

Kapitel 8 Nichtlineare Probleme

§ 1 Extremwerte

Inhalt:

Lokale Extrema, stationäre Punkte, Sattelpunkte, höhere Ableitungen, Hesse-Matrix, Taylorformel 2. Ordnung, positive Definitheit, hinreichendes Kriterium für Extremwerte.

Extremwerte unter einer Nebenbedingung, Methode des Lagrangeschen Multiplikators.

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\mathbf{a} \in M$ ein Punkt.

f hat in \mathbf{a} auf M ein *relatives* (oder *lokales*) *Maximum* (bzw. ein *relatives* (oder *lokales*) *Minimum*), wenn es eine offene Umgebung $U(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad (\text{bzw.} \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}))$$

für alle $\mathbf{x} \in U \cap M$ ist. In beiden Fällen spricht man von einem *relativen* (oder *lokalen*) *Extremum*.

Gilt die Ungleichung sogar für alle $\mathbf{x} \in M$, so spricht man von einem *absoluten* (oder *globalen*) *Maximum* oder *Minimum*.

Notwendiges Kriterium für relative Extremwerte

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathbf{a} \in B$ differenzierbar.

Besitzt f in \mathbf{a} ein *relatives* *Extremum*, so ist $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

BEWEIS: Für $i = 1, \dots, n$ besitzt auch $g_i(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)$ in $t = 0$ ein lokales Extremum. Nach dem notwendigen Kriterium aus der Differentialrechnung einer Veränderlichen muß dann $(g_i)'(0) = 0$ sein. Es ist aber

$$(g_i)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Definition:

Ist f in \mathbf{a} differenzierbar und $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, so heißt \mathbf{a} ein *stationärer* (oder *kritischer*) Punkt von f .

Ein stationärer Punkt \mathbf{a} von f heißt *Sattelpunkt* von f , falls es in jeder Umgebung $U(\mathbf{a})$ Punkte \mathbf{b} und \mathbf{c} gibt, so daß $f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{c})$ ist.

Beispiele dazu werden wir später betrachten. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremwertes erhält man in einer Veränderlichen durch Untersuchung der höheren Ableitungen, insbesondere der zweiten Ableitung.

Wir kommen nun nicht umhin, die Taylorformel in n Veränderlichen zu beweisen, zumindest bis zur Ordnung 2.

Definition:

Eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf B stetig differenzierbar, wenn f total differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind. Dafür reicht aber schon aus, daß f stetig partiell differenzierbar ist. Deshalb nennen wir f auf B *k-mal stetig differenzierbar*, wenn f partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzt, also Ableitungen der Form

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{usw.},$$

bis hin zu

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \quad \text{mit} \quad i_1 + \dots + i_n \leq k,$$

und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung k auf B noch stetig sind.

Die Menge aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf B wird mit dem Symbol $\mathcal{C}^k(B)$ bezeichnet.

Bemerkung. Ist $k \geq 1$ und $f \in \mathcal{C}^k(B)$, so ist f insbesondere in jedem Punkt von B total differenzierbar. Darüber hinaus ist f sogar „ k -mal total differenzierbar“, aber dieser Begriff ist schwer zu erklären und nicht sehr intuitiv. Deshalb wollen wir hier nicht näher darauf eingehen.

Wir betrachten nun eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(B)$ und einen Punkt $\mathbf{a} \in B$. Für eine beliebige Richtung $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $\alpha_{\mathbf{h}}(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{h}$ und $g(t) := f \circ \alpha_{\mathbf{h}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$. Dann folgt aus der speziellen Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\alpha_{\mathbf{h}}(t)) \cdot \mathbf{h}^t \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot h_i. \end{aligned}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ nach Voraussetzung auf ganz B stetige partielle Ableitungen besitzt, also insbesondere total differenzierbar ist, ist auch $g'(t)$ ein weiteres Mal differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \alpha_{\mathbf{h}} \right)'(t) \cdot h_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\alpha_{\mathbf{h}}(t)) \cdot h_j \right) \cdot h_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n h_i \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot h_j. \end{aligned}$$

Definition:

Sei f in der Nähe von $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$H_f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \mid i, j = 1, \dots, n \right)$$

die *Hesse-Matrix* von f in \mathbf{a} .

Wir haben gerade ausgerechnet, daß $g''(t) = \mathbf{h} \cdot H_f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^t$ ist.

Bemerkung. Die Symmetrie der Hesse-Matrix folgt aus der Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen, und die ist nur gegeben, weil f in einer ganzen Umgebung von \mathbf{a} zweimal stetig differenzierbar ist. Diese Voraussetzung ist also wichtig!

Im Falle $n = 2$ ist $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$.

Nun können wir die Taylorformel formulieren und beweisen:

Taylorformel 2.Ordnung

Sei $B = B_r(\mathbf{a})$ eine offene Kugel um \mathbf{a} , $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gibt es eine auf $B_r(\mathbf{0})$ definierte Funktion R mit

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0,$$

so daß für $\|\mathbf{h}\| < r$ gilt:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot H_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + R(\mathbf{h}).$$

BEWEIS: Ist $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$, dann liegt $\alpha_{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h}$ für $t \in [-1, 1]$ in $B_r(\mathbf{a})$, und deshalb ist $g(t) := f \circ \alpha_{\mathbf{h}}(t)$ auf $[-1, 1]$ definiert und zweimal stetig differenzierbar. Wir wenden auf g in $t = 0$ den Satz von der Taylorentwicklung in einer Veränderlichen an:

Es gibt eine (von t abhängige) Zahl c mit $0 < c < t$, so daß gilt:

$$g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 + \eta(t) \cdot t^2,$$

mit

$$\eta(t) := \frac{1}{2} \cdot (g''(c) - g''(0)), \text{ also } \lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0.$$

Setzen wir $t = 1$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \eta(1) \\ &= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot H_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \eta(1). \end{aligned}$$

Das ist die gewünschte Taylorformel, mit

$$\begin{aligned} R(\mathbf{h}) &:= \eta(1) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot (H_f(\mathbf{a} + \mathbf{ch}) - H_f(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + \mathbf{ch}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right) h_i h_j \end{aligned}$$

und $0 < c < 1$. Diesen Ausdruck müssen wir noch abschätzen.

Zunächst bemerken wir, daß $|h_i| = |\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i| \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \|\mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{h}\|$ ist.

Die Summe enthält n^2 Summanden, und da f zweimal stetig differenzierbar ist, die zweiten partiellen Ableitungen also stetig sind, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right| < \varepsilon$$

für $\mathbf{h} \in B_\delta(\mathbf{0})$ ist. Für solche \mathbf{h} ist dann

$$|R(\mathbf{h})| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot n^2 \cdot \|\mathbf{h}\|^2.$$

Daraus ergibt sich die gewünschte Limesbeziehung: $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$. ■

Es gibt selbstverständlich auch Taylorformeln höherer Ordnung, aber mit denen werden wir uns hier nicht beschäftigen.

Ist nun f in \mathbf{a} stationär, also

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot H_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^t + R(\mathbf{h}),$$

so hängt das Verhalten von f in der Nähe von \mathbf{a} im Wesentlichen von der Hesse-Matrix ab, denn $R(\mathbf{h})$ verschwindet ja in \mathbf{a} von höherer Ordnung. Das führt uns zu einem ähnlichen hinreichenden Kriterium für Extremwerte, wie wir es aus der eindimensionalen Theorie kennen. Allerdings ist die Lage hier doch noch etwas komplizierter.

Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, so nennt man die Funktion

$$q(\mathbf{h}) := \mathbf{h} \cdot A \cdot \mathbf{h}^t$$

bekanntlich eine *quadratische Form*. Es ist

$$q(t\mathbf{h}) = t^2 \cdot q(\mathbf{h}) \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist natürlich $q(\mathbf{0}) = 0$.

Definition:

Eine quadratische Form $q(\mathbf{h})$ heißt

positiv semidefinit	: \iff	$q(\mathbf{h}) \geq 0$ für alle \mathbf{h} ,
positiv definit	: \iff	$q(\mathbf{h}) > 0$ für alle $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$,
negativ semidefinit	: \iff	$q(\mathbf{h}) \leq 0$ für alle \mathbf{h} ,
negativ definit	: \iff	$q(\mathbf{h}) < 0$ für alle $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$,
indefinit	: \iff	$\exists \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ mit $q(\mathbf{h}_1) < 0 < q(\mathbf{h}_2)$.

Erinnern wir uns an den Satz von der Hauptachsentransformation! Da wurde gezeigt:

Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, so gibt es eine orthogonale Matrix S , so daß $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist. Die Einträge in der Diagonalmatrix sind die Eigenwerte von A .

Daß S orthogonal ist, bedeutet, daß $S \cdot S^t = E_n$, also $S^{-1} = S^t$ ist. Setzen wir $\mathbf{v} := \mathbf{h} \cdot S$, so folgt:

$$\begin{aligned} q_A(\mathbf{h}) &:= \mathbf{h} \cdot A \cdot \mathbf{h}^t = (\mathbf{v} \cdot S^t) \cdot A \cdot (\mathbf{v} \cdot S^t)^t \\ &= \mathbf{v} \cdot (S^{-1} \cdot A \cdot S) \cdot \mathbf{v}^t \\ &= \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}^t \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i)^2, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind. Also gilt:

$$\begin{aligned} q_A \text{ positiv definit} &\iff \mathbf{h} \cdot A \cdot \mathbf{h}^t > 0 \text{ für alle } \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \\ &\iff \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i)^2 > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ &\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0. \end{aligned}$$

Genauso ist q_A negativ definit, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind. Und q_A ist positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit), wenn alle Eigenwerte von $A \geq 0$ (bzw. ≤ 0) sind. Gibt es wenigstens einen negativen und einen positiven Eigenwert, so ist q_A indefinit.

Im Falle $n = 2$ gibt es noch ein einfacheres Kriterium:

Definitheit von 2×2 -Matrizen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann ist

$$q_A(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + dh_2^2,$$

und es gilt:

1. Ist $\det(A) < 0$, so ist q_A indefinit.
2. Ist $\det(A) > 0$ und $a > 0$, so ist q_A positiv definit.
3. Ist $\det(A) > 0$ und $a < 0$, so ist q_A negativ definit.

