2 Fourierreihen

2.1 Trigonometrische Reihen

Definition

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ***periodisch*** mit der ***Periode*** $T > 0$, wenn

$$f(x+T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Zahl $\boxed{\omega := 2\pi/T}$ heißt dann die ***Frequenz*** von f.

Wir wollen für periodische Funktionen f die sogenannten *Fourierkoeffizienten* einführen. Dazu muss f „genügend gutartig" sein:

Definition

Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ wird ***stückweise stetig*** genannt, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ des Intervalls gibt, so dass gilt:

- f ist auf jedem offenen Teilintervall (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, N$, stetig.
- In jedem Teilungspunkt t_i existiert der linksseitige und der rechtsseitige Limes von f:

$$f(t_i-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) \quad \text{und} \quad f(t_i+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t).$$

Eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Periode $T > 0$ heißt stückweise stetig, wenn f auf $[0, T]$ stückweise stetig ist.

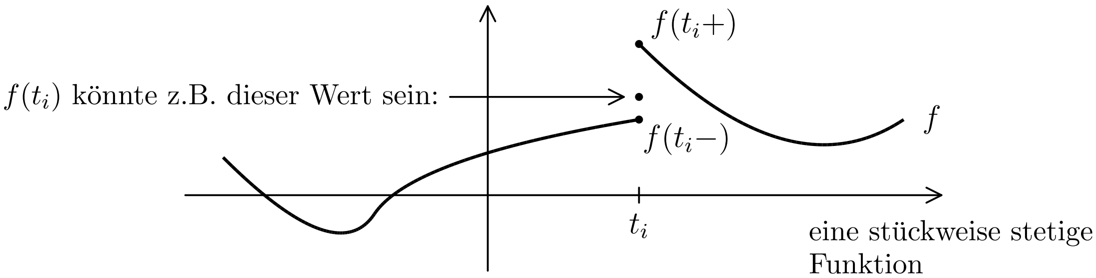
Für jedes i ist dann die Funktion $f_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$ mit

$$f_i(t) := \begin{cases} f(t_{i-1}+) & \text{für } t = t_{i-1}, \\ f(t) & \text{für } t_{i-1} < t < t_i, \\ f(t_i-) & \text{für } t = t_i \end{cases}$$

stetig und insbesondere beschränkt. Auch wenn in den Teilungspunkten t_i die drei Werte $f(t_i-)$, $f(t_i)$ und $f(t_i+)$ alle voneinander verschieden sein können, so gibt es doch eine reelle Zahl $C > 0$, so dass $|f(t)| \le C$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

In den Punkten t_i braucht f nicht stetig zu sein (auch wenn die Stetigkeit dort nicht verboten ist), die Unstetigkeiten sind aber schlimmstenfalls Sprungstellen. Wir setzen dann

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt.$$

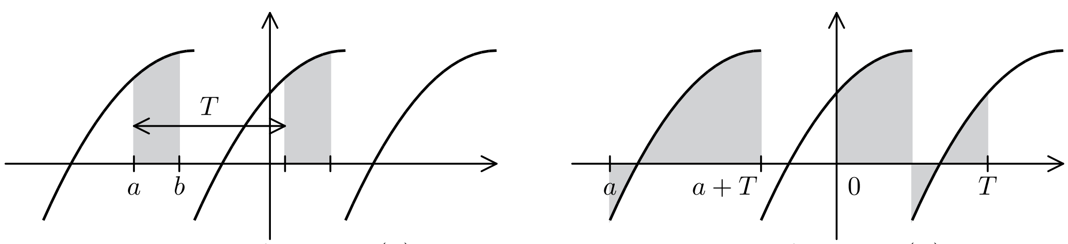


Wir werden in diesem Kapitel immer wieder die folgenden Rechenregeln über Integrale periodischer Funktionen brauchen:

2.1.1. Satz:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periode $T > 0$. Dann gilt:

1. *Für $a < b$ ist stets $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(s)\,ds$.*
2. *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(s)\,ds = \int_0^T f(u-a)\,du$.*



zur Aussage (a) zur Aussage (b)

