Kapitel 3 Reihen

§ 1 Reihen von Zahlen

Inhalt:

Konvergenz und Divergenz von Reihen reeller oder komplexer Zahlen, geometrische Reihe, harmonische Reihe, alternierende Reihen.

Cauchy-Kriterium, absolute Konvergenz, Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Exponentialreihe, Umordnungs- und Produktsatz.

Eine Folge komplexer Zahlen (z_n) heißt *konvergent* gegen die komplexe Zahl z_0, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \text{s. d. } \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt: } |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Anschaulich bedeutet das, daß der Abstand von z_n und z_0 für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Aus welcher Richtung sich die z_n dem Grenzwert annähern, spielt dabei keine Rolle. Man überlegt sich leicht, daß die bekannten Grenzwertsätze auch im Komplexen gelten.

Sei nun $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen. Die Summe

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$$

bezeichnet man als die *N-te Partialsumme* der a_n, und die **Folge** (S_N) der Partialsummen nennt man eine *unendliche Reihe* und schreibt sie auch in der Form

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.}$$

Die Reihe heißt *konvergent* (bzw. *divergent*), falls die Folge (S_N) konvergent (bzw. divergent) ist.

> **Der Grenzwert wird – wenn er existiert – ebenfalls mit dem Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet!**

Aus den Regeln für die Konvergenz von Folgen ergeben sich analoge Regeln für Reihen:

1. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegen a bzw. b, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$, und zwar gegen $a + b$.

2. Ist c eine feste Zahl, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot a$.

Beispiele.

1. Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Dann ist $\sum_{n=0}^{N} q^n = \dfrac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$, und die Folge $S_N = \dfrac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$ konvergiert gegen $\dfrac{1}{1-q}$. Das bedeutet, daß die sogenannte *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gegen $\dfrac{1}{1-q}$ konvergiert.

   Im Falle $q = 1/2$ erhält man z.B.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \qquad \text{also } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

   Eine Anwendung ist die Behandlung periodischer Dezimalbrüche, z.B.

$$\begin{aligned} 0.3333\ldots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} \\ &= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   Man kann den Begriff der geometrischen Reihe auch ins Komplexe übertragen. Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{z^{N+1} - 1}{z - 1}.$$

   Der Beweis geht genauso wie im Reellen, es werden nur die Körper-Eigenschaften gebraucht. Ist nun $|z| < 1$, so strebt die Folge (z^{N+1}) gegen Null, denn es ist $|z^{N+1} - 0| = |z|^{N+1}$. Daraus folgt:

$$\text{Ist } z \in \mathbb{C} \text{ und } |z| < 1, \text{ so ist } \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ wird als *harmonische Reihe* bezeichnet. Für die Partialsummen S_N mit $N = 2^k$ gilt folgende Abschätzung:

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2},$$

und dieser Ausdruck wächst über alle Grenzen. Die harmonische Reihe divergiert also.

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe ist schnell gefunden:

Satz

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so muß (a_n) eine Nullfolge sein.

Beweis: Die Folgen S_N und $T_N := S_{N-1}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert, eine Zahl a. Aber dann konvergiert $a_N := S_N - T_N$ gegen $a - a = 0$. ∎

Daß dieses Kriterium nicht hinreicht, zeigt das Beispiel der harmonischen Reihe.

In einem besonderen Spezialfall kommt man fast mit dem notwendigen Kriterium aus:

Leibniz-Kriterium

Es sei (a_n) eine ***monoton fallende Nullfolge*** *reeller Zahlen. Dann ist die „alternierende Reihe“ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.*

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt sofort, daß stets $a_n \geq 0$ ist. Wir betrachten die Folgen $u_N := S_{2N-1}$ und $v_N := S_{2N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_{N+1} &= S_{2N+1} \\ &= S_{2N-1} + a_{2N} - a_{2N+1} \\ &\geq S_{2N-1} \quad = \quad u_N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{N+1} &= S_{2N+2} \\ &= S_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2} \\ &\leq S_{2N} \quad = \quad v_N. \end{aligned}$$

Weiter ist $v_N = S_{2N} = S_{2N-1} + a_{2N} \geq u_N$, denn die a_n müssen alle ≥ 0 sein. Zusammen ergibt das die folgende Ungleichungskette:

$$\ldots \leq u_N \leq u_{N+1} \leq \ldots \leq v_{N+1} \leq v_N \leq \ldots$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz strebt also u_N gegen eine Zahl u und v_N gegen eine Zahl v. Da außerdem $v_N - u_N = a_{2N}$ gegen Null konvergiert, muß $u = v$ sein. Es ist klar, daß dann auch S_N gegen diese Zahl konvergiert. ∎

Beispiel.

