_0^{T/2} t\,dt - \int_{T/2}^T t\,dt\Big] \qquad (2.2.2)\\ &= -\frac{1}{T}\Big(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{T/2} - \frac{t^2}{2}\Big|_{T/2}^T\Big) \;=\; -\frac{1}{T}\left(\frac{T^2}{8} - \left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{8}\right)\right) \;=\; \frac{T}{4}. \end{aligned}$$

Da h eine gerade Funktion ist, erhält man mit den Formeln $a_0 = 2c_0$ und $a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k)$ für $k > 0$ die reelle Form der Fourierreihe:

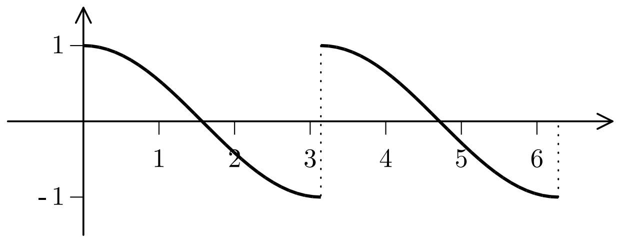
$$h \sim \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{k>0,\text{ ungerade}} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k\,t}{T}\right).$$

C. Wir betrachten die Funktion

$$K(t) := \begin{cases} \cos t & \text{wenn} \quad 0 \le t < \pi, \\ -\cos t & \text{wenn} \quad \pi \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Dann ist $T = \pi$ und $\omega = 2$.

Das Schaubild ist folgendes:



Ist $S_2(t) := |\sin t|$ der „zweiweg-gleichgerichtete Sinus“, so ist S_2 überall stetig und der Differentiationssatz anwendbar. Da $K(t) = S_2'(t)$ für $t \notin \mathbb{Z}\pi$ und

$$S_2 \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{2\mathbf{j}\,kt}$$

ist, folgt durch gliedweise Differentiation:

$$K \sim S_2' \sim -\frac{2\mathbf{j}}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2k}{4k^2 - 1} e^{2\mathbf{j}\,kt},$$

also

$$c_n(K) = \begin{cases} -\dfrac{2\mathbf{j}}{\pi} \cdot \dfrac{n}{n^2 - 1} & \text{für gerades } n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da K ungerade ist, ist $a_n(K) = 0$ für alle n und

$$b_n(K) = -2\,\mathrm{Im}\big(c_n(K)\big) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \cdot \dfrac{n}{n^2 - 1} & \text{für gerades } n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ergibt die reelle Fourierreihe:

$$K \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - 1} \sin(2kt)\,.$$

Als nächstes untersuchen wir die sogenannte „Faltung“ zweier periodischer Funktionen.

Definition: Sind die beiden Funktion $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und periodisch (mit Periode T), so bezeichnen wir die Funktion

$$f * g(t) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t - s) g(s) ds$$

als ***(periodische) Faltung*** von f und g.

Folgende Eigenschaften der Faltung sind wichtig:

2.2.11 Satz. *a) Mit f und g ist auch $f * g$ wieder T-periodisch.*

b) Ist f stetig differenzierbar, so auch $f * g$, und es gilt $(f * g)' = f' * g$.

c) Es gilt $f * g = g * f$.

Beweis. a) ist klar.

b) Mit f ist offensichtlich auch f' periodisch mit Periode T.

Ist $\varphi(t,s) := t - s$, so ist $\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}(t,s) = f'(\varphi(t,s))\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s) = f'(\varphi(t,s))$ und

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t,s))g(s)\,ds.$$

Als „Parameterintegral" ist $f*g$ differenzierbar, und man kann unter dem Integral differenzieren. Dann ist

$$(f*g)'(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t}(t,s)\cdot g(s)\,ds = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t-s)g(s)\,ds = (f'*g)(t).$$

c) Mit der Substitution $u = t - s$ folgt:

$$\begin{aligned} T\cdot(g*f)(t) &= \int_0^T g(t-s)f(s)\,ds \;=\; -\int_t^{t-T} g(u)f(t-u)\,du \\ &= \int_{t-T}^t f(t-u)g(u)\,du \;=\; \int_0^T f(t-u)g(u)\,du \;=\; T\cdot(f*g)(t). \end{aligned}$$

□

Die Aussage (b) deutet an, was der Effekt der Faltung ist. In diesem Fall wird eine eventuell nicht differenzierbare Funktion (die Funktion g) durch Falten mit f „geglättet".

