1.2 Komplexe Zahlen und Funktionen

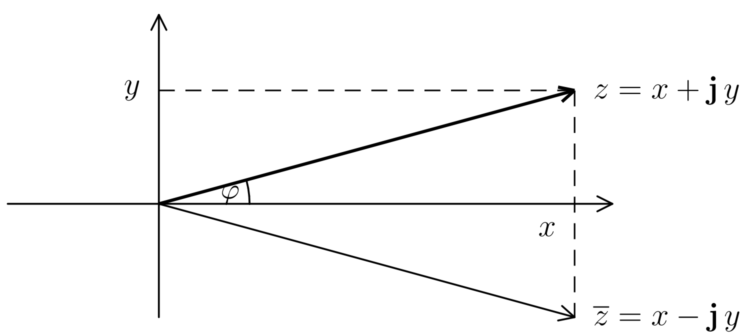
Wir werden im Folgenden immer wieder mit komplexen Zahlen zu tun haben. Daher erinnern wir uns an die wichtigen Eigenschaften der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Wie die reellen Zahlen eindeutig den Punkten auf der Zahlengeraden entsprechen, so entsprechen die komplexen Zahlen den Punkten in der Ebene und lassen sich schreiben als

$$z = x + \mathbf{j}\, y$$

Dabei sind x und y zwei reelle Zahlen und $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ die ***imaginäre Einheit***. Die imaginäre Einheit wurde ursprünglich von dem Mathematiker Euler eingeführt und mit i bezeichnet. Da wir den Buchstaben i für die Stromstärke benötigen, benutzen wir hier wie in der Elektrotechnik nach DIN 1302 den Buchstaben $\mathbf{j}$ für die imaginäre Einheit. Ist $z = x + \mathbf{j}\, y$ eine komplexe Zahl, so heißt $x = \operatorname{Re} z$ der ***Realteil*** und $y = \operatorname{Im} z$ der ***Imaginärteil*** von z..

Die durch Spiegeln an der x-Achse entstehende komplexe Zahl $\overline{z} = x - \mathbf{j}\, y$ wird auch die zu z ***komplex konjugierte Zahl*** genannt.



Mit den komplexen Zahlen wird gerechnet wie mit Vektoren in der Ebene:

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathbf{j}\, y_1) + (x_2 + \mathbf{j}\, y_2) &= (x_1 + x_2) + \mathbf{j}\, (y_1 + y_2)\\ \alpha(x + \mathbf{j}\, y) &= \alpha x + \mathbf{j}\, \alpha y\end{aligned}$$

für reelle Zahlen α.

Das Besondere bei den komplexen Zahlen ist nun, dass man sie miteinander multiplizieren kann:

$$(x_1 + \mathbf{j}\, y_1) \cdot (x_2 + \mathbf{j}\, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathbf{j}\, (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Ist $z = x + \mathbf{j}\, y$, so ist speziell

$$z\overline{z} = (x + \mathbf{j}\, y)(x - \mathbf{j}\, y) = x^2 - (\mathbf{j}\, y)^2 = x^2 + y^2$$

immer eine reelle Zahl ≥ 0. Ist $z \neq 0$, so ist sogar $z\overline{z} > 0$. Deshalb kann man durch $z\overline{z}$ dividieren, und es ist

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = 1, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathbf{j}\,\frac{y}{x^2+y^2},$$

und allgemeiner

$$\frac{x_1 + \mathbf{j}\,y_1}{x_2 + \mathbf{j}\,y_2} = \frac{(x_1 + \mathbf{j}\,y_1)\cdot(x_2 - \mathbf{j}\,y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Beispiele:

Es ist $\mathbf{j}^2 = -1$, $\quad (\frac{1+\mathbf{j}}{\sqrt{2}})^2 = \mathbf{j}$ und

$(2+3\mathbf{j})(4-5\mathbf{j}) = 2\cdot 4 - 3\cdot 5\mathbf{j}^2 + (3\cdot 4 - 2\cdot 5)\mathbf{j} = 23 + 2\mathbf{j}$, sowie

$$\frac{2+31\mathbf{j}}{7-5\mathbf{j}} = \frac{(2+31\mathbf{j})(7+5\mathbf{j})}{49+25} = \frac{(14-155)+(217+10)\mathbf{j}}{74} = -\frac{141}{74} + \mathbf{j}\,\frac{227}{74}.$$

Natürlich können Real- und Imaginärteil auch Dezimalbrüche sein, z.B. ist

$$1 - 5.8\mathbf{j} + \frac{3\mathbf{j}}{2.1 - 3\mathbf{j}} = 0.328859 - 5.3302\mathbf{j}\ ,$$

denn die linke Seite ergibt

$$(1-5.8\mathbf{j}) + \frac{3\mathbf{j}\,(2.1+3\mathbf{j})}{(2.1)^2+3^2} = \frac{(13.41 - 77.778\mathbf{j}) + (6.3\mathbf{j} - 9)}{13.41} = \frac{4.41 - 71.478\mathbf{j}}{13.41}\ .$$

Der ***Betrag*** einer komplexen Zahl $z = x + \mathbf{j}\,y$ ist die Zahl $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$. Das entspricht der euklidischen Länge des Vektors. Es ist

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w| \qquad \text{und} \qquad |z+w| \le |z| + |w|.$$

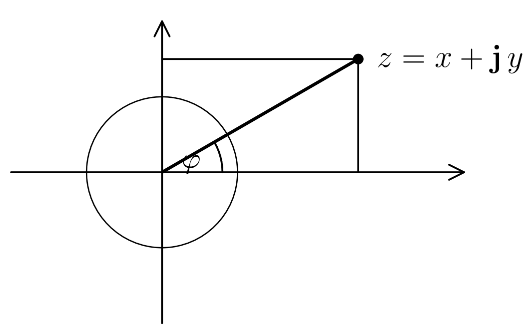
Um Potenzen und Wurzeln in $\mathbb{C}$ zu untersuchen, brauchen wir die komplexe Exponentialfunktion. Und um die zu verstehen, benutzen wir die ***Polarkoordinaten-Darstellung*** der komplexen Zahlen:

Jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{j}\,y \neq 0$ kann eindeutig in der Polarform

$$z = r(\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi)$$

dargestellt werden.

Dabei ist $r = |z|$ und φ der Winkel zwischen dem zu z gehörigen Ortsvektor in der Ebene und der x-Achse.

