

Kapitel 9 Mehrfache Integrale

§ 1 Parameterintegrale

Inhalt:

Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Parameterintegralen, Potentialfunktionen und Integrabilitätsbedingung, Fubini für Rechtecke, Leibnizsche Formel, uneigentliche Parameterintegrale, die Gamma-Funktion.

Ziel dieses Paragraphen ist die Untersuchung von parameterabhängigen Integralen der Form

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_a^b f(x_1, \dots, x_n, t) dt$$

mit einer stetigen Funktion f .

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : B \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Satz

Unter den obigen Voraussetzungen ist $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ auf B stetig.

Ist f außerdem stetig differenzierbar nach x_1, \dots, x_n , so ist auch F stetig partiell differenzierbar, und es gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt.$$

Ohne BEWEIS.

Beispiel.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, t) := \begin{cases} (\sin xt)/t & \text{für } t \neq 0, \\ x & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Weil $(\sin xt)/t = x \cdot (\sin xt)/(xt)$ für $t \rightarrow 0$ gegen x konvergiert, ist f stetig und wir können z.B. $F(x) = \int_0^{\pi/2} f(x, t) dt$ bilden. Außerdem ist f nach x partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) := \begin{cases} \cos xt & \text{für } t \neq 0, \\ 1 & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

und diese Funktion ist stetig. Also ist

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(xt) dt = \frac{\sin(xt)}{x} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sin((\pi x)/2)}{x}.$$

Allgemeiner gilt übrigens:

Höhere Ableitungen von Parameter-Integralen

Ist f r -mal stetig differenzierbar, so ist auch F r -mal stetig differenzierbar, und man kann Differentiationen bis zur Ordnung r mit dem Integral vertauschen.

Eine erste Anwendung der Parameter-Integrale ist die Lösung folgenden Problems:

Sei $B = B_r(\mathbf{0})$ eine offene Kugel um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n und

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B . Gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{F}$.

Damit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$ sein kann, muß auf jeden Fall gelten:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Ist diese notwendige „Integrabilitätsbedingung“

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \text{ und } \mathbf{x} \in B$$

erfüllt, so kann man tatsächlich die gesuchte Funktion f konstruieren. Dazu setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i.$$

Wegen der Integrabilitätsbedingung ist

$$\frac{d}{dt}(tF_j(t\mathbf{x})) = F_j(t\mathbf{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x})x_i = F_j(t\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \delta_{ij} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \int_0^1 F_j(t\mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^1 \left(t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_j(t\mathbf{x})) dt \\ &= tF_j(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 = F_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ im \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Fassen wir die partielle Differentiation nach x_i als einen Operator D_i auf, so erhalten wir mit Hilfe des vektoriellen Operators $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$ die Beziehung $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) := \nabla \times \mathbf{F}$. Im \mathbb{R}^3 bedeutet die obige Integrabilitätsbedingung gerade, daß $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist. Deshalb haben wir jetzt gezeigt:

Integrabilitätsbedingung für Gradientenfelder

Sei \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Kugel um $\mathbf{0}$ im \mathbb{R}^3 . \mathbf{F} ist genau dann Gradient einer differenzierbaren Funktion, wenn $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist.

Beispiele.

1. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, y, z)$ auf einer Kugelumgebung von $\mathbf{0}$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Also muß \mathbf{F} Gradient einer Funktion f sein. Wir berechnen f nach der obigen Formel:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= x \int_0^1 F_1(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 F_2(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 F_3(tx, ty, tz) dt \\
&= x \cdot \int_0^1 tx dt + y \cdot \int_0^1 ty dt + z \cdot \int_0^1 tz dt \\
&= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

Die Probe zeigt sofort, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist, wie es ja auch sein muß.

2. Sei $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$. Dann ist auf U das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) &= 0, \\
\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) &= 0, \\
\text{und } \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

Wenn man nun nicht so genau auf die Definitionsbereiche achtet, findet man rasch eine Funktion g , deren Gradient das Vektorfeld \mathbf{F} ist. Man braucht z.B. nur eine Stammfunktion von F_2 bezüglich der Variablen y zu suchen:

$$\begin{aligned}
g(x, y, z) &= \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\
&= \int_{y_0}^y \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{t}{x})^2} dt \\
&= \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} dt \quad (\text{mit } \varphi(t) = \frac{t}{x}) \\
&= \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} \frac{1}{1 + s^2} ds \\
&= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.}
\end{aligned}$$

Die Konstante könnte noch von x und z abhängen, aber die Probe zeigt, daß wir sie nicht brauchen. Tatsächlich ist schon

$$g(x, y, z) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

eine Funktion mit $\nabla g = \mathbf{F}$. Leider ist g nicht auf ganz U definiert, sondern nur auf Teilmengen, z.B. auf $U_+ := \{(x, y, z) \mid x > 0\}$. Eine andere Stammfunktion findet man auf $U_- := \{(x, y, z) \mid x < 0\}$, und später werden wir sehen, daß \mathbf{F} auf ganz U kein Gradientenfeld sein kann.

Ob ein Vektorfeld \mathbf{F} mit $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ein Gradientenfeld ist, hängt nämlich i.a. auch von der Geometrie des Definitionsbereiches ab. Auf Kugeln um den Nullpunkt (und verschiedenen anderen Gebieten) geht alles gut. Sobald das Gebiet aber Löcher besitzt, die sich nicht innerhalb des Gebietes umgehen lassen, ist Vorsicht geboten.

Wir betrachten nun eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Rechteck,

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann sind die Funktionen

$$F_1(s) := \int_c^d f(s, t) dt \quad \text{bzw.} \quad F_2(t) := \int_a^b f(s, t) ds$$

stetig und daher noch einmal integrierbar. Überraschenderweise gilt:

Satz von Fubini für stetige Funktionen auf Rechtecken

$$\int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds = \int_c^d \int_a^b f(s, t) ds dt.$$

BEWEIS: Für $c \leq \tau \leq d$ sei $g(s, \tau) := \int_c^\tau f(s, t) dt$. Diese Funktion ist nach dem Satz über die Stetigkeit von Parameterintegralen für jedes feste τ eine stetige Funktion von s , und für festes $s \in [a, b]$ und $\tau_0 \in [c, d]$ ist $\tau \mapsto g(s, \tau)$ in τ_0 differenzierbar, mit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(s, \tau_0) = f(s, \tau_0).$$

Also ist g nach τ stetig partiell differenzierbar, und wir können den Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen anwenden:

$$\varphi(\tau) := \int_a^b g(s, \tau) ds = \int_a^b \left(\int_c^\tau f(s, t) dt \right) ds$$

ist stetig differenzierbar, mit

$$\varphi'(\tau) = \int_a^b f(s, \tau) ds.$$

Nun ist

$$\varphi(c) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(d) = \int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds,$$

also

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(s, t) ds dt &= \int_c^d \varphi'(t) dt \\ &= \varphi(d) - \varphi(c) \\ &= \int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds. \end{aligned}$$

■

Beispiele.

- Wir betrachten $f(x, y) := x^y$ auf $[0, 1] \times [a, b]$, mit $0 < a < b$. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind erfüllt. Die rechte Seite ist leicht ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy &= \int_a^b \left(\frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_{x=0}^1 \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \\ &= \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right). \end{aligned}$$

Die linke Seite führt auf ein komplizierteres Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \cdot \ln x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} e^{y \cdot \ln x} \Big|_{y=a}^b \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx. \end{aligned}$$

Das ist ein uneigentliches Integral, bei dem nicht sofort klar ist, wie man es ausrechnen sollte. Der Satz von Fubini liefert uns jedoch auf sehr bequeme Art einen Wert, er kann einem also gelegentlich viel Arbeit ersparen.

- Die Funktion

$$f(x, y) := \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist auf $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ definiert, aber im Nullpunkt nicht mehr stetig. Der Satz von Fubini kann nicht angewandt werden, aber dennoch existieren die iterierten Integrale:

Für $y > 0$ ist (wie wir weiter oben schon gezeigt haben)

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{1 + y^2},$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \arctan(y) \Big|_{y=0}^1 \\ &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^1 \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{-1}{1 + x^2} dx \\ &= -\arctan(x) \Big|_{x=0}^1 \\ &= -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Es ist also gefährlich, bei mehrfachen Integralen einfach so drauf los zu integrieren!! Wir werden uns später damit beschäftigen, unter welchen allgemeineren Voraussetzungen der Satz von Fubini noch gültig bleibt.

Statt eines Doppelintegrals kann man auch mehrfache Integrale betrachten:

Ist $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert das iterierte Integral

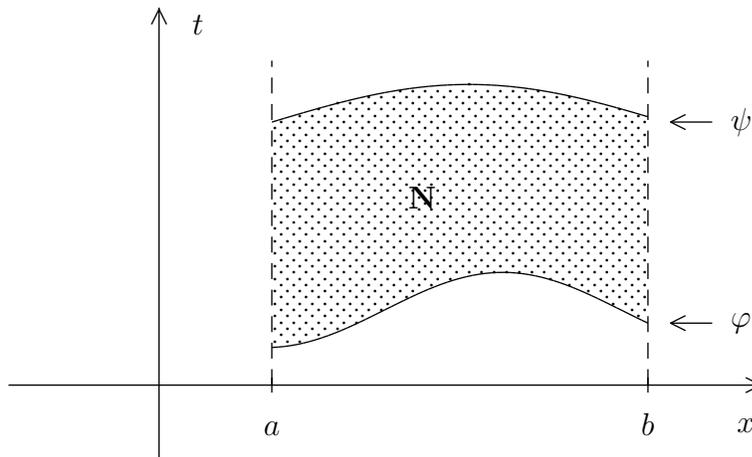
$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$

Mit dem Satz von Fubini und einem Induktionsbeweis kann man zeigen, daß der Wert des Integrals nicht von der Reihenfolge der Integrationen abhängt. In der Praxis werden bei uns allerdings meist nur die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ vorkommen.

Jetzt wollen wir noch eine etwas allgemeinere Situation betrachten:

Es seien $\varphi, \psi : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und f eine stetige Funktion auf

$$N := \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}.$$



Leibnizsche Formel

Sei f auf $[a, b] \times [c, d]$ stetig und nach der ersten Variablen stetig differenzierbar. Die Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar, mit Werten in $[c, d]$.

Dann ist $F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

BEWEIS: Die Funktion $g(x, \tau) := \int_c^\tau f(x, t) dt$ ist nach τ stetig differenzierbar, wie wir im Beweis zum Satz von Fubini schon gesehen haben. Nach dem Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen ist g auch stetig differenzierbar nach x . Also ist

$$\tilde{F}(x, u, v) := \int_u^v f(x, t) dt = g(x, v) - g(x, u)$$

nach allen drei Variablen stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$F(x) = \tilde{F}(x, \varphi(x), \psi(x)).$$

Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) \\
&= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) - \frac{\partial g}{\partial u}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(x, \psi(x))\psi'(x) \\
&= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x).
\end{aligned}$$

■

Beispiel.

Sei $F(x) := \int_x^{x^2} \ln^2(x+t) dt$, für $x > 0$.

Die Funktion $f(x, t) := \ln^2(x+t)$ ist für $x > 0$ und t zwischen x und x^2 stetig und nach x stetig differenzierbar. Also ist F differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, x^2) \cdot 2x - f(x, x) \cdot 1 \\
&= \int_x^{x^2} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt + \ln^2(x+x^2) \cdot 2x - \ln^2(2x) \\
&= (1+2x) \cdot \ln^2(x+x^2) - 2\ln^2(2x).
\end{aligned}$$

Wir wollen nun noch uneigentliche Parameter-Integrale betrachten. Zur Erinnerung: Ist $g : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nennt man das uneigentliche Integral $\int_c^\infty g(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R g(t) dt$ konvergent, falls der Limes auf der rechten Seite existiert. Andernfalls heißt das uneigentliche Integral divergent.

Sei I ein offenes Intervall, $J := [c, \infty)$ und $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jedes $s \in I$ möge das Integral $\int_c^\infty f(s, t) dt$ konvergieren.

Definition:

Wir sagen, daß $\int_c^\infty f(s, t) dt$ auf $[a, b] \subset I$ *gleichmäßig* konvergiert, falls es eine stetige Funktion $\varphi : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $|f(s, t)| \leq \varphi(t)$ für alle $(s, t) \in [a, b] \times J$.
2. Das uneigentliche Integral $\int_c^\infty \varphi(t) dt$ konvergiert.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit von uneigentlichen Parameterintegralen

1. Wenn $\int_c^\infty f(s, t) dt$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, so ist

$$F(x) := \int_c^\infty f(x, t) dt$$

dort stetig, und es gilt:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

2. Ist f auf $I \times J$ stetig nach x partiell differenzierbar und konvergiert das Integral $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ auf $[a, b] \subset I$ gleichmäßig, so ist $F(x)$ auf (a, b) differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten. Der Satz gilt übrigens sinngemäß auch für alle anderen Typen von uneigentlichen Integralen.

Beispiel:

Für $x > 0$ wird durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

die sogenannte *Gamma-Funktion* definiert.