Beweis: a) Wegen der Periodizität folgt – mit Hilfe der Substitutionsregel –

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t+T)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(s)\,ds.$$

b) Ist $a \in \mathbb{R}$, so folgt ebenfalls mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(u-a)\,du &= \int_{-a}^{T-a} f(s)\,ds = \int_{-a}^{0} f(s)\,ds + \int_0^{T-a} f(s)\,ds \\
&= \int_{T-a}^{T} f(s)\,ds + \int_0^{T-a} f(s)\,ds \qquad \text{(wegen (a))} \\
&= \int_0^T f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(s)\,ds &= \int_a^T f(s)\,ds + \int_T^{a+T} f(s)\,ds \\
&= \int_a^T f(s)\,ds + \int_0^a f(s)\,ds = \int_0^T f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

∎

2.1.2. Satz:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Funktion mit Frequenz $\omega := 2\pi/T$, so ist die Funktion $F(t) := f(t/\omega)$ periodisch mit Periode 2π.

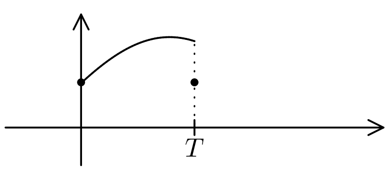
Beweis: Es ist

$$F(t+2\pi) = f\Big(\frac{t+2\pi}{\omega}\Big) = f\Big(\frac{t}{\omega} + T\Big) = f\Big(\frac{t}{\omega}\Big) = F(t).$$

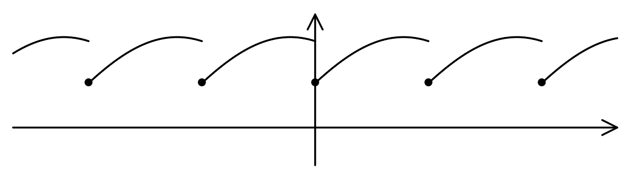
∎

Ist $g : [0,T] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion mit $g(0) = g(T)$ gegeben, so kann man g zu einer T-periodischen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen (die man üblicherweise wieder mit g bezeichnet. Der Wert der Fortsetzung an der Stelle $t + kT$ (mit $t \in [0,T)$ und $k \in \mathbb{Z}$) wird dabei natürlich $= g(t)$ gesetzt.

Ist $g(0) \neq g(T)$, so übernimmt man g nur auf $[0,T)$ und setzt willkürlich $g(T) := g(0)$. Dann kann man auch in diesem Falle periodisch fortsetzen.



Ausgangsfunktion f



periodische Fortsetzung

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, periodische Funktion mit Periode $T > 0$ und Frequenz $\omega = 2\pi/T$. Dann definieren wir für $k \in \mathbb{Z}$ den k-ten ***(komplexen) Fourierkoeffizienten*** $c_k(f)$ durch das Integral

$$\boxed{c_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-\mathbf{j}\, k\omega t}\, dt.}$$

Wir sagen, der Funktion f wird die ***komplexe Fourierreihe*** $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega k t}$ zugeordnet, in Zeichen:

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{\mathbf{j}\,\omega k t}.$$

Man beachte: **Im Augenblick wird die Frage nach der Konvergenz der Fourierreihe zurückgestellt !** Natürlich werden auf diese Frage noch einzugehen haben. Momentan jedoch interessieren wir uns nur für die Familie der Koeffizienten $c_k(f)$, welche in jedem Fall wohldefiniert ist.

Bei reellwertigen Funktionen betrachten wir auch die ***reelle Form der Fourierreihe***.

2.1.3. Satz:

Hat die T-periodische, stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nur **reelle** *Werte, so gilt für die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f)$:*

$$c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)} \quad \textit{für alle } k \geq 0.$$

Insbesondere ist $c_0(f)$ reell.

