Kapitel 2 Funktionentheorie

§ 1 Holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt sollen komplexwertige Funktionen auf Gebieten $G \subset \mathbb{C}$ untersucht werden.

Beispiele.

1. Die *Konjugation* $c : z \mapsto \overline{z}$ stellt eine Spiegelung an der reellen Achse dar:

$$c(x + \mathsf{j}\, y) := x - \mathsf{j}\, y.$$

Man beachte, dass die *imaginäre Einheit* $\sqrt{-1}$ in der Elektrotechnik mit j bezeichnet wird!

Die Spiegelung ist auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und bijektiv, mit $c^{-1} = c$. Sie ist außerdem $\mathbb{R}$-linear, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{1, \mathsf{j}\}$ auffasst. Sie wird dann durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

2. Sei $a = \alpha + \mathsf{j}\,\beta$ eine feste komplexe Zahl $\neq 0$. Die Abbildung $m_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $m_a(z) := a \cdot z$ ist $\mathbb{C}$-linear, und damit erst recht $\mathbb{R}$-linear.

Weil $m_a(1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \mathsf{j}$ und $m_a(\mathsf{j}) = (-\beta) \cdot 1 + \alpha \cdot \mathsf{j}$ ist, wird m_a bezüglich der Basis $\{1, \mathsf{j}\}$ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ durch die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Umgekehrt ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn ihre Matrix diese spezielle Gestalt besitzt.

Schreibt man a in der Form

$$a = r \cdot e^{\mathsf{j}\, t} = r(\cos t + \mathsf{j}\, \sin t),$$

mit $r > 0$ und $0 \leq t < 2\pi$, so setzt sich m_a aus der Drehung um den Winkel t und der Streckung um den Faktor r zusammen, ist also eine „Drehstreckung". Weil wir $a \neq 0$ vorausgesetzt haben, ist m_a bijektiv, mit $(m_a)^{-1} = m_{1/a}$.

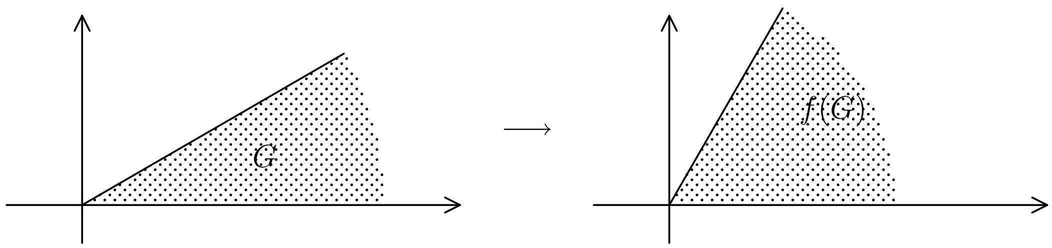
3. Sei $f(z) := z^2$. Diese Funktion kann man am besten verstehen, wenn man z in Polarkoordinaten schreibt: $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\, t}$. Dann ist nämlich

$$f(z) = r^2 \cdot e^{2\mathsf{j}\, t} = r^2 \cdot (\cos(2t) + \mathsf{j}\, \sin(2t)).$$

Der Abstand vom Nullpunkt wird quadriert und der Winkel verdoppelt. Dadurch wird z.B. der Sektor $G := \{z = r \cdot e^{\mathsf{j}\, t} \,:\, r > 0 \text{ und } 0 < t < \theta\}$ auf den verdoppelten Sektor

$$f(G) = \{w = \varrho \cdot e^{\mathrm{j}\,s} \,:\, \varrho > 0 \text{ und } 0 < s < 2\theta\}$$

abgebildet.



Wie sieht es mit der Umkehrabbildung aus? Ist $w = r \cdot e^{\mathrm{j}\,t}$, so wollen wir natürlich $\sqrt{w} := \sqrt{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t}{2}}$ setzen. Aber es ist auch $w = r \cdot e^{\mathrm{j}\,t+2\pi\mathrm{j}}$, also könnten wir auch $\sqrt{w} = \sqrt{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t}{2}+\mathrm{j}\,\pi} = -\sqrt{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t}{2}}$ setzen. Die Wurzel ist nicht eindeutig bestimmt, und wir haben keine Möglichkeit, eine der beiden Wurzeln auszuzeichnen. (Im Reellen können wir die **positive** Wurzel wählen, aber im Komplexen gibt es keine positiven Zahlen.)

4. *Komplexe Polynome:* $p(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ist auf der gesamten komplexen Ebene definiert und stetig, und aus dem *Fundamentalsatz der Algebra* folgt:

   $p(z)$ besitzt n Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$, und man kann schreiben:

   $$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

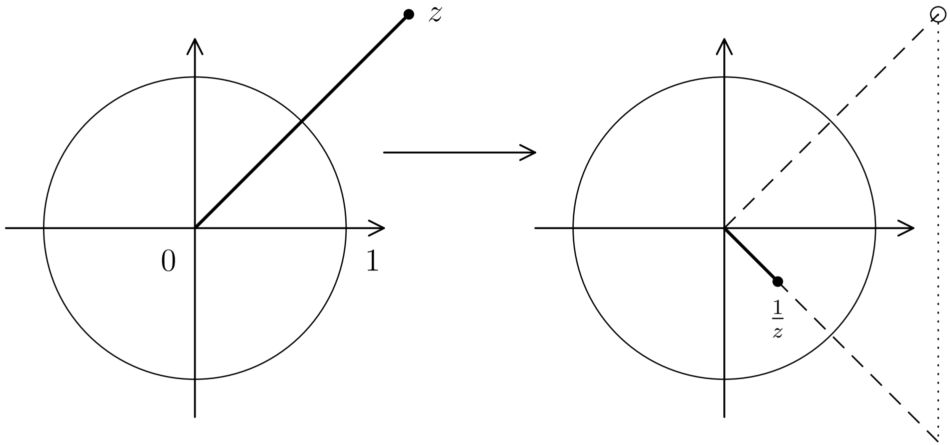
5. *Rationale Funktionen:* $R(z) := \dfrac{p(z)}{q(z)}$, mit Polynomen p und q.

   Da $p(z)$ und $q(z)$ beide in Linearfaktoren zerfallen, kann man so lange kürzen, bis Zähler und Nenner keine gemeinsame Nullstelle mehr haben. Wir nehmen an, dass p und q schon selbst diese Eigenschaft besitzen. Dann nennt man jede Nullstelle des Nenners $q(z)$ eine *Polstelle* der rationalen Funktion R. Offensichtlich ist $R(z)$ außer in den endlich vielen Polstellen überall auf $\mathbb{C}$ definiert und stetig.

   Die einfachste rationale Funktion mit einer Polstelle ist die *Inversion*

   $$I(z) := \frac{1}{z}.$$

   In Polarkoordinaten sieht das so aus: $r \cdot e^{\mathrm{j}\,t} \mapsto \dfrac{1}{r} \cdot e^{-\mathrm{j}\,t}$. Man kann diese Abbildung zusammensetzen aus der sogenannten *Spiegelung am Einheitskreis* $s : z \mapsto \overline{z}^{-1}$ und der Konjugation $c : z \mapsto \overline{z}$.



6. Eine spezielle Klasse von rationalen Funktionen bilden die *(gebrochen) linearen Transformationen:*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ mit } ad - bc \neq 0.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $c = 0$.

Setzt man $A := \dfrac{a}{d}$ und $B := \dfrac{b}{d}$, so erhält man die *affin-lineare* Funktion

$$T(z) = A \cdot z + B,$$

die sich aus einer Drehstreckung und einer Translation zusammensetzt.

2. Fall: $c \neq 0$.

Setzt man diesmal $A := \dfrac{bc - ad}{c}$ und $B := \dfrac{a}{c}$, so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz+d} + B &= \frac{(a(cz+d) + (bc - ad)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{az+b}{cz+d} \quad = \quad T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

Behauptung:

Eine lineare Transformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ac - bd \neq 0$ bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.