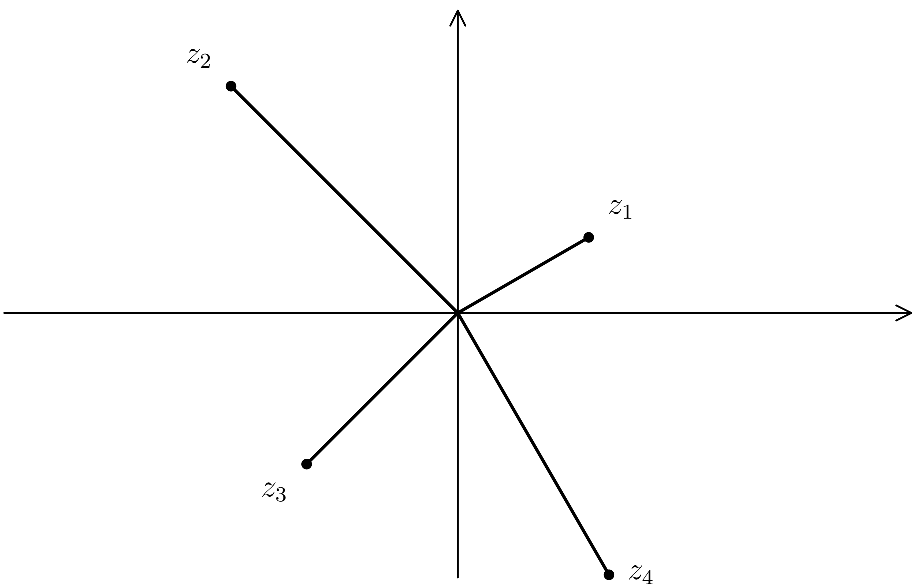


Der Grund dafür, dass das geht, ist die Beziehung $x^2 + y^2 = r^2$, also

$$(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1.$$

Dann gibt es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $x/r = \cos\varphi$ und $y/r = \sin\varphi$. Wie man den Winkel φ ermittelt, untersuchen wir an folgenden Beispielen:

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \qquad z_1 &= \sqrt{3} + \mathbf{j} \;=\; 1.73205 + \mathbf{j} \;=\; 2 \cdot \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\Big), \\
z_2 &= -3 + 3\mathbf{j} \;=\; 3\sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\Big), \\
z_3 &= -2 - 2\mathbf{j} \;=\; 2\sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\Big) \\
\text{und} \qquad z_4 &= 2 - 2\sqrt{3}\mathbf{j} \;=\; 2 - 3.4641\mathbf{j} \;=\; 4\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\Big).
\end{aligned}$$



Nach der Formel $|x + \mathbf{j}\,y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist

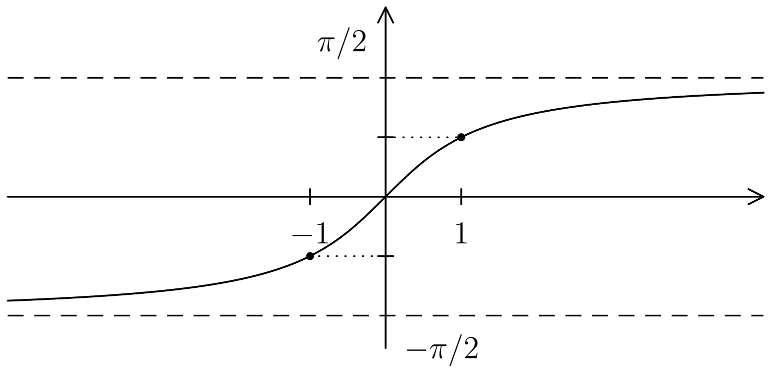
$$|z_1| = 2, \quad |z_2| = 3\sqrt{2}, \quad |z_3| = 2\sqrt{2} \quad \text{und } |z_4| = 4.$$

Schreibt man eine komplexe Zahl $\neq 0$ in der Form $z = |z| \cdot (\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)$, so ist entweder $\cos\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ oder $= 3\pi/2$, oder es ist $\tan\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$. Im letzteren Fall ist $\varphi = \arctan\big(\sin\varphi/\cos\varphi\big)$. Allerdings liefert die Arcustangens-Funktion (und damit auch die entsprechende Taste auf dem Taschenrechner) nur Winkel-Werte zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$.

Die folgende Tabelle gibt zu allen vier Quadranten den Winkelbereich und den zugehörigen Tangens-Bereich an:

II. Quadrant (links-oben) $\pi/2 < \varphi < \pi$ $-\infty < \tan\varphi < 0$	I. Quadrant (rechts-oben) $0 < \varphi < \pi/2$ $0 < \tan\varphi < +\infty$
III. Quadrant (links-unten) $\pi < \varphi < 3\pi/2$ $0 < \tan\varphi < +\infty$	IV. Quadrant (rechts-unten) $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$ $-\infty < \tan\varphi < 0$

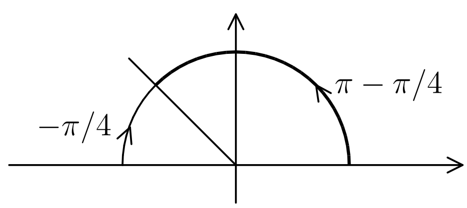
Zur Erinnerung hier noch der Verlauf der Arcustangens-Funktion:



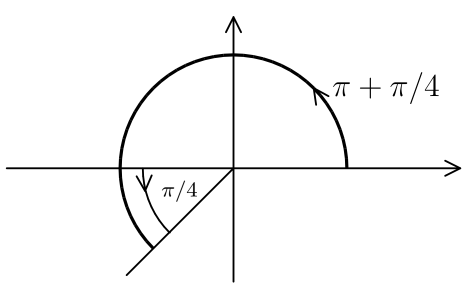
Jetzt betrachten wir die vier Beispielzahlen:

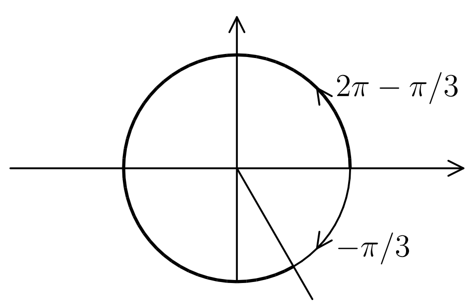
z_1 liegt im I. Quadranten, und es ist $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$ und $\sin\varphi = 1/2$, also $\tan\varphi = 1/\sqrt{3}$. Der Wert $\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \mathrel{\widehat{=}} 30°$ liegt zwischen 0 und $\pi/2$, kann also beibehalten werden.

z_2 liegt im II. Quadranten, und es ist $\tan\varphi = -1$. Nun ist $\arctan(-1) = -\pi/4$. Wir erhalten nicht den gesuchten Winkel, sondern den Winkel gegen die negative x-Achse, im Uhrzeigersinn gemessen. Der richtige, im mathematisch positiven Sinne gegen die positive x-Achse gemessene Winkel ist dann $\pi - \pi/4 = 3\pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 135°$.



z_3 liegt im III. Quadranten, und es ist $\tan\varphi = 1$. Es ist $\arctan(1) = \pi/4$, und dies ist wieder nicht der gesuchte Winkel. Den richtigen Winkel erhalten wir, indem wir π addieren: $\varphi = \pi + \pi/4 = 5\pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 225°$.





z_4 liegt im IV. Quadranten, und es ist $\tan\varphi = -\sqrt{3}$. Anwendung des Arcustangens liefert den Wert $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$. Auch der stimmt wieder nicht, in Wirklichkeit ist $\varphi = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \mathrel{\widehat{=}} 300°$.