BEWEIS: Sei $\Delta := \det(A) = ad - b^2$. Zur Berechnung der Eigenwerte brauchen wir noch das charakteristische Polynom:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ b & d-x \end{pmatrix} = (a-x)(d-x) - b^2 = x^2 - (a+d)x + \Delta.$$

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A sind die beiden Nullstellen dieses quadratischen Polynoms. Nach dem (hoffentlich aus der Schule bekannten) Satz von Vieta ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad \text{und} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta.$$

Ist $\Delta < 0$, so haben die beiden Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen, und q_A ist indefinit. Ist $\Delta > 0$, so sind λ_1 und λ_2 beide $\neq 0$, und sie haben das gleiche Vorzeichen. Außerdem ist $ad = \Delta + b^2 > 0$. Ist nun $a > 0$, so ist auch $d > 0$ und damit $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. In diesem Fall ist q_A positiv definit. Genauso folgt aus $a < 0$, daß q_A negativ definit ist. ■

Nun haben wir endlich alles beisammen.

Hinreichendes Kriterium für Extremwerte

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(B)$. Weiter sei $\mathbf{a} \in B$ ein stationärer Punkt von f , also $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

1. Ist $H_f(\mathbf{a})$ positiv definit, so besitzt f in \mathbf{a} ein relatives Minimum.
2. Ist $H_f(\mathbf{a})$ negativ definit, so besitzt f in \mathbf{a} ein relatives Maximum.
3. Ist $H_f(\mathbf{a})$ indefinit, so liegt in \mathbf{a} ein Sattelpunkt vor.

BEWEIS:

1) Sei $q(\mathbf{h}) := \mathbf{h} \cdot H_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^t$. Da f in \mathbf{a} stationär ist, ergibt die Taylorformel:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}q(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}).$$

Die Funktion q ist stetig und nach Voraussetzung > 0 außerhalb des Nullpunktes. Insbesondere nimmt sie auf der abgeschlossenen und beschränkten und daher kompakten Menge

$$S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

ein Minimum $m > 0$ an. Daher gilt für beliebiges $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2 \cdot q\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) \geq m \cdot \|\mathbf{h}\|^2.$$

Ist jetzt ein ε mit $0 < \varepsilon < m/2$ vorgegeben und dazu ein $r = r(\varepsilon)$ so gewählt, daß

$$|R(\mathbf{h})| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{h}\|^2 \text{ für } \mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}q(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}) \\ &\geq \left(\frac{m}{2} - \varepsilon\right) \cdot \|\mathbf{h}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$.

Also ist $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{a})$ für kleines \mathbf{h} , und es liegt ein relatives Minimum in \mathbf{a} vor.

2) Der Fall des Maximums kann durch Übergang von f zu $-f$ auf (1) zurückgeführt werden.

3) Ist q indefinit, so gibt es in jeder Umgebung von $\mathbf{0}$ Vektoren \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 mit $q(\mathbf{h}_1) < 0 < q(\mathbf{h}_2)$. Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}_1) \\ \text{und } f_2(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}_2) \end{aligned}$$

sind dann definiert und zweimal differenzierbar, und es gilt:

$$(f_1)'(0) = (f_2)'(0) = 0, \quad (f_1)''(0) = q(\mathbf{h}_1) < 0 \quad \text{und} \quad (f_2)''(0) = q(\mathbf{h}_2) > 0.$$

Also besitzt f_1 in $t = 0$ ein isoliertes Maximum und f_2 in $t = 0$ ein isoliertes Minimum. Das bedeutet, daß f beliebig nahe bei \mathbf{a} sowohl Werte $< f(\mathbf{a})$ als auch Werte $> f(\mathbf{a})$ annimmt. Damit liegt ein Sattelpunkt vor. ■

Bemerkung. Ist $H_f(\mathbf{a})$ nur semidefinit, so kann man keine genaue Aussage machen!

Beispiele.

1. Sei $f(x, y) := x^2 + y^2$. Dann ist $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, also $(0, 0)$ der einzige stationäre Punkt von f . Da $f(0, 0) = 0$ und allgemein $f(x, y) \geq 0$ ist, liegt ein absolutes Minimum vor. Tatsächlich ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $2 > 0$ und $\det H_f(x, y) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ ist, ist die Matrix positiv definit. (Das ist übrigens jede Diagonalmatrix mit nur positiven Einträgen). Das hinreichende Kriterium bestätigt also, daß f im Nullpunkt ein lokales Minimum besitzt.

2. Sei $f(x, y) := 1 - x^2 - y^2$. Dann ist $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$ und $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ negativ definit. Hier liegt im Nullpunkt ein Maximum vor.

3. Sei $f(x, y) := x^2 - y^2$.

Nun ist $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ und $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Da $\det H_f(x, y) < 0$ ist, liegt im Nullpunkt ein Sattelpunkt vor.

4. Sei $f(x, y) := e^{xy} + x^2 + \frac{1}{9}y^2$.

Dann ist $\nabla f(x, y) = (ye^{xy} + 2x, xe^{xy} + \frac{2}{9}y)$. Für die Hesse-Matrix ergibt sich:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + y^2 e^{xy} & (1 + xy)e^{xy} \\ (1 + xy)e^{xy} & \frac{2}{9} + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}.$$

Der Nullpunkt ist sicher ein stationärer Punkt. Ist (x, y) irgendein anderer stationärer Punkt, so muß gelten:

$$xye^{xy} = -2x^2 \quad \text{und} \quad xye^{xy} = -\frac{2}{9}y^2,$$

also $x = \pm \frac{1}{3}y$.

Wäre $x = \frac{1}{3}y$, so wäre $0 = f_y(x, y) = \frac{y}{3}(e^{xy} + \frac{2}{3})$, also $y = 0$ (und damit auch $x = 0$) oder $e^{xy} = -\frac{2}{3}$, was nicht möglich ist. So bleibt nur die Gleichung $x = -\frac{1}{3}y$. Wegen der Bedingung $0 = f_x(x, y) = y(e^{xy} - \frac{2}{3})$ muß dann $e^{xy} = \frac{2}{3}$ sein, also $e^{-y^2/3} = \frac{2}{3}$.

Das führt auf die Gleichung $y^2 = 3 \ln(\frac{3}{2})$. Setzen wir $p := \sqrt{3 \ln(\frac{3}{2})}$, so sind die Punkte

$$\mathbf{x}_{1,2} := \pm(-\frac{1}{3}p, p)$$

weitere Kandidaten für stationäre Punkte, und mehr kann es nicht geben. Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &= 1 \\ \text{und } f(\mathbf{x}_{1,2}) &= e^{-p^2/3} + \frac{2}{9}p^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1 + \ln(\frac{3}{2})). \end{aligned}$$

Daß $\nabla f(\mathbf{0}) = (0, 0)$ ist, ist klar. Ist (x, y) einer der beiden Punkte \mathbf{x}_1 oder \mathbf{x}_2 , so ist $xy = -\frac{p^2}{3} = \ln(\frac{2}{3})$, also

$$\nabla f(x, y) = (\frac{2}{3}y + 2x, \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}y) = \pm(\frac{2}{3}p - \frac{2}{3}p, -\frac{2}{9}p + \frac{2}{9}p) = (0, 0).$$

Da $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/9 \end{pmatrix}$ ist, also $\det H_f(0, 0) = \frac{4}{9} - 1 < 0$, liegt im Nullpunkt ein Sattelpunkt vor!

Zur Untersuchung der Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 benutzen wir zwei verschiedene Methoden. Zunächst können wir natürlich die Hesse-Matrix berechnen.

Weil $xy = -p^2/3 = \ln(2/3)$, $e^{xy} = 2/3$, $x^2 = p^2/9 = (1/3) \cdot \ln(3/2)$ und $y^2 = p^2 = 3 \cdot \ln(3/2)$ ist, folgt:

$$H_f(\mathbf{x}_{1/2}) = \begin{pmatrix} 2 + 2\ln(\frac{3}{2}) & \frac{2}{3}(1 + \ln(\frac{2}{3})) \\ \frac{2}{3}(1 + \ln(\frac{2}{3})) & \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\ln(\frac{3}{2}) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \det H_f(\mathbf{x}_{1/2}) &= \frac{4}{9} \left(\left(1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 - \left(1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 \right) \\ &= \frac{16}{9} \ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Weil außerdem das linke obere Element in der Hesse-Matrix positiv ist, ist die Matrix positiv-definit, und es liegt in beiden Punkten ein Minimum vor.

Eine zweite Methode besteht aus etwas theoretischeren Überlegungen. Zunächst bemerken wir:

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \int_2^3 \frac{dx}{x} < (3-2) \cdot \sup_{[2,3]} \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

also

$$f(\mathbf{x}_{1/2}) = \frac{2}{3} \left(1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) < \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Außerdem ist generell $f(x, y) > \frac{1}{9}(x^2 + y^2)$, also $f(x, y) > 1$ für alle $\mathbf{x} = (x, y)$ mit $\|(x, y)\| \geq 3$. Auf der kompakten Menge $\overline{B_3(\mathbf{0})}$ muß f als stetige Funktion ein globales Minimum annehmen. Weil die Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ in der offenen Kugel $B_3(\mathbf{0})$ liegen und $f(\mathbf{x}_{1/2}) < 1$ ist, muß das Minimum im Innern von $B_3(\mathbf{0})$ angenommen werden. Das kann nur in \mathbf{x}_1 oder \mathbf{x}_2 passieren (weil ja das notwendige Kriterium erfüllt sein muß), und weil $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$ ist, muß in beiden Punkten ein Minimum vorliegen.

Manchmal interessiert man sich auch dafür, ob unter gewissen Nebenbedingungen ein Extremwert angenommen wird.

Beispiel.

Sei $f(x, y) := y$. Diese auf ganz \mathbb{R}^2 definierte Funktion mißt die Höhe über der x -Achse, und sie besitzt weder einen globalen noch einen lokalen Extremwert. Der Gradient $\nabla f(x, y) = (0, 1)$ verschwindet nirgends.

