§ 4 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

Wir beginnen mit einer lokalen Beschreibung der Nullstellen holomorpher Funktionen.

4.1 Lokale Beschreibung von Nullstellen. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion h auf $D := D_\varepsilon(z_0)$, so dass gilt:*

1. *$D \subset U$.*
2. *$h(z) \neq 0$ für $z \in D$.*
3. *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot h(z)$ für $z \in D$.*

Die Zahl k und der Wert $h(z_0)$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass sich f auf $D_\delta(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muss $a_0 = 0$ sein. Da f nicht konstant ist, können nicht alle $a_n = 0$ sein.

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $k \geq 1$, so dass

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0 \text{ und } a_k \neq 0$$

ist. Daraus folgt für $z \in D_\delta(z_0)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \;=\; (z - z_0)^k \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit $h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots$.

Die Reihe $h(z)$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Reihe von $f(z)$ (da der Konvergenzradius durch die Koeffizienten bestimmt ist). Da $h(z_0) = a_k \neq 0$ ist, gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$, so dass $h(z) \neq 0$ für alle $z \in D_\varepsilon(z_0)$ ist. ∎

Die Zahl k nennt man die *Ordnung der Nullstelle*.

Ist f holomorph und nicht konstant, so kann f demnach nur isolierte Nullstellen besitzen. Liegt etwa in z_0 eine solche Nullstelle vor, so ist $1/f$ in dem isolierten Punkt z_0 nicht definiert, aber außerhalb von z_0 (und genügend nahe bei z_0) ist $1/f$ wieder holomorph.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine *isolierte Singularität* von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, dass z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, dass es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der Logarithmus hat z.B. im Nullpunkt keine isolierte Singularität, weil man einen kompletten Halbstrahl aus $\mathbb{C}$ herausnehmen muss, um log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f, wenn es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf U gibt, so dass $f = \widehat{f}|_{U \setminus \{z_0\}}$ ist.
2. z_0 heißt eine *Polstelle* von f, wenn es eine Umgebung $W = W(z_0)$, eine holomorphe Funktion h auf W und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $h(z_0) \neq 0$ ist, und
$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z) \text{ für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$
Die Zahl k ist dann eindeutig bestimmt und heißt die *Ordnung der Polstelle*.
3. z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

- z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
- Eine Polstelle liegt genau dann vor, wenn $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ ist. Das sieht man folgendermaßen:

  Die Beziehung $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ ist gleichbedeutend damit, dass $\lim_{z \to z_0} |\frac{1}{f(z)}| = 0$ ist, dass also $\frac{1}{f}$ in z_0 eine hebbare Singularität hat, in der man den Wert 0 ergänzen kann. Das bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so dass gilt:
$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \text{ und } \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$
  Und das ist gleichbedeutend mit
$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z), \quad \text{mit } h(z) := \frac{1}{\widetilde{h}(z)}.$$

- Was passiert bei einer wesentlichen Singularität? Ohne Beweis geben wir den folgenden merkwürdigen Satz an:

  Satz von Casorati-Weierstraß. *Hat f in z_0 eine wesentliche (isolierte) Singularität, so kommt $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe.*

  Das bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ ist. Man kann sogar zeigen: Auf jeder Umgebung von z_0 lässt f höchstens einen einzigen Wert aus (Satz von Picard).

Beispiele.

1. Sei $f(z) := \dfrac{z}{\sin z}$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= z \cdot (1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \pm \cdots) \\ &= z \cdot h(z), \end{aligned}$$

   mit einer holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so dass $|\dfrac{\sin(z)}{z}| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

   Also ist $|f(z)| = |\dfrac{z}{\sin(z)}| < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Im Nullpunkt muss der Wert $1/h(0) = 1$ ergänzt werden.

2. $f(z) := \dfrac{1}{z}$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

3. Sei $f(z) := \exp(\dfrac{1}{z})$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

   Setzen wir $z_n := 1/n$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

   Setzen wir dagegen $z_n := -\frac{1}{2\pi n}\mathrm{j}$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathrm{j}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht besonders praktisch. Wir werden noch bessere Methoden kennen lernen.