Zusammengefasst:

Quadrant:	Winkel φ in $z = |z|(\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)$
I	$\varphi = \arctan(\sin\varphi/\cos\varphi)$
II	$\varphi = \pi + \arctan(\sin\varphi/\cos\varphi)$
III	$\varphi = \pi + \arctan(\sin\varphi/\cos\varphi)$
IV	$\varphi = 2\pi + \arctan(\sin\varphi/\cos\varphi)$.

Definition: Ist $z = x + \mathbf{j}\,y \in \mathbb{C}$ mit reellen x, y, so setzen wir

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos y + \mathbf{j}\,\sin y)$$

und nennen dies die ***komplexe Exponentialfunktion***.

Wir stellen die wichtigen Eigenschaften dieser Funktion zusammen in dem folgenden

1.2.1 Satz. *a) Es ist*

$$e^{\mathbf{j}\,y} = \cos y + \mathbf{j}\,\sin y \qquad \textit{\textbf{(Euler'sche Formel)}}$$

und daher $|e^{\mathbf{j}\,y}| = 1$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Insbesondere ist die Polarform einer komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi)$ als $z = re^{\mathbf{j}\,\varphi}$ darstellbar.

b) Es ist $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Exponentialfunktion erfüllt das „Additionstheorem“

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Insbesondere ist $e^0 = 1$, $e^z \neq 0$ für alle z und $e^{-z} = 1/e^z$.

d) Es ist $e^{z+2\pi\mathbf{j}} = e^z$, die komplexe Exponentialfunktion hat also die Periode $2\pi\mathbf{j}$.

e) Zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$.

Wenn $e^a = e^b$ ist, so gilt $b = a + 2\pi k\mathbf{j}$, für eine geeignete ganze Zahl k.

Beweis. a) Die Euler'sche Formel ist klar nach Definition, weil $e^0 = 1$ für die reelle Exponentialfunktion gilt. Dann ist $|e^{\mathbf{j}\,y}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$.

b) Es ist $|e^{x+\mathbf{j}\,y}| = |e^x| \cdot |e^{\mathbf{j}\,y}| = e^x = e^{\mathrm{Re}(x+\mathbf{j}\,y)}$.

c) ist für die reelle Exponentialfunktion bekannt. Für $e^{\mathbf{j}\,y} = \cos y + \mathbf{j}\,\sin y$ folgt das Additionstheorem aus den Formeln für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$. Die anderen Formeln ergeben sich daraus.

d) Es ist $e^{2\pi\mathbf{j}} = \cos(2\pi) + \mathbf{j}\,\sin(2\pi) = 1$. Die Periodizität folgt dann mit dem Additionstheorem.

Für e) verwenden wir die Polarform: Ist $w = r(\cos\alpha + \mathbf{j}\,\sin\alpha)$, so ist $z = \ln r + \mathbf{j}\,\alpha$ eine komplexe Zahl mit $e^z = w$.

Wenn $e^a = e^b$ ist, so folgt $e^{b-a} = 1$. Es genügt also, wenn wir zeigen: Ist $e^z = 1$, so gilt $z = 2\pi k\mathbf{j}$, für eine geeignete ganze Zahl k. Zunächst folgt, dass auch $e^{\operatorname{Re} z} = |e^z| = 1$ ist. Weil die (reelle) Exponentialfunktion streng monoton wächst, muss $\operatorname{Re} z = 0$ sein, also $z = \mathbf{j}\,t$ für eine reelle Zahl t. Ist nun $1 = e^{\mathbf{j}\,t} = \cos t + \mathbf{j}\,\sin t$, so gilt $\cos t = 1$ und $\sin t = 0$, woraus folgt, dass t ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein muss. $\square$

Ist $z = r(\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi)$ eine komplexe Zahl und $w = s(\cos\psi + \mathbf{j}\,\sin\psi)$ eine weitere komplexe Zahl, so gilt

$$zw = rs(\cos(\varphi+\psi) + \mathbf{j}\,\sin(\varphi+\psi)\,)$$

Die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.

Für Potenzen haben wir dann

$$z^k = r^k(\cos(k\varphi) + \mathbf{j}\,\sin(k\varphi)\,)$$

Die Umkehrung zum Potenzieren ist das Wurzelziehen: Ist wieder $z = r(\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi)$ und $k > 1$ eine ganze Zahl, so wird durch

$$z_{k,0} := \sqrt[k]{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{k}) + \mathbf{j}\,\sin(\frac{\varphi}{k})\right)$$

eine komplexe Zahl mit $(z_{k,0})^k = z$ definiert. Hier gibt es nun aber einen wesentlichen Unterschied zum Reellen! Ist $r > 0$, so finden wir noch $k-1$ weitere k-te Wurzeln, nämlich

$$\begin{aligned} z_{k,m} &= \sqrt[k]{r}\left(\cos(\frac{\varphi+2\pi m}{k}) + \mathbf{j}\,\sin(\frac{\varphi+2\pi m}{k})\right) \\ &= z_{k,0}\left(\cos(\frac{2\pi m}{k}) + \mathbf{j}\,\sin(\frac{2\pi m}{k})\right), \quad m = 1,\ldots,k-1 \end{aligned}$$

Beispiele:

1) Wir suchen die 2. Wurzeln aus $z = 24(1 + \mathbf{j}\,\sqrt{3})$. Es ist

$$z = 48\cdot(\frac{1}{2} + \mathbf{j}\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = 48\cdot\big(\cos(\pi/3) + \mathbf{j}\,\sin(\pi/3)\big) \qquad (\text{mit } \pi/3 \mathrel{\widehat{=}} 60^\circ).$$

Eine (zweite) Wurzel von z ist die Zahl

$$z_{2,0} = \sqrt{48}\cdot\big(\cos(\pi/6) + \mathbf{j}\,\sin(\pi/6)\big) = 4\sqrt{3}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{j}\,\frac{1}{2}) = 6 + \mathbf{j}\,2\sqrt{3}.$$

Die zweite Wurzel ist die Zahl $z_{2,1} = z_{2,0}\cdot(\cos(\pi) + \mathbf{j}\,\sin(\pi)) = -z_{2,0}$. Im Gegensatz zum Reellen kann man im Komplexen keine der beiden Wurzeln auszeichnen.

2) Was sind die 3. Wurzeln aus der Zahl $z = 6 + \mathbf{j}$?