Wenn wir f allerdings auf die Parabel $P := \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ einschränken, so erhalten wir dort:

$$f(x, y) = f(x, x^2 + 1) = x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{und} \quad f(0, 1) = 1.$$

Also nimmt f auf P in $(0, 1)$ ein Minimum an. Setzt man $g(x, y) := y - x^2 - 1$, so kann man sagen:

$f(x, y)$ nimmt unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ in $(0, 1)$ ein Minimum an.

Für derartige Situationen wollen wir ein allgemeines Verfahren entwickeln. Dabei beschränken wir uns hier zunächst auf **eine** Nebenbedingung.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$N(g) := \{\mathbf{x} \in B \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$$

ist die „Nullstellenmenge“ von g . Wir setzen voraus, daß $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $x \in N(g)$ ist.

Weiter sei $\mathbf{a} \in N(g)$, $U(\mathbf{a}) \subset B$ eine offene Umgebung und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

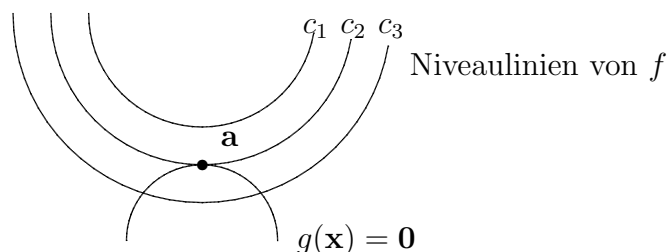
Definition:

f hat in \mathbf{a} ein *relatives Maximum* (bzw. *relatives Minimum*)

unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, mit $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$,

falls $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (bzw. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$) für alle $\mathbf{x} \in U \cap N(g)$ ist.

Wie kann man solche Extrema unter Nebenbedingungen bestimmen? Ein hinreichendes Kriterium ist schwer zu finden, aber zumindest können wir mit Hilfe eines notwendigen Kriteriums mögliche Kandidaten für Extremwerte ermitteln. Um eine Idee zu bekommen, betrachten wir den Fall $n = 2$:



Damit die Werte von f in \mathbf{a} ein Maximum oder Minimum annehmen, müssen sich bei \mathbf{a} eine Niveaulinie von f und die Menge M berühren. Also muß die Tangente an M in \mathbf{a} mit der Tangente an die Niveaulinie von f übereinstimmen. Da die Gradienten auf den Tangenten senkrecht stehen, muß dann der Gradient von f in die gleiche Richtung wie der Gradient der Funktionen g zeigen.

Das führt zu folgendem Kriterium:

Methode des Lagrangeschen Multiplikators

Hat f in \mathbf{a} ein relatives Extremum unter der Nebenbedingung

$$g(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{mit } \nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}),$$

so gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{a}).$$

Die Zahl λ nennt man den Lagrangeschen Multiplikator. Man beachte, daß es sich hier wirklich nur um ein notwendiges Kriterium handelt! Die Punkte, die die angegebene Bedingung erfüllen, können Extremwerte sein. Ob sie es wirklich sind, muß man mit anderen Mitteln feststellen.

BEWEIS: Wir versuchen, eine 2-dimensionale Situation herzustellen und dann die obige Idee zu verwirklichen.

Sei $\mathbf{v} := \frac{\nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|}$. Das ist ein Vektor der Länge 1, und die Funktion $\varphi(\mathbf{x}) := \nabla g(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$ ist stetig. Weil $\varphi(\mathbf{a}) = \|\nabla g(\mathbf{a})\| > 0$ ist, ist auch noch $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ für \mathbf{x} nahe \mathbf{a} .

Wir wählen jetzt einen Einheitsvektor \mathbf{h} , der auf \mathbf{v} senkrecht steht, und halten diesen Vektor fest. Dann gibt es offene Intervalle I, J , die beide die Null enthalten, so daß $\varphi(\mathbf{a} + t\mathbf{h} + s\mathbf{v}) > 0$ für $(t, s) \in I \times J$ ist. Wir setzen

$$\gamma(t, s) := g(\mathbf{a} + t\mathbf{h} + s\mathbf{v}) \text{ auf } I \times J.$$

Dann ist $\gamma(0, 0) = 0$, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(0, 0) = \nabla g(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h} = 0$ und

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(t, s) = \nabla g(\mathbf{a} + t\mathbf{h} + s\mathbf{v}) \bullet \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{a} + t\mathbf{h} + s\mathbf{v}) > 0 \text{ für } (t, s) \in I \times J,$$

also $s \mapsto \gamma(t, s)$ auf J streng monoton wachsend. Für jedes $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, +\varepsilon) \subset J$ ist

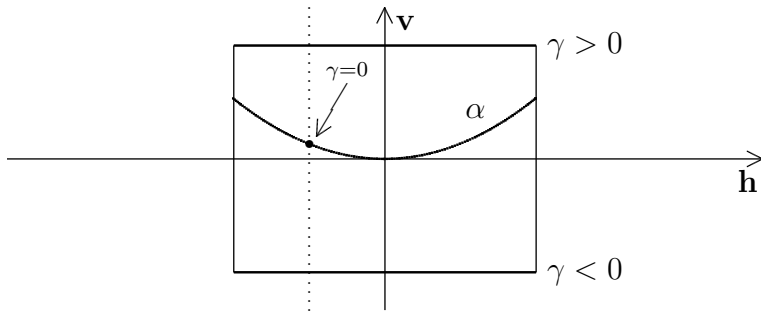
$$\gamma(0, -\varepsilon) < 0 < \gamma(0, \varepsilon).$$

Weil γ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$\gamma(t, -\varepsilon) < 0 < \gamma(t, \varepsilon) \text{ für } |t| < \delta.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zu jedem t mit $|t| < \delta$ ein $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so daß $\gamma(t, s) = 0$ ist. Wegen der strengen Monotonie ist dieses s eindeutig bestimmt.

Es gibt also eine Funktion $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow J$ mit $\alpha(0) = 0$ und $\gamma(t, \alpha(t)) = 0$. Insbesondere ist dabei $|\alpha(t)| < \varepsilon$. So folgt auch, daß α in 0 stetig ist.



Wir wollen nun zeigen, daß α in $t = 0$ differenzierbar ist. Sei $|\xi| < \delta$ und $\eta := \alpha(\xi) - \alpha(0)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein c mit $0 < c < 1$, so daß gilt:

$$0 = \gamma(\xi, \eta) = \gamma(0, 0) + \nabla \gamma(c\xi, c\eta) \bullet (\xi, \eta),$$

also

$$\xi \cdot \gamma_t(c\xi, c\eta) + \eta \cdot \gamma_s(c\xi, c\eta) = 0.$$

Für $\xi \neq 0$ ist dann

$$\frac{\alpha(\xi) - \alpha(0)}{\xi} = \frac{\eta}{\xi} = -\frac{\gamma_t(c\xi, c\eta)}{\gamma_s(c\xi, c\eta)}.$$

Lassen wir ξ gegen Null gehen, so strebt auch η gegen Null, und im Grenzwert erhalten wir:

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\alpha(\xi) - \alpha(0)}{\xi} = -\frac{\gamma_t(0, 0)}{\gamma_s(0, 0)} = 0.$$

Das bedeutet, daß α in 0 differenzierbar und $\alpha'(0) = 0$ ist.

$\tilde{\alpha}(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{h} + \alpha(t)\mathbf{v}$ ist jetzt ein Weg, der ganz in $N(g)$ verläuft und zumindest in $t = 0$ differenzierbar ist. Außerdem ist $\tilde{\alpha}(0) = \mathbf{a}$ und $\tilde{\alpha}'(0) = \mathbf{h}$.

Besitzt f in \mathbf{a} auf $N(g)$ ein lokales Extremum, so besitzt auch $f \circ \tilde{\alpha}$ in $t = 0$ ein relatives Extremum. Also ist

$$0 = (f \circ \tilde{\alpha})'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \tilde{\alpha}'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h}.$$

Diese Aussage gilt für jeden Vektor \mathbf{h} , der auf \mathbf{v} senkrecht steht. Also liegt $\nabla f(\mathbf{a})$ in $(\mathbb{R}\mathbf{v})^{\perp\perp} = \mathbb{R}\mathbf{v}$. Dann muß es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{a})$ geben. ■

Beispiele.

- Wir untersuchen die Funktion

$$f(x, y, z) := 3x^2 + 3y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$, mit $g(x, y, z) := x + y + z - 1$.

Hat f auf $N(g)$ in \mathbf{a} ein lokales Extremum, so muß es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß gilt:

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{a}) &= \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{a}) \\ \text{und } g(\mathbf{a}) &= 0.\end{aligned}$$

Das führt zu folgendem Gleichungssystem für $\mathbf{a} = (a, b, c)$:

$$\begin{aligned}6a &= \lambda, \\ 6b &= \lambda, \\ 2c &= \lambda \\ \text{und } a + b + c &= 1.\end{aligned}$$

Es muß also $\frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{2} = 1$ sein. Damit ist $5\lambda = 6$ und $\lambda = \frac{6}{5}$. Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{a} = (a, b, c) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Man überprüft sofort, daß \mathbf{a} tatsächlich auf $N(g)$ liegt. Außerdem ist

$$f(\mathbf{a}) = \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Jetzt fängt der schwierige Teil an. Man muß irgendwie herausfinden, ob f in \mathbf{a} wirklich ein Extremum besitzt, und wenn ja, was für eins.

Es sollen hier drei verschiedene Methoden vorgestellt werden:

A) Berechnung von $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$ für kleines \mathbf{h} mit $g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = 0$.