BEWEISIDEE: Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Bei affin-linearen Funktionen ergibt sich die Behauptung aus der Elementargeometrie. Drehungen und Translationen verändern die Gestalt von Geraden und Kreisen nicht. Eine Gerade wird durch eine Streckung um einen Faktor ϱ wieder auf eine Gerade abgebildet, und wenn ein Punkt $z = x + \mathsf{j}\, y$ eine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

erfüllt, so erfüllt $\varrho z = (\varrho x) + \mathsf{j}\,(\varrho y)$ die Gleichung

$$(\varrho x - \varrho x_0)^2 + (\varrho y - \varrho y_0)^2 = (\varrho r)^2.$$

2) Nun sei $w = I(z) = \dfrac{1}{z}$ die Inversion. Man kann zeigen, dass jede Gerade und jeder Kreis eine Menge M der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \delta = 0\}$$

ist, mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\overline{c} > \alpha\delta$. Eine Gerade liegt genau dann vor, wenn $\alpha = 0$ ist. Ist etwa $\alpha = 1$, so liegt ein Kreis um $z_0 := -\overline{c}$ mit Radius $r := \sqrt{c\overline{c} - \delta}$ vor.

Im Nullpunkt ist I nicht definiert, es sei also $z \neq 0$. Da $z = \dfrac{1}{w}$ ist, gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\overline{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\overline{c}}{\overline{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muss, können wir mit $w\overline{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\overline{w} + \overline{c}w + \delta w\overline{w} = 0.$$

Das Bild von M ist wieder eine Menge vom gewünschten Typ. ■

7. *Komplexe Potenzreihen:* $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$

Wir wiederholen einige Fakten über Potenzreihen.

a) Jede Potenzreihe besitzt einen *Konvergenzradius* $R \geq 0$. Der Wert $R = +\infty$ ist auch zugelassen. Ist a der Entwicklungspunkt und $|z - a| < R$, so konvergiert die Reihe in z absolut. Ist $|z - a| > R$, so divergiert die Reihe in z.

b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Reihe von stetigen Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$. Gibt es Zahlen $\alpha_n > 0$, so dass $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ für alle $z \in M$ und alle n und $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ ist, so nennt man die Funktionenreihe auf M *normal* *konvergent*. Dann konvergiert für jedes $z \in M$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ absolut.

Ist R der Konvergenzradius einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a und $0 < r < R$, so konvergiert die Reihe auf der Kreisscheibe $D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ normal. Insbesondere ist die Grenzfunktion im Konvergenzkreis $D_R(a)$ stetig.

Wenn bei einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ (fast) alle $c_n \neq 0$ sind und die Folge $\left|c_n/c_{n+1}\right|$ konvergiert, dann ist der Grenzwert der Konvergenzradius. Leider sind die Voraussetzungen dieses Kriteriums nicht immer erfüllt.

Ein wichtiges Beispiel ist die komplexe *Exponentialfunktion*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

deren Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Für reelles x ist $\exp(x) = e^x$ die bekannte Exponentialfunktion, und für rein imaginäres $z = \mathrm{j}y$ gilt die Eulersche Formel:

$$\exp(\mathrm{j}\,y) = \cos y + \mathrm{j}\, \sin y.$$

Außerdem gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Daraus folgt:

$$\exp(x + \mathrm{j}\,y) = \exp(x) \cdot \exp(\mathrm{j}\,y) = e^x \cdot (\cos(y) + \mathrm{j}\, \sin(y)).$$

Insbesondere ist exp periodisch, mit der Periode $2\pi\mathrm{j}$.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, falls es eine Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

1. Δ ist in z_0 stetig.
2. Für $z \in U$ ist $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$.

Den Wert $f'(z_0) := \Delta(z_0)$ nennt man die *(komplexe) Ableitung* von f in z_0.

1.1 Differenzierbarkeits-Kriterien. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
2. *f ist (als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) reell differenzierbar, und die reelle Ableitung $Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear.*

3. *$f = g + \mathsf{j}\, h$ ist in z_0 reell differenzierbar, und es gelten die*

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z_0).}$$

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_x(z_0) = -\mathsf{j}\, f_y(z_0).$$

BEWEIS:

$(1) \Longrightarrow (2)$:

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ.

Setzen wir $L(w) := \Delta(z_0) \cdot w$ und $r(w) := (\Delta(z_0 + w) - \Delta(z_0)) \cdot w$, so ist L eine $\mathbb{C}$-lineare (und damit erst recht $\mathbb{R}$-lineare) Abbildung, und es gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$.
2. $\displaystyle\lim_{w \to 0} \frac{r(w)}{|w|} = \lim_{w \to 0} (\Delta(z_0 + w) - \Delta(z_0)) \cdot \frac{w}{|w|} = 0.$

Also ist f in z_0 reell differenzierbar, und $Df(z_0) = L$ ist $\mathbb{C}$-linear.

$(2) \Longrightarrow (3)$:

Wir schreiben

$$f(z) = g(z) + \mathsf{j}\, h(z),$$

mit reellwertigen Funktionen g und h. Ist f in z_0 total (reell) differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, so gibt es eine komplexe Zahl $c = \alpha + \mathsf{j}\, \beta$ mit $Df(z_0)(w) = c \cdot w$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix} = J_f(z_0)) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Also muss gelten:

$$h_x(z_0) = -g_y(z_0) \text{ und } h_y(z_0) = g_x(z_0).$$

$(3) \Longrightarrow (1)$:

Ist $f = g + \mathsf{j}\, h$ in z_0 reell differenzierbar, mit $h_x(z_0) = -g_y(z_0)$ und $h_y(z_0) = g_x(z_0)$, so ist

$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} g_x(z_0) & -h_x(z_0) \\ h_x(z_0) & g_x(z_0) \end{pmatrix}$$

und $L := Df(z_0)$ offensichtlich eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Es gilt dann:

$$L(w) = f_x(z_0) \cdot w, \text{ für } f_x(z_0) := g_x(z_0) + \mathrm{j}\, h_x(z_0).$$

Wir setzen

$$\Delta(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0, \\ f_x(z_0) & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Aus der Darstellung $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ folgt für $z \neq z_0$:

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot L(z - z_0) + \frac{r(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= L(1) + \frac{r(z - z_0)}{z - z_0} \\ &\quad \to L(1) = f_x(z_0), \text{ für } z \to z_0. \end{aligned}$$

Also ist Δ in z_0 stetig und $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$ für alle z. Damit ist f in z_0 komplex differenzierbar.

Offensichtlich ist dann $f'(z_0) = \Delta(z_0) = f_x(z_0)$. ∎

1.2 Rechenregeln für die komplexe Differenzierbarkeit. *$f, g : U \to \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, $a, b \in \mathbb{C}$ seien Konstanten. Dann gilt:*

1. *$a \cdot f + b \cdot g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, mit*

$$\begin{aligned} (a \cdot f + b \cdot g)'(z_0) &= a \cdot f'(z_0) + b \cdot g'(z_0) \\ \textit{und} \qquad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \end{aligned}$$

2. *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0, $\dfrac{f}{g}$ in z_0 komplex differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. *Ist h in $w_0 := g(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $h \circ g$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(h \circ g)'(z_0) = h'(w_0) \cdot g'(z_0).$$

Der Beweis geht genauso wie im Reellen.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und f eine auf M definierte komplexwertige Funktion. Ist f in jedem Punkt von M komplex differenzierbar, so heißt f *auf M komplex differenzierbar.*

Beispiele.

1. Sei $f(z) := z^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist

$$f(z) - f(z_0) = z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

   Also existiert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \sum_{i=0}^{n} z^i z_0^{n-i-1} = n \cdot z_0^{n-1},$$

   f ist in z_0 komplex differenzierbar, mit $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

   Da z_0 beliebig war, ist $f(z) = z^n$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$.

2. Die Polynome $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

3. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich (also außerhalb ihrer Polstellen) komplex differenzierbar.