Sei jetzt f eine Funktion mit einer Polstelle in z_0, also $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$, mit einer holomorphen Funktion h. Wir können h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ für } |z-z_0| < r.$$

Für $z \neq z_0$ und $|z-z_0| < r$ gilt dann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1} \cdot (z-z_0) + \cdots$$

Betrachten wir dagegen die wesentliche Singularität $f(z) := \exp(1/z)$, so erhalten wir für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z.

Wir versuchen nun, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition. Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der *Entwicklungspunkt.*

$$H(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

heißt *Hauptteil* der Reihe,

$$N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

heißt *Nebenteil* der Reihe.

Ein Hauptteil $H(z) = \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + \dfrac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$ heißt *konvergent* in einem Punkt $z_1 \neq z_0$, falls die „zugehörige Potenzreihe“

$$w \mapsto H(z_0 + \frac{1}{w}) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \cdots$$

im Punkt $w_1 := \dfrac{1}{z_1 - z_0}$ konvergiert.

Ist r^* der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe, so konvergiert diese für $|w| < r^*$, und sie divergiert für $|w| > r^*$. Das bedeutet aber, dass $H(z)$ für $|z - z_0| > 1/r^*$ konvergiert und für $|z - z_0| < 1/r^*$ divergiert. Man nennt $r := 1/r^*$ den *Konvergenzradius* des Hauptteils $H(z)$.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent* in z, falls Hauptteil und Nebenteil beide in z konvergieren.

4.2 Konvergenzverhalten von Laurentreihen. *Sei $L(z) = H(z)+N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0, $r > 0$ der Konvergenzradius des Hauptteils $H(z)$ und $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils.*

1. *Ist $r \geq R$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

2. *Ist $r < R$, so konvergiert $L(z)$ auf dem Kreisring*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

absolut und auf jeder kompakten Teilmenge normal gegen eine holomorphe Funktion.

BEWEIS: Klar! ∎

Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Lässt man den inneren Radius gegen 0 und den äusseren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

Umgekehrt lässt sich jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln.

4.3 Satz von der „Laurent-Trennung“.

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \text{ und } f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$$

mit

1. *$f^+ + f^- = f$ auf $K_{r,R}(z_0)$.*

2. *$|f^-(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$.*

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten.

4.4 Folgerung. *Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann lässt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe*

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln.

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Zum BEWEIS führt man die Laurent-Trennung durch:

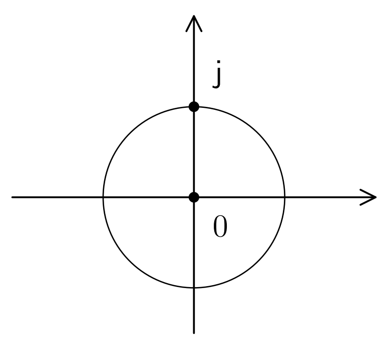
$$f(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

Die Taylorentwicklung von f^+ liefert den Nebenteil. Für den Hauptteil betrachtet man $g(w) := f^-(z_0 + 1/w)$. Dann ist g holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, und da $\lim\limits_{w \to 0} g(w) = 0$ ist, kann man den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Die Taylorreihe der holomorphen Fortsetzung von g liefert dann den Hauptteil.

Beispiel.

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z - \mathsf{j}\,)^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathsf{j}\,\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\dfrac{1}{z - z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z - a| < |z_0 - a|$ ist

$$|\frac{z-a}{z_0-a}| < 1$$

und
$$\frac{1}{1-(z-a)/(z_0-a)} = \frac{z_0-a}{(z_0-a)-(z-a)} = \frac{z_0-a}{z_0-z}\,,$$

also
$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0} &= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-(z-a)/(z_0-a)}\\ &= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Ist $|z-a| > |z_0-a|$, so geht man analog vor:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-(z_0-a)/(z-a)}\\ &= \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Ist schließlich $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^{(m-1)}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\dfrac{1}{z-z_0}$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist $a=0$, $z_0 = \mathrm{j}$ und $0 < |z| = |z-0| < 1 = |j-0|$, also
$$\frac{1}{z-\mathrm{j}} = \mathrm{j}\cdot\frac{1}{1-(z/\mathrm{j}\,)} = \mathrm{j}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{j}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{j}\,)^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{j}}\right)' = -\mathrm{j}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{\mathrm{j}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{z}{\mathrm{j}}\right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{\mathrm{j}^{\,n}}z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{\mathrm{j}^{\,n+1}}z^n.$$