Hier ist $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1} = e^{(x-1) \ln t - t}$ stetig auf $(0, \infty) \times (0, \infty)$, und für jedes $x > 0$ konvergiert $\int_0^\infty f(x, t) dt$. Das sieht man folgendermaßen:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x-1} t^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x+1} = 0$, weil die Exponentialfunktion e^t stärker als jede Potenz von t wächst. Es gibt also ein $C > 0$ und ein $t_0 > 0$, so daß gilt:

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq C \cdot t^{-2} \text{ für } t \geq t_0.$$

Weil $\int_1^\infty t^{-2} dt$ konvergiert und $e^{-t} t^{x-1}$ auf $[1, t_0]$ stetig ist, konvergiert auch das Integral $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Ist $x \geq 1$, so ist $e^{-t}t^{x-1}$ auf $[0, 1]$ stetig und das Integral bei $t = 0$ überhaupt nicht uneigentlich.
3. Ist $0 < x < 1$ und $\alpha := 1 - x$, so ist auch $0 < \alpha < 1$ und das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ konvergiert. Da $|e^{-t}t^{x-1}| \leq t^{-\alpha}$ für $0 < t \leq 1$ ist, konvergiert auch das uneigentliche Integral $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1} dt$.

Wir haben gleichzeitig gezeigt, daß das Integral über jedem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b$ gleichmäßig konvergiert. Also ist $\Gamma(x)$ stetig auf $(0, \infty)$.

Der Integrand $f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$ ist stetig nach x partiell differenzierbar, mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln t \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1} = \ln(t) \cdot f(x, t),$$

und man kann leicht zeigen, daß auch das Integral hierüber auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b$ gleichmäßig konvergiert.

Also ist $\Gamma(x)$ differenzierbar, mit

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1} dt.$$

Induktiv kann man sogar zeigen, daß Γ beliebig oft differenzierbar ist.

Es ist

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = (-e^{-t}) \Big|_0^{\infty} = 1,$$

und es gilt die folgende Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Man zeigt das durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^x dt \\ &= -e^{-t}t^x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}xe^{x-1} dt \\ &= x \cdot \Gamma(x). \end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2 \text{ und allgemein } \Gamma(n + 1) = n! \text{ für } n \geq 2.$$

Die Gamma-Funktion interpoliert also die Fakultäten. Und es gibt noch einen weiteren interessanten Wert der Gammafunktion:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

BEWEIS: Wir benutzen folgende Aussage: Ist $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ surjektiv und differenzierbar, mit $\varphi'(x) > 0$ für $x > 0$, so ist

$$\int_0^\infty f(t) dt = \int_0^\infty f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Das soll heißen: Konvergiert eines dieser beiden Integrale, so auch das andere, und die Grenzwerte sind gleich. Zum Beweis benutzt man die Substitutionsregel innerhalb endlicher Grenzen und geht dann auf beiden Seiten der Gleichung zu den uneigentlichen Integralen über.

Mit $t = \varphi(x) := x^2$ folgt nun:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot (x^2)^{-1/2} \cdot 2x dx \\ &= 2 \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

■

Den genauen Wert (nämlich $\sqrt{\pi}$) werden wir später berechnen.

§ 2 Kurvenintegrale

Inhalt:

Wege und Kurven, Parametertransformationen, Bogenlänge, kontravariante und kovariante Vektorfelder, totale Differentiale, das Linienelement, Kurvenintegrale erster und zweiter Art, der Hauptsatz über Kurvenintegrale, konservative Vektorfelder und Potentiale.

In diesem Abschnitt wollen wir Funktionen und Vektorfelder über Kurven integrieren. Die betrachteten Kurvenintegrale sind nicht nur in der Mathematik sehr wichtig, sie spielen auch eine bedeutende Rolle in der Physik.

Definition:

Einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir einen *Integrationsweg*. Ist α sogar überall stetig differenzierbar und $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [a, b]$, so sprechen wir von einem *glatten* Integrationsweg.

Die Abbildung α heißt auch die *Parametrisierung* des Weges, und die Bildmenge $|\alpha| := \{\alpha(t) : t \in [a, b]\}$ nennt man die *Spur* von α .

Eine surjektive streng monoton wachsende (oder fallende) stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ nennt man eine *Parametertransformation*. Die Wege α und $\alpha \circ \varphi$ besitzen dann die gleiche Spur. Ist α glatt, so ist auch $\alpha \circ \varphi$ glatt.

Der Punkt $\mathbf{x}_A(\alpha) := \alpha(a)$ heißt der *Anfangspunkt* und $\mathbf{x}_E(\alpha) := \alpha(b)$ der *Endpunkt* von α . Durch die Parametrisierung werden die Punkte auf der Spur von α angeordnet, es wird also ein *Durchlaufungssinn* oder eine *Orientierung* für α festgelegt. Eine monoton wachsende Parametertransformation φ ändert diesen Durchlaufungssinn nicht. Man nennt φ dann *orientierungserhaltend*. Ist φ dagegen monoton fallend, so dreht sich der Durchlaufungssinn um, und man nennt φ *orientierungs-umkehrend*. Unter einer (*orientierten*) *Kurve* verstehen wir hier die Spur eines Weges, zusammen mit einem Durchlaufungssinn.

Sei jetzt $I = [a, b]$ und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg. Ist eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ von $[a, b]$ gegeben, so liefern die Verbindungsstrecken der Punkte $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_N)$ einen „approximierenden Polygonzug“ der Länge

$$L(\mathfrak{Z}, \alpha) = \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es zu jedem i ein $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ mit $\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leq \|\alpha'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$. Deshalb ist folgendes Ergebnis nicht so überraschend: Strebt die Länge der Teilintervalle der Zerlegung gegen Null, so streben die Längen der entsprechenden Polygonzüge gegen die Zahl

$$L(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Diese Zahl nennt man die *Bogenlänge* des Weges α . Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation, so ist

$$\begin{aligned} L(\alpha \circ \varphi) &= \int_c^d \|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \pm \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \\ &= \pm \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\alpha'(s)\| ds \\ &= L(\alpha), \end{aligned}$$

wobei das während der Rechnung auftretende Vorzeichen davon abhängt, ob φ orientierungserhaltend ist. Es fällt am Schluß wieder weg, weil man bei einer orientierungs-umkehrenden Transformation die Integralgrenzen vertauschen muß. Also ist die Bogenlänge unabhängig von der Parametrisierung, und man kann auch von der Länge einer *Kurve* sprechen.

Beispiele.

1. Ist $\alpha(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ die Parametrisierung der Verbindungsstrecke von \mathbf{a} und \mathbf{b} , mit $t \in [0, 1]$, so ist

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| dt = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

2. Durch $\alpha(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ wird der Kreis um (x_0, y_0) mit Radius r definiert. Es ist

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|(-r \sin t, r \cos t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

3. Sei $a > b > 0$ und $\alpha(t) := (a \cos t, b \sin t)$ die Parametrisierung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b . Dann ist $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ und $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Also erhält man als Länge des Ellipsenbogens das Integral

$$\begin{aligned}
L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt,
\end{aligned}$$

mit $k := \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Ein Integral dieses Typs nennt man ein *Elliptisches Integral*. Es ist nicht elementar lösbar, man kann es nur numerisch auswerten. Die Konstante k wurde eingeführt, um ein sogenanntes „elliptisches Integral zweiter Gattung in Legendrescher Normalform“ zu erhalten. Derartige Integrale werden in den Formelsammlungen tabelliert.

4. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann wird durch $\alpha(t) := (t, f(t))$ ein glatter Weg in der Ebene gegeben (es ist $\alpha'(t) = (1, f'(t))$), dessen Spur der Graph von f ist. Man mache sich an diesem Beispiel die Unterschiede zwischen Funktion, Funktionsgraph, Weg und Spur eines Weges klar!! Es ist $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, also

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Im 2. Semester haben wir gelernt, daß das Differential (also die totale Ableitung) einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt \mathbf{x}_0 eine Linearform $(df)_{\mathbf{x}_0}$ auf dem \mathbb{R}^n ist, gegeben durch

$$(df)_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v}.$$

Die Differentiale dx_i der Koordinatenfunktionen x_i bilden in jedem Punkt des \mathbb{R}^n eine Basis des Raumes $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller Linearformen auf dem \mathbb{R}^n , und man kann schreiben:

$$(df)_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) dx_n.$$

Dabei ist $(dx_i)(v_1, \dots, v_n) = v_i$, für $i = 1, \dots, n$.

In der (multi)linearen Algebra haben wir jedem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ eine Linearform $\lambda_{\mathbf{a}}$ auf dem \mathbb{R}^n zugeordnet: Ist $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, so ist

$$\lambda_{\mathbf{a}} = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n.$$

Wir nennen einen solchen Ausdruck eine Differentialform der Dimension 1. Die Physiker sprechen von einem „kovarianten Vektor“. Obwohl der „kontravariante Vektor“ \mathbf{a} und der kovariante Vektor $\lambda_{\mathbf{a}}$ durch die gleichen Komponenten a_1, \dots, a_n beschrieben werden, muß man zwischen ihnen unterscheiden. Bei einem Wechsel des Koordinatensystems transformieren sich die Komponenten unterschiedlich.

Wir wechseln jetzt von Vektoren zu *Feldern*. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet. Für den Mathematiker ist ein *Vektorfeld* auf G eine Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Der Physiker sieht dagegen ein Vektorfeld eher als eine Menge von Paaren (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , wobei die Ortskomponente $\mathbf{x} \in G$ jeweils den Angriffspunkt des Vektors und die zweite Komponente $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ Richtung und Länge des Vektors beschreiben. Ist aber zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ genau so ein Paar (\mathbf{x}, \mathbf{v}) gegeben, so wird das Feld vollständig durch die Zuordnung $F : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}$ beschrieben. Deshalb nennen wir jede solche Abbildung F ein (*kontravariantes*) *Vektorfeld*.

Genauso kann man *kovariante Vektorfelder* oder *1-Formen* auf G definieren: Jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ sei eine Differentialform

$$\omega_{\mathbf{x}} = a_1(\mathbf{x}) dx_1 + \cdots + a_n(\mathbf{x}) dx_n$$

zugeordnet. Die Abbildung $\omega : \mathbf{x} \mapsto \omega_{\mathbf{x}} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nennen wir eine *1-Form* (oder ein *kovariantes Feld*) auf G . Das Feld heißt stetig, differenzierbar etc., wenn alle Komponentenfunktionen a_1, \dots, a_n es sind.

Da man in eine Differentialform im Punkt \mathbf{x} noch einen Vektor einsetzen kann, ist es sinnvoll, eine Differentialform auf einem Gebiet G als eine Funktion mit zwei Argumenten anzusehen:

$$\omega : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

ist gegeben durch $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$. Die Abbildung ω ist linear im 2. Argument, und man nennt sie stetig, differenzierbar etc., falls sie stetig, differenzierbar etc. vom ersten Argument abhängt.

Offensichtlich entsprechen sich Vektorfelder und 1-Formen eineindeutig. Zu jedem Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ gehört die 1-Form

$$\omega_F = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\omega_F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := F(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}.$$

Umgekehrt erhält man aus jeder 1-Form ω ein Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n)$ durch

$$F_i(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Beispiel.

Ist f eine stetig differenzierbare Funktion auf G , so kann man dort das Gradientenfeld ∇f bilden, ein stetiges Vektorfeld. Ihm entspricht die 1-Form df mit $(df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$. Für jedes $\mathbf{x} \in G$ ist dann $df_{\mathbf{x}}$ das (*totale*) *Differential* von f im Punkte \mathbf{x} . Während jedoch **jede** Linearform als Differential in einem Punkt aufgefasst werden kann (ist $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ selbst schon eine

Linearform, so ist $(d\lambda)_{\mathbf{x}} = \lambda$, unabhängig vom Punkt \mathbf{x} , so braucht eine beliebige 1-Form durchaus kein totales Differential zu sein.

Das elektrische Feld $E = (E_1, E_2, E_3)$ ist eigentlich ein kovariantes Feld der Form $e = E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3$. Allerdings merkt man das erst unter relativistischen Bedingungen. I.a. gibt es kein Potential für E , d.h. $e = \omega_E$ ist kein totales Differential.

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg, so können wir die Bogenlängenfunktion einführen:

$$\sigma(t) := L(\alpha|_{[a,t]}) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau, \text{ für } a \leq t \leq b.$$

$\sigma(t)$ ist die Länge des Weges zwischen dem Parameter a und dem Parameter t . Also ist $\sigma(a) = 0$ und $\sigma(b) = L(\alpha)$. Weiter gilt:

$$\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\|, \text{ also } d\sigma = \sigma'(t) dt = \|\alpha'(t)\| dt.$$

Ist α ein glatter Weg, so ist $\sigma'(t) > 0$, also σ streng monoton wachsend und damit eine Parameter-Transformation $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L(\alpha)]$. Benutzt man $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \sigma^{-1}$ als Parametrisierung, so sagt man, der Weg ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Aus der Kettenregel ergibt sich sofort, daß $\|\tilde{\alpha}'(s)\| \equiv 1$ ist. Die Geometrie von Wegen läßt sich besonders einfach beschreiben, wenn man alle Wege nach der Bogenlänge parametrisiert. Leider ist das nur eine theoretische Option. Wie wir oben gesehen haben, läßt sich schon der Ellipsenbogen nicht wirklich nach der Bogenlänge parametrisieren, denn dazu müßte man elliptische Integrale berechnen.