Es ist $|z| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$. Deshalb schreiben wir

$$z = \sqrt{37}\Big(\frac{6}{\sqrt{37}} + \frac{1}{\sqrt{37}}\mathbf{j}\Big) = \sqrt{37}(\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi),$$

wobei $\tan(\varphi) = \big(1/\sqrt{37}\big)/\big(6/\sqrt{37}\big) = 1/6$ ist, also $\varphi = \arctan(1/6) = 0.16549$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} z_{3,0} &= \sqrt[6]{37}\,\big(\cos(\varphi/3) + \mathbf{j}\,\sin(\varphi/3)\big) \\ &= 1.82544 \cdot \big(\cos(0.0550497) + \mathbf{j}\,\sin(0.0550497)\big) \qquad (1.2.1) \\ &= 1.82544 \cdot \big(0.998485 + \mathbf{j}\,0.0550497\big) \\ &= 1.82267 + 0.10049\mathbf{j} \end{aligned}$$

Die beiden anderen 3.Wurzeln sind dann

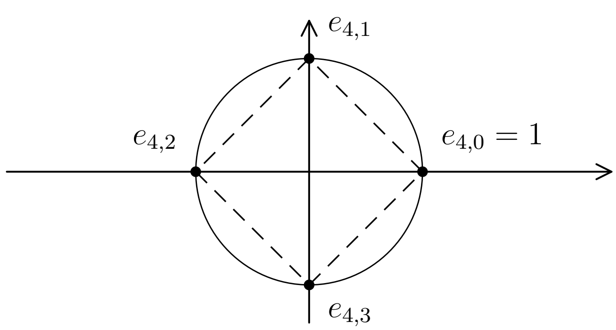
$$\begin{aligned} z_{3,1} &= z_{3,0} \cdot \big(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + \mathbf{j}\,\sin(\tfrac{2\pi}{3})\big) = -0.998362 + 1.52823\mathbf{j} \\ z_{3,2} &= z_{3,0} \cdot \big(\cos(\tfrac{4\pi}{3}) + \mathbf{j}\,\sin(\tfrac{4\pi}{3})\big) = -0.824304 - 1.62872\mathbf{j}\,. \end{aligned}$$

3) Es sollen die vier verschiedenen 4-ten Wurzeln aus der Zahl 1 gezogen werden. Schreibt man $1 = e^{2\pi\mathbf{j}}$, so gilt für die Zahlen

$$e_{4,0} := 1, \quad e_{4,1} := e^{(\pi/2)\mathbf{j}}, \quad e_{4,2} := e^{\pi\mathbf{j}} \quad \text{und} \quad e_{4,3} := e^{(3\pi/2)\mathbf{j}} \ :$$

$$(e_{4,0})^4 = (e_{4,1})^4 = (e_{4,2})^4 = (e_{4,3})^4 = 1.$$

Man nennt $e_{4,0}$, $e_{4,1}$,$e_{4,2}$ und $e_{4,3}$ die 4-ten ***Einheitswurzeln***. Sie liegen auf den 4 Ecken eines Quadrates (im Falle k-ter Wurzeln auf den Ecken eines regemäßigen k-Ecks).

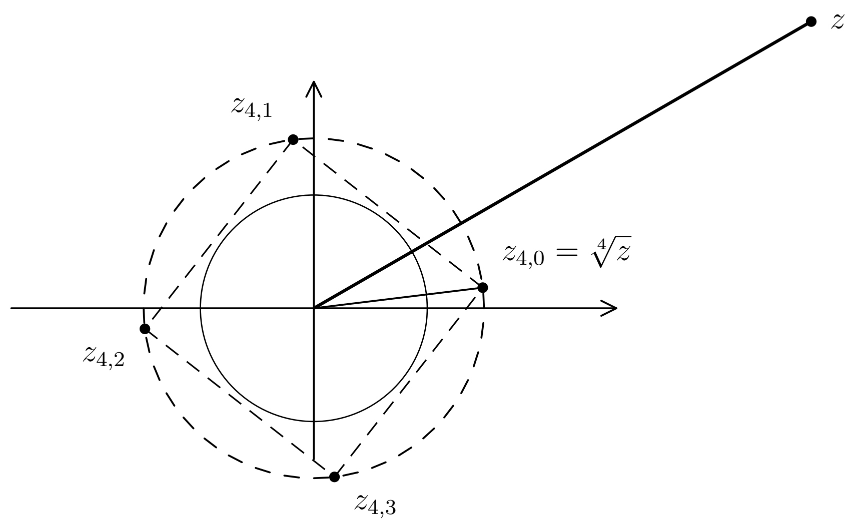


Sei nun $z = \dfrac{81}{16}e^{(\pi/6)\mathbf{j}} = 5.0625\big(\cos(30^\circ) + \mathbf{j}\,\sin(30^\circ)\big)$. Dann ist

$$z_{4,0} = \sqrt[4]{5.0625}\,e^{(\pi/24)\mathbf{j}} = 1.5\big(\cos(7.5^\circ) + \mathbf{j}\,\sin(7.5^\circ)\big)$$

eine vierte Wurzel aus z.

Aber $z_{4,1} = z_{4,0} \cdot e_{4,1}$, $z_{4,2} = z_{4,0} \cdot e_{4,2}$ und $z_{4,3} = z_{4,0} \cdot e_{4,3}$ sind ebenfalls vierte Wurzeln. Sie entstehen aus $z_{4,0}$, indem man nacheinander um 90°, 180° und 270° dreht:



Innerhalb der komplexen Zahlen kann man theoretisch alle quadratischen und alle anderen algebraischen Gleichungen beliebigen Grades lösen. Praktische Lösungsverfahren gibt es allerdings nur bis zum Grad 4.

Beispiele

a) Die Gleichung $x^2 - 3.2x + 67 = 21$ wird durch

$$z_{1/2} = \frac{3.2 \pm \sqrt{10.24 - 184}}{2} = 1.6 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-173.76} = 1.6 \pm \mathbf{j}\,6.5909$$

gelöst, also $z_1 := 1.6 - 6.5909\mathbf{j}$ und $z_2 = 1.6 + 6.5909\mathbf{j}$.

b) Gleichungen dritten Grades mit reellen Koeffizienten haben drei Lösungen, von denen mindestens eine reell ist. Ist z eine nicht-reelle Lösung, so ist automatisch auch $\overline{z}$ eine Lösung.

Im Falle der Gleichung $x^3 + 4x + 8 = 0$ erhält man z.B. die 3 Lösungen

$z_1 = -1.36466$ (reell), $\quad z_2 = 0.682328{+}2.32308\mathbf{j} \quad$ und $z_3 = \overline{z}_2 = 0.682328{-}2.32308\mathbf{j}$.

Beispiel (Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen):

Gegeben seien zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz,

$$f_1(t) := A_1 \sin(\omega t + \delta_1), \qquad f_2(t) := A_2 \sin(\omega t + \delta_2)$$

Dann errechnen wir für die Überlagerung beider Schwingungen

$$\begin{aligned} f(t) &:= f_1(t) + f_2(t) \\ &= \operatorname{Im}\left(A_1 e^{\mathbf{j}\,(\omega t + \delta_1)} + A_2 e^{\mathbf{j}\,(\omega t + \delta_2)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{\mathbf{j}\,\omega t}\left(A_1 e^{\mathbf{j}\,\delta_1} + A_2 e^{\mathbf{j}\,\delta_2}\right)\right). \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} A_1 e^{\mathbf{j}\,\delta_1} + A_2 e^{\mathbf{j}\,\delta_2} &= |A_1 e^{\mathbf{j}\,\delta_1} + A_2 e^{\mathbf{j}\,\delta_2}| \cdot e^{\mathbf{j}\,\delta_{12}} \\ &= \sqrt{\left(A_1 e^{\mathbf{j}\,\delta_1} + A_2 e^{\mathbf{j}\,\delta_2}\right)\left(A_1 e^{-\mathbf{j}\,\delta_1} + A_2 e^{-\mathbf{j}\,\delta_2}\right)} \cdot e^{\mathbf{j}\,\delta_{12}} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)} \cdot e^{\mathbf{j}\,\delta_{12}} \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, finden wir

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)}\ \mathrm{Im}\left(e^{\mathbf{j}\,(\omega t + \delta_{12})}\right) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)} \cdot \sin(\omega t + \delta_{12}) \end{aligned}$$

Beispiel hierzu: Was ist $3\sin(2t + 2.5) + 4\sin(2t + 5)$?