Im **Kreisring** $K_{1,\infty}(0)$ ist

$$\frac{1}{z - \mathsf{j}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathsf{j}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{j}^{\,n-1} \frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z - \mathsf{j}\,)^2} = -\left(\frac{1}{z - \mathsf{j}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{j}^{\,n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{j}^{\,n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{j}^{\,n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \mathsf{j}^{\,n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3} \mathsf{j}^{\,-n-1}(n+2)z^n,$$

wegen $\mathsf{j}^{\,-n-3}(-n-2) = \mathsf{j}^{\,-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathsf{j}\,)$:

Hier ist $a = \mathsf{j}$ und $z_0 = 0$, und $1/z$ soll nach Potenzen von $(z - \mathsf{j}\,)$ entwickelt werden. Es ist $0 < |z - \mathsf{j}\,| < |0 - \mathsf{j}\,| = 1$, also $|(z - \mathsf{j}\,)/(-\mathsf{j}\,)| < 1$ und

$$\frac{1}{1 - (z - \mathsf{j}\,)/(-\mathsf{j}\,)} = \frac{-\mathsf{j}}{-\mathsf{j} - (z - \mathsf{j}\,)} = \frac{\mathsf{j}}{z}\,.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{\mathsf{j}} \cdot \frac{1}{1 - (z - \mathsf{j}\,)/(-\mathsf{j}\,)} \\
&= \frac{1}{\mathsf{j}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \mathsf{j}}{-\mathsf{j}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathsf{j}^{\,n+1})(z - \mathsf{j}\,)^n,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z - \mathsf{j}\,)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathsf{j}^{\,n+1})(z - \mathsf{j}\,)^{n-2} \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty} (-\mathsf{j}^{\,n+3})(z - \mathsf{j}\,)^n \\
&= \frac{-\mathsf{j}}{(z - \mathsf{j}\,)^2} + \frac{1}{z - \mathsf{j}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{j}^{\,n+1}(z - \mathsf{j}\,)^n.
\end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathsf{j}\,)$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

4.5 Charakterisierung von Singularitäten. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ hebbar} \quad &\iff \quad a_n = 0 \text{ für } \textbf{alle } n < 0, \\ z_0 \text{ Polstelle} \quad &\iff \quad \exists\, n < 0 \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ und } a_k = 0 \text{ für } k < n, \\ z_0 \text{ wesentlich} \quad &\iff \quad a_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\,\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das lässt nur die Möglichkeit, dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. ∎

Beispiele.

1. $$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \ldots$$

   besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

   $$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2.
$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathrm{j}\,)^2}$$
hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in j . Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

3.
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$
hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.
$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$
ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$. Aber dann ist auch $\dfrac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:
$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$
Also ist
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$
Das bedeutet, dass f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

§ 5 Residuenkalkül

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $D \subset G$ heißt *diskret in* G, falls sie keinen Häufungspunkt in G besitzt. Sie kann dann zwar Häufungspunkte auf dem Rand von G haben, besitzt aber im Innern von G nur isolierte Punkte.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine *meromorphe Funktion* auf G besteht aus einer diskreten (oder leeren) Menge $D \subset G$ und einer holomorphen Funktion

$$f : G \setminus D \to \mathbb{C},$$

die in den Punkten von D höchstens Polstellen als isolierte Singularitäten besitzt.

Jede rationale Funktion ist Beispiel einer meromorphen Funktion, aber z.B. auch die Funktion $1/\sin z$.

Wir wollen jetzt ein möglichst effektives Verfahren für die Berechnung von Kurvenintegralen über meromorphe Funktionen entwickeln. Dabei soll die Kurve keine der Polstellen treffen.