4. $\exp(z)$ ist gegeben durch $\exp(x+\mathrm{j}y) = e^x(\cos y + \mathrm{j}\sin y)$. Also ist $\exp = g + \mathrm{j}h$, mit

$$g(x + \mathrm{j}\,y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad h(x + \mathrm{j}\,y) = e^x \sin y.$$

   Offensichtlich ist dann $g_x(x + \mathrm{j}\,y) = e^x \cos y = h_y(x + \mathrm{j}\,y)$ und $g_y(x + \mathrm{j}\,y) = -e^x \sin y = -h_x(x + \mathrm{j}\,y)$. Da die Cauchy-Riemannschen DGLn erfüllt sind, ist exp komplex differenzierbar und

$$\exp'(z) = \exp_x(z) = \exp(z).$$

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt eine *holomorphe Funktion* auf G, falls sie in jedem Punkt $z \in G$ komplex differenzierbar und ihre Ableitung f' stetig ist.

Achtung! Die hier gegebene Definition der Holomorphie weicht von der aus der Vorlesung ab! Weil hier die *stetige* Differenzierbarkeit gefordert wird, kann der Satz von Green zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes herangezogen werden.

Beispiele.

1. Jedes Polynom ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

2. Die Exponentialfunktion ist ebenfalls holomorph auf $\mathbb{C}$. Weil $\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$ ist, gilt $\exp(z) \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

   Genau dann ist $\exp(z) = 1$, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k\pi\mathsf{j}$ gibt, denn:

$$\begin{aligned}\exp(x + \mathsf{j}\,y) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x \cos(y) = 1 \text{ und } e^x \sin(y) = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{Z} \text{ mit } y = m\pi \text{ und } e^x(-1)^m = 1\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{Z},\ m \text{ gerade, mit } y = m\pi \text{ und } x = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x + \mathsf{j}\,y = 2k\pi\mathsf{j}\,.\end{aligned}$$

   Daraus folgt: Ist $\exp(z) = \exp(w)$, so unterscheiden sich z und w um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathsf{j}$.

3. Aus der Eulerschen Gleichung $e^{\mathsf{j}\,t} = \cos t + \mathsf{j}\,\sin t$ folgen die Beziehungen

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{\mathsf{j}\,t} + e^{-\mathsf{j}\,t}) \text{ und } \sin t = \frac{1}{2\mathsf{j}}(e^{\mathsf{j}\,t} - e^{-\mathsf{j}\,t}).$$

   Daher definiert man für beliebiges $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\cos(z) \quad &:= \quad \frac{1}{2}(e^{\mathsf{j}\,z} + e^{-\mathsf{j}\,z})\\ \text{und} \qquad \sin(z) \quad &= \quad \frac{1}{2\mathsf{j}}(e^{\mathsf{j}\,z} - e^{-\mathsf{j}\,z}).\end{aligned}$$

   Die bekannten Eigenschaften der Winkelfunktionen bleiben dabei erhalten:

   (a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$,

   (b) $\sin(z)$ und $\cos(z)$ sind periodisch mit Periode 2π.

   (c) Es gelten die Additionstheoreme,

$$\begin{aligned}\cos(z + w) \quad &= \quad \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\\ \text{und } \sin(z + w) \quad &= \quad \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).\end{aligned}$$

   (d) Auch die komplexen Winkelfunktionen werden durch die bekannten Potenzreihen dargestellt,

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .$$

   Aus den Additionstheoremen folgt:

$$\begin{aligned}\cos(x + \mathsf{j}\,y) \quad &= \quad \cos x \cosh y - \mathsf{j}\,\sin x \sinh y\\ \text{und } \sin(x + \mathsf{j}\,y) \quad &= \quad \sin x \cosh y + \mathsf{j}\,\cos x \sinh y.\end{aligned}$$

   Die Nullstellen der komplexen Cosinus-Funktion sind diejenigen, die wir schon von der reellen Funktion kennen. Ist nämlich $\cos(z) = 0$, so ist $e^{\mathsf{j}\,z} + e^{-\mathsf{j}\,z} = 0$, also $e^{2\mathrm{j}\,z} = -1$. Das bedeutet, dass $2\mathrm{j}\,z = \pi\mathrm{j} + 2k\pi\mathrm{j}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, also $z = \pi/2 + k\pi$.

Offensichtlich sind die Funktionen $\sin(z)$ und $\cos(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, und es gilt:

$$\cos'(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,z} - \mathrm{j}\,e^{-\mathrm{j}\,z}) = -\sin(z)$$

und

$$\sin'(z) = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,z} + \mathrm{j}\,e^{-\mathrm{j}\,z}) = \cos(z).$$

Also sind Sinus und Cosinus holomorph auf $\mathbb{C}$.

Eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{C}$ kann – wenn sie nicht konstant ist – niemals holomorph sein. Um das einzusehen, müssen wir etwas ausholen:

1.3 Charakterisierung konstanter Funktionen. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist konstant.*
2. *f ist auf G holomorph, und es ist $f'(z) \equiv 0$.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Wegen $f'(z) = g_x(z) + \mathrm{j}\,h_x(z)$ und wegen der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen DGLn ist $Df(z) = 0$ für alle $z \in G$. Aus der reellen Analysis folgt dann, dass f auf G konstant ist. ∎

Nun folgt:

1.4 Funktionen mit reellen oder imaginären Werten. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Nimmt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist sie konstant.*

BEWEIS: Nimmt etwa $f = g + \mathrm{j}\,h$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$, also $g_x = h_y = 0$ und $g_y = -h_x = 0$. Dann ist $f'(z) \equiv 0$ und f konstant.

Ist $g(z) \equiv 0$, so schließt man analog. ∎

1.5 Folgerung. *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ konstant, so ist auch f selbst konstant.*

BEWEIS: Sei $f\overline{f} = |f|^2$ konstant. Ist $f(z_0) = 0$ für ein z_0, so ist $f(z) \equiv 0$. Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist $\overline{f}(z) = \dfrac{1}{f(z)} \cdot |f(z)|^2$ holomorph. Aber dann müssen auch die Funktionen $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\mathrm{j}\ \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2}(f - \overline{f})$ holomorph sein. Das geht nur, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ konstant sind, also auch f selbst. ∎

Beispiel.

Sei $f(z) := |z|^2 = z\bar{z}$. Dann ist $f(z) = f(0) + \Delta(z) \cdot (z - 0)$, wobei $\Delta(z) := \bar{z}$ stetig in 0 ist. Also ist f in $z = 0$ komplex differenzierbar.

Aber weil f nur reelle Werte annimmt, kann f nirgends holomorph sein.

Wir wollen nun noch zeigen, dass holomorphe Funktionen winkeltreu und orientierungstreu sind. Dazu brauchen wir eine spezielle Kettenregel:

1.6 Satz. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg und f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G, das die Spur von α enthält. Dann ist*

$$(f \circ \alpha)'(t) = f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

BEWEIS: Sei $t_0 \in [a, b]$, $z_0 := \alpha(t_0)$. Dann gibt es eine in z_0 stetige Funktion Δ, so dass $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z)$ für $z \in G$ gilt. Außerdem ist die Funktion

$$\delta(t) := \begin{cases} \dfrac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} & \text{für } t \neq t_0 \\ \alpha'(t_0) & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

stetig in t_0, und es ist $\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot \delta(t)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(\alpha(t)) - f(\alpha(t_0)) &= (\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot \Delta(\alpha(t)) \\ &= (t - t_0) \cdot \delta(t) \cdot \Delta(\alpha(t)), \end{aligned}$$

also $(f \circ \alpha)'(t_0) = \Delta(\alpha(t_0)) \cdot \delta(t_0) = f'(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0)$. ∎

1.7 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f als reelle Abbildung winkeltreu und orientierungserhaltend.*

BEWEIS: Sei $z_0 \in U$. Außerdem seien zwei Wege $\alpha, \beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gegeben. Wir setzen $a := \alpha'(0)$ und $b := \beta'(0)$, sowie $c := f'(z_0)$. Dann ist

$$(f \circ \alpha)'(0) = c \cdot a \quad \text{und} \quad (f \circ \beta)'(0) = c \cdot b.$$

Sind v, w zwei Vektoren $\neq 0$, so wird der Winkel zwischen den Vektoren gegeben durch

$$\cos \angle(v, w) = \frac{v \bullet w}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Dabei ist $v \bullet w = \mathrm{Re}(v \cdot \overline{w})$.