Hier ist $A_1 = 3$, $A_2 = 4$, $\delta_1 = 2.5$ und $\delta_2 = 5$. Es folgt für die Amplitude A der Überlagerung

$$A = |3e^{2.5\mathbf{j}} + 4e^{5\mathbf{j}}| = \sqrt{25 + 24\cos 2.5} = 2.40261$$

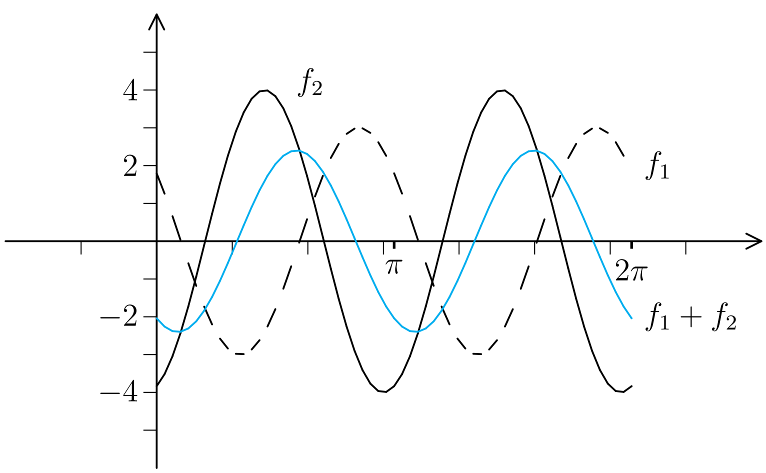
Weiter ist

$$\begin{aligned} 3e^{2.5\mathbf{j}} + 4e^{5\mathbf{j}} &= -1.26878 - 2.04028\,\mathbf{j} \;=\; 2.40261 \cdot (-0.528084 - \mathbf{j}\ 0.849193) \\ &= 2.40261\, e^{\mathbf{j}\cdot 1.014454}, \end{aligned}$$

weil $-0.528084 - \mathbf{j}\ 0.849193$ im linken unteren Quadranten liegt und daher

$\delta_{12} = \arctan\big(0.849193/0.528084\big) + \pi = \arctan(1.608064) + \pi = 1.014454 + 3.14159 = 4.15605$

ist. Also ist $f_1(t) + f_2(t) = 2.40261\ \sin(2t + 4.15605)$. Hier ist ein Bild dazu:



Die komplexen Zahlen werden gerne in der sogenannten „Symbolischen Methode“ bei der **Analyse von Wechselstromkreisen** verwendet:

In der Elektrotechnik bezeichnet man die zeitlich veränderlichen Größen Stromstärke und Spannung mit den (kleinen) Buchstaben i und u. Es gibt proportionale Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} u &= R \cdot i \;(R = \text{Ohm'scher Widerstand, } G := 1/R = \text{Leitwert}) \\ u &= L \cdot \frac{di}{dt} \;(L = \text{Induktivität}) \\ i &= C \cdot \frac{du}{dt} \;(C = \text{Kapazität}) \end{aligned}$$

Wechselstrom und Wechselspannung können durch harmonische Schwingungen dargestellt werden. Es hat sich als praktisch herausgestellt, solche Schwingungen als Projektionen eines rotierenden Zeigers darzustellen, in komplexer Schreibweise etwa durch

$$\underline{i}(t) = \widehat{i} \cdot \big(\cos(\omega t + \varphi_i) + \mathbf{j}\,\sin(\omega t + \varphi_i)\big) = I \cdot e^{\mathbf{j}\,\omega t}$$

und

$$\underline{u}(t) = \widehat{u} \cdot \big(\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathbf{j}\,\sin(\omega t + \varphi_u)\big) = U \cdot e^{\mathbf{j}\,\omega t}.$$

Dann ist z.B. $u(t) = \operatorname{Re}\underline{u}(t) = \widehat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$. Man nennt $U = \widehat{u}e^{\mathbf{j}\,\varphi_u}$ die *komplexe Amplitude* und U_{eff} mit $U = \sqrt{2}\,U_{\text{eff}}$ den *komplexen Effektivwert*. I und I_{eff} werden analog definiert.

Die Größe $\underline{Z} := \underline{u}/\underline{i} = U/I$ nennt man dann den *komplexen Widerstand*. Es ist $\underline{Z} = R + \mathbf{j}\,X$, mit dem „Wirkwiderstand“ R und dem „Blindwiderstand“ X. Der Betrag $Z := |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ heißt *Scheinwiderstand*, es ist $\underline{Z} = Ze^{\mathbf{j}\,(\varphi_u - \varphi_i)}$. Ist $\varphi_i = \varphi_u$, so sind Strom und Spannung in Phase, und $\underline{Z} = R$ ist der gewöhnliche Ohm'sche Widerstand.

Einem Kondensator mit Kapazität C wird der Widerstandsoperator $1/\mathbf{j}\,\omega C$ zugeordnet (wenn an ihn eine Wechselspannung mit der Frequz ω angelegt wird). Einer Spule mit Induktivität L kommt in analoger Weise der Widerstandsoperator $\mathbf{j}\,\omega L$ zu.

Auch in der Wechselstromtechnik gelten die Kirchhoff'schen Regeln.

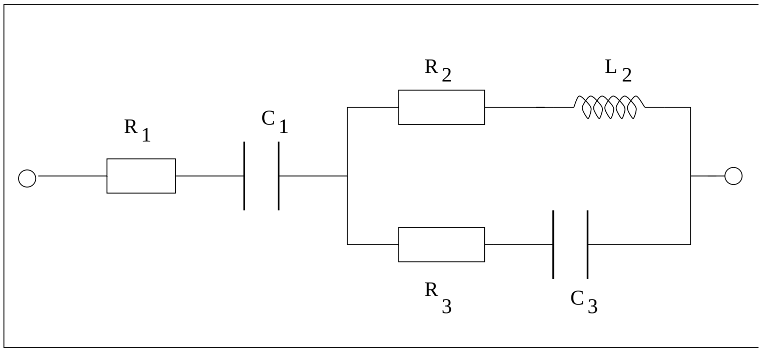
Schaltet man einen Ohm'schen Widerstand R mit einer Spule L in Serie und wird die Wechselspannung mit Frequenz ω angelegt, so gehört zu dieser Anordnung der komplexe Widerstand $\underline{Z} = R + \mathbf{j}\,\omega L$.