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein **einfach geschlossener** Weg. Dann besteht $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ aus zwei disjunkten Gebieten, einem beschränkten Gebiet G_0 und einem unbeschränkten Gebiet G_1. Das Gebiet G_0 nennt man auch das *Innere* von γ und bezeichnet es mit $\text{Int}(\gamma)$. Es gilt $n(\gamma, z) = \pm 1$ für alle $z \in G_0$ und $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in G_1$, also im *Äußeren* von γ. Ist sogar $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in G_0$, so nennt man γ *positiv orientiert*. Man kann zeigen:

5.1 Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ ein einfach geschlossener Integrationsweg in G, so dass das Innere von γ ganz in G liegt. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f auf G.*

Wir betrachten jetzt folgende einfache Situation:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, γ ein positiv orientierter einfach geschlossener Weg in G und $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$. Weiter sei f eine meromorphe Funktion auf G mit einer einzigen Polstelle in z_0.

$$\text{Wie berechnet man } \int_\gamma f(z)\,dz \quad ?$$

Sei ϱ der positiv orientierte Rand einer kleinen Kreisscheibe mit Radius ε um z_0, die noch ganz in $\text{Int}(\gamma)$ liegt, sowie σ eine Strecke, die γ mit ϱ verbindet. Unter $\gamma + \sigma - \varrho - \sigma$ verstehen wir den geschlossenen Weg, der wie folgt konstruiert wird: Zunächst durchläuft man γ, dann die Strecke σ, dann ϱ in negativer Richtung und schließlich auch noch einmal σ in negativer Richtung. Integriert man eine Funktion über diesen Weg, so fallen die Integrale über σ heraus. Andererseits berandet der Weg ein Gebiet G', auf dem f holomorph ist. Da f lokal immer über den „Rand“

holomorph fortgesetzt werden kann, tun wir so, als sei f auf einer Umgebung von $\overline{G}'$ noch holomorph. Dann folgt aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz:

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\varrho f(z)\,dz.$$

Damit wird die Berechnung von $\int_\gamma f(z)\,dz$ auf die Berechnung des „Restintegrals" $\int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz$ zurückgeführt.

Ist das eine Erleichterung? Eventuell schon! Wir können ja f in der Nähe von z_0 in eine Laurentreihe um z_0 entwickeln. Es ist $f(z) = N(z)+H(z)$, wobei der Hauptteil

$$H(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \varphi(z)$$

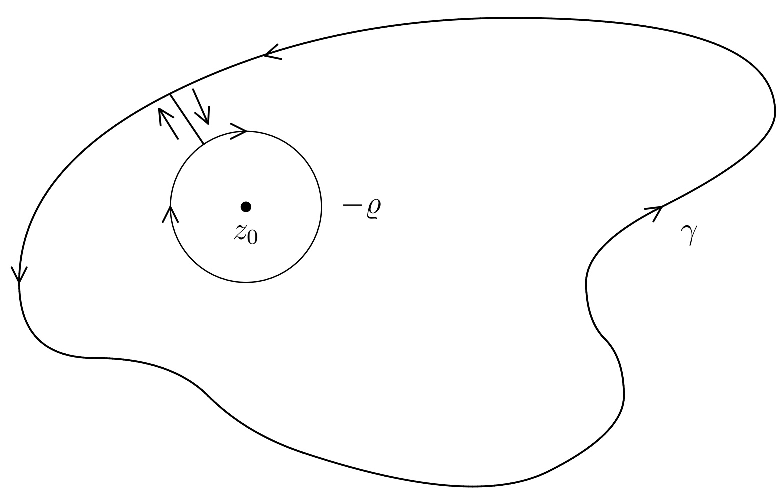
auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und darüber hinaus

$$\varphi(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion besitzt. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist daher

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{a_{-1}}{z-z_0}\,dz = a_{-1} \cdot 2\pi \mathsf{j}\,.$$

Wir müssen also nur noch die Zahl a_{-1} berechnen.



Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so dass $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta$$

das *Residuum* von f in z_0.

Bemerkungen.

1. $\text{res}_{z_0}(f)$ ist der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f um z_0. Daraus folgt insbesondere, dass f nicht von dem gewählten ε abhängt.

2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\text{res}_{z_0}(f) = 0$.

3. Es ist
$$\text{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \text{res}_{z_0}(f) + b \cdot \text{res}_{z_0}(g).$$

4. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\text{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn da f eine Stammfunktion besitzt, verschwindet das Integral über f und jeden geschlossenen Weg.