Es ist

$$\begin{aligned}f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= f\left(\frac{1}{5} + h_1, \frac{1}{5} + h_2, \frac{3}{5} + h_3\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{5} + h_1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{5} + h_2\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + h_3\right)^2 \\ &= 3\left(\frac{1}{25} + \frac{2h_1}{5} + (h_1)^2\right) + 3\left(\frac{1}{25} + \frac{2h_2}{5} + (h_2)^2\right) + \left(\frac{9}{25} + \frac{6h_3}{5} + (h_3)^2\right) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{6}{5}(h_1 + h_2 + h_3) + 3(h_1)^2 + 3(h_2)^2 + (h_3)^2 \\ &\geq \frac{3}{5} + \frac{6}{5}(h_1 + h_2 + h_3) \\ &= \frac{3}{5} = f(\mathbf{a}),\end{aligned}$$

denn da $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ auf $N(g)$ liegen soll, ist

$$1 = (a + h_1) + (b + h_2) + (c + h_3) = 1 + h_1 + h_2 + h_3,$$

also $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

Damit ist klar, daß f in \mathbf{a} ein Minimum unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ besitzt. Der Lagrangesche Multiplikator diene lediglich zum Auffinden des richtigen Punktes.

B) Abstrakte Argumentation:

Da $N(g)$ abgeschlossen ist, ist die Menge

$$M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : g(\mathbf{x}) = 0 \text{ und } \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

kompakt, und die stetige Funktion f nimmt auf M ihr Minimum und ihr Maximum an. Weil $f(\mathbf{a}) = \frac{3}{5} < 1 = f(0, 0, 1)$ und $(0, 0, 1) \in M$ ist, kann \mathbf{a} nicht das Maximum sein. Weil außerdem $f(\mathbf{x}) = 2(x^2 + y^2) + \|\mathbf{x}\|^2 \geq 1$ außerhalb von $B_1(\mathbf{0})$ ist, muß das Minimum von f auf M sogar ein globales Minimum sein. Es gibt aber nur einen Punkt, der dafür in Frage kommt, nämlich den Punkt \mathbf{a} .

C) Einsetzen der Nebenbedingung:

Diese Methode funktioniert nur dann, wenn man die Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen kann. Dann braucht man allerdings keinen Lagrangeschen Multiplikator. Im vorliegenden Fall gilt:

$$g(x, y, z) = 0 \iff z = 1 - x - y.$$

Nun suchen wir nach Extremwerten der Funktion

$$\begin{aligned} q(x, y) &:= f(x, y, 1 - x - y) = 3x^2 + 3y^2 + (1 - x - y)^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1. \end{aligned}$$

Dabei können wir wie gewohnt mit dem Gradienten und der Hesseschen arbeiten. Es ist $\nabla q(x, y) = (8x + 2y - 2, 8y + 2x - 2)$. Man rechnet schnell nach, daß $\nabla q(x, y)$ genau dann verschwindet, wenn $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{1}{5}$ ist, also $(x, y, z) = \mathbf{a}$.

Weiter ist $H_q(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ positiv definit (unabhängig von (x, y)).

Also muß q in $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ ein Minimum besitzen, und das bedeutet, daß f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ ein Minimum in \mathbf{a} besitzt.

2. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{x}^t$. Da f stetig und

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

eine kompakte Menge ist, nimmt f auf S^{n-1} ein Maximum an. Dieses Maximum wollen wir suchen.

Die Nebenbedingung wird hier durch die Funktion $g(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^t - 1$ definiert. Offensichtlich ist $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ auf S^{n-1} , und es ist $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \cdot A$.

Wenn f in \mathbf{x} ein Maximum unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ besitzt, so muß gelten:

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{x}) \\ \text{und } g(\mathbf{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Das führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}2\mathbf{x} \cdot A &= 2\lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^t &= 1.\end{aligned}$$

Insbesondere muß $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathbf{x}^t = 0$ sein, also \mathbf{x} Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Weiter kann man sagen:

$$\lambda = \lambda \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^t) = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{x})^t = \mathbf{x} \cdot (A \cdot \mathbf{x}^t) = f(\mathbf{x}).$$

Da die Existenz eines Maximums gesichert ist, haben wir gezeigt:

A besitzt wenigstens einen reellen Eigenwert.

Das ist ein neuer Beweis eines schon bekannten Resultats.

§ 2 Differenzierbare Abbildungen und implizite Funktionen

Inhalt:

Normen, Banachräume, Banach'scher Fixpunktsatz, differenzierbare Abbildungen, Jacobi-Matrix, Diffeomorphismen, Satz von der Umkehrabbildung, Beispiele von Koordinatentransformationen, Satz über implizite Funktionen, Extremwerte mit Nebenbedingungen.

Definition:

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Funktion, die jedem Vektor $x \in V$ eine reelle Zahl $\|x\|$ zuordnet, so daß gilt:

1. Es ist stets $\|x\| \geq 0$.
2. Es ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in V$.

Beispiele sind

- die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^n ,
- die Maximumsnorm $|\mathbf{x}| := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ auf dem \mathbb{R}^n ,
- die Supremumsnorm auf $C^0([a, b])$, gegeben durch

$$\|f\| := \sup\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}.$$

Ein *normierter Vektorraum* ist ein reeller Vektorraum mit einer Norm.

Definition:

Eine Folge (a_n) in V konvergiert gegen ein Element $a \in V$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \text{ so daß } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

Definition:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *normal konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ in \mathbb{R} konvergiert.

Ein normierter Vektorraum V heißt *vollständig* oder ein *Banachraum*, falls in V jede normal konvergente Reihe auch im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

Beispiele.

1. In \mathbb{R} und \mathbb{C} ist die normale Konvergenz gleichbedeutend mit der absoluten Konvergenz. Da wir gezeigt haben, daß jede absolut konvergente Reihe auch im gewöhnlichen Sinne konvergiert, sind \mathbb{R} und \mathbb{C} vollständig. Das gleiche gilt für den \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm. Dabei kann der gleiche Beweis wie bei den Zahlenreihen benutzt werden.

2. Sei $V = C^0([a, b])$, versehen mit der Supremumsnorm. Sei (f_n) eine Folge in V , so daß $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ normal konvergiert. Dann kann man das Cauchy Kriterium

(Kapitel 3, §1) auf die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ anwenden und erhält:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0, \text{ so daß } \forall N > N_0 \text{ gilt: } \sum_{n=N_0+1}^N \|f_n\| < \varepsilon.$$

Das bedeutet aber:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0, \text{ so daß } \forall N > N_0 \text{ gilt: } \left| \sum_{n=N_0+1}^N f_n(t) \right| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Das ist das Stetigkeitskriterium für Funktionenreihen (Kapitel 3, §2), welches zur Folge hat, daß die Funktionenreihe selbst punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.

Sei $S_N := \sum_{n=1}^N f_n$ die N -te Partialsumme der Funktionenreihe. Ist ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so können wir ein N_0 finden, so daß gilt:

$$\|S_N - S_M\| = \left\| \sum_{n=M+1}^N f_n \right\| < \varepsilon \text{ für } N, M \geq N_0.$$

Halten wir ein beliebiges Element $t \in [a, b]$ fest, so ist auch

$$|S_N(t) - S_M(t)| < \varepsilon \text{ für } N, M \geq N_0.$$

Lassen wir jetzt M gegen ∞ gehen, so erhalten wir nach dem Grenzübergang die Ungleichung $|S_N(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ für $N \geq N_0$. Weil das für jedes $t \in [a, b]$ gilt, ist $\|S_N - f\| \leq \varepsilon$ für $N \geq N_0$, d.h., die Folge (S_N) konvergiert gegen f .

Also ist auch V ein Banachraum.

Definition:

Sei V ein Banachraum und $M \subset V$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ heißt *kontrahierend*, falls es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so daß $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq q \cdot \|x_1 - x_2\|$ für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt.

Bemerkung. Ein Element $x_0 \in M$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung $f : M \rightarrow M$, falls $f(x_0) = x_0$ ist. Ist f kontrahierend, so kann f höchstens einen Fixpunkt besitzen. Gäbe es nämlich zwei verschiedene Fixpunkte x_1, x_2 , so wäre

$$\|x_1 - x_2\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq q \cdot \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|.$$

Das kann aber nicht sein.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei V ein Banachraum, $A \subset V$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow A$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f einen (eindeutig bestimmten) Fixpunkt.

BEWEIS: Die Eindeutigkeit ist schon klar, wir müssen noch die Existenz zeigen. Dazu definieren wir induktiv eine Folge x_n in V . Der Anfangspunkt x_0 kann beliebig gewählt werden. Dann setzen wir

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \\ &\leq q \cdot \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \cdots \leq q^n \cdot \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ ist normal konvergent. Weil V ein Banachraum ist, konvergiert die Reihe in V gegen ein Element z , und die Folge

$$x_{N+1} = \sum_{n=0}^N (x_{n+1} - x_n) + x_0$$

konvergiert gegen $x^* := z + x_0$. Weil $A \subset V$ abgeschlossen ist, liegt x^* in A .

Weiter ist

$$\begin{aligned} \|f(x^*) - x^*\| &\leq \|f(x^*) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - x^*\| \\ &\leq q \cdot \|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\|, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt gegen Null. Also ist $f(x^*) = x^*$. ■

Nun wenden wir uns differenzierbaren Abbildungen zu.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in $\mathbf{a} \in B$ *differenzierbar*, falls alle Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m in \mathbf{a} differenzierbar sind.

Die durch $Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) := ((df_1)_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}), \dots, (df_m)_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}))$ gegebene lineare Abbildung

$$Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heißt die *Ableitung von f in \mathbf{a}* . Die Matrix $J_f(\mathbf{a}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, die $Df(\mathbf{a})$ beschreibt, nennt man *Funktionalmatrix* oder *Jacobische Matrix* von f in \mathbf{a} .

Die i -te Spalte der Funktionalmatrix $J_f(\mathbf{a})$ ist der Vektor

$$J_f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_i^t = (Df(\mathbf{a})(\mathbf{e}_i))^t = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right)^t.$$

So erhält man:

Gestalt der Funktionalmatrix

$$J_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Ist speziell $m = 1$, so ist $J_f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})$. Ist $n = 1$ (und m beliebig), so ist $J_f(\mathbf{a})$ die gewöhnliche Ableitung, als Spaltenvektor geschrieben.

Definition:

Ist $n = m$, also $J_f(\mathbf{x})$ eine quadratische Matrix, so heißt $\det J_f(\mathbf{x})$ die *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante* von f in \mathbf{x} .

Beispiel.