Die *alternierende harmonische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergiert! Über den Grenzwert können wir allerdings im Augenblick noch nichts aussagen.

Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Die Reihe (reeller oder komplexer Zahlen) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0,\ \textit{so daß}\ \forall\, N > N_0\ \textit{gilt:} \qquad \Big|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\Big| < \varepsilon.$$

BEWEIS: Wie üblich sei die N-te Partialsumme mit S_N bezeichnet. Dann ist

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n = S_N - S_{N_0}.$$

1) (S_N) konvergiere gegen die Zahl S. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein N_0, so daß $|S_N - S| < \varepsilon/2$ für $N \geq N_0$ ist. Dann ist

$$|S_N - S_{N_0}| = |(S_N - S) - (S_{N_0} - S)| \leq |S_N - S| + |S_{N_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Jetzt sei das Kriterium erfüllt. Dann gibt es ein N_1, so daß $|S_N - S_{N_1}| < 1$ für $N \geq N_1$ ist. Für solche N ist dann

$$|S_N| = |S_{N_1} + (S_N - S_{N_1})| \leq |S_{N_1}| + |S_N - S_{N_1}| < |S_{N_1}| + 1.$$

Das bedeutet, daß die Folge (S_N) beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie also einen Häufungspunkt S.

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein N_0, so daß $|S_{N_0} - S| < \varepsilon/2$ ist. In Wirklichkeit gibt es sogar unendlich viele N_0 mit dieser Eigenschaft. Daher kann man N_0 so groß wählen, daß auch noch $|S_N - S_{N_0}| < \varepsilon/2$ für $N \geq N_0$ ist. Dann folgt für $N \geq N_0$ sogar:

$$|S_N - S| = |(S_N - S_{N_0}) + (S_{N_0} - S)| \leq |S_N - S_{N_0}| + |S_{N_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das bedeutet, daß (S_N) gegen S konvergiert. ■

Der Vorteil des Cauchy-Kriteriums besteht darin, daß man es nur mit endlichen Summen zu tun hat!

Definition:

Eine Reihe (reeller oder komplexer Zahlen) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Zum Beweis verwendet man das Cauchy–Kriterium. Es ist

$$\Big|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\Big| \leq \sum_{n=N_0+1}^{N} |a_n| \,.$$

Konvergiert die Reihe der Absolutbeträge, so wird die rechte Seite bei großem N_0 beliebig klein, und das gilt dann erst recht für die linke Seite. ■

Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch, wie das Beispiel der alternierenden Leibnizreihe zeigt.

Man beachte: Unter dem Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe versteht man immer den Grenzwert der Reihe im Sinne der gewöhnlichen Konvergenz.

Besonders häufig wird das folgende Vergleichskriterium benutzt:

Satz (Majoranten–Kriterium)

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen, und ist* (c_n) *eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, so daß* $|c_n| \le a_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut!*

Beweis: Wir können annehmen, daß $|c_n| \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} |c_n| \le \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n, \text{ für } N > N_0.$$

Für genügend großes N_0 wird die rechte Seite nach dem Cauchy–Kriterium beliebig klein, also auch die linke Seite. ∎

Bemerkung. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent und $|c_n| \ge a_n$ für alle n, so kann $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ zwar noch im gewöhnlichen Sinne, aber nicht mehr absolut konvergieren.

Wenn nun eine Reihe nicht zufällig das Leibniz–Kriterium erfüllt, so wird man i.a. versuchen, die Konvergenz mit Hilfe des Majoranten–Kriteriums auf die absolute Konvergenz einer Vergleichsreihe zurückzuführen. Zur Feststellung der absoluten Konvergenz gibt es zahlreiche Untersuchungsmethoden. Wir betrachten hier nur eine der populärsten.

Satz (Quotienten–Kriterium)

Ist $a_n \ne 0$ *für fast alle* n *und* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *so konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*

Beweis: Wenn die Quotienten $|a_{n+1}/a_n|$ gegen eine Zahl $a < 1$ konvergieren, so gibt es ein q mit $a < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \le q \text{ für } n \ge n_0.$$

Dann ist

$$|a_{n_0+k}| \le q \cdot |a_{n_0+k-1}| \le \ \ldots \ \le q^k \cdot |a_{n_0}|.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot |a_{n_0}|$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}$. Die erstere konvergiert, es handelt sich ja um eine geometrische Reihe. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann die zweite Reihe absolut, und damit auch die Ausgangsreihe, die lediglich ein paar Anfangsterme mehr besitzt. ∎

Beispiele.

1. Bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ hilft das Quotientenkriterium: Für $n \geq 3$ ist

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen $\frac{1}{2}$. Also ist die Reihe konvergent.

2. Sei $z \neq 0$ eine beliebige komplexe Zahl und $c_n := \frac{z^n}{n!}$. Dann ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z|^n} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert gegen Null. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut (für $z \neq 0$ nach dem Quotientenkriterium und für $z = 0$ trivialerweise).

Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ nennt man die *(komplexe) Exponentialfunktion.*

Speziell muß $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ eine reelle Zahl sein. Diesen Wert wollen wir jetzt ermitteln.

Wir wissen, daß die Folge $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend gegen die Eulersche Zahl e konvergiert. Nach der binomischen Formel ist außerdem

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \exp(1).
\end{aligned}$$

Also ist $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \exp(1)$.

Nun wenden wir einen kleinen Trick an! Ist $m \ge 2$ irgend eine **feste** natürliche Zahl und $n > m$, so gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&\ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt (bei festem m) für $n \to \infty$ gegen $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$. Also ist auch $e \ge \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$, für jedes $m \ge 2$. Nun lassen wir m gegen Unendlich gehen und erhalten die Ungleichung $e \ge \exp(1)$. Zusammen mit der weiter oben gewonnenen Abschätzung ergibt das die Beziehung

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1).$$

3. Wie steht es mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? Der Quotient

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

konvergiert gegen 1, also sagt hier das Quotientenkriterium nichts aus. Man kann aber wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} &\leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= 1 + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1}) - (\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}) \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{N} \leq 2.
\end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert können wir hier leider nicht bestimmen.

Absolut konvergente Reihen verhalten sich sehr gutartig, was die Reihenfolge der Summation betrifft.

Umordnungssatz

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent, etwa gegen* A*, so konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen* A*.*

Ohne Beweis.

Bemerkung. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen x konvergiert.

Produktsatz für Reihen

Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien absolut konvergent gegen* a *bzw.* b*. Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$*. Dann ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent gegen* $a \cdot b$*.*

Ohne Beweis.

Folgerung

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

1. $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(1) = e$.
2. $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.
3. *Es ist* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
4. *Es ist* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für* $z \in \mathbb{C}$.

BEWEIS: 1) wurde schon gezeigt.

2) Wir benutzen die absolute Konvergenz der Exponentialreihe und den Produktsatz für Reihen. Danach ist

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^i \cdot w^j}{i!j!}.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{n!} \cdot (z + w)^n = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{n!i!(n-i)!} z^i w^{n-i} = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} z^i w^j.$$

Somit ist $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$.

3) Es ist $1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$. Damit ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

4) Ist $S_N(z)$ die N-te Partialsumme der Exponentialreihe, so ist offensichtlich $S_N(\overline{z}) = \overline{S_N(z)}$. Diese Beziehung bleibt erhalten, wenn man N gegen Unendlich gehen läßt. ∎

Zum Schluß ein Überblick zur Untersuchung von Reihen:

$$\text{Es sei eine Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ gegeben.}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\swarrow & & \\
\text{Ist } a_n \text{ Nullfolge?} & \xrightarrow{\text{nein}} & \text{Die Reihe divergiert!} \\
\text{ja } \downarrow & & \\
\text{Geometrische Reihe:} & & \\
\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{mit } |q| < 1 \text{ ?} & \xrightarrow{\text{ja}} & \text{Reihe konvergiert gegen } \dfrac{1}{1-q}. \\
\text{nein } \downarrow & & \\
\text{Reihe alternierend:} & & \\
a_n = (-1)^n c_n, & \xrightarrow{\text{ja}} & \text{konvergent nach Leibniz} \\
c_n \text{ monoton fallend gegen Null?} & & \\
\text{nein } \downarrow & & \\
\text{fast alle } a_n \neq 0, & & \\
\text{Quotientenkriterium erfüllt?} & \xrightarrow{\text{ja}} & \text{Konvergenz} \\
\text{nein } \downarrow & & \\
\exists \text{ konvergente Majorante?} & \xrightarrow{\text{ja}} & \text{Konvergenz gesichert!} \\
\text{weiß nicht } \downarrow & & \\
\text{Schwieriger Fall!} & & \\
\text{Mathematiker fragen!} & &
\end{array}
$$