   Insbesondere ist $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z-z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

5. Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist
$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

   Beweis: Wir schreiben
$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad h \text{ holomorph in } z_0.$$

   Dann folgt:
$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)h(z) \to a_{-1} \text{ für } z \to z_0.$$

   ■

6. Man kann die vorangegangene Aussage auf m-fache Polstellen verallgemeinern. Wir beschränken uns hier allerdings auf den Fall $k = 2$.

   Hat f in z_0 eine 2-fache Polstelle, so ist
$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'.$$

   Beweis: Es ist
$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$
   also
$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + \cdots + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \cdots$$
   Damit ist
$$[(z - z_0)^2 f(z)]' = a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\ldots),$$
   und es folgt die Behauptung. ■

7. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

   Dann ist $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{h}\right) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

   BEWEIS: Nach Voraussetzung besitzt h in z_0 eine einfache Nullstelle und $f := g/h$ daher in z_0 eine einfache Polstelle. Also ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(h(z) - h(z_0))/(z - z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

∎

Beispiele.

1. Sei $f(z) := \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z^2 + 1} = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{(z - \mathrm{j}\,)(z + \mathrm{j}\,)}$.

   f hat einfache Polstellen bei j und $-\mathrm{j}$. Es ist

$$\text{res}_{\mathrm{j}}\,(f) = \lim_{z \to \mathrm{j}}\,(z - \mathrm{j}\,)f(z) = \lim_{z \to \mathrm{j}} \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z + \mathrm{j}} = -\frac{1}{2e}\mathrm{j}\,,$$

   und analog

$$\text{res}_{-\mathrm{j}}\,(f) = \lim_{z \to -\mathrm{j}}\,(z + \mathrm{j}\,)f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{j}} \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z - \mathrm{j}} = \frac{e}{2}\mathrm{j}\,.$$

2. Es soll das Residuum von $f(z) := \exp(-1/z)$ in $z_0 = 0$ berechnet werden. Dort liegt keine Polstelle, sondern eine wesentliche Singularität vor, aber das ist auch erlaubt. Am besten verwendet man die Laurentreihe.

$$\exp(-\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + (-1)\frac{1}{z} \pm \ldots.$$

   Also ist $\text{res}_0(f) = a_{-1} = -1$.

3. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ hat bei $z = -1$ eine doppelte Polstelle. Also ist

$$\text{res}_{-1}(f) = \lim_{z \to -1}\left[(z+1)^2 f(z)\right]' = \lim_{z \to -1} \frac{2z^2 + 8z - 8}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

4. Sei $f(z) := \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$. Weil $\cos(0) \neq 0$, $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) \neq 0$ ist, gilt:

$$\text{res}_0\left(\frac{\cos(z)}{\sin(z)}\right) = \frac{\cos(0)}{\sin'(0)} = 1.$$

Als erste Anwendung greifen wir das Problem der Partialbruchzerlegung noch einmal auf, denn wir haben jetzt neue Methoden zur Hand. Wir betrachten eine rationale Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ (gekürzt, mit $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(q)$) und nehmen an, dass wir den Nenner in Linearfaktoren zerlegen können:

$$q(z) = \prod_{i=1}^{N}(z-a_i)^{r_i}, \quad a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j.$$

Dann gibt es eine Darstellung

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{c_{ij}}{(z-a_i)^j}\ ,$$

und wir wollen versuchen, die Koeffizienten c_{ij} zu bestimmen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass alle $r_i \leq 2$ sind.

Offensichtlich ist $\displaystyle\sum_{j=1}^{r_i} \frac{c_{ij}}{(z-a_i)^j}$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in a_i (denn alle anderen Summanden sind in a_i holomorph). Damit folgt sofort:

$$c_{i1} = \mathrm{res}_{a_i}(f).$$

Ist $r_i = 1$, so ist $c_{i1} = \lim\limits_{z\to a_i}(z-a_i)f(z)$.

Ist $r_i = 2$, so ist $c_{i1} = \lim\limits_{z\to a_i}\big[(z-a_i)^2 f(z)\big]'$.