Werden beide parallel geschaltet, so addieren sich die Leitwerte, und man erhält für den Gersamtwiderstand die Gleichung

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega L}$$

Entsprechendes gilt für Serien- oder Parallelschaltungen von Widerstand und Kondensator.

Beispiel: Für die folgende Schaltung berechnen wir den Scheinwiderstand:



Die Serienschaltenung aus R_2 und der Spule hat den Widerstand $\underline{Z}_2 = R_2 + \mathbf{j}\,\omega L_2$, die Serienschaltung aus R_3 und dem Kondensator mit Kapazität C_3 den Widerstand $\underline{Z}_3 = R_3 - \mathbf{j}\,/\omega C_3$. Die Parallelschaltung von beiden Serienschaltungen hat also den Widerstand

$$\underline{Z}_{23} = \frac{1}{1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

So finden wir für die obige Schaltung den Gesamtwiderstand

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \underline{Z}_1 - \frac{\mathbf{j}}{\omega C_1} + \underline{Z}_{23}$$

Ist etwa $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$, sowie $C_1 = 20\,\mu F$, $C_3 = 10\,\mu F$ und $L_2 = 0.1\,H$, so gilt im Falle $\omega = 500$ Hz folgendes:

$$\underline{Z}_2 = 50 + \mathbf{j}\,50, \quad \underline{Z}_3 = 100 - \mathbf{j}\,\frac{1}{500 \cdot 10^{-5}} = 100 - 200\mathbf{j}\,,$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{(50 + 50\mathbf{j}\,)(100 - 200\mathbf{j}\,)}{150 - 150\mathbf{j}} = \frac{5000(1 + \mathbf{j}\,)(1 - 2\mathbf{j}\,)}{150(1 - \mathbf{j}\,)} = \frac{10000\mathbf{j}\,(1 - 2\mathbf{j}\,)}{300} = \frac{100(2 + \mathbf{j}\,)}{3}$$

und

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = 100 - \mathbf{j}\,100 + \frac{100(2 + \mathbf{j}\,)}{3} = 100(1 - \mathbf{j}\, + \frac{2 + \mathbf{j}}{3}) = 100\,\frac{5 - 2\mathbf{j}}{3}$$

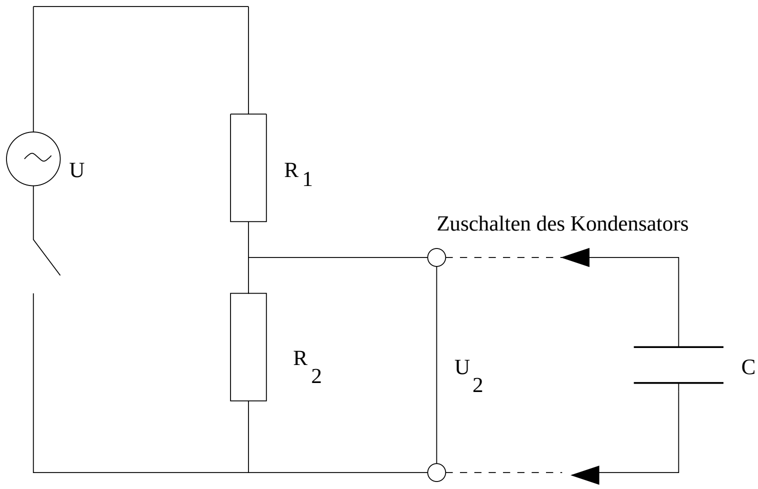
Also wird

$$|\underline{Z}_{\text{ges}}| = \frac{100}{3} \cdot \sqrt{29} \approx 179.505$$

Hier noch eine Erläuterung der verwendeten Einheiten:

Bezeichnung	Abkürzung	Einheit
Stromstärke	i	Ampere (A)
Spannung	u	Volt (V)
Widerstand	R	Ohm (Ω)
Frequenz	f	Hertz (Hz)
Kapazität	C	Farad (F)
Induktivität	L	Henry (H)

Beispiel: Die folgende Schaltung wird als *Spannungsteiler* bezeichnet:



Wir untersuchen zuerst den „unbelasteten“ Fall, also den Fall, in dem der Kondensator nicht mit R_2 parallel geschaltet ist.

Dann ist der Strom I bei R_1 derselbe wie bei R_2, also haben wir

$$U = (R_1 + R_2) \cdot I, \qquad U_2 = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U.$$

Nun soll der Kondensator zugeschaltet werden. Dann ist R_2 durch den Widerstandsoperator

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{1/R_2 + \mathbf{j}\,\omega C} = \frac{R_2}{1 + \mathbf{j}\,\omega R_2 C}$$

zu ersetzen. Wir erhalten als Spannungsabfall an dem „R_2C-Element“

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{R_1 + \underline{Z}_2} \cdot U$$

Angenommen, man habe die Daten $R_1 = 400\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, U sei eine Wechselpannung mit Frequenz 50 Hz und $C = 20\,\mu F$. Dann haben wir wegen $\omega = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} = 100\pi$ Hz

$$\underline{Z}_2 = \frac{100}{1 + \mathbf{j}\,100\pi \cdot 100 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \frac{100}{1 + \mathbf{j}\,0.2\pi} = 71.6957 - 45.0477\mathbf{j}$$

Dann wird aber

$$\frac{\underline{Z}_2}{R_1 + \underline{Z}_2} = \frac{71.6957 - 45.0477\mathbf{j}}{471.6957 - 45.0477\mathbf{j}} = 0.15966 - 0.0802538\mathbf{j} = 0.178695 \cdot e^{-\mathbf{j}\cdot 0.465769}$$

und schließlich

$$\underline{U}_2 = 220 \cdot 0.178695 \cdot e^{-\mathbf{j}\cdot 0.465769} = 39.313 \cdot e^{-\mathbf{j}\cdot 0.465769}$$

Die beim R_2C-Element abfallende Spannung hat die Amplitude 39.313V und gegenüber U einen Phasenunterschied von $0.465769 \approx 26.68°$.

Nun beschäftigen wir uns mit dem Differenzieren und Integrieren komplexwertiger Funktionen.

Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}$, so lässt sich eine komplexwertige Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ schreiben als $f = u + \mathbf{j}\,v$, mit reellwertigen Funktionen $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Das bedeutet: Für jedes $t \in I$ ist

$$f(t) = u(t) + \mathbf{j}\,v(t)$$

Wir schreiben dann wieder $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$.