Nun ist

$$\begin{aligned}
\cos\angle(ca, cb) &= \frac{\mathrm{Re}\big((ca)\cdot\overline{(cb)}\,\big)}{\|ca\|\cdot\|cb\|}\\
&= \frac{c\bar{c}\cdot\mathrm{Re}\big(a\cdot\bar{b}\big)}{c\bar{c}\cdot\|a\|\cdot\|b\|}\\
&= \frac{\mathrm{Re}\big(a\cdot\bar{b}\big)}{\|a\|\cdot\|b\|}
\end{aligned}$$

Damit bleibt der Winkel zwischen zwei Wegen, die sich in einem Punkt z_0 treffen, unter f erhalten. Für die Erhaltung der Orientierung müssen wir die Funktionaldeterminante von f ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\det J_f(z) &= \det\begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z)\\ h_x(z) & h_y(z)\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z)\\ -g_y(z) & g_x(z)\end{pmatrix}\\
&= g_x(z)^2 + g_y(z)^2 \;=\; |f'(z)|^2 > 0.
\end{aligned}$$

■

Die Winkeltreue hat Anwendungen in der Feldtheorie. Verschwindet allerdings die Ableitung in einem Punkt, so verändert f dort den Winkel (wie z.B. $f(z) = z^2$ im Nullpunkt).

§ 2 Integration im Komplexen

Definition. Sei $f = g + \mathsf{j}\, h : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b g(t)\, dt + \mathsf{j} \int_a^b h(t)\, dt.$$

Dies ist ein einfacher Spezialfall eines „vektorwertigen Integrals“. Es gelten die meisten bekannten Regeln für komplexe Integrale. Nicht ganz selbstverständlich ist die folgende Aussage:

Behauptung: Es gilt die Abschätzung

$$|\int_a^b f(t)\, dt| \le \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

BEWEIS: Sei $z := \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = r \cdot e^{\mathsf{j}\,\lambda}$, mit $r > 0$. (Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen)

Dann ist $e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot z = r = |\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt|$, also

$$|\int_a^b f(t)\, dt| = \mathrm{Re}\left(e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot \int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot f(t))\, dt.$$

Da für eine komplexe Zahl $w = u + \mathsf{j}\, v$ stets $\mathrm{Re}(w) = u \le \sqrt{u^2 + v^2}$ ist und die gewünschte Ungleichung für reellwertige Funktionen bekannt ist, folgt:

$$|\int_a^b f(t)\, dt| = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot f(t))\, dt \le \int_a^b |e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

■

Wir wollen jetzt komplexe Integrale $\displaystyle\int_z^w f(z)\, dz$ einführen. Dabei stoßen wir auf gewisse Schwierigkeiten. Der Definitionsbereich der zu integrierenden Funktion ist meist ein Gebiet. Die Integralgrenzen z und w sind also nicht die Endpunkte eines Intervalls, und i.a. auch nicht die Endpunkte einer in G verlaufenden Strecke. Da bietet es sich an, über einen Weg zu integrieren. Als *Integrationswege* benutzen wir wie üblich stückweise stetig differenzierbare Wege $\alpha : [a, b] \to G$.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und α ein Integrationsweg in G. Dann wird das *komplexe Kurvenintegral* von f über α definiert durch

$$\int_\alpha f(z)\, dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt.$$

Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine monoton wachsende Parametertransformation, so ist

$$\int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_c^d f(\alpha(\varphi(s))\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt.$$

In diesem Sinne ist das komplexe Kurvenintegral unabhängig von der Parametrisierung. Ist φ allerdings monoton fallend, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Beispiele.

1. Ein fundamentaler Baustein der Funktionentheorie ist folgende Formel:

   Sei $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathsf{j}\,t}$, für $0 \le t \le 2\pi$, die Parametrisierung der Kreislinie $\partial D_r(z_0)$. Dann ist

$$\int_\alpha (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\mathsf{j} & \text{für } n=-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zum BEWEIS: Es ist

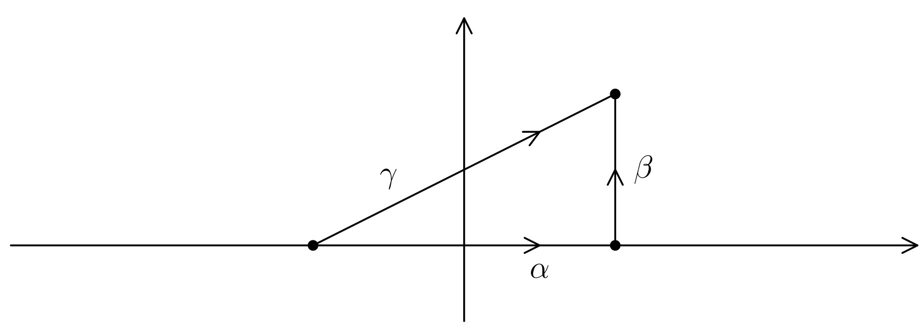
$$\begin{aligned} \int_\alpha \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathsf{j}\,t} \cdot r\mathsf{j}\, e^{\mathsf{j}\,t}\,dt \\ &= \mathsf{j} \cdot \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi\mathsf{j}\,, \end{aligned}$$

   und für $n \ne -1$ ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (re^{\mathsf{j}\,t})^n \cdot r\mathsf{j}\, e^{\mathsf{j}\,t}\,dt \\ &= r^{n+1}\mathsf{j} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\mathsf{j}\,(n+1)t}\,dt \\ &= r^{n+1}\mathsf{j} \cdot \left(\frac{1}{\mathsf{j}\,(n+1)} e^{\mathsf{j}\,(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1+2t, \quad \beta(t) := 1+\mathsf{j}\,t \text{ und } \gamma(t) := (-1+2t)+\mathsf{j}\,t.$$



Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\alpha+\beta} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t)\cdot 2\,dt + \int_0^1 (1-\mathrm{j}\,t)\cdot \mathrm{j}\;dt \\ &= 2\cdot(-t+t^2)\,\Big|_0^1 + \mathrm{j}\,\cdot(t-\frac{\mathrm{j}}{2}t^2)\,\Big|_0^1 \\ &= 2\cdot(-1+1)+\mathrm{j}\,\cdot(1-\frac{\mathrm{j}}{2}) \\ &= \mathrm{j}\,+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathrm{j}\,t)(2+\mathrm{j}\,)\,dt \\ &= (2+\mathrm{j}\,)\cdot(-t+\frac{2-\mathrm{j}}{2}t^2)\,\Big|_0^1 \\ &= (2+\mathrm{j}\,)\cdot(-1+1-\frac{\mathrm{j}}{2}) \\ &= -\mathrm{j}\,+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab! Wir werden bald sehen, daß das damit zusammenhängt, daß $z \mapsto \overline{z}$ nicht holomorph ist.

Es gelten für das komplexen Kurvenintegral die bekannten Rechenregeln. Nur die *Standard-Abschätzung* schauen wir uns etwas genauer an:

Ist α ein Integrationsweg und f eine stetige Funktion auf $|\alpha|$, so ist

$$\boxed{|\int_\alpha f(z)\,dz| \le L(\alpha)\cdot \sup_{|\alpha|}|f|.}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}|\int_\alpha f(z)\,dz| &= |\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt| \\ &\le \int_a^b |f(\alpha(t))|\cdot|\alpha'(t)|\,dt \\ &\le L(\alpha)\cdot \sup_{|\alpha|}|f|.\end{aligned}$$

Es gilt folgender Satz über die Vertauschung von Limes und Integral:

2.1 Vertauschung von Grenzwerten bei Kurvenintegralen. *Sei $\alpha : I \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und (F_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $|\alpha|$. Es gebe* *eine konvergente Reihe positiver Zahlen* a_n*, so dass* $|F_n(z)| \leq a_n$ *für alle* n *und* $z \in |\alpha|$ *ist. Dann ist* $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ *eine stetige Funktion auf* $|\alpha|$*, und es gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha F_n(z)\,dz = \int_\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(z) \right) dz.$$

Auf den BEWEIS verzichten wir hier.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Behauptung: Ist F holomorph und $F' = f$, so ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

BEWEIS: In §1 haben wir gezeigt:

$$(F \circ \alpha)'(t) = F'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (F \circ \alpha)'(t)\,dt \\ &= F \circ \alpha(b) - F \circ \alpha(a)\,. \end{aligned}$$

■

Bemerkung. Eine Funktion $f = g + \mathrm{j}\,h$ ist genau dann holomorph auf einem Gebiet G, wenn g und h stetig differenzierbar sind und die Cauchy-Riemannschen DGLn gelten.