Ist

$$\begin{array}{rrcll} & a_k = a_k(f) & := & c_k + c_{-k} & = \ 2\ \mathrm{Re}(c_k) \\ \textit{und} & b_k = b_k(f) & := & \mathbf{j}\,(c_k - c_{-k}) & = \ -2\ \mathrm{Im}(c_k), \end{array}$$

so ist $\quad c_k(f)e^{\mathbf{j}\,\omega kt} + c_{-k}(f)e^{-\mathbf{j}\,k\omega t} = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$

Beweis: Tatsächlich ist

$$T \cdot c_{-k}(f) = \int_0^T f(t)e^{\mathbf{j}\,k\omega t}\,dt = \overline{\int_0^T f(t)e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}\,dt} = T \cdot \overline{c_k(f)},$$

wenn k positiv und ganz ist. Das liefert die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung rechnet man auch leicht nach: Es ist

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{2}\,a_0 \quad \text{und} \quad c_k = \mathrm{Re}(c_k) + \mathbf{j}\ \mathrm{Im}(c_k) = \frac{1}{2}(a_k - \mathbf{j}\,b_k) \quad \text{für } k > 0}$$

und daher

$$\begin{aligned} c_k(f)e^{\mathbf{j}\,\omega kt} + c_{-k}(f)e^{-\mathbf{j}\,k\omega t} &= 2\ \mathrm{Re}\left(c_k(f)e^{\mathbf{j}\,\omega kt}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big((a_k - \mathbf{j}\,b_k)(\cos(k\omega t) + \mathbf{j}\ \sin(k\omega t))\big) \\ &= a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t). \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

■

Damit bleibt unsere Zuordnung zwischen Funktionen und Fourierreihen konsistent, wenn wir im Falle reeller Funktionen vereinbaren, dass ihnen die ***reelle Fourierreihe***

$$c_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\ \mathrm{Re}\,c_k(f)\cos(k\omega t) - 2\ \mathrm{Im}\,c_k(f)\sin(k\omega t)$$

zugeordnet sein soll. Wir setzen $a_0 = a_0(f) := 2c_0(f)$ und schreiben

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

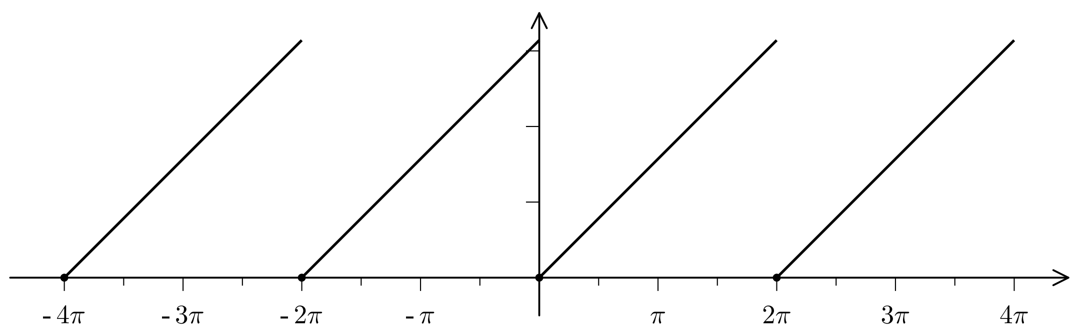
Dabei ist

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 &&= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \\ a_k &= 2\,\mathrm{Re}(c_k) &&= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\ \text{und}\quad b_k &= -2\,\mathrm{Im}(c_k) &&= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt. \end{aligned}} \tag{2.1.1}$$

Nun rechnen wir einige

2.1.4. Beispiele

A. Die ***Sägezahnfunktion*** ist die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $S(t) := t$. Im Bild sieht das folgendermaßen aus:



Dann ist $T = 2\pi$ und $\omega = 1$, und daher

$$c_0(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned} \text{und}\quad c_k(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-\mathbf{j}\,kt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{t}{-\mathbf{j}\,k}e^{-\mathbf{j}\,kt}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{\mathbf{j}\,k}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{j}\,kt}dt}_{=0}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{-\mathbf{j}\,k} = \frac{\mathbf{j}}{k} \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0. \end{aligned}$$

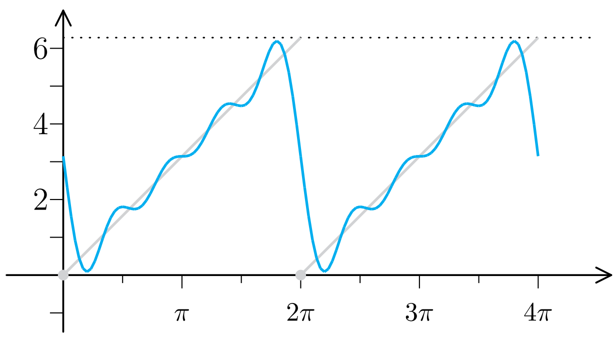
So finden wir

$$S \sim \pi + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{\mathbf{j}}{k}e^{\mathbf{j}\,kt}$$