Definition: Ist $I = (a, b)$ ein offenes Intervall und $t_0 \in I$, so nennen wir eine komplexe Funktion $f = u + \mathbf{j}\,v$ (mit $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) ***stetig*** (bzw. ***differenzierbar***) in t_0, wenn u und v es sind. Die **Ableitung** von f in t_0 ist gegeben durch

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = u'(t_0) + \mathbf{j}\,v'(t_0)$$

Beispiel:

Sei $f(t) = (1 + \mathbf{j}\,t)^4$. Weil $(1 + b)^4 = 1 + 4b + 6b^2 + 4b^3 + b^4$ ist, ist

$$\begin{array}{rrcll} & u(t) & := & \operatorname{Re} f(t) & = & 1 - 6t^2 + t^4 \\ \text{und} & v(t) & := & \operatorname{Im} f(t) & = & 4t - 4t^3. \end{array}$$

Da u und v differenzierbar sind, ist auch $f = u + \mathbf{j}\,v$ (überall) differenzierbar, und es gilt:

$$f' = u' + \mathbf{j}\,v' \quad \text{mit} \quad u'(t) = -12t + 4t^3 \quad \text{und} \quad v'(t) = 4 - 12t^2.$$

Es liegt nahe zu fragen, ob die Ableitung solcher Funktionen nicht auch einfacher zu berechnen ist, also ohne den Real-und Imaginärteil der Funktion vorher ausrechnen zu müssen. Das ist möglich, denn es gilt wieder die Produktregel für das Ableiten, ebenso die Kettenregel:

1.2.2 Satz. *a) Wenn $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ bei $t_0 \in I$ differenzierbar sind, so gilt das auch für fg, und es ist*

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0) \qquad \textit{(Produktregel)}$$

Ist $g(t_0) \neq 0$, so ist f/g in t_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0) = \frac{f'(t_0)g(t_0) - f(t_0)g'(t_0)}{g(t_0)^2} \qquad \textit{(Quotientenregel).}$$

b) Ist J ein Intervall, $a_0 \in J$ und $\varphi : J \longrightarrow I$ in a_0 differenzierbar, so gilt: Ist $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 := \varphi(a_0)$ differenzierbar, so ist auch $h \circ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ in a_0 differenzierbar, und es gilt

$$(h \circ \varphi)'(a_0) = h'(x_0)\varphi'(a_0) \qquad \textit{(Kettenregel).}$$

Beweis. Für $t \neq t_0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(t)-(fg)(t_0)}{t-t_0} &= \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}g(t)+f(t_0)\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} \\
&\overset{t\longrightarrow t_0}{\longrightarrow} f'(t_0)g(t_0)+f(t_0)g'(t_0)
\end{aligned}$$

Auch die Quotientenregel und die Kettenregel werden genauso wie im Reellen bewiesen. □

Beispiele:

a) Ist $G : I \longrightarrow \mathbb{C}$ in t_0 differenzierbar, so auch G^n für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$(G^n)'(t_0) = nG^{n-1}(t_0)\, G'(t_0)$$

(induktive Anwendung der Produktregel).

b) Die Funktion $F(t) = (1+\mathbf{j}\,t)^4$ hat die Form $F = G^4$ mit $G(t) = 1+\mathbf{j}\,t$. So erhält man

$$F'(t) = 4(1+\mathbf{j}\,t)^3 \cdot \mathbf{j}\,.$$

c) Ist f komplexwertig und differenzierbar, so ist $\left(e^{f(t)}\right)' = f'(t)e^{f(t)}$.

Beweis dafür: Wir schreiben $f = g+\mathbf{j}\,h$. Dann ist $e^{f(t)} = e^{g(t)}\cdot\big(\cos h(t)+\mathbf{j}\,\sin h(t)\big)$, also

$$\begin{aligned}
(e^{f(t)})' &= (e^{g(t)})'\cdot\big(\cos h(t)+\mathbf{j}\,\sin h(t)\big)+e^{g(t)}\cdot\big((\cos h(t))'+\mathbf{j}\,(\sin h(t))'\big) \\
&= g'(t)\cdot e^{g(t)}\cdot\big(\cos h(t)+\mathbf{j}\,\sin h(t)\big)+e^{g(t)}\cdot h'(t)\big(-\sin h(t)+\mathbf{j}\,\cos h(t)\big) \\
&= e^{g(t)}\cdot\Big[g'(t)e^{\mathbf{j}\,h(t)}+\mathbf{j}\,h'(t)e^{\mathbf{j}\,h(t)}\Big] \\
&= f'(t)\cdot e^{f(t)}.
\end{aligned}$$

Die Integration komplexer stetiger Funktionen ist wieder über die Integration der Real-und Imaginärteile erklärt:

Definition: Ist $f = u+\mathbf{j}\,v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ auf dem beschränkten Intervall $I = [a,b]$ stetig, so setzen wir

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \mathbf{j}\int_a^b v(t)dt.$$

Beispiel: Wir integrieren die Funktion $f(t) = (t+\mathbf{j}\,t^2)^2$ über $[0,1]$. Zuerst haben wir $f(t) = t^2 - t^4 + 2\mathbf{j}\,t^3$, also

$$u(t) = t^2 - t^4 \quad \text{und} \quad v(t) = -2t^3.$$

Es folgt sofort

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 u(t)dt + \mathbf{j}\int_0^1 v(t)dt\\ &= \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1 + 2\mathbf{j}\ \frac{1}{4}t^4\Big|_0^1\\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{\mathbf{j}}{2} \;=\; \frac{2}{15}+\frac{\mathbf{j}}{2}\end{aligned}$$

Die aus der reellen Integrationstheorie bekannten Regeln gelten auch für komplexe Funktionen:

1.2.3 Satz. *a) Es sei $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ eine* ***Stammfunktion*** *zu f, also eine differenzierbare Funktion mit $F' = f$, so gilt:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b).$$

b) ***Regel der partiellen Integration, Produktintegration:***
Sind $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen, so ist

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = f(t)g(t)\,\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

c) ***Substitutionsregel:*** *Ist $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar (mit stetiger Ableitung) und f auf dem von $u(a)$ und $u(b)$ begrenzten Intervall stetig, so ist*

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Ist speziell f stetig auf $[a,b]$ und c eine Konstante, so ist

$$\int_{a/c}^{b/c} f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(u)\,du \quad \text{und} \quad \int_{a-c}^{b-c} f(t+c)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

Beispiele:

a) Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $(e^{\mathbf{j}\,nt})' = \mathbf{j}\,ne^{\mathbf{j}\,nt}$, also

$$\int_a^b e^{\mathbf{j}\,nt}\,dt = \frac{1}{\mathbf{j}\,n}(e^{\mathbf{j}\,nb} - e^{\mathbf{j}\,na}).$$

b) Mit partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi te^{\mathbf{j}\,t}\,dt &= \int_0^\pi t\cdot\left(-\mathbf{j}\;e^{\mathbf{j}\,t}\right)'dt \;=\; -\mathbf{j}\,t\,e^{\mathbf{j}\,t}\,\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\left(-\mathbf{j}\;e^{\mathbf{j}\,t}\right)'dt\\ &= -\pi\mathbf{j}\;e^{\mathbf{j}\,\pi} + \mathbf{j}\cdot\left(-\mathbf{j}\;e^{\mathbf{j}\,t}\right)\Big|_0^\pi = \;\pi\mathbf{j} + \left(e^{\mathbf{j}\,\pi}-1\right) \;=\; \pi\mathbf{j} - 2.\end{aligned}$$

c) Mit Hilfe der Substitutionsregel unternimmt man Integralumformungen wie z.B.

$$\int_0^1 a \cdot e^{-(1+t^2)a^2}\,dt = a\,e^{-a^2}\int_0^1 e^{-(at)^2}\,dt = e^{-a^2}\int_0^a e^{-u^2}\,du.$$

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion können wir folgende „Orthogonalitätsrelationen" für die trigonometrischen Funktionen gewinnen:

1.2.4 Hilfssatz. *a) Sind $k, m \in \mathbb{Z}$, so gilt*

$$\int_0^{2\pi} e^{\mathbf{j}\,(k-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad k \neq m \\ 2\pi & \text{wenn} \quad k = m \end{cases}$$

b) Wenn $k, m \geq 0$, so gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad k \neq m \\ \pi & \text{wenn} \quad k = m \neq 0 \end{cases}$$

c) Für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(mx)dx = 0$$

d) Für $k, m \geq 0$ haben wir:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad k \neq m \\ \pi & \text{wenn} \quad k = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{wenn} \quad k = m = 0 \end{cases}$$

Beweis. a) Ist $k = m$, so ist der Integrand konstant $= 1$ und das Integral $= 2\pi$..