Das Differential $d\sigma$ bezeichnet man als das *Linielement* zu α .

Definition:

Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Integrationsweg und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nennt man

$$\int_{\alpha} f d\sigma := \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

das *Kurvenintegral (1. Art)* von f über α .

Man beachte, daß f nur auf der Spur des Weges definiert sein muß. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung ist nur ein Symbol für die rechte Seite (es wird also nicht $f(\mathbf{x})$ über eine Variable σ integriert, sondern $f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|$ über die Variable t). Anschaulich approximiert man das Integral durch Rechteck-Flächen, die sich als Produkt aus der Länge eines kleinen Wegstückes und einem zugehörigen Funktionswert von f ergeben.

Eigenschaften des Kurvenintegrals 1. Art

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg.

$$1. \int_{\alpha} (c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2) d\sigma = c_1 \cdot \int_{\alpha} f_1 d\sigma + c_2 \cdot \int_{\alpha} f_2 d\sigma,$$

für Funktionen f_1, f_2 und Konstanten c_1, c_2 .

2. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine „Parametertransformation“, so ist

$$\int_{\alpha \circ \varphi} f d\sigma = \int_{\alpha} f d\sigma.$$

3. Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\alpha} f d\sigma \right| \leq \sup_{|\alpha|} |f| \cdot L(\alpha).$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) beweist man genauso wie den entsprechenden Satz über die Weglänge.

3) Die stetige Funktion $f \circ \alpha$ nimmt auf $[a, b]$ ein endliches Supremum an, also auch f auf $|\alpha| = \alpha([a, b])$, und daher ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} f d\sigma \right| &= \left| \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\alpha(t))| \cdot \|\alpha'(t)\| dt \\ &\leq \sup_{|\alpha|} |f| \cdot \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \sup_{|\alpha|} |f| \cdot L(\alpha). \end{aligned}$$

■

Beispiel.

Sei $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$ für $0 \leq t \leq \pi$ die Parametrisierung der oberen Hälfte des Einheitskreises und $f(x, y) := x + y$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f d\sigma &= \int_0^{\pi} (\cos t + \sin t) \|(-\sin(t), \cos(t))\| dt \\ &= \int_0^{\pi} (\cos t + \sin t) dt \\ &= (\sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi} = -((-1) - 1) = 2. \end{aligned}$$

In der Praxis ist ein anderes Kurvenintegral wichtiger. Dazu betrachten wir ein physikalisches Problem: Ein Massenpunkt soll in einem Kraftfeld \mathbf{F} längs eines glatten Weges α bewegt werden. Die Arbeit, die bei der Bewegung verrichtet wird, hängt nur von derjenigen Komponente der Kraft ab, die in Richtung des Tangentialvektors an α zeigt. Diese Komponente ist an der Stelle $\alpha(t)$ durch das Skalarprodukt aus $\mathbf{F}(\alpha(t))$ und dem *Tangenteneinheitsvektor* $\mathbf{T}_\alpha(t) = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ gegeben. Die Gesamt-Arbeit, die verrichtet wird, wenn der Massenpunkt entlang des ganzen Weges α bewegt wird, ergibt sich durch Integration über $\mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \mathbf{T}_\alpha(t) d\sigma = \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt$.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Integrationsweg und $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann nennt man

$$\int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt$$

das *Kurvenintegral (2. Art)* von \mathbf{F} über α .

Das Kurvenintegral 1. Art ist „orientierungsunabhängig“. Ganz anders liegen die Dinge beim Kurvenintegral 2. Art. Wir benutzen folgende Schreibweise: Ist α ein Integrationsweg, so soll $-\alpha$ den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnen.

Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art

1. $\int_\alpha (c_1 \cdot \mathbf{F}_1 + c_2 \cdot \mathbf{F}_2) \bullet d\mathbf{x} = c_1 \cdot \int_\alpha \mathbf{F}_1 \bullet d\mathbf{x} + c_2 \cdot \int_\alpha \mathbf{F}_2 \bullet d\mathbf{x}$, für Vektorfelder $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und Konstanten c_1, c_2 .
2. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation mit $\varphi'(x) > 0$ für alle $x \in [c, d]$, so ist $\int_{\alpha \circ \varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$.
3. Es ist $\int_{-\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = - \int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$.
4. Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\left| \int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha).$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) + 3): Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine beliebige Parameter-Transformation, so ist $(\alpha \circ \varphi)'(t) = \alpha'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \circ \varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_c^d \mathbf{F}(\alpha(\varphi(t))) \bullet \alpha'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \mathbf{F}(\alpha(s)) \bullet \alpha'(s) ds \\ &= \text{sign}(\varphi') \cdot \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(s)) \bullet \alpha'(s) ds = \text{sign}(\varphi') \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Den umgekehrt durchlaufenen Weg erhält man über die Parametertransformation $\varphi(t) = a + b - t$ mit $\varphi'(t) = -1$.

4) Zur Abschätzung benötigt man die Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\alpha(t))\| \cdot \|\alpha'(t)\| dt \\ &\leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha). \end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Sei $n = 2$, $\mathbf{F}(x, y) := (cy, 0)$, $c > 0$, und $\alpha(t) := (\cos t, 1 + \sin t)$ auf $[0, 2\pi]$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (c(1 + \sin t), 0) \bullet (-\sin t, \cos t) dt \\ &= -c \cdot \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t) dt = -c\pi. \end{aligned}$$

Faßt man \mathbf{F} als Strömungsfeld auf, so mißt das Kurvenintegral über einen Kreis die „Zirkulation“ der Strömung.

2. Sei $n = 3$, $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) und

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \text{ für } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Das Vektorfeld ist uns schon im ersten Paragraphen begegnet, als eines, das kein Gradientenfeld ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \bullet (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Setzen wir dagegen $\beta(t) := (2 + \cos t, \sin t, 0)$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\beta(t)) \bullet \beta'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{5 + 4 \cos t}, \frac{2 + \cos t}{5 + 4 \cos t}, 0 \right) \bullet (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 4 \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{5 + 4 \cos t} \right] dt \\ &= \pi - \frac{3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}. \end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{1}{5 + 4 \cos t}$ ist auf $[0, 2\pi]$ positiv und symmetrisch zur Geraden $t = \pi$. Daher gilt mit der Substitution $\varphi(x) = 2 \arctan(x)$ und der Formel $\cos t = (1 - \tan^2(t/2))/(1 + \tan^2(t/2))$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{5 + 4 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{9 + x^2} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + (x/3)^2} \\ &= \frac{12}{9} \cdot \left(\arctan \frac{x}{3} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{12}{9} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

Also ist $\int_{\beta} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0$.

Im ersten Fall haben wir über eine geschlossene Kurve um die Polstellenmenge von \mathbf{F} herum integriert, im zweiten Fall über eine geschlossene Kurve, die ganz in der Menge U_+ liegt, innerhalb der \mathbf{F} ein Gradientenfeld ist.

Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine offene zusammenhängende Menge), und \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf G . Dann sind die folgenden Aussagen über \mathbf{F} äquivalent:

1. \mathbf{F} ist ein Gradientenfeld, d.h. es gibt eine stetig differenzierbare Funktion f auf G , so daß $\mathbf{F} = \nabla f$ ist.
2. Sind \mathbf{p} und \mathbf{q} Punkte in G , so hat das Kurvenintegral $\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ für alle Integrationswege $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ mit $\alpha(a) = \mathbf{p}$ und $\alpha(b) = \mathbf{q}$ den gleichen Wert. (Das Integral ist wegunabhängig).
3. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein **geschlossener** Integrationsweg, so ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0.$$

Insbesondere ist

$$\int_{\alpha} (\nabla f) \bullet d\mathbf{x} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

BEWEIS:

(1) \implies (2): Ist $\mathbf{F} = \nabla f$, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)(t) dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\ &= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

und das hängt nicht mehr von α ab.

Den Zusatz haben wir damit auch gleich bewiesen!

(2) \implies (3): Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg und $\mathbf{p} := \alpha(a) = \alpha(b)$, so haben α und $-\alpha$ den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Also ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{-\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = - \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x},$$

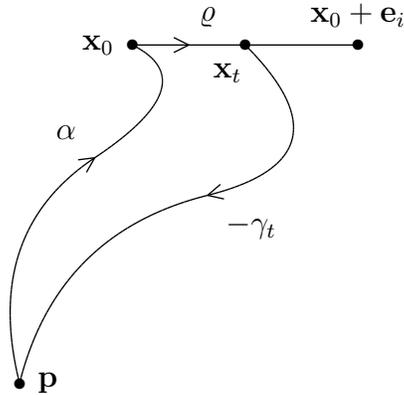
und daher $\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0$.

(3) \implies (1): Wir setzen voraus, daß das Integral über jeden geschlossenen Weg verschwindet, und wir müssen eine Funktion f mit $\nabla f = \mathbf{F}$ konstruieren. Dazu sei $\mathbf{p} \in G$ ein fest gewählter Punkt. Ist $\mathbf{x} \in G$ ein beliebiger anderer Punkt, so gibt es einen stetigen Weg α , der \mathbf{p} innerhalb von G mit \mathbf{x} verbindet. Man kann diesen Weg sogar als Streckenzug, also als Integrationsweg wählen.

Wir setzen $f(\mathbf{x}) := \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$. Offensichtlich hängt diese Definition nicht von dem Weg α ab. Es bleibt zu zeigen, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ beliebig und \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor. Sei α ein Weg zwischen \mathbf{p} und \mathbf{x}_0 , sowie γ_t ein Weg von \mathbf{p} nach $\mathbf{x}_t := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i$. Zusammen mit der Verbindungsstrecke $\varrho(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i$, $0 \leq s \leq t$, von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_t erhält man für jedes $t \in [0, 1]$ einen geschlossenen Weg, über den das Integral Null ergibt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\gamma_t} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} - \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &= \int_{\varrho} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &= \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i) \bullet \mathbf{e}_i ds. \end{aligned}$$



Setzen wir $g(s) := \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i) \bullet \mathbf{e}_i = F_i(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i)$, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s) ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $c = c(t) \in [0, t]$, so daß gilt: $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = F_i(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{e}_i) \cdot t$, also

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} F_i(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{e}_i) = F_i(\mathbf{x}_0).$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Definition:

Ist $\nabla f = \mathbf{F}$, so nennt man f ein *Potential* für \mathbf{F} .

Jetzt können wir das Beispiel

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

interpretieren. Auf U_+ (und genauso auf U_-) besitzt \mathbf{F} ein Potential, und deshalb muß dort das Integral über \mathbf{F} und jeden geschlossenen Weg verschwinden.

Besäße \mathbf{F} sogar auf seinem ganzen Definitionsbereich ein Potential, so müßte auch dort jedes Integral über einen geschlossenen Weg verschwinden. Wir haben aber bereits einen Weg gefunden, auf den das nicht zutrifft. Also kann \mathbf{F} kein globales Gradientenfeld sein.

Zum Schluß kehren wir zu unserer physikalischen Anwendung zurück.

Auf dem \mathbb{R}^3 sei ein Kraftfeld \mathbf{F} gegeben. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in diesem Kraftfeld entlang eines Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann ist $\mathbf{v}(t) := \alpha'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zur Zeit t . Das Newtonsche Gesetz der Bewegung besagt:

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = m \cdot \mathbf{v}'(t) \text{ für jeden Zeitpunkt } t.$$

Wenn man das Teilchen entlang α von $\mathbf{p} := \alpha(a)$ nach $\mathbf{q} := \alpha(b)$ bewegt hat, so beträgt die dabei geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b m \cdot \mathbf{v}'(t) \bullet \mathbf{v}(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{m}{2} \cdot [\|\mathbf{v}(b)\|^2 - \|\mathbf{v}(a)\|^2]. \end{aligned}$$

$T(t) := \frac{m}{2} \cdot \|\mathbf{v}(t)\|^2$ ist die *kinetische Energie* des Teilchens zur Zeit t . Die geleistete Arbeit ist also gerade die Änderung der kinetischen Energie.

Man nennt das Kraftfeld \mathbf{F} *konservativ*, wenn es ein Potential besitzt: $\mathbf{F} = -\nabla U$. In diesem Fall ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = -[U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))],$$

also $T(a) + U(\alpha(a)) = T(b) + U(\alpha(b))$. Das bedeutet, daß die *Gesamtenergie* $E(\alpha(t)) := U(\alpha(t)) + T(t)$ bei der Bewegung des Teilchens konstant bleibt. Das ist der Satz von der Erhaltung der Energie.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zu den kovarianten Feldern:

Schreiben wir formal $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ und ist $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ ein Vektorfeld, so ist – ebenfalls formal –

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \omega_{\mathbf{F}}.$$

Deshalb können wir das Integral über eine 1-Form $\omega_{\mathbf{F}}$ durch

$$\int_{\alpha} \omega_{\mathbf{F}} := \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$$

definieren. Ist speziell $\omega = df$ ein totales Differential, so ist

$$\int_{\alpha} \omega = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Beispiel.