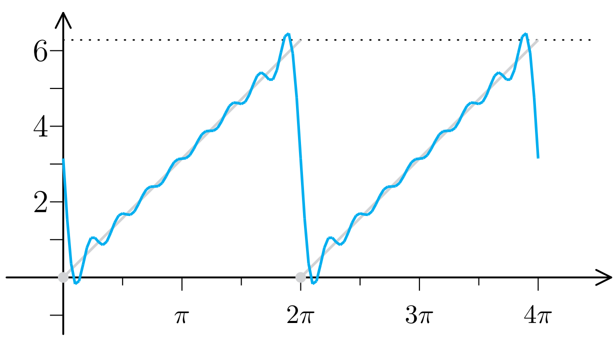
Da S reellwertig ist, $c_k + c_{-k} = 0$ und $\mathbf{j}\,(c_k - c_{-k}) = -2/k$, haben wir weiter

$$S \sim \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Hier ist das Schaubild der endlichen Summe $s_4(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{4} \frac{\sin(kt)}{k}$ zusammen mit dem Graphen von S:



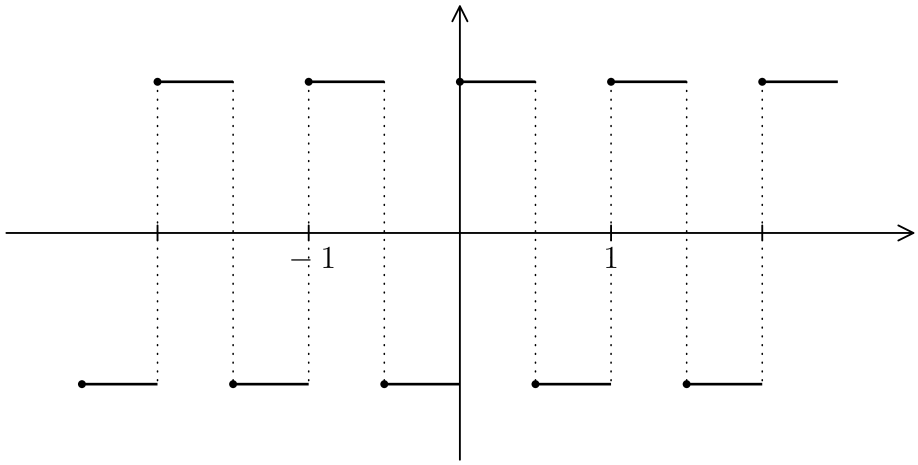
Und hier ist das Schaubild von $s_8(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{8} \frac{\sin(kt)}{k}$:



b) Als nächstes betrachten wir die ***Puls-Funktion*** $P_1(x)$ mit

$$P_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{falls} \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \qquad \text{auf } [0,1) \tag{2.1.2}$$

Auf $\mathbb{R}$ wird P_1 periodisch fortgesetzt, mit Periode $T = 1$ (und Frequenz $\omega = 2\pi$). Im Bild sieht das folgendermaßen aus:



Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_k(P_1) &= \int_0^1 P_1(t) e^{-2\pi \mathbf{j}\, kt} dt \\
&= \int_0^{1/2} e^{-2\pi \mathbf{j}\, kt} dt - \int_{1/2}^1 e^{-2\pi \mathbf{j}\, kt} dt \\
&= \frac{\mathbf{j}}{2\pi k}\left(e^{-2\pi \mathbf{j}\, kt}\Big|_0^{1/2} - e^{-2\pi \mathbf{j}\, kt}\Big|_{1/2}^{1}\right) \\
&= \frac{\mathbf{j}}{2\pi k}\Big((-1)^k - 1 - \big(1 - (-1)^k\big)\Big) = \frac{\mathbf{j}}{\pi k}\big((-1)^k - 1 \big)
\end{aligned}
$$

Somit wird

$$
c_k(P_1) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad k \text{ gerade} \\ -2\mathbf{j}\,/\pi k & \text{wenn} \quad k \text{ ungerade} \end{cases}
$$

Wir haben also $P_1 \sim -\dfrac{2\mathbf{j}}{\pi} \displaystyle\sum_{k \text{ ungerade}} \frac{e^{2\pi \mathbf{j}\, k\, t}}{k}$.