Der Koeffizient c_{i2} kommt nur vor, wenn $r_i = 2$ ist. Offensichtlich ist dann

$$c_{i2} = \lim_{z\to a_i}(z-a_i)^2 f(z).$$

Jetzt kommen wir aber zur wichtigsten Anwendung der Residuen:

5.2 Der Residuensatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein einfach geschlossener Weg in G mit $\mathrm{Int}(\gamma) \subset G$. Weiter sei f eine meromorphe Funktion auf G mit endlich vielen Polstellen $z_1, \ldots, z_N \in G \setminus |\gamma|$. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} n(\gamma, z_k)\cdot \mathrm{res}_{z_k}(f).$$

Beweis: Sei $H_k(z) := \dfrac{a_{-1}^{(k)}}{z-z_k} + \varphi_k(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in z_k, so dass φ_k auf $\mathbb{C}\setminus\{z_k\}$ jeweils eine Stammfunktion besitzt. Dann ist

$$f(z) - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(z)$$

holomorph auf G, und daher

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} a_{-1}^{(k)} \cdot \int_\gamma \frac{dz}{z - z_k}.$$

Das ergibt die Behauptung. ∎

Beispiel.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ hat einen doppelten Pol bei $z = -1$ und einfache Pole bei $z = \pm 2\mathrm{j}$. Es soll $\displaystyle\int_{\partial D_2(-\mathrm{j})} f(z)\,dz$ ausgerechnet werden.

Das Residuum bei -1 haben wir oben schon ausgerechnet, es ist $\operatorname{res}_{-1}(f) = -\dfrac{14}{25}$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2\mathrm{j}}(f) &= \lim_{z \to -2\mathrm{j}} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z - 2\mathrm{j})} = \frac{-4 + 4\mathrm{j}}{(1 - 2\mathrm{j})^2(-4\mathrm{j})} \\
&= \frac{1 - \mathrm{j}}{(-3 - 4\mathrm{j})\mathrm{j}} = \frac{1 - \mathrm{j}}{4 - 3\mathrm{j}} \\
&= \frac{(1 - \mathrm{j})(4 + 3\mathrm{j})}{(4 - 3\mathrm{j})(4 + 3\mathrm{j})} = \frac{7 - \mathrm{j}}{25}.
\end{aligned}$$

Von den Polstellen liegen -1 und $-2\mathrm{j}$ in der Kreisscheibe $D_2(-\mathrm{j})$ (es ist $|-1 - (-\mathrm{j})| = |-1 + \mathrm{j}| = \sqrt{2} < 2$). Der Punkt $2\mathrm{j}$ liegt außerhalb. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_2(-\mathrm{j})} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz &= 2\pi\mathrm{j} \cdot [\operatorname{res}_{-1}(f) + \operatorname{res}_{-2\mathrm{j}}(f)] \\
&= 2\pi\mathrm{j} \cdot \left[-\frac{14}{25} + \frac{7 - \mathrm{j}}{25}\right] \\
&= \frac{2\pi\mathrm{j}}{25} \cdot (-7 - \mathrm{j}) = \frac{2\pi}{25}(1 - 7\mathrm{j}).
\end{aligned}$$

Oft wendet man den Residuensatz in folgender Form an:

5.3 Das Argument-Prinzip. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ ein positiv orientierter einfach geschlossener Weg in G und $G' := \operatorname{Int}(\gamma) \subset\subset G$.*

Weiter sei f auf G meromorph, n die Anzahl der Nullstellen und p die Anzahl der Polstellen von f in G'. Beides werde jeweils mit Vielfachheiten gezählt. Keine der Null- und Polstellen von f liege auf $|\gamma|$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = n - p.$$

Beweis: Ist $z_0 \in G'$ ein beliebiger Punkt, so kann man f in der Nähe von z_0 schreiben als

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot h(z),$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$. Ist $m > 0$, so liegt eine Nullstelle der Ordnung m vor. Ist $m < 0$, so hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung m. Ist $m = 0$, so ist f in z_0 holomorph und $\neq 0$.