Wir erinnern uns jetzt an den **Satz von Green**:

> *Sei* G *ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Sind* P*,* Q *zwei stetig differenzierbare (reellwertige) Funktionen auf einer Umgebung* $U = U(\overline{G})$*, so gilt:* $\int_{\partial G}(P\,dx + Q\,dy) = \int_G (Q_x - P_y)\,dx\,dy$.

An Stelle von reellen Vektorfeldern $\mathbf{F} = (P, Q)$ kann man auch *komplexe Vektorfelder* betrachten, mit stetig differenzierbaren Funktionen $P, Q : U \to \mathbb{C}$.

Behauptung: *Der Satz von Green gilt auch für komplexe Vektorfelder.*

BEWEIS: Ist $P = A + \mathrm{j}B$ und $Q = C + \mathrm{j}D$, so ist $Q_x = C_x + \mathrm{j}D_x$ und $P_y = A_y + \mathrm{j}B_y$. Weiter gilt:

$$\int_{\partial G}(P\,dx + Q\,dy) = \int_{\partial G}(A\,dx + C\,dy) + \mathsf{j}\int_{\partial G}(B\,dx + D\,dy),$$

sowie

$$\int_G (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_G (C_x - A_y)\,dx\,dy + \mathsf{j}\int_G (D_x - B_y)\,dx\,dy.$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Behauptung: *Ist $f = g + \mathsf{j}\,h$ eine komplexe stetige Funktion auf G und $\alpha = \alpha_1 + \mathsf{j}\,\alpha_2 : [a,b] \to G$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha f\,dx + \mathsf{j}\int_\alpha f\,dy.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{Es ist } \int_\alpha f(z)\,dz \; &= \\
&= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \big(g(\alpha(t))\alpha_1'(t) - h(\alpha(t))\alpha_2'(t)\big)\,dt + \mathsf{j}\int_a^b \big(h(\alpha(t))\alpha_1'(t) + g(\alpha(t))\alpha_2'(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha_1'(t)\,dt + \mathsf{j}\int_a^b f(\alpha(t))\alpha_2'(t)\,dt \\
&= \int_\alpha f\,dx + \mathsf{j}\int_\alpha f\,dy.
\end{aligned}$$

∎

Man beachte, dass es sich hierbei nicht um die Zerlegung in Realteil und Imaginärteil handelt!

2.2 Cauchyscher Integralsatz I. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und f eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von $\overline{G}$. Dann ist $\int_{\partial G} f(z)\,dz = 0$.*

Beweis: Sei $f = g + \mathsf{j}\,h$. Dann ist $\mathsf{j} \cdot f_x = \mathsf{j}\,g_x - h_x = \mathsf{j}\,h_y + g_y = f_y$ und

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} f(z)\,dz &= \int_{\partial G} f\,dx + \mathsf{j}\int_{\partial G} f\,dy \\
&= \int_G (-f_y)\,dx\,dy + \mathsf{j}\int_G f_x\,dx\,dy \\
&= \int_G (\mathsf{j}\,f_x - f_y)\,dx\,dy \;=\; 0.
\end{aligned}$$

∎

Definition. Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $z_0 \in M$ ein fester Punkt. M heißt *sternförmig* bezüglich z_0, falls für jeden weiteren Punkt $z \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen z und z_0 ganz zu M gehört.

Eine konvexe Menge ist natürlich sternförmig. Die Umkehrung ist i.a. falsch.

2.3 Existenzsatz für Stammfunktionen. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet bezüglich $a \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, so ist $F(z) := \displaystyle\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$ holomorph auf G und $F' = f$.*

BEWEIS: Sei $f = g + \mathsf{j}\,h$. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha f\,dx + \mathsf{j}\int_\alpha f\,dy = \int_\alpha (g\,dx - h\,dy) + \mathsf{j}\int_\alpha (h\,dx + g\,dy)$$

für jeden Integrationsweg α in G.

Weil $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ gilt, ist auch $\int_{\partial\Delta}(g,-h)\bullet d\mathbf{x} = 0$ und $\int_{\partial\Delta}(h,g)\bullet d\mathbf{x} = 0$ für jedes solche Dreieck Δ. Wie im Beweis des Hauptsatzes über Kurvenintegrale folgt: Es gibt stetig differenzierbare Funktionen u und v, so dass $\nabla u = (g,-h)$ und $\nabla v = (h,g)$ ist, also

$$(u_x, u_y) = (g, -h) \quad \text{und} \quad (v_x, v_y) = (h, g).$$

Dabei kann $u(z) := \int_a^z (g,-h)\bullet d\mathbf{x}$ und $v(z) := \int_a^z (h,g)\bullet d\mathbf{x}$ gesetzt werden. Die Integrale werden immer über die Verbindungsstrecken berechnet.

Dann ist $F := u + \mathsf{j}\,v$ stetig reell differenzierbar, und weil $u_x = g = v_y$ und $u_y = -h = -v_x$ ist, ist F komplex differenzierbar mit

$$F' = F_x = u_x + \mathsf{j}\,v_x = g + \mathsf{j}\,h = f.$$

Insbesondere ist F holomorph und

$$F(z) = \int_a^z (g\,dx - h\,dy) + \mathsf{j}\int_a^z (h\,dx + g\,dy) = \int_a^z f\,dx + \mathsf{j}\int_a^z f\,dy = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta.$$

∎

2.4 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so besitzt f eine (holomorphe) Stammfunktion auf G.*

BEWEIS: Ist $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck, so ist $\partial\Delta$ ein stückweise glatter Weg. Weil f holomorph ist, ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Jetzt kann man den Existenzsatz für Stammfunktionen anwenden. ∎

2.5 Cauchyscher Integralsatz II. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :*

$$\int_\alpha f(z)\, dz = 0.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f, α ein geschlossener Weg in G und z_0 der gemeinsame Anfangs- und Endpunkt. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\, dz = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

■

2.6 Holomorphie von Potenzreihen. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f auf $D_R(z_0)$ holomorph, und es gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Beweis: Die Reihe

$$q(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z - z_0)^{n-1}$$

hat den gleichen Konvergenzradius wie die Reihe f (Beweis dazu in Mathematik 1) und stellt damit eine stetige Funktion auf $D_R(z_0)$ dar. Sei nun $\alpha : I \to D_R(z_0)$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_\alpha (z - z_0)^k\, dz = 0 \text{ für } k \geq 0, \text{ also } \int_\alpha q(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \int_\alpha (z - z_0)^{n-1}\, dz = 0.$$

Nach dem Existenzsatz für Stammfunktionen muss q auf dem sternförmigem Gebiet $D_R(z_0)$ eine (holomorphe) Stammfunktion Q besitzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
Q(z) &= \int_{z_0}^{z} q(\zeta)\, d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \int_{z_0}^{z} (\zeta - z_0)^{n-1}\, d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \frac{1}{n} (z - z_0)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\
&= f(z) - c_0.
\end{aligned}$$

Also ist $f(z)$ holomorph und $f'(z) = Q'(z) = q(z)$. ■

$G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht sternförmig. Tatsächlich ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, es ist z.B.

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi \mathrm{j} \neq 0.$$

Setzen wir aber $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, so ist die „geschlitzte Ebene“ $G' := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$). Also gibt es auf G' für $f(z) := \dfrac{1}{z}$ eine Stammfunktion:

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in G' verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, dass das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Die Funktion $F(z)$ ist holomorph, es ist $F(1) = 0$ und $F'(z) = \dfrac{1}{z}$. Diese Eigenschaften kennen wir schon (im Reellen) vom natürlichen Logarithmus. Also stellt sich die Frage, ob wir hier auch im Komplexen die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gefunden haben. Leider ist das nur bedingt richtig. Immerhin gilt:

Behauptung: $\exp(F(z)) = z$.