Ist $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so ist $(-\mathbf{j}\,/n)\,e^{\mathbf{j}\,nx}$ eine Stammfunktion für $e^{\mathbf{j}\,nx}$, die an den beiden Integrationsgrenzen 0 und 2π den gleichen Wert annimmt. Also verschwindet das Integral.

Wegen $e^{\mathbf{j}\,nx} = \cos(nx) + \mathbf{j}\,\sin(nx)$ erhält man nebenbei auch:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0 \qquad \text{für } n \neq 0.$$

b) Wir betrachten nun das Integral über $\sin(kx)\sin(mx)$:

Ist $k \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir $\sin(kx) = \dfrac{1}{2\mathbf{j}}\left(e^{\mathbf{j}\,kx} - e^{-\mathbf{j}\,kx}\right)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx)\,e^{-\mathbf{j}\,mx}\,dx &= \frac{1}{2\mathbf{j}}\left(\int_0^{2\pi} e^{\mathbf{j}\,(k-m)x}\,dx - \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{j}\,(k+m)x}\,dx\right) \\ &= \begin{cases} \pm\pi/\mathbf{j} & \text{falls } m = \pm k \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zerlegen wir die linke Seite in Real- und Imaginärteil, so finden wir

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(mx)\,dx - \mathbf{j}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = -\pi\mathbf{j}\,,$$

also

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\ \cos(mx)\,dx = 0 \qquad \text{für alle } k,m\in\mathbb{Z}$$

und weiter für $k,m \geq 0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\ \sin(mx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } m = k \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit sind b) und c) bewiesen.

In (d) geht es um das Integral über $\cos(kx)\cos(mx)$ für $k,m \geq 0$. Ist $k = m = 0$, so kommt offensichtlich 2π heraus. Ist $k = m \neq 0$, so ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \big(1-\sin^2(kx)\big)\,dx = 2\pi - \pi = \pi.$$

Wegen der Beziehung $\cos(kx)\cos(mx) = \cos((k+m)x) + \sin(kx)\sin(mx)$ folgt schließlich das Verschwinden des Integrals im Falle $k \neq m$. □

Zum Schluss dieses Abschnittes betrachten wir trigonometrische Polynome.

Definition:. a) Unter einem ***(komplexen) trigonometrischen Polynom*** verstehen wir eine endliche Summe der Form

$$P_c(t) := \sum_{k=-r}^{r} c_k e^{\mathbf{j}\,\omega k t}$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$. Dabei ist $r \geq 1$ und $\omega > 0$.

Entsprechend bezeichnet man als ***reelles trigonometrisches Polynom*** eine endliche Summe der Form

$$P_r(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

mit Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Dabei ist $r \geq 1$ und $\omega > 0$.

1.2.5 Satz. *a) Jedes reelle trigonometrische Polynom*

$$P_r(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

lässt sich als komplexes trigonometrisches Polynom darstellen. Und zwar ist $P_r(t) = P_c(t) = \sum_{k=-r}^{r} c_k e^{\mathbf{j}\,k\omega t}$ *mit*

$$c_k := \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - \mathbf{j}\,b_k) & \text{wenn} \quad k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + \mathbf{j}\,b_{-k}) & \text{wenn} \quad k < 0 \\ a_0/2 & \text{wenn} \quad k = 0 \end{cases}$$

b) Wenn $P_r(t) := \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$ *ein reelles trigonometrisches Polynom und* $P_r(t) = 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *ist, so folgt, dass schon alle Koeffizienten verschwinden.*

c) Die zu b) analoge Aussage gilt auch bei komplexen trigonometrischen Polynomen.

Beweis. a) Die Euler'schen Formeln $e^{\mathbf{j}\,t} = \cos t + \mathbf{j}\,\sin t$ und $e^{-\mathbf{j}\,t} = \cos t - \mathbf{j}\,\sin t$ ergeben nach Addition bzw. Subtraktion die Formeln

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{j}\,t} + e^{-\mathbf{j}\,t}\right) \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{1}{2\mathbf{j}}\left(e^{\mathbf{j}\,t} - e^{-\mathbf{j}\,t}\right).$$

Die Darstellung von $P_r(t)$ als komplexes trigonometrisches Polynom folgt aus den Darstellungen

$$\cos(k\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{j}\,k\omega t} + e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}) \quad \text{und} \quad \sin(k\omega t) = \frac{1}{2\mathbf{j}}(e^{\mathbf{j}\,k\omega t} - e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}),$$

denn damit ist

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = \frac{1}{2}(a_k - \mathbf{j}\,b_k)e^{\mathbf{j}\,k\omega t} + \frac{1}{2}(a_k + \mathbf{j}\,b_k)e^{-\mathbf{j}\,k\omega t}.$$

b) Mit dem Hilfssatz 1.2.4 folgt für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\,dx &= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \cos(nu)\,du = 0 \\ \text{und} \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\,dx &= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \sin(nu)\,du = 0. \end{aligned}$$

Ist $P_r = 0$, so ist

$$0 = \int_0^{2\pi/\omega} P_r(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi/\omega} dt + \sum_{k=1}^{r}\left[a_k \int_0^{2\pi/\omega} \cos(k\omega t)\,dt + b_k \int_0^{2\pi/\omega} \sin(k\omega t)\,dt\right] = \frac{a_0\pi}{\omega},$$

also $a_0 = 0$.

Analog ist

$$0 = \int_0^{2\pi/\omega} P_r(t)\cos(m\omega t)\,dt = a_m \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(m\omega t)\,dt = \frac{a_m}{\omega}\int_0^{2\pi} \cos^2(mu)\,du = \frac{a_m \pi}{\omega},$$

also $a_m = 0$ für $1 \le m \le r$, und

$$0 = \int_0^{2\pi/\omega} P_r(t)\sin(m\omega t)\,dt = b_m \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(m\omega t)\,dt = \frac{b_m}{\omega}\int_0^{2\pi} \sin^2(mu)\,du = \frac{b_m \pi}{\omega},$$

also auch $b_m = 0$ für $1 \le m \le r$. Damit ist b) bewiesen.

c) Der komplexe Fall kann auf den reellen Fall zurückgeführt werden. $\square$