Nun ist $f'(z) = m \cdot (z - z_0)^{m-1} \cdot h(z) + (z - z_0)^m \cdot h'(z)$, also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m \cdot h(z) + (z - z_0)h'(z)}{(z - z_0)h(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

wobei der zweite Summand in z_0 holomorph ist. Daraus folgt: $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$. Nur bei den endlich vielen Nullstellen und Polstellen, die f eventuell in G' besitzt, kann ein Residuum $\neq 0$ herauskommen. Deshalb folgt die Formel unmittelbar aus dem Residuensatz. ∎

Ist z eine komplexe Zahl, so versteht man unter dem *Argument* von z den Winkel t in der Polarkoordinaten-Darstellung $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t}$. Die Umlaufszahl $n(\gamma, z_0)$ misst die Gesamtänderung des Winkels (also des Arguments), unter dem man $\gamma(t)$ beim Durchlaufen des Weges von z_0 aus sieht. Zur Deutung des Argument-Prinzips beachten wir, dass $f \circ \gamma$ ein geschlossener Weg ist, der den Nullpunkt nicht trifft, und für den gilt:

$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = n - p. \end{aligned}$$

Ist z_0 eine k-fache Nullstelle der Funktion f, um die γ herumläuft, so ist $n(f \circ \gamma, 0) = k$. Der Weg $f \circ \gamma$ umläuft also den Nullpunkt k-mal. Das bedeutet: Ist $z = \gamma(t)$, so wird $w := f(\gamma(t))$ k-mal angenommen.

Das Integral $\displaystyle\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ liefert also bis auf den Faktor 2π die Gesamtänderung des Arguments von $f(z)$, wenn z den Weg γ durchläuft.

Beispiel.

Die Funktion $f(z) := z^2$ besitzt in $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung und ist ansonsten holomorph ohne Nullstellen. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := e^{\mathrm{j}\, t}$ umrundet diese Nullstelle einmal, ist also eine einfach geschlossene Kurve, auf der keine Nullstelle von f liegt. Daher ist $n(f \circ \gamma, 0) = 2$. Und tatsächlich umläuft $f \circ \gamma(t) = e^{2\mathrm{j}\, t}$ den Nullpunkt zweimal! Jeder Wert $w \neq 0$ wird zweimal angenommen, es gibt ja jeweils 2 Wurzeln.

5.4 Satz von Rouché. *Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : B \to \mathbb{C}$ holomorph und $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes Gebiet.*

Ist $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ auf ∂G, so haben f und g gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit) in G.

BEWEIS: Für $0 \le \lambda \le 1$ sei $h_\lambda(z) := f(z) + \lambda \cdot (g(z) - f(z))$. Dann ist h_λ auf B holomorph, und für $z \in \partial G$ gilt:

$$|h_\lambda(z)| \ge |f(z)| - \lambda \cdot |g(z) - f(z)| > (1 - \lambda) \cdot |g(z) - f(z)| \ge 0.$$

Also hat h_λ auf ∂G keine Nullstellen. Nun sei N_λ die Anzahl der Nullstellen von h_λ in G. Der Wert des Integrals

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial G} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\, dz$$

hängt stetig von λ ab, liegt aber in $\mathbb{Z}$. Also ist $N_0 = N_1$. ∎

Beispiel.

Wieviele Nullstellen hat das Polynom $f(z) := z^4 - 4z + 2$ im Innern des Einheitskreises $\mathbb{D} = D_1(0)$?

Wir setzen $g(z) := -4z + 2$. Dann ist $|f(z) - g(z)| = |z|^4 = 1$ auf $\partial\mathbb{D}$, und $|g(z)| = |4z - 2| \ge 4|z| - 2 = 2$ auf $\partial\mathbb{D}$. Nach dem Satz von Rouché müssen nun f und g in $\mathbb{D}$ gleichviele Nullstellen besitzen. Aber g hat dort genau eine Nullstelle (nämlich $z = 1/2$).