BEWEIS: Mit einem kleinen Trick geht es ganz einfach. Sei $g(z) := z \cdot \exp(-F(z))$. Dann ist g holomorph und

$$g'(z) = \exp(-F(z)) + z \cdot (-F'(z)) \cdot \exp(-F(z)) = \exp(-F(z)) - \exp(-F(z)) = 0.$$

Also ist g lokal-konstant, und da der Definitionsbereich G' ein Gebiet ist, ist g sogar konstant: $g(z) \equiv c$. Es folgt:

$$c \cdot \exp(F(z)) \equiv z.$$

Setzen wir speziell $z = 1$ ein, so erhalten wir $1 = c \cdot \exp(F(1)) = c \cdot \exp(0) = c$. Also ist $\exp(F(z)) = z$. ■

Definition. Unter einem *Zweig des Logarithmus* auf einem Gebiet G versteht man eine holomorphe Funktion F auf G mit $\exp(F(z)) = z$.

$$\log(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad \text{heißt } \textit{Hauptzweig des Logarithmus} \text{ (auf } \mathbb{C}'\text{).}$$

Da exp periodisch ist (mit Periode $2\pi\mathrm{j}$), kann exp gar nicht bijektiv sein! Es gibt aber Gebiete, auf denen die Exponentialfunktion injektiv ist:

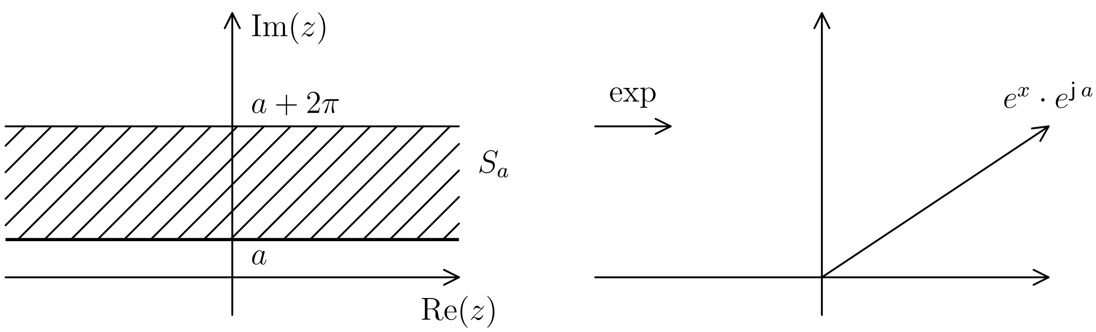
2.7 Injektivitätsbereiche der Exponentialfunktion. *Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist*

$$\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\} \to \mathbb{C}^*$$

bijektiv.

Beweis: Sei S_a der Streifen

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\}.$$



1) Injektivität: Es ist

$$\begin{aligned} \exp(z) = \exp(w) \quad &\iff \quad \exp(z - w) = 1 \\ &\iff \quad z = w + 2\pi \mathrm{j}\, n. \end{aligned}$$

Wenn z und w beide im gleichen Streifen S_a liegen, kann dieser Fall nicht eintreten.

2) Surjektivität:

Für $a \leq y < a + 2\pi$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x + \mathrm{j}\, y) = e^x \cdot e^{\mathrm{j}\, y}$. Man sieht mit bloßem Auge, dass dadurch die Parallele zur x-Achse durch $\mathrm{j}\, y$ bijektiv auf den Halbstrahl $\mathbb{R}_+ e^{\mathrm{j}\, y}$ abgebildet wird. Insbesondere wird S_a surjektiv auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet. ■

Definition. Die Umkehrabbildung

$$\log_{(a)} := (\exp\Big|_{\mathring{S}_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{\mathrm{j}\, a} \to \mathring{S}_a$$

heißt *der durch a bestimmte Logarithmuszweig.*

Um den Logarithmus von einer komplexen Zahl z explizit zu berechnen, kann man das folgende Rezept anwenden:

1. Zunächst muss man z in Polarform schreiben:

   $$z = r \cdot e^{\mathrm{j}\, t} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

2. Ist $t = \pi$ (also z eine negative reelle Zahl), so setze man $a = 0$. In jedem anderen Fall kann man $a = -\pi$ setzen.

   Ist $t > \pi$, so ersetze man t durch $t - 2\pi$.

3. Hat man alles richtig gemacht, so hat man jetzt ein $a \in \mathbb{R}$ und ein t mit $a < t < a + 2\pi$ gefunden, so dass $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t}$ ist. Dann ist

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathsf{j}\,t.$$

Zusammengefasst: Der Hauptzweig des Logarithmus ist auf $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ definiert, also ist $\log = \log_{(-\pi)}$. Liegt z gerade auf der negativen reellen Achse, so liegt $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,\pi}$ im Definitionsbereich von $\log_{(0)}$, und es ist $\log_{(0)}(z) := \ln(r) + \mathsf{j}\,\pi$.

Man beachte aber, dass mit $\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathsf{j}\,t$ auch die unendlich vielen Werte $\ln(r) + \mathsf{j}\,t + k \cdot 2\pi\mathsf{j}$, $k \in \mathbb{Z}$, Logarithmen von z sind.

Beispiele.

1. Sei $z = 2\mathsf{j}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}$.

2. Sei $z = -2\mathsf{j}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Dieses t liegt nicht zwischen $-\pi$ und π, wohl aber $t - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

   Dann ist $\log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}$.

   Da $\pi < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ oder $a = \pi$ wählen können. Es ist

$$\log_{(0)}(z) = \log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathsf{j}\,\frac{3\pi}{2} = \log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\mathsf{j}\,.$$

Mit Hilfe des Logarithmus können wir jetzt auch beliebige Potenzen komplexer Zahlen definieren.

Definition. Für komplexe Zahlen z und w sei $z^w := \exp(w \cdot \log(z))$.

Dabei kann der Exponent w beliebig gewählt werden. z muss $\neq 0$ sein und im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Normalerweise benutzt man den Hauptzweig, dann darf z nicht in $\mathbb{R}_-$ liegen.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist $\mathsf{j}^{\,\mathsf{j}}$? Benutzen wir die Beziehung $\mathsf{j} = e^{\mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathsf{j}^{\,\mathsf{j}} = \exp(\mathsf{j} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{\mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathsf{j} \cdot \mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879\ldots$$

   Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich $e^{-\pi/2}e^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathrm{j}\,t}$ mit $-\pi < t < \pi$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\mathrm{j}\,k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + \mathrm{j}\,t + 2\pi\mathrm{j}\,k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2}\ln(r)) \cdot \exp(\mathrm{j}\,(\frac{t}{2} + \pi k)) \\ &= \pm\sqrt{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel: Ist $z = re^{\mathrm{j}\,t}$ mit $-\pi < t < \pi$, so ist

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \exp(\frac{1}{n}\log(z)) \\ &= \exp(\frac{1}{n}(\ln r + \mathrm{j}\,t)) \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,(t/n) + \mathrm{j}\,(2k/n)\pi} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{j}\,(t/n)} \cdot (\zeta_n)^k, \text{ für } k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch die Umlaufszahl behandeln.

Definition. Sei γ ein beliebiger geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$ und z_0 ein Punkt, der nicht auf $|\gamma|$ liegt. Dann heißt

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$$

die *Umlaufszahl* von γ um z_0.

Beispiel.

Durch $\gamma(t) := z_0 + re^{\mathrm{j}\,kt}$, $t \in [0, 2\pi]$, wird der Kreis um z_0 mit Radius r parametrisiert, und zwar so, dass er k-mal durchlaufen wird. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{\mathrm{j}\,kt}} r\mathrm{j}\,k\,e^{\mathrm{j}\,kt}\,dt = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = k.$$

Das Integral misst tatsächlich, wie oft der Punkt z_0 von γ umlaufen wird.

Wir wollen sehen, dass $n(\gamma, z_0)$ auch im allgemeinen die Anzahl der Umläufe berechnet und insbesondere eine ganze Zahl ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $z_0 = 0$ ist.