Ist $\mathbf{F} = (f, g)$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_{\alpha} (f dx + g dy) = \int_a^b (\alpha'_1(t)f(\alpha(t)) + \alpha'_2(t)g(\alpha(t))) dt.$$

Diese Schreibweise wird gerade bei Integralen in der Ebene häufig verwendet.

§ 3 Das Riemann-Integral

Inhalt:

Quader und Partitionen, Jordansches Maß, Jordan-Nullmengen, Meßbarkeits-Kriterien, Obersummen und Untersummen, Riemannsches Integral, Integrationsregeln, Satz von Fubini, Mittelwertsatz der Integralrechnung.

In diesem Abschnitt lernen wir den Jordan-Inhalt von Mengen im \mathbb{R}^n kennen und erfahren, was Nullmengen sind und wie man das Volumen von Teilmengen des \mathbb{R}^3 berechnet. Außerdem wird das Integral stark verallgemeinert, und es wird gezeigt, wie n -dimensionale Integrale auf 1-dimensionale zurückgeführt werden können.

Unter einem (*abgeschlossenen*) *Quader* im \mathbb{R}^n versteht man eine Menge der Gestalt

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Wir setzen $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$ und schreiben:

$$Q = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

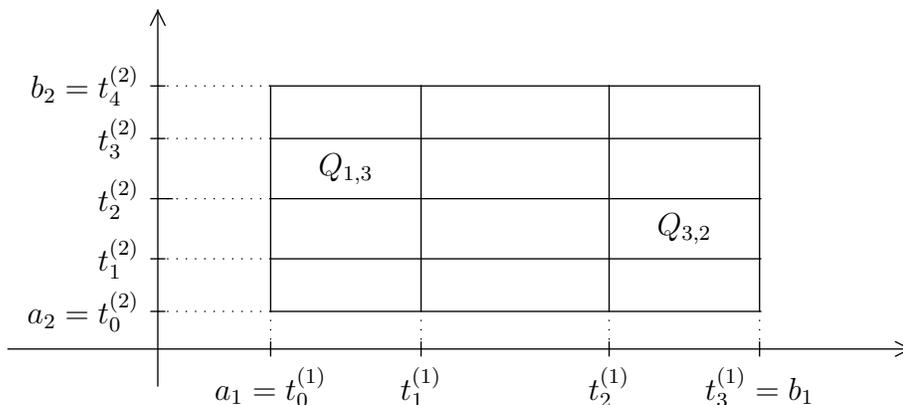
Dann ist $v_n(Q) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$ das n -dimensionale Volumen von Q .

Eine *Partition* (oder *Zerlegung*) \mathcal{P}_i des Intervalls $[a_i, b_i]$ ist eine Unterteilung

$$a_i = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{k_i}^{(i)} = b_i.$$

Ist für jedes i eine solche Partition gegeben, so nennt man $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ eine *Partition des Quaders* Q . Anschaulich verstehen wir darunter einfach die Menge aller Teilquader von Q , die durch die Unterteilung der Kanten $[a_i, b_i]$ entstehen.

Wählt man zu jedem i ein Teilintervall $I_{\nu_i}^{(i)} = [t_{\nu_i-1}^{(i)}, t_{\nu_i}^{(i)}]$, $i = 1, \dots, n$, so erhält man den Teilquader $Q_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = I_{\nu_1}^{(1)} \times I_{\nu_2}^{(2)} \times \dots \times I_{\nu_n}^{(n)}$.



Nun wollen wir daran gehen, möglichst vielen Mengen ein Maß zuzuordnen:

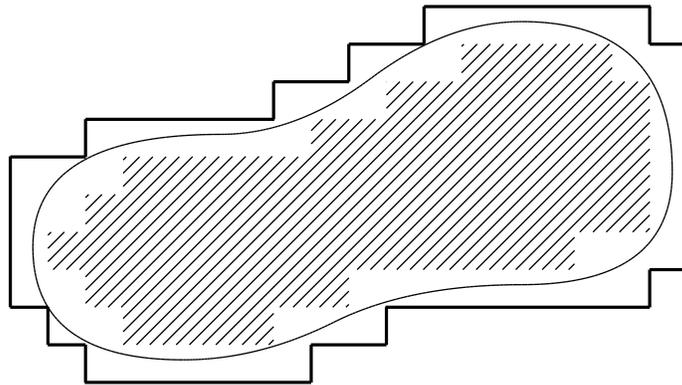
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine **beschränkte** Menge. Dann gibt es einen abgeschlossenen Quader Q_0 , in dem X enthalten ist, und wir können Partitionen \mathcal{P} von Q_0 betrachten. Die Menge aller Teilquader Q von \mathcal{P} mit $Q \cap X \neq \emptyset$ ist eine endliche Menge von Quadern, in deren Vereinigung X enthalten ist. Wir nennen so etwas eine *Quaderüberdeckung* von X .

Wir setzen jetzt

$$v_*(X, \mathcal{P}) := \sum_{Q \subset X} v_n(Q)$$

und

$$v^*(X, \mathcal{P}) := \sum_{Q \cap X \neq \emptyset} v_n(Q).$$



Definition:

$v_*(X) := \sup_{\mathcal{P}} v_*(X, \mathcal{P})$ heißt *inneres Maß* von X ,

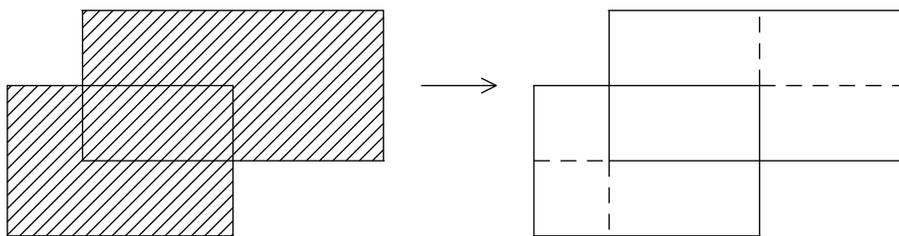
$v^*(X) := \inf_{\mathcal{P}} v^*(X, \mathcal{P})$ heißt *äußeres Maß* von X .

Die Menge X heißt (*Jordan-*)*meßbar*, falls $v_*(X) = v^*(X)$ ist. Der gemeinsame Wert heißt das *n-dimensionale Jordan-Maß* oder der *Inhalt* von X und wird mit $v_n(X)$ bezeichnet.

Bemerkung. Nur beschränkte Mengen können Jordan-meßbar sein. Man könnte auf die Idee kommen, daß Meßbarkeit und Maß von dem zu Anfang gewählten Quader Q_0 abhängen. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß das nicht der Fall ist. Man kann z.B. den kleinsten Quader benutzen, in dem X enthalten ist.

Der gegebene Meßbarkeitsbegriff ist zwar recht anschaulich, aber man kann schlecht damit rechnen. Wir wollen nun eine etwas handlichere Formulierung suchen:

Unter einer *Quadersumme* verstehen wir eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Quadern. Jede Quadersumme kann so in Teilquader zerlegt werden, daß je zwei verschiedene Teilquader höchstens Randpunkte gemeinsam haben.



Ist eine Quadersumme S in dieser Art in Teilquader zerlegt, so gewinnt man das Maß $v_n(S)$ als Summe der Maße aller Teilquader. Auch hier könnte man argwöhnen, daß das Maß von der Zerlegung abhängt. Das ist aber nicht der Fall, wie man leicht durch Übergang von zwei verschiedenen Zerlegungen zu einer gemeinsamen Verfeinerung sehen kann. Nun gilt:

1. Meßbarkeits-Kriterium

Die Menge M ist genau dann Jordan-meßbar, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Quadersummen S, T mit $S \subset M \subset T$ und

$$v_n(T) - v_n(S) < \varepsilon.$$

Der BEWEIS ergibt sich aus einer genauen Analyse aller benutzten Begriffe.

Definition:

Eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine (Jordan-)Nullmenge, wenn sie meßbar und $v_n(Z) = 0$ ist.

Aus dem 1. Meßbarkeitskriterium folgt sofort:

Satz

Eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine (Jordan-)Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ **endlich viele** abgeschlossene Quader Q_1, \dots, Q_m gibt, so daß gilt:

1. $Z \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$.
2. $v_n(Q_1) + \dots + v_n(Q_m) < \varepsilon$.

Beispiele.

1. Da eine Nullmenge meßbar ist, folgt sofort: Eine unbeschränkte Menge kann keine Jordan-Nullmenge sein.
2. Ist $Q = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ein Quader im \mathbb{R}^n und $a_k = b_k$ für ein k , so ist $v_n(Q) = 0$ und damit Q eine Nullmenge. Man spricht in diesem Fall auch von einem „entarteten“ Quader.

Allgemeiner ist jede beschränkte Menge, die in einer (affinen) Hyperebene des \mathbb{R}^n enthalten ist, eine n -dimensionale Nullmenge. Sie kann jedoch in einem geeigneten niederdimensionalen Raum durchaus positives Volumen haben.

3. Ist $Z = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ eine endliche Menge im \mathbb{R}^n , so ist Z eine Nullmenge.

Man sieht das so: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wähle man einfach Würfel mit einer Seitenlänge $< \sqrt[n]{\varepsilon/m}$ um die \mathbf{x}_j . Diese Würfel überdecken Z und haben ein Gesamtvolumen $< \varepsilon$.

4. Endliche Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
5. Ist $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist der Graph $G_f = \{(\mathbf{x}, t) \in Q \times \mathbb{R} : t = f(\mathbf{x})\}$ eine Jordan-Nullmenge im \mathbb{R}^n .

Zum BEWEIS sei an den verallgemeinerten Mittelwertsatz erinnert: Ist $C := \sup_Q \|\nabla f(\mathbf{x})\|$, so ist

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq C \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|, \text{ für alle } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q.$$

Wir brauchen nur diese Folgerung aus der stetigen Differenzierbarkeit, die Funktion f heißt dann *Lipschitz-stetig*. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man eine Partition von Q finden, so daß für jeden Teilquader P dieser Partition gilt: $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < \varepsilon / (C \cdot v_{n-1}(Q))$ für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$. Dann gibt es ein abgeschlossenes Intervall I der Länge $\leq \delta := \varepsilon / v_{n-1}(Q)$, so daß $G_f \cap (P \times \mathbb{R}) \subset P \times I$ ist. Weil $v_n(P \times I) \leq v_{n-1}(P) \cdot \delta$ und $\sum_P v_{n-1}(P) = v_{n-1}(Q)$ ist, folgt: G_f ist in einer endlichen Vereinigung von Quadern mit einem Gesamtvolumen $\leq v_{n-1}(Q) \cdot \delta = \varepsilon$ enthalten.

6. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } x \text{ rational}\}$ ist keine Nullmenge in \mathbb{R} , obwohl sie nur abzählbar ist. Den direkten Beweis möge sich der interessierte Leser selbst überlegen. Wir kommen auf dieses Beispiel später zurück.
7. Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

Mit etwas technischem Aufwand ergibt sich:

2. Meßbarkeitskriterium

1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-meßbar, wenn M beschränkt und ∂M eine Nullmenge ist.
2. Ist M Jordan-meßbar, so sind auch $\overset{\circ}{M}$ und \overline{M} meßbar, und es ist

$$v_n(M) = v_n(\overset{\circ}{M}) = v_n(\overline{M}).$$

Meßbarkeit von Durchschnitt und Vereinigung

Sind A, B Jordan-meßbare Mengen im \mathbb{R}^n , so sind auch $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ Jordan-meßbar. Insbesondere gilt:

$$v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B).$$

Auch der folgende Satz ist anschaulich klar, auf einen genauen Beweis verzichten wir:

Meßbarkeit von Produktmengen

Ist A Jordan-meßbar im \mathbb{R}^n und B Jordan-meßbar im \mathbb{R}^m , so ist $A \times B$ Jordan-meßbar im \mathbb{R}^{n+m} , und es gilt:

$$v_{n+m}(A \times B) = v_n(A) \cdot v_m(B).$$

Sei jetzt $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion.

Ist \mathcal{P} eine Partition von Q , so soll $T \in \mathcal{P}$ bedeuten, daß T einer der durch \mathcal{P} bestimmten Teilquader von Q ist. Dann setzen wir

$$S_u(f, \mathcal{P}) := \sum_{T \in \mathcal{P}} (\inf_T f(\mathbf{x})) \cdot v_n(T)$$

und

$$S_o(f, \mathcal{P}) := \sum_{T \in \mathcal{P}} (\sup_T f(\mathbf{x})) \cdot v_n(T).$$

$S_u(f, \mathcal{P})$ heißt *Untersumme von f zur Partition \mathcal{P}* , und $S_o(f, \mathcal{P})$ heißt *Obersumme von f zur Partition \mathcal{P}* . Genau solche Summen haben wir auch beim 1-dimensionalen Integral über stetige Funktionen betrachtet.