Eine besonders wichtige Anwendung des Residuensatzes stellt die Berechnung gewisser reeller Integrale dar. Wir betrachten hier vorerst nur einen Fall, nämlich die Berechnung uneigentlicher rationaler Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\ ,$$

wobei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ist, mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

5.5 Hilfssatz. *Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten c, $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass gilt:*

$$c|z|^n \le |p(z)| \le C|z|^n \quad \textit{für } |z| \ge R.$$

Beweis:

$$\text{Sei} \quad p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu,\ \text{mit } a_n \ne 0.$$

Für $z \neq 0$ ist $q(z) := \dfrac{p(z)}{z^n} = a_n + a_{n-1}\cdot\dfrac{1}{z} + \cdots + a_0\cdot\dfrac{1}{z^n} = a_n + H(z)$

eine Laurentreihe mit konstantem Nebenteil a_n und endlichem Hauptteil $H(z)$. Also ist $\lim\limits_{|z|\to\infty}(q(z) - a_n) = 0$, und es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass $|q(z)| \le C$ für $|z| \ge 1$ ist.

Weiter ist $|q(z)| \ge |a_n| - |H(z)|$, und da $|H(z)|$ für $|z| \to \infty$ beliebig klein wird, gibt es ein $c > 0$, so dass $|q(z)| \ge c$ für $|z| \ge R$ und genügend großes R ist. ∎

5.6 Folgerung. *Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) \ge \deg(p) + k$ und $1 \le k \le 2$, so folgt:*

1. *Ist $k = 1$, so ist $|z\cdot\dfrac{p(z)}{q(z)}|$ im Unendlichen beschränkt.*
2. *Ist $k = 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx.$$

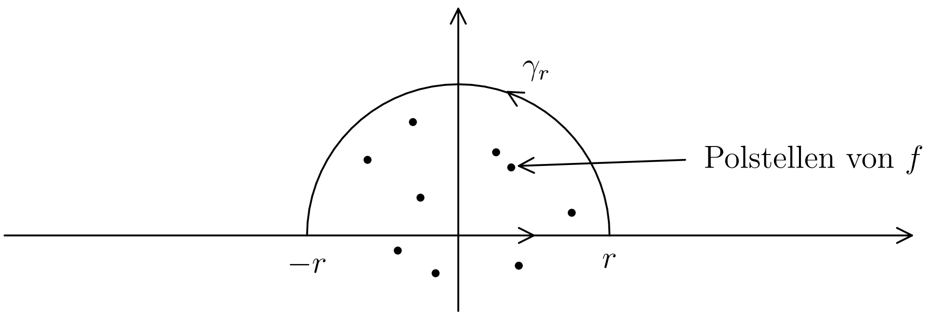
Beweis: Sei $m := \deg(p)$ und $n := \deg(q)$. Dann ist $m - n \le -k$. Nach dem Hilfssatz gibt es Konstanten c und C, so dass gilt:

$$|p(z)| \le C|z|^m \quad \text{und} \quad c|z|^n \le |q(z)|$$

und daher $|\dfrac{p(z)}{q(z)}| \le C^*\cdot|z|^{m-n}$, für $|z| \ge R$ und $C^* := \dfrac{C}{c}$.

Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}| \le C^*$. Ist $k = 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus dem Majoranten-Kriterium und der Integrierbarkeit von $1/|x|^2$. ■

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ erfüllt, mit $k = 2$. Insbesondere ist dann $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch höchstens endlich viele sein. Wir betrachten folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathrm{j}\,t}$, $0 \le t \le \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man beachte, dass das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine *endliche* Summe!

Da $|f(z)| \le \dfrac{C}{|z|^2}$ für große z ist, folgt:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \le \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall. Zur Erinnerung: Der Grenzwert

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt *Cauchyscher Hauptwert* des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, dass der Cauchysche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

Beispiel.

Wir wollen $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathrm{j}\,\pi/4} = e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos(\frac{\pi+2\pi k}{4}) + \mathrm{j}\,\sin(\frac{\pi+2\pi k}{4}),$$

für $k = 0,1,2,3$. Dabei ist $\mathrm{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da alle 4 Nullstellen von $1 + z^4$ verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathrm{j}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j}\,) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{j}\,-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Wir verwenden die Formel $\mathrm{res}_{z_0}(g/h) = g(z_0)/h'(z_0)$ (mit $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 \\ \text{und} \quad \mathrm{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1, \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\mathrm{j}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathrm{j}\,) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathrm{j}\,)\right) \\ &= \frac{\pi\mathrm{j}}{2\sqrt{2}}(-2\mathrm{j}\,) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$