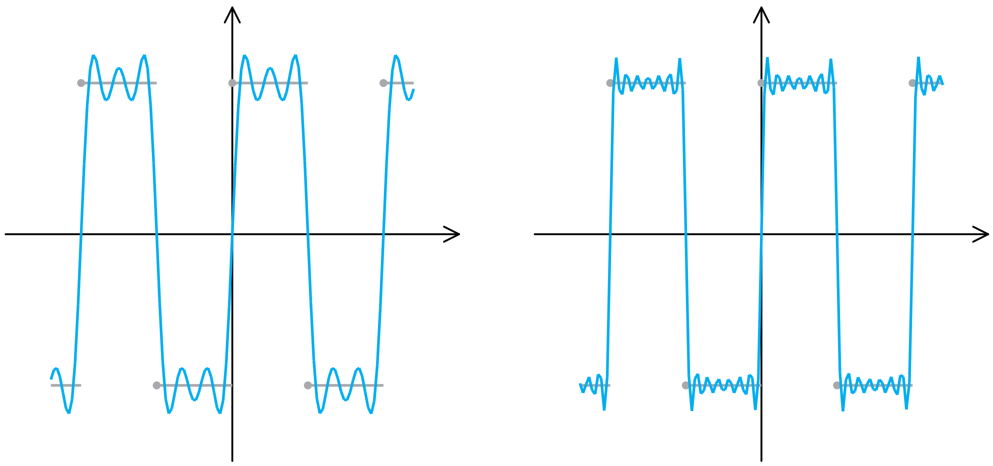
Da P_1 reellwertig, $c_k + c_{-k} = 0$ für alle k und $\mathbf{j}\,(c_k - c_{-k}) = 4/(\pi k)$ für ungerades k ist, folgt:

$$
P_1 \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{\sin(2\pi k t)}{k} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2m-1)t)}{2m-1} \qquad (2.1.3)
$$

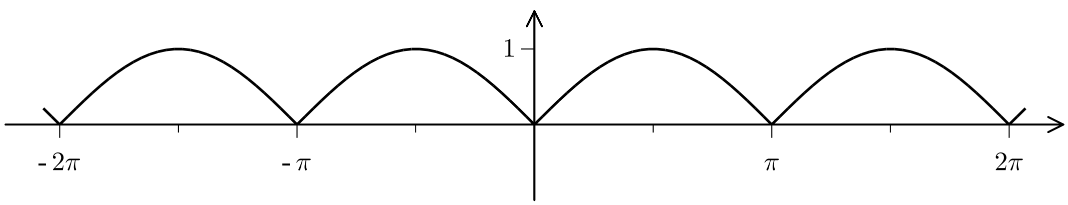
Auch hier vergleichen wir die endliche Teilsummen

$$
s_4(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{3} \frac{\sin(2\pi(2k-1)t)}{2k-1} \qquad \text{und} \qquad s_7(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{7} \frac{\sin(2\pi(2k-1)t)}{2k-1}
$$

mit der Funktion f selbst:



c) Die Funktion $f(t) = |\sin t|$ heißt auch ***Zweiweg-gleichgerichteter Sinus***:



Wir errechnen (mit $T = 2\pi, \omega = 1$ und der Formel $\sin t = (e^{\mathbf{j}\,t} - e^{-\mathbf{j}\,t})/(2\mathbf{j}\,)$):