Definition:

Eine beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*im Riemannschen Sinne*) *integrierbar*, wenn gilt:

$$\sup\{S_u(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\} = \inf\{S_o(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\}.$$

Den gemeinsamen Wert nennen wir das (*Riemannsche*) *Integral* von f über Q , und wir benutzen dafür das Symbol

$$\int_Q f(\mathbf{x}) dV_n.$$

Beispiel.

Sei $f(\mathbf{x}) \equiv c$ auf Q eine konstante Funktion. Dann ist $\inf_T f(\mathbf{x}) = \sup_T f(\mathbf{x}) = c$ für alle Teilquader T von Q .

Für eine Partition \mathcal{P} von Q ist also

$$S_u(f, \mathcal{P}) = \sum_{T \in \mathcal{P}} c \cdot v_n(T) = c \cdot v_n(Q) \text{ und } S_o(f, \mathcal{P}) = \sum_{T \in \mathcal{P}} c \cdot v_n(T) = c \cdot v_n(Q)$$

Damit ist f über Q integrierbar und

$$\int_Q f(\mathbf{x}) dV_n = c \cdot v_n(Q).$$

Das ist das Ergebnis, das wir erwarten. Das Integral ist der Inhalt des Quaders im \mathbb{R}^{n+1} , der über Q liegt und die Höhe c hat.

Häufig hat man es mit Funktionen zu tun, deren Definitionsbereich kein Quader ist. Dann geht man folgendermaßen vor:

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine (beliebige) Funktion. Unter dem *Träger* von f versteht man die Menge

$$\text{Tr}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Ist $\text{Tr}(f)$ eine beschränkte (und damit kompakte) Menge, so sagt man: f ist eine Funktion *mit kompaktem Träger*.

Beispiel.

$f(x, y) := \max(0, 1 - x^2 - y^2)$ ist eine Funktion mit kompaktem Träger, der Träger ist der Einheitskreis.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, Q ein Quader mit $\text{Tr}(f) \subset Q$. Ist $f|_Q$ integrierbar, so heißt auch f selbst integrierbar, und man setzt

$$\int f(\mathbf{x}) dV_n := \int_Q (f|_Q)(\mathbf{x}) dV_n.$$

Nun sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine (beschränkte) Jordan-meßbare Teilmenge. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls die trivial fortgesetzte Funktion

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{falls } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist. Man setzt dann $\int_M f(\mathbf{x}) dV_n := \int \widehat{f}(\mathbf{x}) dV_n$.

Integrierbarkeits-Kriterium

Sei Q ein (abgeschlossener) Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die außerhalb einer Jordan-Nullmenge stetig ist. Dann ist f (über Q) integrierbar.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der Aussage, daß eine stückweise stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall integrierbar ist. Allerdings ist die Aussage hier etwas allgemeiner: Eine Teilmenge eines abgeschlossenen Intervalls in \mathbb{R} ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie höchstens endlich viele Häufungspunkte hat. Sie darf demnach aber eine unendliche Menge sein. Unendlich viele Unstetigkeitsstellen hatten wir bisher nicht zugelassen.

Den BEWEIS der obigen Aussage können wir hier nicht erbringen.

Folgerung

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-meßbar und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über M integrierbar.

BEWEIS: M ist beschränkt, liegt also in einem abgeschlossenen Quader Q . Der Rand $\partial M \subset Q$ ist eine Nullmenge, und die triviale Fortsetzung \widehat{f} ist auf den Mengen $\overset{\circ}{M}$ und $Q \setminus \overline{M}$ stetig, also über Q integrierbar. Damit ist auch f über M integrierbar. ■

Integrationsregeln

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-meßbar.

1. Sind f und g über M integrierbar, so auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$, und es gilt:

$$\int_M (c_1 \cdot f(\mathbf{x}) + c_2 \cdot g(\mathbf{x})) dV_n = c_1 \cdot \int_M f(\mathbf{x}) dV_n + c_2 \cdot \int_M g(\mathbf{x}) dV_n.$$

2. Sind f und g über M integrierbar und ist $f \leq g$ auf M , so ist

$$\int_M f(\mathbf{x}) dV_n \leq \int_M g(\mathbf{x}) dV_n.$$

3. Mit f ist auch $|f|$ über M integrierbar, und es gilt:

$$\left| \int_M f(\mathbf{x}) dV_n \right| \leq \int_M |f(\mathbf{x})| dV_n \leq \sup_M |f| \cdot v_n(M).$$

4. Sei f auf M integrierbar und $N \subset M$ Jordan-meßbar. Dann ist f auch über N integrierbar.

Ist N eine Jordan-Nullmenge, so ist $\int_N f(\mathbf{x}) dV_n = 0$.

5. Sei $M = A \cup B$, mit $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$. Sind beide Mengen Jordan-meßbar, so ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $f|_A$ und $f|_B$ integrierbar sind, und dann ist

$$\int_M f(\mathbf{x}) dV_n = \int_A f(\mathbf{x}) dV_n + \int_B f(\mathbf{x}) dV_n.$$

Die meisten Beweise sind einfach. Hier sind nur ein paar Bemerkungen zu (3): Für eine beliebige Funktion f setzen wir $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$. Dann sind $f^+, f^- \geq 0$, und es ist $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Außerdem gilt:

$$S_u(f, \mathcal{P}) \leq S_u(f^+, \mathcal{P}) \leq S_o(f^+, \mathcal{P}) \leq S_o(f, \mathcal{P}).$$

Daraus folgt, daß mit f auch f^+ integrierbar ist. Die Anwendung auf $-f$ ergibt die Integrierbarkeit von f^- und damit schließlich auch die von $|f|$.

Nun kommen wir zu dem Satz, der die praktische Berechnung von Integralen erst möglich macht:

Satz von Fubini (für Riemann-Integrale)

Seien $P \subset \mathbb{R}^p$ und $Q \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader, $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Für $\mathbf{x} \in P$ sei $f_{\mathbf{x}} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Wenn $f_{\mathbf{x}}$ für alle $\mathbf{x} \in P$ integrierbar ist, dann ist auch die Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto \int_Q f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) dV_q$$

integrierbar, und es ist

$$\int_{P \times Q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_{p+q} = \int_P \left(\int_Q f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_q \right) dV_p.$$

Für $p = q = 1$ und stetiges f haben wir den Satz schon bewiesen. Der allgemeine Fall ist technisch erheblich aufwendiger zu zeigen. Wir verzichten auf den Beweis und beschränken uns auf einige Anmerkungen:

1. Der Satz bleibt natürlich richtig, wenn man die Rollen von \mathbf{x} und \mathbf{y} vertauscht. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt also:

$$\int_P \left(\int_Q f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_q \right) dV_p = \int_Q \left(\int_P f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_p \right) dV_q.$$

2. Es kann vorkommen, daß $f_{\mathbf{x}}$ nicht für alle $\mathbf{x} \in P$ integrierbar ist. Man kann aber zeigen, daß die Ausnahmepunkte eine Jordan-Nullmenge bilden, und daß die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mapsto U(f_{\mathbf{x}}) &:= \sup\{S_u(f_{\mathbf{x}}, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\} \\ \text{und } \mathbf{x} \mapsto O(f_{\mathbf{x}}) &:= \inf\{S_o(f_{\mathbf{x}}, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\} \end{aligned}$$

auf P integrierbar sind. Es gilt dann:

$$\int_P U(f_{\mathbf{x}}) dV_p = \int_P O(f_{\mathbf{x}}) dV_p = \int_{P \times Q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_{p+q}.$$

Für alle Punkte \mathbf{x} außerhalb einer Nullmenge $N \subset P$ ist

$$U(f_{\mathbf{x}}) = O(f_{\mathbf{x}}) = \int_Q f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) dV_q.$$

Durch sukzessive Anwendung des Satzes von Fubini ergibt sich:

Folgerung

Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_Q f(\mathbf{x}) dV_n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge der Integrationen an.

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar und $\int_{[a,b]} f(x) dV_1 = \int_a^b f(x) dx$, das ergibt sich aus dem Existenzbeweis für Stammfunktionen stetiger Funktionen (vgl. Mathematik 1). Leider haben wir nicht immer nur mit stetigen Funktionen zu tun.

Satz (über die Integrierbarkeit in einer Veränderlichen)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig (d.h. stetig bis auf höchstens endlich viele Sprungstellen). Dann ist f integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f(x) dV_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist f auf dem „Quader“ $[a, b]$ definiert und außerhalb einer Nullmenge stetig, also integrierbar. Sei nun $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und $f|_{(t_{i-1}, t_i)}$ stetig, für alle i . Dann ist

$$\int_{[a,b]} f(x) dV_1 = \sum_{i=1}^n \int_{[t_{i-1}, t_i]} f(x) dV_1 = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Jetzt wollen wir die Verbindung zwischen Integration und Volumenmessung herstellen:

Definition:

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so heißt die durch

$$c_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $c_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die *charakteristische Funktion* von M .

Ist die Menge M beschränkt, so ist c_M eine Funktion mit kompaktem Träger. Auf den offenen Mengen $\overset{\circ}{M}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \bar{M}$ ist c_M konstant und daher stetig. In den Punkten von ∂M ist c_M dagegen zwangsläufig unstetig.

Zusammenhang zwischen Meßbarkeit und Integrierbarkeit

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-meßbar, wenn die charakteristische Funktion c_M integrierbar ist, und dann ist

$$\int c_M(\mathbf{x}) dV_n = v_n(M).$$

BEWEIS: Ist M meßbar, so ist M beschränkt und ∂M eine Nullmenge. Dann ist c_M eine Funktion mit kompaktem Träger, die außerhalb der Nullmenge ∂M stetig und damit integrierbar ist.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß c_M integrierbar ist, so muß M in einem Quader Q enthalten sein, und $U(c_M) = O(c_M)$. Es ist aber $S_u(c_M, \mathcal{P}) = v_*(M, \mathcal{P})$ und $S_o(c_M, \mathcal{P}) = v^*(M, \mathcal{P})$ für jede Partition \mathcal{P} . Also ist $v_*(M) = v^*(M) = \int_Q c_M(\mathbf{x}) dV_n$. ■

Beispiel.

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und positiv, sowie

$$M^f := \{(\mathbf{x}, t) \in Q \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(\mathbf{x})\}.$$

Es gibt ein k , so daß $f(\mathbf{x}) \leq k$ für alle $\mathbf{x} \in Q$ ist. Da G_f eine Jordan-Nullmenge ist, ist $M := M^f$ Jordan-meßbar und damit die charakteristische Funktion c_M integrierbar. Außerdem ist

$$(c_M)_{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq f(\mathbf{x}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $\mathbf{x} \in Q$ integrierbar über $I = [0, k]$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt, und es folgt:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(M^f) &= \int_{Q \times I} c_M(\mathbf{x}, t) dV_{n+1} = \int_Q \left(\int_I c_M(\mathbf{x}, t) dt \right) dV_n \\ &= \int_Q \left(\int_0^{f(\mathbf{x})} dt \right) dV_n = \int_Q f(\mathbf{x}) dV_n. \end{aligned}$$

Also stimmt das Integral von f über Q mit dem Volumen der „Ordnatenmenge“ M^f unter dem Graphen von f überein.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare kompakte und konvexe Menge (z.B. ein abgeschlossener Quader). Ist f stetig auf K , so gibt es ein $\boldsymbol{\xi} \in K$ mit

$$\int_K f(\mathbf{x}) dV_n = f(\boldsymbol{\xi}) \cdot v_n(K).$$

BEWEIS: Da K kompakt und f stetig ist, gibt es Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, so daß $m := f(\mathbf{x}_1) = \min_K f$ und $M := f(\mathbf{x}_2) = \max_K f$ ist. Dann ist $m \leq f \leq M$ und daher

$$m \cdot v_n(K) \leq \int_K f(\mathbf{x}) dV_n \leq M \cdot v_n(K).$$

Jetzt sei $g(t) := f(\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \cdot v_n(K)$. Dann ist g stetig auf $[0, 1]$, $g(0) = m \cdot v_n(K)$ und $g(1) = M \cdot v_n(K)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit $g(c) = \int_K f(\mathbf{x}) dV_n$. Wir setzen $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}_1 + c(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$. ■

§ 4 Integrationsmethoden

Inhalt:

Integration über Normalbereiche, Prinzip von Cavalieri, Volumenberechnungen, die Transformationsformel, Integralberechnungen mit Polar- und Zylinderkoordinaten.

Wir wollen jetzt verschiedene Verfahren zur praktischen Berechnung von Integralen und Inhalten kennenlernen.

Definition:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein (abgeschlossener) Quader. Ein *Normalbereich* über Q ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(\mathbf{x}, t) \in Q \times \mathbb{R} : \varphi(\mathbf{x}) \leq t \leq \psi(\mathbf{x})\},$$

wobei $\varphi, \psi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind, mit $\varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in Q$.