Sei $f(x, y) := (e^{kx} \cos(y), e^{kx} \sin(y))$. Dann gilt:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} ke^{kx} \cos(y) & -e^{kx} \sin(y) \\ ke^{kx} \sin(y) & e^{kx} \cos(y) \end{pmatrix}$$

und

$$\det J_f(x, y) = ke^{2kx} \cos^2(y) + ke^{2kx} \sin^2(y) = ke^{2kx}.$$

Wir können jetzt auch die Kettenregel verallgemeinern:

Erweiterte Kettenregel

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $G \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $f(B) \subset G$ und $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

Dann ist auch $g \circ f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und es gilt für $\mathbf{a} \in B$:

$$\nabla(g \circ f)(\mathbf{a}) = \nabla g(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}).$$

BEWEIS: Sei $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\alpha_i(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Weil f stetig differenzierbar ist, sind alle Funktionen $f_j \circ \alpha_i$ in $t = 0$ differenzierbar, und es ist

$$(f_j \circ \alpha_i)'(0) = \nabla f_j(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_i^t = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}),$$

also $(f \circ \alpha_i)'(0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right)$. Aus der speziellen Kettenregel folgt nun:

$$((g \circ f) \circ \alpha_i)'(0) = (g \circ (f \circ \alpha_i))'(0) = \nabla g(f(\mathbf{a})) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right)^t.$$

Andererseits ist

$$((g \circ f) \circ \alpha_i)'(0) = \nabla(g \circ f)(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_i^t = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Faßt man alles zusammen, so erhält man die gewünschte Gleichung. ■

Beispiel.

Sei $f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Dann ist $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Abbildung. Sie ordnet jedem Paar (r, φ) den Punkt (x, y) mit den Polarkoordinaten r und φ zu.

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cos(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y} \sin(\varphi) \\ \text{und} \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \varphi} &= -r \frac{\partial g}{\partial x} \sin(\varphi) + r \frac{\partial g}{\partial y} \cos(\varphi). \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Kettenregel noch ein bißchen weiter verallgemeinern:

Ist $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so ist auch

$$g \circ f = (g_1 \circ f, \dots, g_k \circ f)$$

stetig differenzierbar, und es gilt:

$$J_{g \circ f}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \nabla(g_1 \circ f)(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla(g_k \circ f)(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla g_k(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = J_g(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}).$$

Zusammengefaßt:

Allgemeine Kettenregel

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(B) \subset U$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Dann gilt in jedem $\mathbf{x} \in B$:

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x})) \cdot J_f(\mathbf{x}).$$

Folgerung

Ist $n = m = k$, so ist $\det J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = \det J_g(f(\mathbf{x})) \cdot \det J_f(\mathbf{x})$.

Beispiele.

1. Sei $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{c}$ eine Translation. Dann ist $J_f(\mathbf{x}) = E_n$ für alle \mathbf{x} , und $J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(\mathbf{x} + \mathbf{c})$.
2. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die zugehörige lineare Abbildung, mit

$$f_A(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x}^t)^t = \mathbf{x} \cdot A^t.$$

Dann ist $f_A = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, wobei die Komponenten

$$\lambda_j(x_1, \dots, x_n) = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$$

Linearformen sind. Also ist $D\lambda_j(\mathbf{x}) = \lambda_j$ und

$$\nabla \lambda_j(\mathbf{x}) = (\lambda_j(\mathbf{e}_1), \dots, \lambda_j(\mathbf{e}_n)) = (a_{j1}, \dots, a_{jn}).$$

Also ist $J_{f_A}(\mathbf{x}) = A$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ist $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine beliebige differenzierbare Abbildung, so ist

$$J_{g \circ f_A}(\mathbf{x}) = J_g(f_A(\mathbf{x})) \cdot A.$$

Ist $h : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so ist

$$J_{f_A \circ h}(\mathbf{u}) = A \cdot J_h(\mathbf{u}).$$

Definition:

Es seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $f : G_1 \rightarrow G_2$ eine differenzierbare Abbildung. f heißt ein *Diffeomorphismus* oder eine *Koordinatentransformation*, wenn f bijektiv und $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ ebenfalls differenzierbar ist.

Bemerkung. Ist $f : G_1 \rightarrow G_2$ ein Diffeomorphismus, so ist einerseits $J_{f^{-1} \circ f}(\mathbf{x}) = J_{\text{id}}(\mathbf{x}) = E_n$ und andererseits $J_{f^{-1} \circ f}(\mathbf{x}) = J_{f^{-1}}(f(\mathbf{x})) \cdot J_f(\mathbf{x})$, also

$$J_{f^{-1}}(f(\mathbf{x})) = J_f(\mathbf{x})^{-1}.$$

Beispiele.

1. Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reguläre Matrix, so ist $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

2. Wir betrachten noch einmal die Polarkoordinaten:

$$f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Definitionsbereich ist $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist die Bildmenge. Leider ist f nicht injektiv, es ist ja $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$. Die Menge $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ ist kein Gebiet, weil sie nicht offen ist. Also nehmen wir als Definitionsbereich das Gebiet $G_1 = \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi)$. Jetzt ist $f : G_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv, aber was ist die Bildmenge? Nach wie vor kommt jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Bildpunkt vor, sofern er nicht auf der positiven x -Achse liegt. Also setzen wir $G_2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0 \text{ und } x \geq 0\}$. Dann ist $f : G_1 \rightarrow G_2$ eine bijektive differenzierbare Abbildung.

Ist f nun auch ein Diffeomorphismus? Wir versuchen, die Umkehrabbildung zu bestimmen, d.h. zu einem gegebenen Punkt $(x, y) \in G_2$ suchen wir ein $(r, \varphi) \in G_1$ mit

$$(x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Dann ist auf jeden Fall $x^2 + y^2 = r^2$, also $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ist $x \neq 0$, so ist $\tan(\varphi) = y/x$. Daraus folgt aber nicht, daß $\varphi = \arctan(y/x)$ ist, denn der Arcustangens nimmt nur Werte zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ an, während φ zwischen 0 und 2π liegt. Außerdem wird der Fall $x = 0$ dabei noch nicht berücksichtigt.

Wir müssen also etwas sorgfältiger vorgehen. Dazu führen wir die Halbebenen $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ und $H_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ ein. Sie sind offene Mengen, und es ist $H_0 \cup H_+ \cup H_- = G_2$.

Im folgenden verwenden wir einige Formeln aus der Trigonometrie:

- $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ und $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$,
- $\arctan(t) = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,
- $\arctan(1/t) = \pm \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$, je nachdem, ob $t > 0$ oder $t < 0$ ist.

1. Fall: Ist $(x, y) \in H_+$, so setzen wir

$$\varphi_+(x, y) := \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \in (0, \pi).$$

Dann ist

$$\cos(\varphi_+(x, y)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi_+(x, y)) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Offensichtlich ist $(x, y) \mapsto (r(x, y), \varphi_+(x, y))$ eine Umkehrung der Polarkoordinaten.

2. Fall: Ist $(x, y) \in H_-$, so setzen wir

$$\varphi_-(x, y) := \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \in (\pi, 2\pi).$$

3. Fall: Ist $(x, y) \in H_0$, so setzen wir

$$\varphi_0(x, y) := \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Auch in diesen beiden Fällen erhält man eine Umkehrung der Polarkoordinaten, und die Funktionen $\varphi_0, \varphi_+, \varphi_-$ sind differenzierbar.

Ist $y/x < 0$, so ist $\arctan(y/x) = -\pi/2 - \arctan(x/y)$. Auf $H_0 \cap H_+$ ist deshalb $\varphi_0(x, y) = \varphi_+(x, y)$.

Ist $y/x > 0$, so ist $\arctan(y/x) = \pi/2 - \arctan(x/y)$. Auf $H_0 \cap H_-$ ist deshalb $\varphi_0(x, y) = \varphi_-(x, y)$.

Zusammen ergibt das eine differenzierbare Umkehrabbildung $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$.

Wir wollen jetzt einen Satz beweisen, der den Nachweis der Umkehrbarkeit einer differenzierbaren Abbildung sehr viel einfacher macht. Zuvor müssen wir noch die Norm einer Matrix einführen.

Für eine Matrix

$$A = \left(a_{ij} \mid \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

setzen wir

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

Das ist nichts anderes, als wenn man A als ein Element des $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ auffaßt und die gewöhnliche euklidische Norm von A bildet. Nun gilt:

1. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
2. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
4. Ist $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$, so ist $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Diese Aussage muß noch bewiesen werden:

$A \cdot B$ hat an der Stelle (i, j) den Eintrag

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = \mathbf{z}_i(A) \circ \vec{s}_j(B) = \mathbf{z}_i(A) \bullet \mathbf{s}_j(B).$$

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgt dann:

$$\begin{aligned}
 \|A \cdot B\|^2 &= \sum_{i,j} (\mathbf{z}_i(A) \bullet \mathbf{s}_j(B))^2 \\
 &\leq \sum_{i,j} \|\mathbf{z}_i(A)\|^2 \cdot \|\mathbf{s}_j(B)\|^2 \\
 &= \left(\sum_i \|\mathbf{z}_i(A)\|^2 \right) \cdot \left(\sum_j \|\mathbf{s}_j(B)\|^2 \right) \\
 &= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.
 \end{aligned}$$

Als Anwendung erhalten wir:

Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$. Dann gibt es einen Punkt \mathbf{z} auf der Verbindungsstrecke von \mathbf{a} und \mathbf{b} , so daß gilt:

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq \|J_f(\mathbf{z})\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

BEWEIS: Sei $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$h(t) := f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})).$$

Wir schreiben $h'(t) = J_h(t)$ als Spaltenvektor. Nach der allgemeinen Kettenregel ist $h'(t) = J_f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^t$. Um den Mittelwertsatz in einer Veränderlichen anwenden zu können, brauchen wir eine skalare Funktion. Es sei $\mathbf{u} := f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$. Ist $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, so ist nichts zu zeigen. Also können wir annehmen, daß $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ist. Wir setzen dann

$$g(t) := \mathbf{u} \bullet h(t) = u_1 \cdot h_1(t) + \cdots + u_m \cdot h_m(t).$$

Offensichtlich ist $g'(t) = \mathbf{u} \bullet h'(t)$, und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (0, 1)$ mit $g(1) - g(0) = g'(\xi)$. Also ist

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}\|^2 &= |\mathbf{u} \bullet (f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}))| \\
 &= |g(1) - g(0)| = |g'(\xi)| \\
 &= |\mathbf{u} \bullet (J_f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^t)| \\
 &\leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|J_f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^t\| \\
 &\leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|J_f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.
 \end{aligned}$$

Setzt man $\mathbf{z} := \mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ und teilt die Ungleichung durch $\|\mathbf{u}\|$, so erhält man die Behauptung. ■

Satz von der Umkehrabbildung

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist $\mathbf{x}_0 \in B$, $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ und $\det J_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so gibt es offene Umgebungen $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und $V(\mathbf{y}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so daß gilt:

1. $\det J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$.
2. $f : U \rightarrow V$ ist bijektiv.
3. $f^{-1} : V \rightarrow U$ ist wieder differenzierbar.