Wenn es möglich ist, berechnet man ein Integral mit Hilfe einer Stammfunktion. Die Stammfunktion von $f(\zeta) = 1/\zeta$ ist der Logarithmus, aber welcher? Um eine vernünftige Logarithmusfunktion einsetzen zu können, müssen wir aus der Ebene einen Halbstrahl herausnehmen. Das ist aber nicht so ohne weiteres möglich, denn wir müssen damit rechnen, dass jeder von 0 ausgehende Halbstrahl die Spur von γ trifft. Was tun?

Wir wählen eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Definitionsintervalls von γ, so dass $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils ganz in einer längs eines Halbstrahls aufgeschlitzten Ebene enthalten ist. Dann existiert dort jeweils ein Zweig f_i des Logarithmus, der als Stammfunktion für $1/z$ dienen kann. Sei $z_i := \gamma(t_i)$, für $i = 0, \ldots, n$. Dann ist $z_0 = z_n$ und

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = f_i(z_i) - f_i(z_{i-1}).$$

Da $f_{i+1}(z_i) = f_i(z_i) - 2\pi \mathsf{j}\, k_i$ und $f_n(z_n) = f_1(z_0) + 2\pi \mathsf{j}\, k_n$ ist, mit gewissen ganzen Zahlen k_i bzw. k_n, folgt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= [f_1(z_1) - f_1(z_0)] + [f_2(z_2) - f_2(z_1)] + \cdots + [f_n(z_n) - f_n(z_{n-1})] \\
&= -f_1(z_0) + [f_1(z_1) - f_2(z_1)] + \cdots + [f_{n-1}(z_{n-1}) - f_n(z_{n-1})] + f_n(z_n) \\
&= [f_n(z_n) - f_1(z_0)] + 2\pi \mathsf{j} \cdot k_1 + \cdots + 2\pi \mathsf{j} \cdot k_{n-1} \\
&= 2\pi \mathsf{j} \cdot (\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k_n).
\end{aligned}$$

Also ist

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

eine ganze Zahl.

Diese - zugegebenermaßen etwas theoretische - Berechnung der Umlaufszahl zeigt zugleich, was man sich darunter vorstellen soll.

Zu jedem i gibt es ein a_i, so dass $f_i = \log_{(a_i)}$ ist, und es gilt:

$$\gamma(t) = r(t) \cdot e^{\mathsf{j}\, s(t)}, \text{ mit } r(t) > 0 \text{ und } a_i < s(t) < a_i + 2\pi \text{ für } t_{i-1} \le t \le t_i.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \left(\ln(r(t_i)) - \ln(r(t_{i-1}))\right) + \frac{1}{2\pi}(s(t_i) - s(t_{i-1})).$$

Die radialen Anteile heben sich in der Summe weg, und so ergibt die Umlaufszahl die Summe aller Winkeldifferenzen $s(t_i) - s(t_{i-1})$, geteilt durch 2π. Sie misst also tatsächlich, wie oft sich γ um den Nullpunkt herumwindet.

Das gerade beschriebene Verfahren ist kaum praktikabel. Zum Glück gibt es bei einigermaßen vernünftigen Wegen eine einfachere Methode zur Bestimmung der Umlaufszahl.

Da $|\gamma|$ kompakt und somit abgeschlossen ist, ist $G := \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ offen. Allerdings ist G i.a. nicht zusammenhängend, sondern besteht aus mehreren durch $|\gamma|$ voneinander getrennten Gebieten, sogenannten *Zusammenhangskomponenten.*

Unter diesen Komponenten kann es nur eine unbeschränkte Menge geben.

2.8 Das Werteverhalten der Umlaufszahl. *Die Funktion $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant und auf der unbeschränkten Menge sogar $\equiv 0$.*

Beweisandeutung:

1) Ist C eine der Zusammenhangskomponenten und $\alpha : [a, b] \to C$ ein stetiger Weg, so ist $t \mapsto n(\gamma, \alpha(t))$ eine stetige und $\mathbb{Z}$-wertige Funktion, also konstant.

2) Liegt $|\gamma|$ in der Kreisscheibe $D_R(0)$, so gilt für jeden Punkt z in der unbeschränkten Komponente.

$$\left| \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| \le L(\gamma) \cdot (1/ \inf_{\zeta \in |\gamma|} |\zeta - z|) \le L(\gamma)/R \to 0, \text{ für } R \to \infty.$$

Also verschwindet die Umlauszahl auf der unbeschränkten Komponente. ∎

Wir kennen nun einen Wert der Umlaufszahl, nämlich den „weit draußen“. Wenn wir wissen, wie sich die Umlaufszahl beim Überqueren von $|\gamma|$ ändert, dann können wir alle Werte bestimmen.

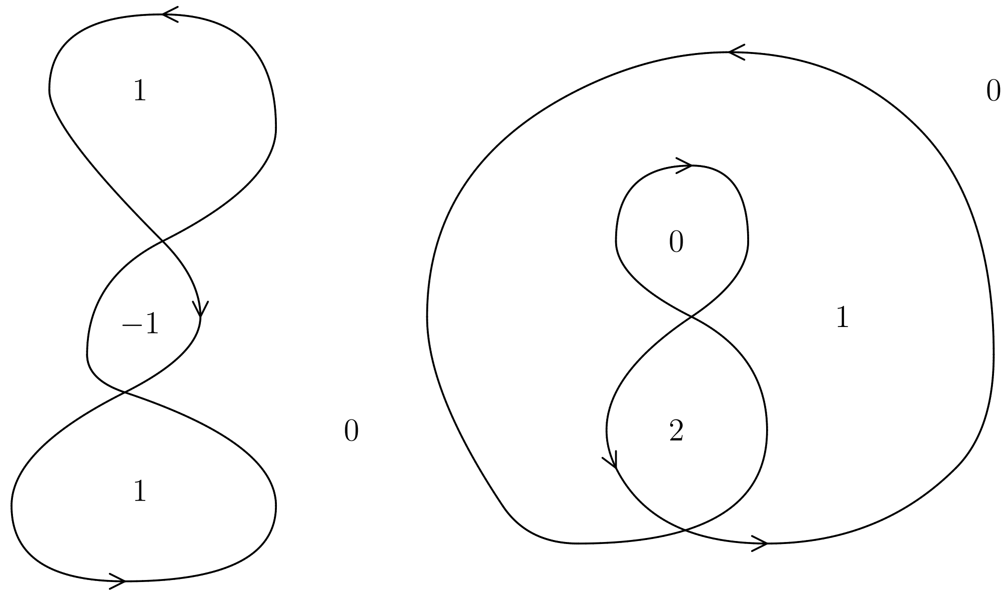
Wir beschränken uns auf einen Kreis $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathrm{j}\, t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Wenn wir – von außen kommend – den Kreis überschreiten, so ändert sich die Umlaufszahl von 0 nach +1. Dabei kommt der Weg „von links“. Ändern wir nun den Umlaufssinn, so müssen wir den Weg $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{-\mathrm{j}\, t}$ betrachten. Überqueren wir ihn von außen nach innen, so kommt er „von rechts“. Wie steht es mit der Umlaufszahl im Inneren des Kreises? Es ist

$$n(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cdot e^{-\mathrm{j}\, t}} (-\mathrm{j}\, r) e^{-\mathrm{j}\, t}\, dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = -1.$$

Dieses Ergebnis kann man auf den allgemeinen Fall übertragen:

Sei γ ein geschlossener Weg, $z_0 \in |\gamma|$. Es gebe eine kleine kreisförmige Umgebung U von z_0, in der γ genau einmal von Rand zu Rand läuft. Überquert man γ bei z_0 so, dass γ dabei von „links“ kommt, so erhöht sich die Umlaufszahl um 1. Kommt γ von „rechts“, so erniedrigt sich die Umlaufszahl um 1.

Beispiel.