Ein Normalbereich im obigen Sinne ist eine Jordan-meßbare Menge im \mathbb{R}^{n+1} . Für stetig differenzierbare Funktionen φ und ψ ist das im vorigen Paragraphen mehr oder weniger bewiesen worden. Sind die begrenzenden Funktionen nur stetig, so braucht man zusätzlich die Aussage, daß der Graph einer stetigen Funktion auf einem Quader eine Jordan-Nullmenge ist. Den Beweis dafür können wir hier mit unseren Mitteln nicht erbringen.

Integration über Normalbereiche

Sei $B = \{(\mathbf{x}, t) \in Q \times \mathbb{R} : \varphi(\mathbf{x}) \leq t \leq \psi(\mathbf{x})\}$ ein Normalbereich und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Außerdem sei für jedes $\mathbf{x} \in Q$ die Funktion $f_{\mathbf{x}}$ über dem Intervall $[\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})]$ integrierbar. Dann ist

$$\int_B f(\mathbf{x}, t) dV_{n+1} = \int_Q \left(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t) dt \right) dV_n.$$

BEWEIS: Es gibt ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$, so daß $a \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \leq b$ für alle $\mathbf{x} \in Q$ gilt. Der Normalbereich B ist dann in dem Quader

$P = Q \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ enthalten. Daß f über B integrierbar ist, bedeutet, daß $f \cdot c_B$ über P integrierbar ist. Weiter ist

$$(f \cdot c_B)_{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, t) \cdot c_B(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} f_{\mathbf{x}}(t) & \text{auf } [\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nach Voraussetzung für jedes $\mathbf{x} \in Q$ über I integrierbar (als triviale Fortsetzung einer integrierbaren Funktion).

Der Satz von Fubini liefert nun:

$$\int_B f(\mathbf{x}, t) dV_{n+1} = \int_Q \left(\int_I f(\mathbf{x}, t) dt \right) dV_n = \int_Q \left(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t) dt \right) dV_n.$$

■

Bemerkung. Die an f gestellten Forderungen sind natürlich erfüllt, wenn f stetig ist.

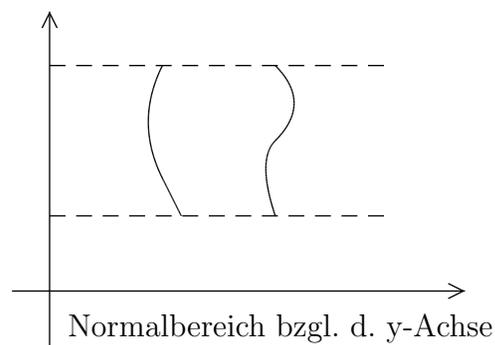
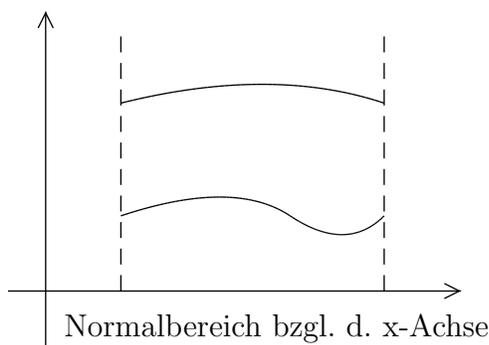
Wir wollen einige Spezialfälle betrachten.

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Normalbereich über der x-Achse, wenn es ein Intervall $[a, b]$ und stetige Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$) gibt, so daß gilt:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Normalbereich über der y-Achse, wenn es ein Intervall $[c, d]$ und stetige Funktionen $r, s : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $r(y) \leq s(y)$ für alle $y \in [c, d]$) gibt, so daß gilt:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r(y) \leq x \leq s(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}.$$



Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

a) Ist B Normalbereich bezüglich der x-Achse, so ist

$$\int_B f(\mathbf{x}) dV_2 = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx.$$

b) Ist B Normalbereich bezüglich der y -Achse, so ist

$$\int_B f(\mathbf{x}) dV_2 = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx dy.$$

Ein stückweise glatter stetiger Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *einfach geschlossen*, falls α geschlossen und auf $[a, b)$ injektiv ist. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte Teilmenge, deren Rand ein einfach geschlossener stückweise glatter stetiger Weg ist, so kann man B durch endlich viele achsenparallele Schnitte in Normalbereiche zerlegen und somit jede stetige Funktion über B integrieren.

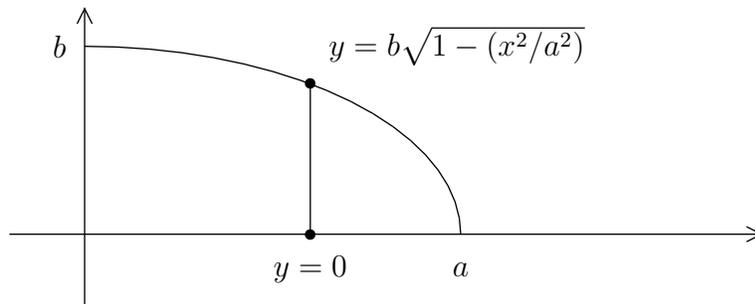
Beispiele.

1. Sei B derjenige Teil der Ellipsenfläche mit den Halbachsen a und b , der im rechten oberen Quadranten liegt. Es soll das Integral $\int_B xy dV_2$ berechnet werden.

Der Rand von B ist durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0 \text{ und } y = 0$$

gegeben. Offensichtlich ist B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse.



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_B xy dV_2 &= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} xy dy dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \right) dx \\ &= \int_0^a \frac{x}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) \Big|_{x=0}^a \\ &= \frac{a^2 b^2}{8}. \end{aligned}$$

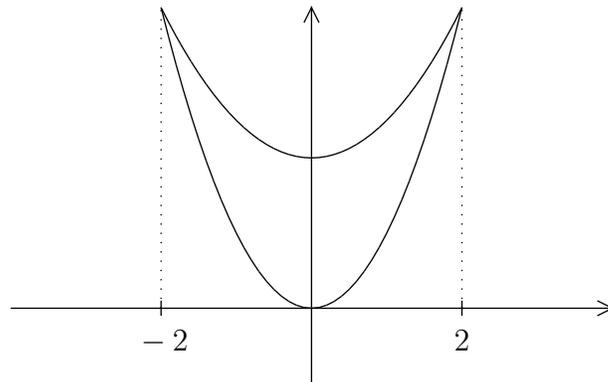
2. Sei $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := 2 + \frac{1}{2}x^2$. Dann ist

$$\varphi(-2) = \psi(-2) = 4 \text{ und } \varphi(2) = \psi(2) = 4,$$

und für $|x| \leq 2$ ist $x^2 \leq 4$, also $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$. Daher ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

ein Normalbereich über der x-Achse.



Ist $Q = [-2, 2] \times [0, 4]$, so ist die Fläche von B gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_Q c_B(x, y) dV_2 &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{2+(x^2/2)} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(2x - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \left(4 - \frac{8}{6}\right) - \left(-4 + \frac{8}{6}\right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Ein Normalbereich über der xy-Ebene im \mathbb{R}^3 ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q \text{ und } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

wobei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader ist und $\varphi, \psi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind. Für eine stetige Funktion f auf B gilt:

$$\int_B f(x, y, z) dV_3 = \int_Q \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dV_2.$$

Beispiel.

Sei B die Menge im \mathbb{R}^3 , die durch die Flächen $x = y^2$, $z = 0$ und $x + z = 1$ begrenzt wird. Wir wollen ihr Volumen berechnen. Dazu müssen wir sie erst einmal besser beschreiben. Wir haben folgende Bedingungen:

$$0 \leq z \leq 1 - x \quad \text{und} \quad y^2 \leq x \leq 1 - z.$$

Daraus folgt, daß $y^2 \leq x \leq 1$, also $-1 \leq y \leq 1$ ist. Somit können wir schreiben:

$$B = \{(x, y, z) : -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1 - x\}.$$

Das ist kein Normalbereich, aber eine Teilmenge des Normalbereichs

$$B_0 := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1 - x\}$$

(über $Q = [0, 1] \times [-1, 1]$). Um das Volumen von B zu berechnen, reicht es, die Funktion c_B über den Normalbereich B_0 zu integrieren.

Für $(x, y) \in M := \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \text{ und } y^2 \leq x \leq 1\}$ und $0 \leq z \leq 1 - x$ ist $c_B(x, y, z) = 1$, sonst = 0. Dabei ist M ein Normalbereich über der y -Achse (über dem Intervall $[-1, 1]$). Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_3(B) &= \int_{B_0} c_B(x, y, z) dV_3 \\ &= \int_Q \left(\int_0^{1-x} c_B(x, y, z) dz \right) dV_2 \\ &= \int_M \left(\int_0^{1-x} dz \right) dV_2 \\ &= \int_M (1 - x) dV_2 \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{y^2}^1 (1 - x) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{x=y^2}^1 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - y^2 + \frac{1}{2}y^4 \right) dy \\ &= \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{10}y^5 \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Substitutionsregel auf mehrfache Integrale verallgemeinern. Zur Erinnerung: Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation (also eine surjektive streng monotone und stetig differenzierbare Abbildung), so ist

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx,$$

also

$$\int_c^d f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt = \int_a^b f(x) dx.$$

Durch die Einführung der Betragstriche wird vermieden, daß die Integrationsrichtung umgekehrt werden muß.

Sei nun

$$P := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

und

$$Q := [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n].$$

Außerdem seien $\varphi_i : [c_i, d_i] \rightarrow [a_i, b_i]$ Parametertransformationen, $i = 1, \dots, n$.

Ist φ_i streng monoton wachsend, so ist $\varphi_i(c_i) = a_i$ und $\varphi_i(d_i) = b_i$, andernfalls ist $\varphi_i(c_i) = b_i$ und $\varphi_i(d_i) = a_i$. Setzen wir

$$F(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)),$$

so ist dies eine umkehrbar stetig differenzierbare Abbildung mit

$$J_F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_n'(x_n) \end{pmatrix}.$$

Daher folgt für eine stetige Funktion f auf P :

$$\begin{aligned} \int_P f(\mathbf{y}) dV_n &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{c_n}^{d_n} \cdots \int_{c_1}^{d_1} f(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)) \cdot |\varphi_1'(x_1)| \cdots |\varphi_n'(x_n)| dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_Q f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det J_F(\mathbf{x})| dV_n. \end{aligned}$$

Beispiele.

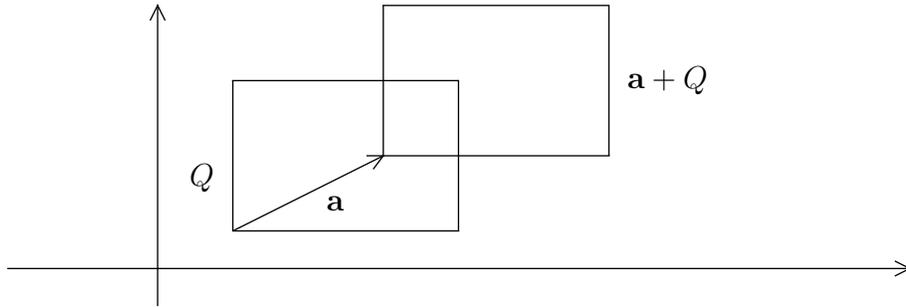
1. Ist $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor, so wird durch

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a} = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

die Translation $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Es ist

$$\det J_{T_{\mathbf{a}}}(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so bezeichnen wir mit $\mathbf{a} + Q$ den um den Vektor \mathbf{a} verschobenen Quader.



Offensichtlich gilt für eine stetige Funktion f auf $\mathbf{a} + Q$:

$$\int_{\mathbf{a}+Q} f(\mathbf{x}) dV_n = \int_Q f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) dV_n.$$

Insbesondere ist $v_n(\mathbf{a} + Q) = v_n(Q)$ (man setze $f(\mathbf{x}) \equiv 1$), und daher auch $v_n(\mathbf{a} + M) = v_n(M)$ für jede meßbare Menge M (denn man kann M durch Quadersummen und $\mathbf{a} + M$ durch entsprechend verschobene Quadersummen gleichen Inhaltes approximieren). Man spricht von der *Translationsinvarianz des Integrals*.

2. Sei $r > 0$ und $H_r(x_1, \dots, x_n) := (rx_1, \dots, rx_n)$. Das ist die Streckung („Homothetie“) um den Faktor r . Offensichtlich ist

$$\int_{r \cdot Q} f(\mathbf{y}) dV_n = r^n \cdot \int_Q f(r\mathbf{x}) dV_n,$$

und speziell $v_n(r \cdot M) = r^n \cdot v_n(M)$ für jede Jordan-meßbare Menge M .