Bemerkung. Ist $\det J_f(\mathbf{x}) \neq 0$, so nennt man f regulär in \mathbf{x} . Die Funktionalmatrix $J_f(\mathbf{x})$ ist dann eine invertierbare Matrix, und man kann die Umkehrmatrix $(J_f(\mathbf{x}))^{-1}$ bilden.

Der Satz von der Umkehrabbildung nimmt einen zentralen Platz in der Theorie der Funktionen von mehreren Veränderlichen ein! Sein Beweis ist nicht ganz einfach, wir wollen aber doch die entscheidenden Teile dieses Beweises skizzieren.

BEWEIS: Die erste Aussage ist trivial.

2) a) Beweis der lokalen Injektivität:

Sei $A := J_f(\mathbf{x}_0)$ und $\lambda := 1/(2\|A^{-1}\|)$. Wir wählen $U = U(\mathbf{x}_0)$ so klein, daß $\|J_f(\mathbf{x}) - A\| < \lambda$ für $\mathbf{x} \in U$ ist. Jetzt kommt der entscheidende Trick! Für festes $\mathbf{y} \in V := f(U)$ und beliebiges $\mathbf{x} \in U$ sei

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_{\mathbf{y}}(\vec{x}) := \vec{x} + A^{-1} \cdot (\vec{y} - f(\vec{x})).$$

Dann gilt:

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\vec{x}) = \vec{x} \iff \vec{y} = f(\vec{x}).$$

Außerdem ist $J_{\varphi}(\mathbf{x}) = E_n - A^{-1} \cdot J_f(\mathbf{x}) = A^{-1} \cdot (A - J_f(\mathbf{x}))$, also

$$\|J_{\varphi}(\mathbf{x})\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - J_f(\mathbf{x})\| < \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{2}.$$

Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt dann:

$$\|\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \text{ für alle } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U.$$

Also ist $\varphi = \varphi_{\mathbf{y}}$ kontrahierend und kann höchstens einen Fixpunkt haben. Das gilt für alle $\mathbf{y} \in f(U)$, und deshalb ist f auf U injektiv.

b) Beweis der lokalen Surjektivität:

Sei $\mathbf{x}_1 \in U$ und $\mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1) \in V$. Sodann sei $r > 0$ so gewählt, daß $\overline{B_r(\mathbf{x}_1)} \subset U$ ist. Wir wollen zeigen, daß $B_{\lambda r}(\mathbf{y}_1) \subset V$ und V damit offen ist.

Dazu sei ein Punkt $\mathbf{y} \in B_{\lambda r}(\mathbf{y}_1)$ beliebig vorgegeben. Es ist

$$\|\varphi_{\mathbf{y}}(\vec{x}_1) - \vec{x}_1\| = \|A^{-1} \cdot (\vec{y} - f(\vec{x}_1))\| < \|A^{-1}\| \cdot \lambda r = \frac{r}{2}.$$

Für $\mathbf{x} \in \overline{B} := \overline{B_r(\mathbf{x}_1)}$ ist dann

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_1\| &\leq \|\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1)\| + \|\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1\| \\ &< \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| + \frac{r}{2} \leq r, \end{aligned}$$

also $\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \in \overline{B}$.

Damit ist $\varphi_{\mathbf{y}} : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ eine kontrahierende Abbildung von einer abgeschlossenen Teilmenge des \mathbb{R}^n auf sich, und man kann den Fixpunktsatz anwenden. Ist $\mathbf{x} \in \overline{B} \subset U$ der (eindeutig bestimmte) Fixpunkt von $\varphi_{\mathbf{y}}$, so ist $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Das bedeutet, daß $\mathbf{y} \in V$ ist.

4) Es muß noch die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung gezeigt werden. Auf diesen etwas technischen Teil des Beweises verzichten wir hier aber. ■

Beispiele.

1. Die Polarkoordinaten $(x, y) = f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ haben wir schon an früherer Stelle betrachtet. Wir wissen schon, daß $\det J_f(r, \varphi) = r$ ist. In jedem Punkt (r, φ) mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ist f also lokal umkehrbar.

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ist sogar global umkehrbar.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy).$$

Dann gilt:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \text{ also } \det J_f(x, y) = 4(x^2 + y^2).$$

Damit ist $\det J_f(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und f überall außerhalb des Nullpunktes lokal umkehrbar.

f ist aber nicht global umkehrbar, denn es ist ja $f(-x, -y) = f(x, y)$

3. **Zylinderkoordinaten:**

Hier ist $U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } z \text{ beliebig}\}$ und

$$F(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

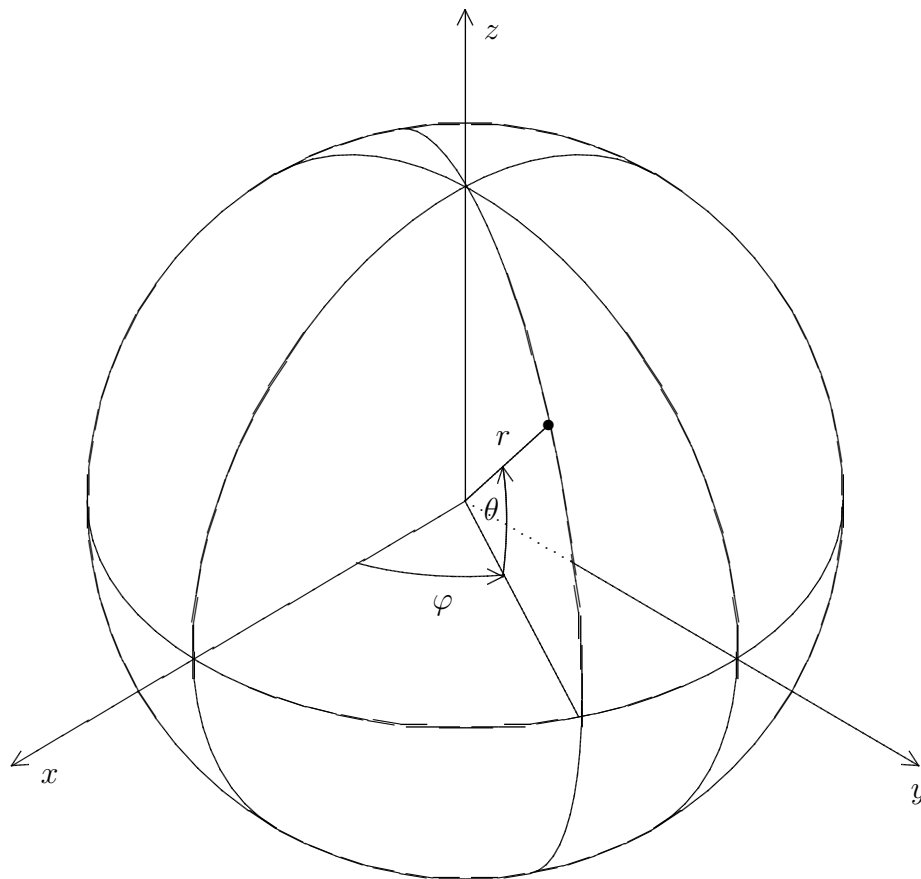
Für die Funktionaldeterminante ergibt sich

$$\det J_F(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

4. Räumliche Polarkoordinaten:

Hier ist $U = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, und

$$F(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$



Dann ist

$$\begin{aligned} \det J_F(r, \varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \sin \theta \cdot r^2 (\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r \cos \theta \cdot r (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\ &= r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta \\ &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\det J_F(r, \varphi, \theta) > 0$ in U . Man beachte, daß die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden!

Der Satz von der Umkehrabbildung liefert Bedingungen, unter denen eine „nicht-lineare Gleichung“ der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

(eindeutig) lösbar ist. Jetzt wollen wir uns mit der Lösbarkeit einer Gleichung

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \quad \text{mit } n > m$$

beschäftigen, wobei f auf einer offenen Menge B des \mathbb{R}^n definiert und stetig differenzierbar ist und Werte in \mathbb{R}^m hat.

Um die richtigen Ideen zu bekommen, betrachten wir erst einmal ein paar Beispiele.

Beispiele.

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ die beschreibende Matrix. Dann ist $\text{Ker}(f)$ die Lösungsmenge der Gleichung $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ist f surjektiv, so ist $\text{rg}(A) = m$, und die Gleichung $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ hat für jedes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ einen affinen Raum $\mathbf{a} + \text{Ker}(f)$ als Lösungsmenge. Dabei ist \mathbf{a} eine „partikuläre Lösung“ des inhomogenen Gleichungssystems. Diesen (surjektiven) Fall wollen wir noch etwas genauer betrachten:

Das Gaußverfahren liefert einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (der für etwa nötige Spaltenvertauschungen sorgt) und einen Isomorphismus $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (gegeben durch die angewandten elementaren Zeilentransformationen). Dann ist

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{x})) = \psi(\mathbf{y}).$$

Man führt das Gaußverfahren so durch, daß $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ durch eine Matrix der Gestalt (D, B) beschrieben wird, mit einer regulären oberen Dreiecksmatrix $D \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ und einer Matrix $B \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$.