Beispiel: Sei wieder P_1 die „Pulsfunktion", also

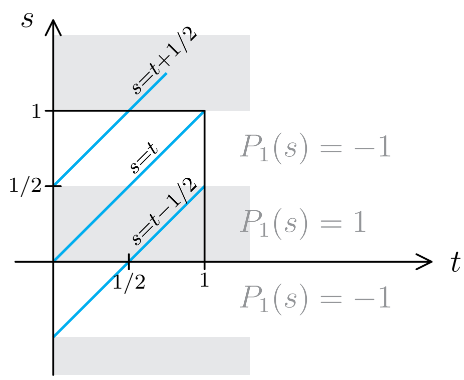
$$P_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x\in[0,\,1/2), \\ -1 & \text{für } x\in[1/2\,,1) \end{cases},$$

natürlich periodisch mit Periode 1 auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} P_1 * P_1(t) &= \int_0^{1/2} P_1(t-s)\,ds - \int_{1/2}^1 P_1(t-s)\,ds \\ &= -\int_t^{t-1/2} P_1(u)\,du + \int_{t-1/2}^{t-1} P_1(u)\,du \\ &= \int_{t-1/2}^t P_1(s)\,ds - \int_{t-1}^{t-1/2} P_1(s)\,ds \\ &= \int_{t-1/2}^t P_1(s)\,ds - \int_t^{t+1/2} P_1(s)\,ds \qquad \text{(wegen der Periodizität).} \end{aligned}$$

Für die weitere Auswertung ist die folgende Skizze nützlich:



Sei $0 \le t < 1/2$. Dann gilt:

$$\int_{t-1/2}^{t} P_1(s)\,ds = \int_{t-1/2}^{0} P_1(s)\,ds + \int_{0}^{t} P_1(s)\,ds = -s\,\Big|_{t-1/2}^{0} + s\,\Big|_{0}^{t} = 2t - \frac{1}{2}$$

und

$$\int_{t}^{t+1/2} P_1(s)\,ds = \int_{t}^{1/2} P_1(s)\,ds + \int_{1/2}^{t+1/2} P_1(s)\,ds = s\,\Big|_{t}^{1/2} - s\,\Big|_{1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{2} - 2t,$$

also $P_1 * P_1(t) = (2t - 1/2) - (1/2 - 2t) = 4t - 1$.

Ist $1/2 \le t < 1$, so gilt:

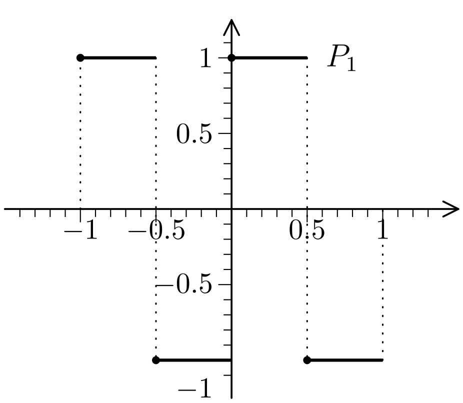
$$\int_{t-1/2}^{t} P_1(s)\,ds = \int_{t-1/2}^{1/2} P_1(s)\,ds + \int_{1/2}^{t} P_1(s)\,ds = s\,\Big|_{t-1/2}^{1/2} - s\,\Big|_{1/2}^{t} = -2t + \frac{3}{2}$$

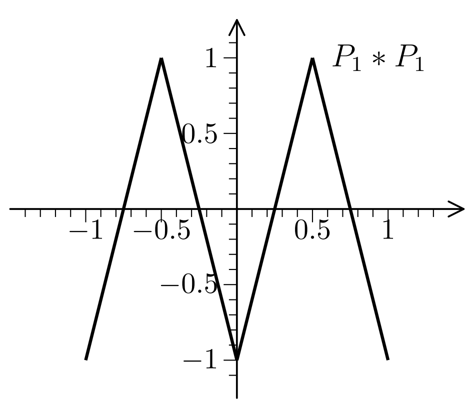
und

$$\int_{t}^{t+1/2} P_1(s)\,ds = \int_{t}^{1} P_1(s)\,ds + \int_{1}^{t+1/2} P_1(s)\,ds = -s\,\Big|_{t}^{1} + s\,\Big|_{1}^{t+1/2} = 2t - \frac{3}{2},$$

also $P_1 * P_1(t) = (-2t + 3/2) - (2t - 3/2) = -4t + 3$.

Hier ist das Schaubild von P_1 und $P_1 * P_1$:





Wenn wir $g := P_1 * P_1$ setzen, können wir auch $P_1 * g$ berechnen:[1]

Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} g * P_1(t) &= \int_0^{1/2} g(t-s)\,ds - \int_{1/2}^{1} g(t-s)\,ds \\ &= -\int_t^{t-1/2} g(u)\,du + \int_{t-1/2}^{t-1} g(u)\,du \\ &= \int_{t-1/2}^{t} g(s)\,ds - \int_{t-1}^{t-1/2} g(s)\,ds \\ &= \int_{t-1/2}^{t} g(s)\,ds - \int_{t}^{t+1/2} g(s)\,ds. \end{aligned}$$

Hier ist nun zu beachten, dass g auf jedem Teilintervall anders definiert werden muss, es ist z.B.

$$g(t) = \begin{cases} 4t+3 & \text{für } -1 \le t < -1/2, \\ -4t-1 & \text{für } -1/2 \le t < 0, \\ 4t-1 & \text{für } 0 \le t < 1/2, \\ -4t+3 & \text{für } 1/2 \le t < 1, \\ 4t-5 & \text{für } 1 \le t < 3/2. \end{cases}$$