§ 3 Die Cauchysche Integralformel

3.1 Hilfssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf einen Punkt $z_0 \in G$ holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$:*

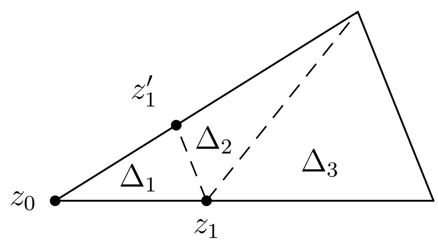
$$\int_{\partial\delta} f(z)\,dz = 0.$$

Insbesondere besitzt f dann auf jedem sternförmigen Teilgebiet von G eine Stammfunktion. Ist G selbst sternförmig, so ist $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg α in G.

Beweis: Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von Δ.

Dann zerlegen wir Δ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Wir wissen schon (vom 1. Cauchyschen Integralsatz), dass $\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz = 0$ ist, also

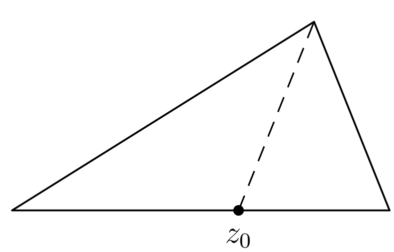
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

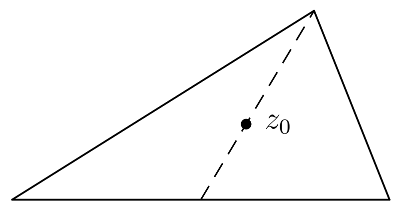
$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le L(\partial\Delta_1) \cdot \sup_\Delta |f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von Δ, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man Δ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von Δ. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb Δ, so ist überhaupt nichts zu zeigen. ∎

3.2 Die Cauchysche Integralformel. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to G$ ein geschlossener Weg und $z \in G \setminus |\gamma|$ beliebig. Dann gilt:*

$$f(z) \cdot n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

BEWEIS:

$$\text{Sei} \qquad g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g überall stetig und auf $G \setminus \{z\}$ auch holomorph. Auf der sternförmigen Menge G können wir dann den Hilfssatz auf g anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi \mathrm{j} \cdot n(\gamma, z). \end{aligned}$$

∎

Eine offene Menge B liegt *relativ kompakt* in einem Gebiet G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), falls $\overline{B}$ kompakt und in G enthalten ist.

3.3 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist. Dann gilt für alle $z \in D$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis: Man kann ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass die (sternförmige) Kreisscheibe $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0)$ noch in G enthalten ist. γ sei die Parametrisierung von ∂D, das ist ein geschlossener Weg in D' mit $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in D$. Nun folgt die gewünschte Aussage aus der Cauchyschen Integralformel. ∎

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist sehr stark die **komplexe** Differenzierbarkeit von f ausgenutzt worden. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde. Der ganze Paragraph ist diesen Konsequenzen gewidmet.

Beispiele.

1. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$ berechnet werden. Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z+2}\right]\cdot e^z\,dz \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\,dz - \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z-(-2)}\,dz \\ &= 2\pi\mathsf{j}\cdot\frac{1}{2}\cdot[e^0 - e^{-2}] \\ &= \pi\mathsf{j}\,(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}\mathsf{j})$. Dann liegt j im Innern von C, und $-\mathsf{j}$ nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{z^2+1} &= \frac{1}{2\mathsf{j}}\int_C \frac{dz}{z-\mathsf{j}} - \frac{1}{2\mathsf{j}}\int_C \frac{dz}{z+\mathsf{j}} \\ &= \frac{1}{2\mathsf{j}}\cdot[2\pi\mathsf{j}\cdot(1-0)] = \pi.\end{aligned}$$

3.4 Cauchysche Integralformel für Kreisringe. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $0 < r < R$. Wenn das „Ringgebiet“*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}$$

noch relativ-kompakt in G liegt, so gilt:

$$\int\limits_{\partial K_{r,R}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} 2\pi\mathsf{j}\cdot f(z) & \text{falls } z \in K_{r,R}\,, \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \cdot [n(\partial D_R(z_0), z) - n(\partial D_r(z_0), z)].$$

Ist $z \in K_{r,R}(z_0)$, so ist $n(\partial D_R(z_0), z) = 1$ und $n(\partial D_r(z_0), z) = 0$. In den anderen Fällen sind entweder beide Umlaufszahlen $= 1$ oder beide $= 0$. ∎

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel. Der „Entwicklungssatz“ wird die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen lassen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwuchs also aus der Absicht, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte das passende Hilfsmittel.

3.5 Entwicklungssatz von Cauchy. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpasst, so gibt es eine Potenzreihe*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ normal gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem ist dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{für alle } n.$$

Beweis-Skizze:

(A) Sei $0 < r < R$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel für $z \in D_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(B) Wir benutzen die geometrische Reihe: Ist $|w| < 1$, so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1 - w}\ .$$

(C) Ist $z \in D_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial D_r(z_0)$, so ist

$$|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|, \qquad \text{also } \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n , \end{aligned}$$

also $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z)$, mit $F_n(\zeta, z) := \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n$, und die Reihe konvergiert für alle $z \in D_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ absolut (Majorantenkriterium).

Weil $|f|$ auf der kompakten Menge $\partial D_r(z_0)$ beschränkt ist, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z)$ für festes z auf $\partial D_r(z_0)$ normal gegen $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, und aus dem Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwerten (§2) folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z) \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in D_r(z_0)$. ∎

3.6 Folgerung (Höhere Cauchysche Integralformeln). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z \in G$ und $D_r(z) \subset\subset G$ ist*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Sei $D := D_r(z) \subset\subset D_R(z) \subset G$. Dann kann f in D in der Form

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n$$

geschrieben werden. Also ist f in z beliebig oft differenzierbar, die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation der Reihe gewonnen werden und es gilt:

$$f^{(n)}(z) = n! a_n = \frac{n!}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

∎

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *in eine Potenzreihe entwickelbar*, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G *analytisch*, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, dass man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

3.7 Satz von Morera. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ ist, dann ist f holomorph auf G.*

BEWEIS: Aus der Voraussetzung folgt, dass f zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F besitzt. Aber weil F beliebig oft komplex differenzierbar ist, ist auch $f = F'$ holomorph. ∎

Wir fassen nun alle bisherigen Ergebnisse zusammen:

3.8 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

1. *f ist reell stetig differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.*
2. *f ist holomorph.*
3. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
4. *f ist analytisch.*
5. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*
6. *f ist stetig, und es ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in G.*

Ohne Beweis sei hier der **Satz von Goursat** zitiert: *Ist f auf G einmal komplex differenzierbar, so ist f bereits holomorph.*

Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie! Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere wundersame Eigenschaften auf.

3.9 Hilfssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.*

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt, dass f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. ∎

3.10 Riemannscher Hebbarkeitssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.*

Beweis: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. F muss dann auf ganz G holomorph sein.

Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, folgt, dass Δ sogar auf ganz G holomorph ist. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. ∎

Von besonderer Bedeutung sind die beiden folgenden Sätze:

3.11 Identitätssatz. *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet (hier ist wichtig, dass G zusammenhängend ist!), und $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien zwei holomorphe Funktionen.*

1. *Es gebe eine Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat, so dass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$ ist. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*

2. *Es gebe einen Punkt $z_0 \in G$, so dass $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*

Die Menge M, die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

3.12 Maximumprinzip. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.*

Ist G beschränkt, f auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

Aus Zeitgründen müssen wir auf die Beweise verzichten.

Definition. Eine *ganze Funktion* ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Polynome, aber auch die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus.

3.13 Satz von Liouville. *Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.*

BEWEIS: Sei $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $r > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \Big| \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi r) \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Das ist nur möglich, wenn $f'(z) \equiv 0$ ist, also f konstant. ∎

Jetzt sind wir in der Lage, einen einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra anzugeben:

3.14 Fundamentalsatz der Algebra.

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

BEWEIS: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist $f(z) := 1/p(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}$, und man kann schreiben:

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(\frac{1}{z})},$$

mit einem Polynom $q(w) := a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n$. Da $q(0) = a_n \neq 0$ ist, folgt:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion. Das geht nur, wenn f konstant ist, im Gegensatz zur Annahme. ∎