Wir nehmen jetzt an, daß A schon die gewünschte Gestalt $A = (D, B)$ hat. Setzen wir

$$\vec{x}^* := (x_1, \dots, x_m)^t \quad \text{und} \quad \vec{x}^{**} := (x_{m+1}, \dots, x_n)^t,$$

so erhält die Gleichung $f(\vec{x}) = \vec{y}$ die Gestalt $D \cdot \vec{x}^* + B \cdot \vec{x}^{**} = \vec{y}$. Weil D eine quadratische reguläre (und damit invertierbare) Matrix ist, kann man die Gleichung folgendermaßen auflösen:

$$\vec{x}^* = D^{-1} \cdot (\vec{y} - B \cdot \vec{x}^{**}).$$

Das entspricht dem „Rückwärtseinsetzen“. Als partikuläre Lösung erhält man z.B. $\mathbf{a} = (\mathbf{a}^*, \mathbf{a}^{**})$ mit $\mathbf{a}^{**} = \mathbf{0}$ und $\vec{a}^* = D^{-1} \cdot \vec{y}$.

Es gibt also affin-lineare Funktionen $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch die Zeilen der rechten Seite, so daß gilt:

$$x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n), \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

Die durch $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$ „implizit“ gegebene Abbildung $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ hat als Graphen einen $(n-m)$ -dimensionalen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$, eben genau die Lösungsmenge unserer Ausgangsgleichung.

2. Im nichtlinearen Fall betrachten wir zunächst eine (stetig differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Für $c \in \mathbb{R}$ ist

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} = N_c(f)$$

die „Niveaulinie“ von f zum Wert c . Wie im linearen Fall wollen wir sehen, ob durch die Gleichung $f(x, y) = c$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ oder $x = h(y)$ definiert wird.

Sei etwa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$. Dann ist

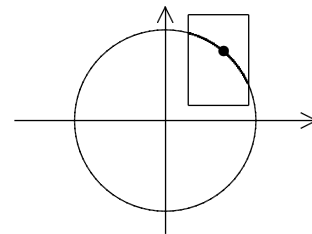
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\} =: S^1$$

der Einheitskreis.

Es ist $f(x, y) = 0 \iff y^2 = 1 - x^2$. Die Gleichung ist nicht eindeutig auflösbar, und die Auflösung ist nicht immer differenzierbar. Zumindest muß $1 - x^2 > 0$ sein, also $|x| < 1$.

Ist $(a, b) \in S^1$ und $|a| < 1$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a)$ in $(-1, 1)$ enthalten ist. Außerdem ist $b^2 = 1 - a^2 > 0$, also $|b| > 0$. Sei etwa $b > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} (a, b) &\in \{(x, y) \in U_\varepsilon \times \mathbb{R}_+ : f(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in U_\varepsilon \times \mathbb{R}_+ : y = \sqrt{1 - x^2}\}. \end{aligned}$$



$W = U_\varepsilon \times \mathbb{R}_+$ ist eine offene Umgebung von (a, b) , und $g(x) := \sqrt{1 - x^2}$ ist differenzierbar auf U_ε . Die Nullstellenmenge von f sieht also in der Nähe von (a, b) wie der Graph der differenzierbaren Funktion g aus:

$$\{(x, y) \in W : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) : y = g(x)\}.$$

Insbesondere ist $f(x, g(x)) \equiv 0$. Man kann diese Gleichung benutzen, um die Ableitung von g zu berechnen. Mit der Kettenregel folgt nämlich:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x),$$

also

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{2x}{2g(x)} = -\frac{x}{g(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bei dieser Umformung hätten wir natürlich erst einmal überprüfen müssen, ob $f_y(x, g(x))$ in der Nähe von $x = a$ nicht verschwindet. Tatsächlich ist $f_y(a, b) = 2b > 0$, weil wir den Punkt (a, b) so gewählt haben. Wir werden später sehen, daß das gerade die Bedingung für die Auflösbarkeit nach y ist.

Der Kreis S^1 ist eine so symmetrische Figur, daß nicht einzusehen ist, warum die Gleichung $f(x, y) = 0$ nicht überall eine implizite Funktion definieren sollte. Aber was tun wir z.B. im Punkt $(a, b) = (1, 0)$? Ist $|y| < \varepsilon < 1$ und $x > 0$, so folgt aus der Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$, daß $x = \sqrt{1 - y^2} =: h(y)$ ist.

Was ist der Unterschied zwischen beiden Fällen? Im ersten Fall tritt keine vertikale Tangente auf. Daher ist $\nabla f(x, y)$ nirgends horizontal und insbesondere $f_y(a, b) \neq 0$. Im zweiten Fall tritt keine horizontale Tangente auf, d.h., es ist $\nabla f(x, y)$ nirgends vertikal und insbesondere $f_x(a, b) \neq 0$.

3. Ganz kurz wollen wir noch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ betrachten. Damit dies einen Graphen $z = g(x, y)$ beschreibt, darf die Tangentialebene an die Niveauläche $N_0(f)$ nicht auf der x - y -Ebene senkrecht stehen, der Gradient von f also nicht zu ihr parallel sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $f_z(x, y, z) \neq 0$ ist.

Wir betrachten nun eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $n > m$, also ein System von m nichtlinearen Gleichungen für n Variable. Den Satz der ersten $k = n - m$ Variablen x_1, \dots, x_k fassen wir zu einem Vektor \mathbf{x}' , den der folgenden m Variablen x_{k+1}, \dots, x_n zu einem Vektor \mathbf{x}'' zusammen, so daß $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ ist. Dann definieren wir:

$$J'_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

und

$$J''_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+m}}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{k+m}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$J_f(\mathbf{x}) = \left(J'_f(\mathbf{x}) \mid J''_f(\mathbf{x}) \right).$$

Satz über implizite Funktionen

Ist $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ und die Matrix $J''_f(\mathbf{x}_0) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ regulär, so gibt es Umgebungen $U(\mathbf{x}'_0), V(\mathbf{x}''_0)$ mit $U \times V \subset B$ und genau eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \rightarrow V$, so daß gilt:

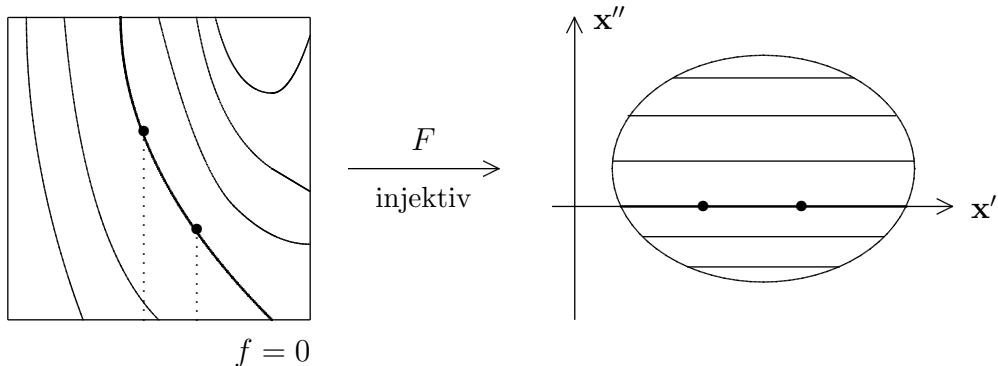
1. $g(\mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}''_0$.
2. $f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \equiv \mathbf{0}$ auf U .
3. $J_g(\mathbf{x}') = - \left(J''_f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \right)^{-1} \cdot J'_f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}'))$ auf U .

BEWEIS: Der Trick besteht darin, den Raum um \mathbf{x}_0 herum so differenzierbar zu verbiegen, daß aus der Nullstellenmenge

$$N := \{(x_1, \dots, x_n) : f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

ein Ebenenstück wird. Zu diesem Zweck definieren wir $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$F(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') := (\mathbf{x}', f(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')).$$



Dann ist $F(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}'_0, \mathbf{0}'')$ und

$$J_F(\mathbf{x}_0) = \left(\begin{array}{c|c} E_k & \mathbf{0} \\ \hline J'_f(\mathbf{x}_0) & J''_f(\mathbf{x}_0) \end{array} \right),$$

also $\det J_F(\mathbf{x}_0) = \det J''_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Das bedeutet, daß F in \mathbf{x}_0 lokal umkehrbar ist. Wir suchen eine Abbildung g , so daß $F(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) = (\mathbf{x}', \mathbf{0}'')$, also $F^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0}'') = (\mathbf{x}', g(\mathbf{x}'))$ ist. Deshalb setzen wir

$$g(\mathbf{x}') := \text{pr}_2 \circ F^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0}'').$$

Offensichtlich ist g differenzierbar. Liegt \mathbf{x}' in der Nähe von \mathbf{x}'_0 , so liegt $(\mathbf{x}', \mathbf{0}'')$ im Bild von F , d.h., es gibt ein \mathbf{x}'' mit $F(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = (\mathbf{x}', \mathbf{0}'')$. Das bedeutet, daß $\text{pr}_1 \circ F^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0}'') = \mathbf{x}'$ ist, also $(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) = F^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0}'')$. Daraus folgt sofort:

$$f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) = \text{pr}_2 \circ F(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \equiv \mathbf{0}$$

Ist umgekehrt $f(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = 0$, so ist

$$F(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = (\mathbf{x}', f(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')) = (\mathbf{x}', \mathbf{0}''),$$

also

$$\mathbf{x}'' = \text{pr}_2 \circ F^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0}'') = g(\mathbf{x}').$$

Weil $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ ist, folgt mit der Kettenregel:

$$\mathbf{0} = J'_f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \cdot E_k + J''_f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')) \cdot J_g(\mathbf{x}'),$$

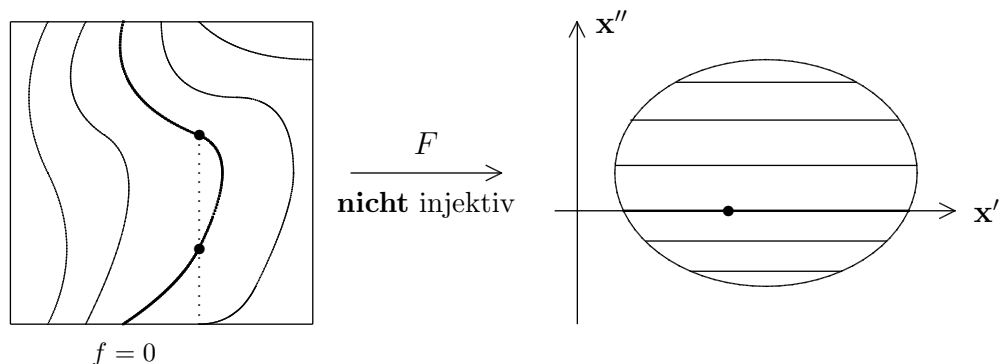
also

$$J_g(\mathbf{x}') = - (J''_f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')))^{-1} \cdot J'_f(\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')).$$

Man beachte hier die Reihenfolge bei der Matrizenmultiplikation!