Prinzip von Cavalieri

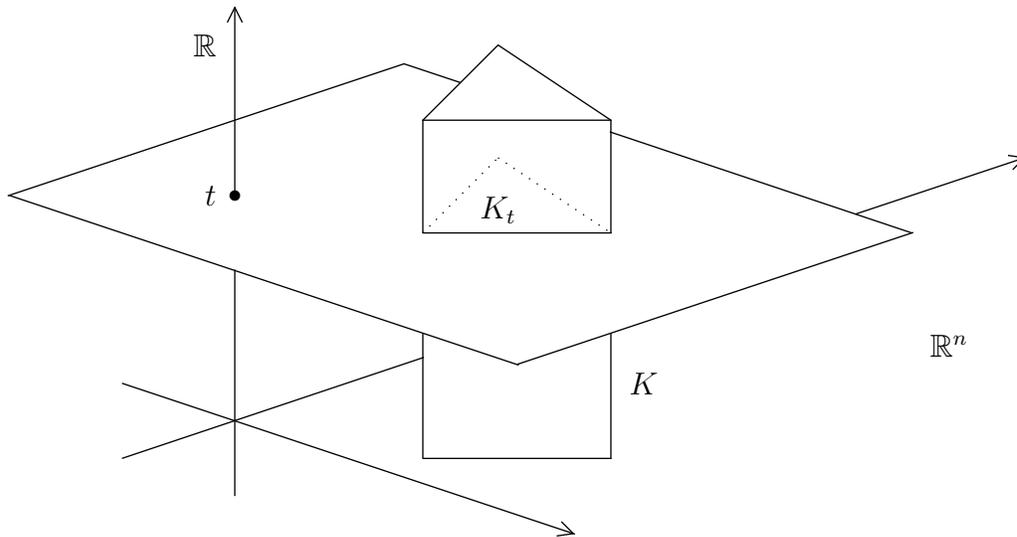
Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-meßbar, und für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei der „Schnitt“

$$K_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, t) \in K\}$$

leer oder wieder eine Jordan-meßbare Menge.

Ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid K_t \text{ nicht leer}\}$ in dem Intervall $[a, b]$ enthalten, so ist die durch $t \mapsto v_n(K_t)$ definierte Funktion über $[a, b]$ integrierbar, und es gilt:

$$v_{n+1}(K) = \int_a^b v_n(K_t) dt.$$



BEWEIS: Es ist $\mathbf{x} \in K_t \iff (\mathbf{x}, t) \in K$. Daher gilt für die charakteristischen Funktionen:

$$c_K(\mathbf{x}, t) = c_{K_t}(\mathbf{x}), \text{ für } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Weil K Jordan-meßbar ist, gibt es einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, so daß $K \subset Q \times [a, b]$ ist, und die charakteristische Funktion c_K ist über $Q \times [a, b]$ integrierbar.

Weil außerdem die Mengen K_t für jedes $t \in [a, b]$ meßbare Teilmengen des \mathbb{R}^n sind, ist für jedes solche t die durch

$$(c_K)_t(\mathbf{x}) := c_K(\mathbf{x}, t)$$

definierte Funktion $(c_K)_t$ integrierbar. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt, und es gilt:

Die Funktion $t \mapsto \int_Q (c_K)_t(\mathbf{x}) dV_n = v_n(K_t)$ ist integrierbar über $[a, b]$, und es gilt:

$$v_{n+1}(K) = \int_{Q \times [a, b]} c_K(\mathbf{x}, t) dV_{n+1} = \int_a^b \left(\int_Q (c_K)_t(\mathbf{x}) dV_n \right) dt = \int_a^b v_n(K_t) dt.$$

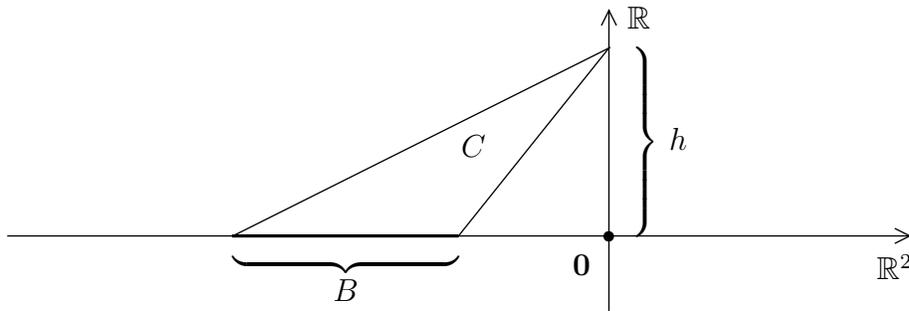
■

Beispiele.

1. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Jordan-meßbare Menge und $h > 0$. Dann nennt man die Menge

$$C := \{((1 - \lambda)\mathbf{x}, \lambda h) \mid \mathbf{x} \in B \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

den *Kegel* über der Grundfläche B mit der Spitze in $(0, h)$. Man beachte, daß durch $\lambda \mapsto ((1 - \lambda)\mathbf{x}, \lambda h)$ die Verbindungsstrecke von $(\mathbf{x}, 0)$ und $(\mathbf{0}, h)$ parametrisiert wird.



C ist beschränkt, und man kann nachweisen, daß ∂C eine Nullmenge ist¹. Also ist C Jordan-meßbar, und für $t \in [0, h]$ ist

$$\begin{aligned} C_t &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{x}, t) \in C\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in [0, 1], \mathbf{y} \in B \text{ mit } (1 - \lambda)\mathbf{y} = \mathbf{x} \text{ und } \lambda h = t\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \mathbf{y} \in B \text{ mit } \mathbf{x} = (1 - \frac{t}{h})\mathbf{y}\} = (1 - \frac{t}{h}) \cdot B. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} v_3(C) &= \int_0^h v_2(C_t) dt = \int_0^h v_2((1 - \frac{t}{h}) \cdot B) dt \\ &= v_2(B) \cdot \int_0^h (1 - \frac{t}{h})^2 dt \\ &= v_2(B) \cdot (-h) \cdot \int_0^h \varphi(t)^2 \varphi'(t) dt \quad (\varphi(t) := 1 - \frac{t}{h}) \\ &= v_2(B) \cdot (-h) \cdot \int_1^0 x^2 dx \\ &= v_2(B) \cdot h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot v_2(B) \cdot h. \end{aligned}$$

2. Wir können jetzt auch das Volumen einer Kugel ausrechnen:

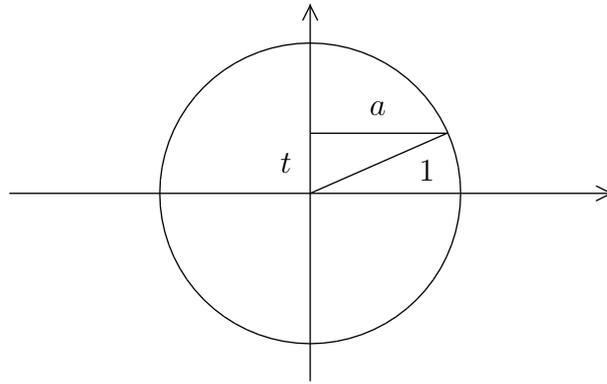
Allgemein ist $v_3(B_r(\mathbf{0})) = r^3 \cdot v_3(B_1(\mathbf{0}))$. Wir müssen also nur das Volumen der Einheitskugel bestimmen:

Im Raum mit den Koordinaten x, y, t ist

$$(B_1(\mathbf{0}))_t = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } |t| > 1 \\ B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2 & \text{falls } |t| \leq 1, \end{cases}$$

¹Das liegt daran, daß ∂B eine Nullmenge im \mathbb{R}^2 ist und der Kegel eine endliche Höhe hat. So lassen sich Quaderüberdeckungen mit beliebig kleinem Gesamtvolumen konstruieren

wobei $a^2 + t^2 = 1$ ist, also
 $a = \sqrt{1 - t^2}$.



$$\begin{aligned}
 \text{Also ist } v_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{-1}^1 v_2(B_{\sqrt{1-t^2}}(\mathbf{0})) dt \\
 &= \int_{-1}^1 (1-t^2) \cdot v_2(B_1(\mathbf{0})) dt \\
 &= \pi \cdot \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \\
 &= \pi \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

3. Leicht lässt sich nun auch das Volumen von Rotationskörpern bestimmen: Es seien zwei stetige Funktionen f, g auf $[a, b]$ gegeben, mit $0 \leq g \leq f$. Dann ist

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(z) \leq x^2 + y^2 \leq f(z), z \in [a, b]\}$$

der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den durch g und f bestimmten Normalbereich um die z -Achse rotieren lässt.

Behauptung: $v_3(R) = \pi \cdot \int_a^b (f(z)^2 - g(z)^2) dz$.

Zum BEWEIS genügt es, den Fall $g(z) \equiv 0$ zu betrachten. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
 v_3(R) &= \int_a^b v_2(R_t) dt \\
 &= \int_a^b v_2(B_{f(t)}(\mathbf{0})) dt \\
 &= \int_a^b f(t)^2 \pi dt.
 \end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zurück zur verallgemeinerten Substitutionsregel. Sie soll noch weiter verallgemeinert werden. Wir beginnen mit linearen Transformationen

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ist $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n , so wird L gerade durch diejenige Matrix A beschrieben, die aus den Spalten

$$\vec{a}_1 := L(\vec{e}_1), \dots, \vec{a}_n := L(\vec{e}_n)$$

gebildet wird. Wir schreiben dann auch: $L = L_A$. Es ist $\det A = 0$ genau dann, wenn die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ linear abhängig sind. Da diese Vektoren das Bild von L aufspannen, liegt $\text{Im}(L)$ dann in einer Hyperebene. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, so ist $L(K)$ ebenfalls kompakt und damit beschränkt. Das liefert folgendes Ergebnis:

Satz (Bilder meßbarer Mengen unter singulären linearen Abbildungen)

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Jordan-meßbare Menge und $L = L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\det(A) = 0$, so ist $L(K)$ eine Jordan-Nullmenge.

Bevor wir jetzt zu regulären linearen Abbildungen übergehen, betrachten wir stetig differenzierbare Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vom Typ

$$F(x_1, \dots, x_n) = (g(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Sie sollen *primitive Abbildungen* genannt werden. Es ist offensichtlich

$$\det J_F(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}).$$

Ist $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so ist F in \mathbf{x}_0 ein lokaler Diffeomorphismus.

Beispiel.

Ist $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl und $i \neq 1$, so nennt man die Abbildung

$$E_{i,\lambda}(x_1, \dots, x_n) := (x_1 + \lambda x_i, x_2, \dots, x_n)$$

eine *Scherung*. Diese primitive Abbildung ist sogar linear, und weil $\det(E_{i,\lambda}) = 1$ ist, ist $E_{i,\lambda}$ ein Isomorphismus. Die Umkehrabbildung ist $E_{i,-\lambda}$, also wieder eine Scherung.

Beim Gaußverfahren werden solche Scherungen simultan auf alle Spalten der untersuchten Matrix angewandt (i.a. wird ein Vielfaches der i -ten Zeile zur j -ten Zeile addiert, wobei $i \neq j$ sein muß), dabei ändern sich Rang und Determinante nicht. Ist A die Ausgangsmatrix und S die Matrix einer Scherung, so ist $S \cdot A$ die umgeformte Matrix.

Transformationsformel für primitive Abbildungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Jordan-meßbares Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ primitiv und injektiv, sowie $\det J_F(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in G$. Ist f eine stetige Funktion mit kompaktem Träger in $F(G)$, so hat auch $f \circ F$ einen kompakten Träger in G , und es ist

$$\int_{F(G)} f(\mathbf{y}) dV_n = \int_G f(F(\mathbf{x})) |\det J_F(\mathbf{x})| dV_n.$$

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt: $F(G)$ ist wieder ein Gebiet und $F : G \rightarrow F(G)$ ist ein Diffeomorphismus. Da die Abbildung F^{-1} insbesondere stetig ist, ist $\text{Tr}(f \circ F) = F^{-1}(\text{Tr}(f))$ kompakt. Weil G meßbar ist, trifft dies auch auf $F(G)$ zu (auf die genauen Beweise müssen wir hier verzichten). Die Integrationen können jeweils über Quadern durchgeführt werden, die den Träger enthalten. Dabei muß f durch die triviale Fortsetzung \hat{f} ersetzt werden.

Sei $F(x_1, \dots, x_n) = (g(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$, sowie $G \subset Q = [a, b] \times Q_{n-1}$ und $\text{Tr}(f) \subset P = [c, d] \times Q_{n-1}$. Dann gilt mit Fubini und der Substitutionsregel in einer Veränderlichen:

$$\begin{aligned} \int_{F(G)} f(\mathbf{y}) dV_n &= \int_P \hat{f}(\mathbf{y}) dV_n \\ &= \int_{Q_{n-1}} \left(\int_c^d \hat{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \right) dV_{n-1} \\ &= \int_{Q_{n-1}} \left(\int_a^b \hat{f}(g(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n) \left| \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| dx_1 \right) dV_{n-1} \\ &= \int_Q \hat{f}(F(\mathbf{x})) |\det J_F(\mathbf{x})| dV_n \\ &= \int_G f(F(\mathbf{x})) |\det J_F(\mathbf{x})| dV_n. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß $\{x_1 : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G\}$ bei festem (x_2, \dots, x_n) i.a. aus mehreren disjunkten offenen Intervallen besteht. Die Substitutionsregel kann nur auf diesen Intervallen angewandt werden (anderswo ist g nicht definiert und erst recht nicht differenzierbar), das Ergebnis sieht dann aber wie oben aus, denn $\hat{f} \circ F$ verschwindet außerhalb der Intervalle. ■

Der Satz bleibt auch richtig, wenn g an einer anderen Stelle steht. Die Transformationsformel gilt also insbesondere für alle Scherungen. Sie gilt auch für Permutationsabbildungen

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad (\sigma \in S_n),$$

das folgt sofort aus dem Satz von Fubini. Und sie gilt für Abbildungen der Form

$$F(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n),$$

das haben wir weiter oben schon bewiesen.