Sei nun $0 \le t < 1/2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{t-1/2}^{t} g(s)\,ds &= \int_{t-1/2}^{0} (-4s-1)\,ds + \int_0^t (4s-1)\,ds \\ &= (-2s^2 - s)\Big|_{t-1/2}^{0} + (2s^2 - s)\Big|_0^t \\ &= (t-1/2) + 2(t^2 - t + 1/4) + (2t^2 - t) \\ &= 4t^2 - 2t \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{t}^{t+1/2} g(s)\,ds &= \int_{t}^{1/2} (4s-1)\,ds + \int_{1/2}^{t+1/2} (3-4s)\,ds \\ &= (2s^2 - s)\Big|_{t}^{1/2} + (3s - 2s^2)\Big|_{1/2}^{t+1/2} \\ &= -(2t^2 - t) + (3t + 3/2 - 2(t^2 + t + 1/4)) - (3/2 - 1/2) \\ &= -4t^2 + 2t, \end{aligned}$$

[1] Grau unterlegte Passagen (wie die nachfolgende Rechnung) sind als ergänzendes „Expertenwissen“ anzusehen, das nicht in der Vorlesung behandelt wurde. Zur Übung und Vertiefung des mathematischen Verständnisses wird die Nacharbeitung empfohlen, sie bleibt aber optional.

also $g * P_1(t) = (4t^2 - 2t) - (-4t^2 + 2t) = 8t^2 - 4t$.

Ist $1/2 \leq t < 1$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{t-1/2}^{t} g(s)\,ds &= \int_{t-1/2}^{1/2} (4s-1)\,ds + \int_{1/2}^{t} (-4s+3)\,ds \\
&= (2s^2 - s)\Big|_{t-1/2}^{1/2} + (-2s^2+3s)\Big|_{1/2}^{t} \\
&= -\big(2(t^2 - t + 1/4) - (t-1/2)\big) + (-2t^2+3t) - (-1/2+3/2) \\
&= -4t^2 + 6t - 2
\end{aligned}$$

und

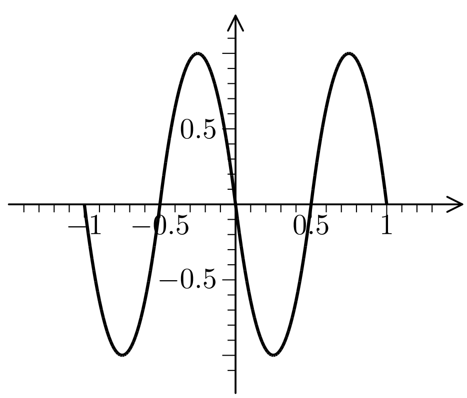
$$\begin{aligned}
\int_{t}^{t+1/2} g(s)\,ds &= \int_{t}^{1} (-4s+3)\,ds + \int_{1}^{t+1/2} (4s-5)\,ds \\
&= (-2s^2+3s)\Big|_{t}^{1} + (2s^2-5s)\Big|_{1}^{t+1/2} \\
&= (1 + 2t^2 - 3t) + \big(2(t^2+t+1/4) - 5t - 5/2\big) + 3 \\
&= 4t^2 - 6t + 2,
\end{aligned}$$

also $g * P_1(t) = (-4t^2 + 6t - 2) - (4t^2 - 6t + 2) = -8t^2 + 12t - 4$.

Der Graph der Funktion

$$g * P_1(t) = \begin{cases} 8t^2 - 4t & \text{für } 0 \leq t < 1/2 \\ -8t^2 + 12t - 4 & \text{für } 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$$

hat schon keinen Knick mehr:



Die Fourierreihe der Faltung periodischer Funktionen hat eine erstaunliche Eigenschaft:

2.2.12 Satz. *Sind $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktionen mit der Periode T, so ist*

$$f * g \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_k(g)\, e^{\mathbf{j}\,k\omega t}$$

Beweis. Als Fourierkoeffizienten von $f * g$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k(f*g) &= \frac{1}{T}\int_0^T f*g(t)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}dt \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T f(t-s)g(s)ds\right) e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}dt \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T f(t-s)g(s)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}ds\right) dt \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T f(t-s)g(s)e^{-\mathbf{j}\,\omega kt}dt\right) ds \quad (^2) \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T f(t-s)e^{-\mathbf{j}\,\omega k(t-s)}dt\right)\; g(s)e^{-\mathbf{j}\,\omega ks}ds
\end{aligned}$$

Für jedes $0 < s < T$ kann man nach den Regeln für periodische Funktionen das innere Integral umformen:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t-s)e^{-\mathbf{j}\,\omega k(t-s)}\,dt &= \int_{-s}^{T-s} f(u)\,e^{-\mathbf{j}\,\omega ku}\,du \quad \text{(Substitution } t-s=u\text{)} \\
&= \int_0^T f(u)e^{-\mathbf{j}\,\omega ku}\,du \quad \text{(Verschiebung des Periodenintervalls)} \\
&= T\cdot c_k(f).
\end{aligned}$$

Setzen wir das ein, so erhalten wir die Gleichung $c_k(f*g) = c_k(f)\cdot c_k(g)$.

□

[2] Satz von Fubini: Vertauschung der Integrationsreihenfolge.