$$
\begin{aligned}
2\pi c_k(f) &= \int_0^{\pi} \sin(t)\, e^{-\mathbf{j}\,kt}\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\, e^{-\mathbf{j}\,kt}\, dt \\
&= \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\int_0^{\pi} e^{\mathbf{j}\,(1-k)t} dt - \int_0^{\pi} e^{-\mathbf{j}\,(1+k)t} dt \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\int_{\pi}^{2\pi} e^{\mathbf{j}\,(1-k)t}\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-\mathbf{j}\,(1+k)t}\, dt \right) \\
&= \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\frac{1}{\mathbf{j}\,(1-k)} e^{\mathbf{j}\,(1-k)t} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\mathbf{j}\,(1+k)} e^{-\mathbf{j}\,(1+k)t} \Big|_0^{\pi} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\frac{1}{\mathbf{j}\,(1-k)} e^{\mathbf{j}\,(1-k)t} \Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{\mathbf{j}\,(1+k)} e^{-\mathbf{j}\,(1+k)t} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k} \left(-(-1)^k - 1 \right) + \frac{1}{1+k} \left(-(-1)^k - 1 \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k} \left(1 + (-1)^k \right) + \frac{1}{1+k} \left(1 + (-1)^k \right) \right) \\
&= \frac{1}{1-k} \left(1 + (-1)^k \right) + \frac{1}{1+k} \left(1 + (-1)^k \right) \\
&= \begin{cases} -4/(k^2 - 1) & \text{für gerades } k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

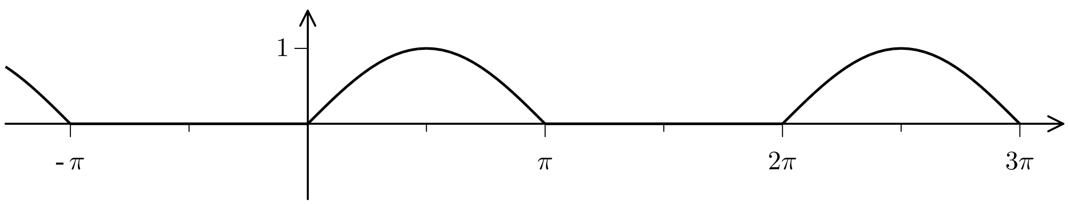
Das führt zur Fourierreihe $f \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k^2-1} e^{\mathbf{j}\,kt}$. Da man jede gerade Zahl in der Form $k = 2m$ schreiben kann, erhält man

$$\begin{aligned} f &\sim -\frac{2}{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4m^2-1} e^{2\mathbf{j}\,mt} \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1} \cos(2mt). \end{aligned}$$

d) Der ***Einweg-gleichgerichtete Sinus*** ist die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + |\sin t|)\,.$$

(Dieses Beispiel wurde im Rahmen der Übungen behandelt).



Wir berechnen auch hier die Koeffizienten $c_k(f)$.

Für $k \neq \pm 1$ ist

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)\, e^{-\mathbf{j}\,kt} dt \\ &= \frac{1}{4\pi\mathbf{j}} \left(\int_0^{\pi} e^{-\mathbf{j}\,(k-1)t} dt - \int_0^{\pi} e^{-\mathbf{j}\,(k+1)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\mathbf{j}} \left(\frac{\left(-(-1)^k - 1\right)}{-\mathbf{j}\,(k-1)} - \frac{\left(-(-1)^k - 1\right)}{-\mathbf{j}\,(k+1)} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{(-1)^k + 1}{k-1} - \frac{(-1)^k + 1}{k+1} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k + 1}{k^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $c_k(f) = 0$ für ungerade $k \neq \pm 1$ ist, und

$$c_k(f) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2-1} \qquad \text{für gerades } k.$$

Ebenso finden wir:

$$\begin{aligned} c_1(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin t e^{-\mathbf{j}\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{4\pi\mathbf{j}}\int_0^\pi \left(1-e^{-2\mathbf{j}\,t}\right)dt \\ &= \frac{1}{4\pi\mathbf{j}}(\pi-0) \;==\; \frac{1}{4\mathbf{j}} \end{aligned}$$

und analog $c_{-1}(f) = -\dfrac{1}{4\mathbf{j}}$.

Außerdem ist $\quad c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin t\,dt = \dfrac{1}{\pi}$.

Für die reellen Koeffizienten gilt dann:

$$a_1 = 2\,\mathrm{Re}(c_1) = 0, \quad b_1 = -2\,\mathrm{Im}(c_1) = \frac{1}{2},$$

$b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k) = 0$ für $k > 1$ und $a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) = -\dfrac{2}{\pi(k^2-1)}$ für gerades k.

Damit erreichen wir

$$f \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$$

Das Bild der Partialsumme $s_4(t) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos(2t)}{3} + \dfrac{\cos(4t)}{15}\right)$ sieht folgendermaßen aus: