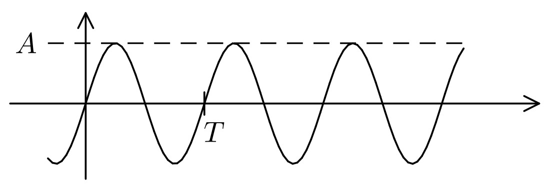
1 Vorbereitungen

1.1 Was ist und wofür braucht man Fourieranalysis?

Anwendungsgebiete der Fourier-Analysis sind z.B. Signalverarbeitung, Bildverarbeitung, Schaltkreisentwurf, Elektrodynamik, Optik, Akustik, Quantenphysik und Astrophysik, aber auch Gebiete der Mathematik wie z.B. die Theorie der Differentialgleichungen.

Ein ***(idealer) Ton*** ist eine Sinusschwingung, charakterisiert durch die Frequenz (= Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) und die Amplitude (= maximaler Ausschlag). Eine solche Sinusschwingung wird mathematisch durch eine Funktion der Form

$$f(t) = A\sin(\omega t)$$



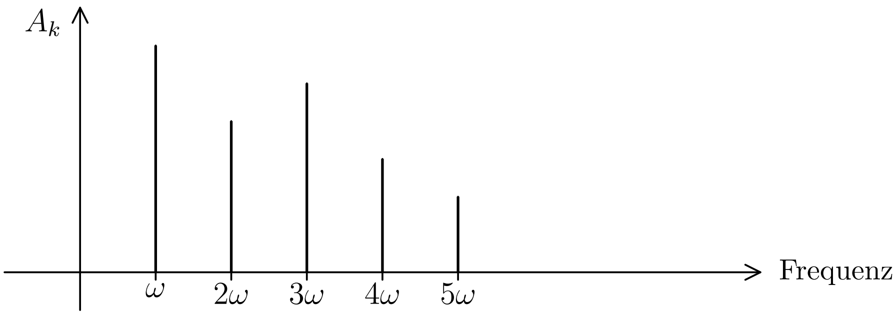
beschrieben. Die Zahl $T = 2\pi/\omega$ ist die ***Schwingungsdauer (Periode)*** der Schwingung, also die Zeit (z.B. in Sekunden), die eine Schwingung in Anspruch nimmt. Die ***Frequenz*** ist dann die Größe $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$, sie misst die Tonhöhe. Die Maßeinheit der Frequenz ist 1 Hz („Hertz“), also 1 Schwingung pro Sekunde. Der Vorfaktor A ist die ***Amplitude***, er misst die Lautstärke des Tons.

In der Natur spielen reine Sinusschwingungen keine Rolle. In der Physik versteht man unter einem ***Klang*** eine Überlagerung endlich vieler verschiedener Töne, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundtonfrequenz sind, also eine Funktion der Form

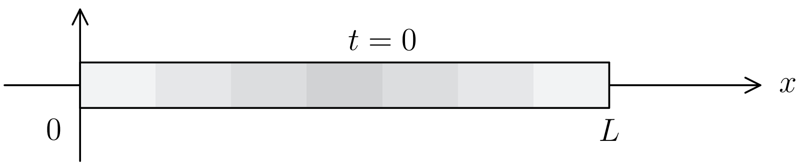
$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t)$$

Für $k > 1$ nennt man die Beiträge $A_k \sin(k\omega t)$ auch ***Obertöne***.

Die Fourieranalyse eines Klanges $f(t)$ mit Periode $T = 2\pi/\omega$ besteht nun in der Bestimmung der Koeffizienten A_k. Trägt man diese Amplituden in einem Diagramm über den zugehörigen Frequenzen ab, so entsteht das ***Amplitudenspektrum***. Eine graphische Darstellung sieht etwa so aus:



Jean Baptiste Fourier selbst wurde auf den Ansatz, Funktionen durch unendliche trigonometrische Summen darzustellen, durch sein Studium der Temperaturverteilung in einem Stab geführt:



Die analytische Beschreibung des Problems ist folgende: Die Temperaturverteilung $u(x,t)$ zur Zeit t an der Stelle x gehorcht der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\text{(W)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Man kann z.B. vorgeben, dass die Temperatur an den Stabenden 0 sein soll und die Temperaturverteilung zur Zeit 0 durch eine Funktion $f : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(L) = 0$ beschrieben wird. Der Einfachheit halber sei $L = \pi$. Das ergibt die Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & u(0,t) & = & u(\pi,t) \ = \ 0 \\ \text{und (II)} & u(x,0) & = & f(x). \end{array}$$

Man kann es nun mal mit dem Ansatz $u(x,t) = g(x) \cdot h(t)$ versuchen. Dann führt die Differentialgleichung (W) zur Gleichung

$$g(x) \cdot h'(t) = g''(x) \cdot h(t), \text{ also } \frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}\,.$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt, müssen beide Seiten konstant sein, etwa $= -\lambda$, mit einer geeigneten positiven Konstanten λ (die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda < 0$ führen zu uninteressanten, trivialen Lösungen, wie man durch eine kurze Rechnung rasch herausfinden kann). So erhält man die neuen Gleichungen

$$\begin{array}{rrcll} & (\mathrm{W}_1) \quad h'(t) + \lambda h(t) & = & 0, & t > 0, \\ \text{und} & (\mathrm{W}_2) \quad g''(x) + \lambda g(x) & = & 0, & 0 < x < \pi. \end{array}$$

und die neuen Anfangsbedingungen

(I′) $g(0) \cdot h(t) = g(\pi) \cdot h(t) = 0$ für $t > 0$, und (I″) $g(x) \cdot h(0) = f(x)$ für $0 < x < \pi$.

Wäre $g(0) \neq 0$, so müsste $h(t) = 0$ für alle $t > 0$ sein. Da dies wieder zu einer uninteressanten Lösung führt, nehmen wir an, dass $g(0) = g(\pi) = 0$ ist.

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen liefert die Lösungen

$$g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \quad (\text{für } (\mathrm{W}_2)), \quad \text{und} \quad h(t) = ce^{-\lambda t} \quad (\text{für } (\mathrm{W}_1)).$$

1) Weil $(\ln h)' = h'/h = -\lambda$ ist, muss $\ln h(t) = -\lambda t + c^*$ sein, also $h(t) = ce^{-\lambda t}$.

2) Bei der DGL $g''(x) + \lambda g(x) = 0$ kann man es mit dem Ansatz $g(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ versuchen. Differenzieren und Einsetzen ergibt:

$g''(x) + \lambda g(x) = (\lambda - \omega^2)(a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x))$. Also muss $\omega^2 = \lambda$ sein.

Weil $g(0) = 0$ ist, muss $A = 0$ sein, also $g(x) = B\sin(\omega x)$. Die Anfangsbedingung $g(\pi) = 0$ zeigt, dass zusätzlich $\sin(\omega\pi) = 0$ muss, also $\omega = n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhält man dann die Lösung

$$u_n(x,t) = a_n \cdot e^{-n^2 t}\sin(nx) \quad (\text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n := cB).$$

Die Bedingung $u(x, 0) = f(x)$ führt zu der Bedingung $f(x) = a_n \sin(nx)$. Nur für dieses spezielle f haben wir damit durch unseren Ansatz die Funktionen u_n als Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gefunden.

Analog führt der Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} g_k(x)h_k(t)$$

zu einer partikulären Lösung, sofern f eine Linearkombination von Sinusfunktionen, also von der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(kx)$$

ist.

Sollte f nun nicht selbst ein trigonometrisches Polynom sein, wird der oben beschriebene Ansatz mit einer endlichen Summe nicht zum Ziel führen. Fourier hatte in seiner Abhandlung aus dem Jahre 1807 die damals sensationelle Mitteilung gemacht, dass für jedes (vernünftige) f eine Lösung für die obige Randwertaufgabe in Form einer **unendlichen** trigonometrischen Summe möglich sei.

Das motiviert die folgende Frage:

Wann kann man eine Funktion f durch eine trigonometrische Reihe darstellen?

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x).$$

Die Folge der Koeffizienten A_k nennt man auch in diesem Fall das Spektrum der Funktion f.

Einen ähnlichen Ansatz wie bei der Wärmeleitungsgleichung hatte übrigens schon der Mathematiker Bernoulli bei der Behandlung der schwingenden eingespannten Saite erfolgreich gemacht.

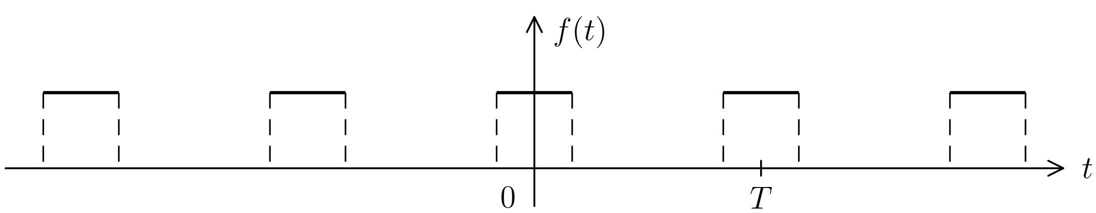
Die Fouriersche Idee, Funktionen durch eine trigonometrische Reihe zu beschreiben, lässt sich z.B. für stetig differenzierbare periodische Funktionen verwirklichen. Man erhält mit den Fourierkoeffizienten ein *diskretes Spektrum*, aus dem man die Funktion wieder zurückgewinnen kann.

Ist die Funktion f (das Signal) aber aperiodisch, etwa so, dass $f(t) = 0$ für $t \notin [0, L]$ ist, so kann es keine Darstellung durch eine trigonometrische Reihe geben. Wendet man stattdessen auf f die sogenannte „Fouriertransformation“ an, so erhält man ein *kontinuierliches Spektrum*.

Angenommen, man habe zunächst ein Signal der Form

$$f(t) := \begin{cases} 1 & , \quad \text{wenn} \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

das man periodisch mit einer Periode $T > 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzt, also

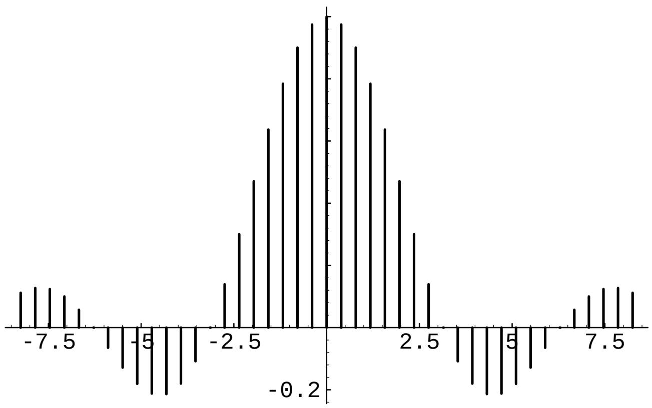


Es ist möglich, f als Reihe darzustellen:

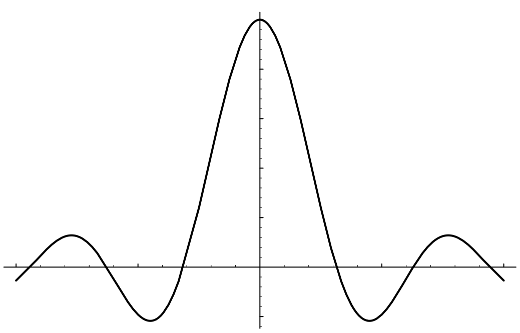
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi k t}{T}), \quad \text{mit } a_0 = 2/T \text{ und } a_k = \frac{\sin(\pi k/T)}{\pi k/2} \text{ für } k > 0.$$

Das Amplitudenspektrum ist eine äquidistante Verteilung mit Schrittweite $\omega = 2\pi/T$, mit der „Hüllkurve“ $h(x) = (2/T)\mathrm{si}(x/2)$, wobei $\mathrm{si}(t) := (\sin t)/t$ ist. Dann ist $x = T\omega$ die erste Nullstelle von h.

Im Falle $T = 8$ sieht das Spektrum folgendermaßen aus:



Mit größer werdendem T nähert sich das Spektrum dem Zustand, kontinuierlich zu sein, und im Grenzfall $T \longrightarrow \infty$ erhält man das folgende Bild:



Dann stellt sich die Frage:

- Kann man eine Funktion aus ihrem (kontinuierlichen) Spektrum rekonstruieren?