Hilfssatz

Gilt die Transformationsformel für zwei Abbildungen F_1 und F_2 , so gilt sie auch für $F_1 \circ F_2$.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \int_{F_1 \circ F_2(G)} f(\mathbf{z}) dV_n &= \int_{F_2(G)} f(F_1(\mathbf{y})) |\det J_{F_1}(\mathbf{y})| dV_n \\ &= \int_G f(F_1(F_2(\mathbf{x}))) |\det J_{F_1}(F_2(\mathbf{x}))| \cdot |\det J_{F_2}(\mathbf{x})| dV_n \\ &= \int_G f(F_1 \circ F_2(\mathbf{x})) |\det J_{F_1}(F_2(\mathbf{x})) \cdot \det J_{F_2}(\mathbf{x})| dV_n \\ &= \int_G f(F_1 \circ F_2(\mathbf{x})) |\det(J_{F_1}(F_2(\mathbf{x})) \cdot J_{F_2}(\mathbf{x}))| dV_n \\ &= \int_G f(F_1 \circ F_2(\mathbf{x})) |\det(J_{F_1 \circ F_2}(\mathbf{x}))| dV_n. \end{aligned}$$

■

Ist nun $L = L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre lineare Abbildung, so gibt es Matrizen S , D und P mit folgenden Eigenschaften:

1. S ist die Matrix einer Verknüpfung von Scherungen.
2. D ist eine Diagonalmatrix.
3. P ist eine Permutationsmatrix.
4. Es ist $A = S \cdot D \cdot P$.

Tatsächlich ist das nichts anderes als eine Übersetzung des Gauß-Verfahrens in die Sprache der Matrizen. Wir haben oben schon gesehen, daß die Multiplikation von links mit einer Scherungs-Matrix einer elementaren Zeilenoperation entspricht. Die

Multiplikation von rechts mit einer Permutationsmatrix ergibt eine Vertauschung der Spalten. Mit beiden Operationen zusammen kann man A in eine Diagonalmatrix verwandeln.

Aus der Zerlegung der Matrix und den vorher bewiesenen Sätzen folgt nun, daß die Transformationsformel für **jede** lineare Abbildung gilt. Dabei sei ohne Beweis angemerkt, daß die Funktion f nicht unbedingt eine stetige Funktion mit kompaktem Träger zu sein braucht. Es reicht, daß sie integrierbar ist. Insbesondere folgt:

Verhalten des Volumens unter linearen Transformationen

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Jordan-meßbare Menge und $L = L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, so ist $v_n(L(M)) = |\det A| \cdot v_n(M)$.

Für linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ im \mathbb{R}^n nennt man

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

das von den Vektoren aufgespannte *Parallelotop*. Im Falle $n = 2$ ergibt sich ein Parallelogramm, im Falle $n = 3$ ein „Spat“. Da $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ das Bild des Einheitswürfels unter L ist, folgt:

$$v_n(P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) = |\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)|.$$

Diese Formel hatten wir im 2. Semester – ohne Beweis – als Definition des Volumens eines Parallelotops benutzt.

Da eine stetig differenzierbare Abbildung lokal durch lineare Abbildungen approximiert werden kann, ist es nicht verwunderlich, daß ganz allgemein gilt:

Die Transformationsformel

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine zusammenhängende offene Menge), $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung (die „Transformation“) und $\det J_F(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in G$.

Weiter sei $K \subset G$ eine kompakte Jordan-meßbare Menge und $f : F(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_{F(K)} f(\mathbf{y}) dV_n = \int_K f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det J_F(\mathbf{x})| dV_n.$$

Der BEWEIS der allgemeinen Transformationsformel ist zu schwer für uns, wir lassen ihn weg.

Wir betrachten einige Spezialfälle:

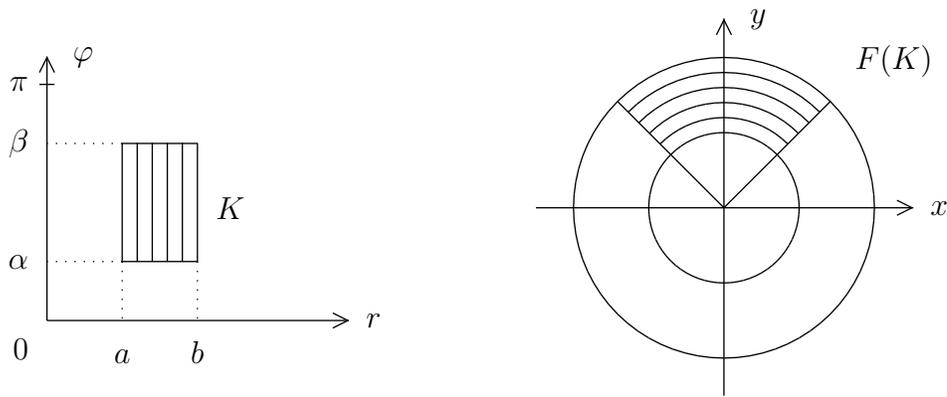
1. Ebene Polarkoordinaten

Sei $G := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < 2\pi\}$. Das ist ein Gebiet, und die Transformation auf Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$F(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi).$$

Dann ist $\det J_F(r, \varphi) = r$.

Nun sei z.B. $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a \leq r \leq b \text{ und } \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$, mit $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Dann ergibt sich für $F(K)$ folgendes Bild:



Nach der Transformationsformel ist

$$\int_{F(K)} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Das bleibt auch dann noch richtig, wenn die Menge K an den Rand von G heranrückt. Man muß nur aufpassen, daß sich φ in keinem Intervall bewegt, dessen Länge 2π übersteigt.

Beispiele.

1. Sei $0 \leq a < b$ und $K_{a,b} := \{(x, y) : a < \|(x, y)\| < b\}$. Weiter sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$. Dann ist g eine sogenannte „rotationssymmetrische Funktion“, und es ist

$$\int_{K_{a,b}} g(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(r) r dr d\varphi = 2\pi \int_a^b f(r) r dr.$$

Ist z.B. $g(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|$ und $a = \varepsilon > 0$, $b = 1$, so ist $f(r) = 1/r$, und man erhält:

$$\int_{K_{\varepsilon,1}} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} d\mathbf{x} = 2\pi \int_{\varepsilon}^1 dr = 2\pi(1 - \varepsilon).$$

Läßt man ε gegen Null gehen, so ergibt sich: $\int_{D_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} d\mathbf{x} = 2\pi$.

2. Sei $P = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 25 - x^2 - y^2\}$. Dies ist ein Normalbereich über der x - y -Ebene, ein abgeschnittenes Paraboloid. Wir wollen das Volumen von P berechnen. Aus Symmetriegründen reicht es, den Teil zu berechnen, der über dem ersten Quadranten liegt, und dann das Ergebnis mit 4 zu multiplizieren. Wir können also das Integral über die Funktion $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ und die Menge $V = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$ berechnen, denn das Integral stimmt mit dem Volumen unter dem Graphen von f überein.

In Polarkoordinaten ist V gegeben durch $0 \leq r \leq 5$ und $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Also ist

$$\begin{aligned} v_3(P) &= 4 \cdot \int_V (25 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^5 (25 - r^2)r dr d\varphi \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{25}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right) \Big|_{r=0}^5 d\varphi \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{625}{4} d\varphi = \frac{625\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Wir wollen das Integral $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ berechnen, das im Zusammenhang mit der Gamma-Funktion aufgetreten war.

Wir beginnen mit einem Trick. Sei $Q_R := [-R, R] \times [-R, R]$ und $f(x, y) := e^{-x^2 - y^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} I_R := \int_{Q_R} f(x, y) dx dy &= \int_{-R}^R e^{-y^2} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &= 4 \cdot \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2, \end{aligned}$$

also $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 4 \cdot I^2$.

Ist andererseits $D_R = \{(x, y) : \|(x, y)\| \leq R\}$, so ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} f(x, y) dx dy.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{D_R} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r e^{-r^2} \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^R \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \, d\varphi \\
&= \pi (1 - e^{-R^2}).
\end{aligned}$$

Jetzt lassen wir R gegen ∞ gehen und erhalten:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{R \rightarrow \infty} I_R} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Insbesondere ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. Zylinderkoordinaten

Hier ist $G = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } z \text{ beliebig}\}$ und

$$F(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Für die Funktionaldeterminante ergibt sich wieder $\det J_F(r, \varphi, z) = r$.

Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ das Bild eines Rechtecks R in der r - φ -Ebene nach Anwendung der ebenen Polarkoordinaten, sind g_1 und g_2 zwei stetig differenzierbare Funktionen über G und ist

$$T := \{(x, y, z) : (x, y) \in G \text{ und } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

so gilt für eine stetige Funktion $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

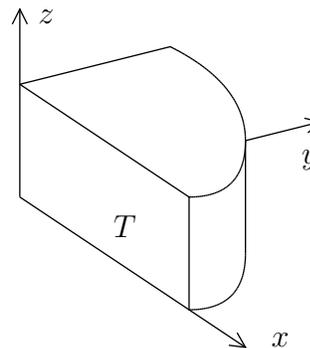
$$\int_T f(\mathbf{x}) \, dV_3 = \int_R \left(\int_{g_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{g_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, dz \right) r \, dr \, d\varphi.$$

Beispiele.

1. Ist etwa $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$, so ist $T = F(Q)$, mit $Q := \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$.

Also ist z.B.

$$\begin{aligned}
 \int_T x^2 y \, dV_3 &= \int_Q (r \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \cdot r \, d(r, \varphi, z) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dz \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dr \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\
 &= -\frac{1}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}.
 \end{aligned}$$



2. Ein fester Körper in der Physik kann mathematisch durch eine kompakte Jordan-meßbare Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Ist $V = v_3(M)$ das Volumen von M , so nennt man

$$(x_s, y_s, z_s) := \left(\frac{1}{V} \int_M x \, dV_3, \frac{1}{V} \int_M y \, dV_3, \frac{1}{V} \int_M z \, dV_3 \right)$$

den *Schwerpunkt* von M .

Wir wollen den Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$M := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

berechnen. Dabei ist $V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{\pi}{6} a^3$. Aus Symmetriegründen ist $x_s = y_s = z_s$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_M z \, dV_3 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr \, dz \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \left(r \cdot \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{\sqrt{a^2-r^2}} \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{r}{2} (a^2 - r^2) \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2 a^2}{4} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_{r=0}^a \, d\varphi \\
 &= \frac{a^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

$$\text{also } z_s = \frac{a^4 \cdot \pi \cdot 6}{\pi \cdot a^3 \cdot 16} = \frac{3}{8} a.$$

3. Räumliche Polarkoordinaten

Hier ist $G = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, und

$$F(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Dann ist $\det J_F(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta$.

Ist $Q_0 = [a, b] \times [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und

$$Q := \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R} \times Q_0 : r_1(\varphi, \theta) \leq r \leq r_2(\varphi, \theta)\},$$

mit zwei stetigen Funktionen r_1, r_2 , so ist

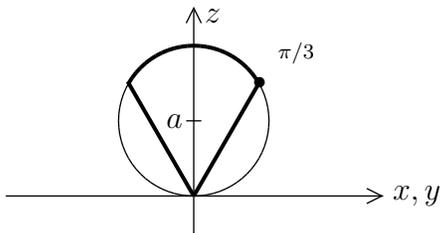
$$\begin{aligned} \int_{F(Q)} f(\mathbf{x}) dV_3 &= \\ &= \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Beispiele.

1. Wir können jetzt das Volumen der Einheitskugel ein zweites Mal berechnen:

$$\begin{aligned} v_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 dV_3 \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\varphi d\theta dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta d\theta dr \\ &= 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

2. Es soll das Volumen der folgenden „Eis-Tüte“ berechnet werden:



Die Eis-Tüte T wird beschrieben durch

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq r \leq 2a \sin \theta.$$

Letzteres ergibt sich so: Der Radius in der durch θ bestimmten Richtung variiert zwischen 0 und einem Wert r_0 , wobei r_0 und $2a$ die Ankathete und

die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit eingeschlossenem Winkel $\alpha = \pi/2 - \theta$ sind. Also ist $r_0/(2a) = \cos(\alpha) = \sin(\theta)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}v_3(T) &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{2a \sin \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3} \cos \theta \right) \Big|_{r=0}^{2a \sin \theta} d\theta \, d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{8}{3} a^3 \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \\&= \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} (\sin^4 \theta) \Big|_{\theta=\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \\&= \frac{4\pi a^3}{3} \left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{7\pi}{12} a^3.\end{aligned}$$