Das Ganze gilt in der Nähe von \mathbf{x}_0 . Wählt man die Umgebungen U und V klein genug, so ist alles gezeigt. ■

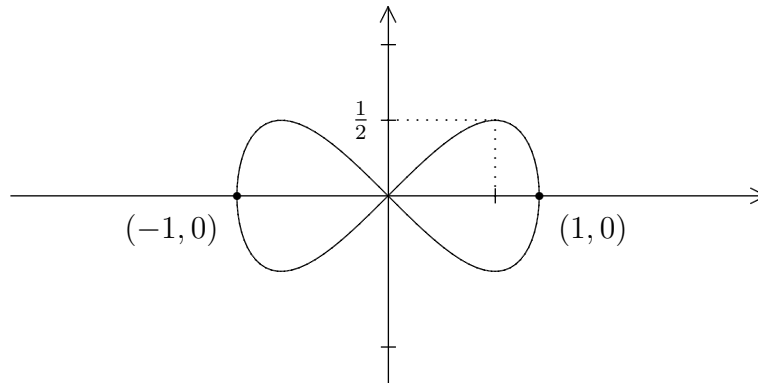
Bemerkung. Das Verfahren kann nicht funktionieren, wenn man die Regularität von $J''_f(\mathbf{x}_0)$ nicht fordert. Man kann anschaulich sehen, daß die Abbildung F dann nicht mehr injektiv ist.



Häufig lassen sich dann aber die Koordinaten so vertauschen, daß anschließend doch die Voraussetzungen erfüllt sind.

Beispiel.

Sei $f(x, y) := x^2(1 - x^2) - y^2$. Die Kurve $C := \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ ist eine sogenannte „Lemniskate“:



Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2) \text{ und } f_y(x, y) = -2y.$$

Im Nullpunkt ist die Gleichung überhaupt nicht auflösbar. Das liegt anschaulich daran, daß der dort auftretende Kreuzungspunkt aus keiner Richtung wie ein Graph aussieht.

In den Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ist jeweils $f_y(x, y) = 0$, also keine Auflösung nach y möglich. Allerdings ist dort $f_x(x, y) \neq 0$, wir können also lokal nach x auflösen. Das ist hier sogar konkret möglich, die Gleichung $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ führt auf

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \pm 2\sqrt{1 - 4y^2}}.$$

Läßt man y gegen Null gehen, so muß x^2 gegen 1 streben. Das schließt unter der ersten Wurzel das Minus-Zeichen aus, und man bekommt:

$$\begin{aligned} x &= +\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 4y^2}} \quad \text{bei } (1, 0) \\ \text{und } x &= -\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 4y^2}} \quad \text{bei } (-1, 0). \end{aligned}$$

In allen anderen Punkten ist $f_y(x, y) \neq 0$, denn wenn $y = 0$ und $f(x, y) = 0$ ist, dann kann nur $x = 0$ oder $x = \pm 1$ sein. Dann ist

$$y = \pm \sqrt{x^2(1 - x^2)},$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob sich (x, y) in der oberen oder in der unteren Halbebene befindet.

Rechnen wir noch im Falle der oberen Halbebene die Ableitung von $y = g(x)$ aus:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{2x - 4x^3}{-2g(x)} = \frac{x(1 - 2x^2)}{\sqrt{x^2(1 - x^2)}}.$$

Diese Beziehung gilt natürlich nicht bei $x = 0$. Für $0 < x < 1$ ist $g'(x) = 0$ genau dann erfüllt, wenn $1 - 2x^2 = 0$ ist, also $x = \sqrt{2}/2$. Dort ist $y = 1/2$. Offensichtlich liegt ein Maximum vor, und mit dieser Information kann man schon eine recht gute Skizze der Lemniskate erstellen.

Nun können wir auch das Verfahren mit dem Lagrangeschen Multiplikator verallgemeinern.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g = (g_1, \dots, g_m) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $\text{rg } J_g(\mathbf{x}) = m$ für alle $x \in B$. Dann heißt $M := \{\mathbf{x} \in B : g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ ein *reguläres Flächenstück* der Dimension $n - m$. Sei außerdem $\mathbf{a} \in M$ und $U(\mathbf{a}) \subset B$ eine offene Umgebung.

Definition:

Eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ hat in \mathbf{a} ein *relatives Maximum* (bzw. *relatives Minimum*) unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

falls $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ ist (bzw. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$), für alle $\mathbf{x} \in U \cap M$.

Man beachte, daß wir nur Nebenbedingungen $g_1 = \dots = g_m = 0$ betrachten, bei denen $\text{rg } J_g(\mathbf{x}) = m$ ist!

Zur Bestimmung von Extremwerten unter Nebenbedingungen dient das folgende Kriterium:

Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Hat f in \mathbf{a} ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

so gibt es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\mathbf{a}).$$

Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ nennt man Lagrangesche Multiplikatoren. Man beachte, daß es sich hier wieder nur um ein notwendiges Kriterium handelt! Die Punkte, die die

angegebene Bedingung erfüllen, können Extremwerte sein. Ob sie es wirklich sind, muß man mit anderen Mitteln feststellen.

BEWEIS: Es sei $d := n - m$. Dann ist $\text{rg } J_g(\mathbf{a}) = m = n - d$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß die letzten m Spalten der Funktionalmatrix von g linear unabhängig sind. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Schreiben wir \mathbf{a} in der Form

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}', \mathbf{a}'') = (a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n),$$

so gibt es offene Umgebungen $U(\mathbf{a}')$ und $V(\mathbf{a}'')$, sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$, so daß gilt:

$$\{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in U \times V : g(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) : \mathbf{x}' \in U\}.$$

Außerdem ist $J_\varphi(\mathbf{a}') = -J_g''(\mathbf{a})^{-1} \cdot J_g'(\mathbf{a})$.

Der Satz ist bewiesen, wenn wir folgende Beziehung gezeigt haben:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \in \langle \nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a}) \rangle.$$

Dazu parametrisieren wir das Flächenstück $M = \{g_1 = \dots = g_m = 0\}$ durch $\Phi(\mathbf{x}') := (\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$. Weil $g_i \circ \Phi(\mathbf{x}') \equiv 0$ ist, ist

$$\mathbf{0} = \nabla(g_i \circ \Phi)(\mathbf{a}') = \nabla g_i(\Phi(\mathbf{a}')) \cdot J_\Phi(\mathbf{a}'),$$

also

$$\nabla g_i(\Phi(\mathbf{a}')) \bullet D\Phi(\mathbf{a}')(\mathbf{v}) = \nabla g_i(\Phi(\mathbf{a}')) \cdot J_\Phi(\mathbf{a}') \cdot \mathbf{v}^t = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ und $i = 1, \dots, m$. Wegen $\mathbf{a} = \Phi(\mathbf{a}')$ ist somit

$$\nabla g_i(\mathbf{a}) \in (\text{Im } D\Phi(\mathbf{a}'))^\perp, \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \dim \text{Im } D\Phi(\mathbf{a}') &= \text{rg } J_\Phi(\mathbf{a}') \\ &= \text{rg} \left(E_d \mid J_\varphi(\mathbf{a}') \right) = d, \end{aligned}$$

also $\dim(\text{Im } D\Phi(\mathbf{a}'))^\perp = n - d = m$.

Weil die Gradienten der g_i in \mathbf{a} linear unabhängig sind, ist

$$\langle \nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a}) \rangle = (\text{Im } D\Phi(\mathbf{a}'))^\perp.$$

Hat f auf M in \mathbf{a} ein lokales Extremum, so hat auch $f \circ \Phi$ in \mathbf{a}' ein lokales Extremum, und es muß gelten:

$$\mathbf{0} = \nabla(f \circ \Phi)(\mathbf{a}') = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot J_\Phi(\mathbf{a}'),$$

also $\nabla f(\mathbf{a}) \in (\text{Im } D\Phi(\mathbf{a}'))^\perp$. Das bedeutet, daß $\nabla f(\mathbf{a})$ eine Linearkombination von $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a})$ ist. ■

Beispiel.

Wir suchen nach Extremwerten der Funktion $f(x, y, z) := x + y + z$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$, mit

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2$$

und $g_2(x, y, z) := x + z - 1$.

Die Gradienten $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ und $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 0, 1)$ sind linear unabhängig, wenn $(x, y, z) \in M = \{g_1 = g_2 = 0\}$ ist. Also ist dort $\text{rg } J_g(x, y, z) = 2$ (wenn wir $g = (g_1, g_2)$ setzen).

Nimmt f in (x, y, z) ein Extremum unter den Nebenbedingungen an, so gibt es Faktoren λ_1, λ_2 , so daß gilt: $\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z)$. Weil $\nabla f(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ist, führt das zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 2y, \\ 1 &= \lambda_2, \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ \text{und} \quad x + z &= 1. \end{aligned}$$

Dann muß $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_1 \cdot 2x = 0$ sein, also $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{2}$, sowie $z = 1$. Nun sei

$$\mathbf{x}_1 = (0, \sqrt{2}, 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = (0, -\sqrt{2}, 1).$$

Die Menge M (Durchschnitt eines Zylindermantels mit einer Ebene) ist kompakt. Also muß f auf M Maximum und Minimum annehmen. Da $f(\mathbf{x}_1) = 1 + \sqrt{2}$ und $f(\mathbf{x}_2) = 1 - \sqrt{2}$ ist, muß f in \mathbf{x}_1 ein Maximum und in \mathbf{x}_2 ein Minimum haben.