Ist die Konvergenz gesichert, so muß man – außer im Falle der geometrischen Reihe – noch nach dem Grenzwert suchen. Da bieten sich folgende Alternativen an:

1. Nachdenken!
   - (a) Wurde die Reihe in der Vorlesung behandelt?

     Wenn ja, im Skript nachschlagen!
   - (b) Kann man den Grenzwert erraten? (etwa durch Vergleich mit geeigneten Minoranten und Majoranten)

     Wenn ja, Konvergenz gegen den mutmaßlichen Grenzwert beweisen!
2. Im Bronstein nachschlagen!
3. Einen Experten fragen!

§ 2 Reihen von Funktionen

Inhalt:

Beschränkte Funktionen und Supremums-Norm, Funktionen mit komplexen Argumenten, Reihen von Funktionen, punktweise und normale Konvergenz, Stetigkeitskriterium, Weierstraß-Kriterium.

Es sei M eine beliebige Menge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls es eine reelle Konstante $c > 0$ gibt, so daß $|f(x)| \le c$ für alle $x \in M$ gilt.

Beispiel.

Ist $M = I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$, so ist jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion $|f|$ nimmt sogar ihr Maximum auf I an, und das gilt auch für komplexwertige stetige Funktionen auf I.

Umgekehrt braucht eine beschränkte Funktion auf I nicht unbedingt stetig zu sein. In diesem Fall kann es sein, daß $|f|$ kein Maximum annimmt. Allerdings ist $\sup\{|f(x)| \,:\, x \in I\} < \infty$.

Sei M eine beliebige Menge und $B = B(M, \mathbb{C})$ die Menge aller beschränkten komplexwertigen Funktionen auf M. Dann trägt B auf natürliche Weise die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes. B ist sogar ein komplexer Vektorraum, aber da wir diesen Begriff noch nicht eingeführt haben, begnügen wir uns mit der Feststellung, daß das Produkt einer komplexen Zahl mit einer beschränkten Funktion wieder eine beschränkte Funktion ergibt.

Jedem $f \in B$ ordnen wir die *(Supremums-)Norm* zu:

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in M\}.$$

Dann ist $0 \le \|f\| < +\infty$, und es gilt:

1. $\|f\| = 0 \iff f = 0$,
2. $\|c \cdot f\| = |c| \cdot \|f\|$ für $c \in \mathbb{C}$ und $f \in V$,
3. $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ für $f, g \in V$.

Die Eigenschaften leiten sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Betragsfunktion her.

Ist (f_n) eine Folge von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf einer Menge M, so kann man zunächst einmal rein formal die *Funktionen-Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

betrachten. Setzt man einen Punkt $x \in M$ ein, so erhält man eine Reihe komplexer Zahlen, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, und man kann nach Konvergenz fragen.

Definition:

Die Funktionen-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt auf M *punktweise (bzw. punktweise absolut) konvergent*, wenn für jedes $x \in M$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert (bzw. absolut konvergiert).

Ist die Funktionen-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf M punktweise konvergent, so wird durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

eine *Grenzfunktion* f auf M definiert. Man möchte nun aus den Eigenschaften der f_n auf die der Grenzfunktion schließen. Leider ist das i.a. nicht möglich. Dafür braucht man einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition:

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt auf M *normal konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ konvergiert.

Satz

Eine normal konvergente Reihe von Funktionen auf M ist punktweise und punktweise absolut konvergent.

BEWEIS: Für jedes $x \in M$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$. Das ergibt die punktweise absolute Konvergenz. ■

Im folgenden wollen wir auch stetige Funktionen untersuchen, die von komplexen Argumenten abhängen. Als Definitionsbereich nehmen wir eine hinreichend schöne Menge, z.B. eine Kreisscheibe

$$D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-a| < r\}.$$

Eine Funktion $f : D_r(a) \to \mathbb{C}$ heißt *stetig* in z_0, falls für jede Folge (z_n) in $D_r(a)$ mit $z_n \to z_0$ auch $f(z_n)$ gegen $f(z_0)$ konvergiert. Es gelten ähnliche Sätze wie im Reellen. Die Funktion $f(z) = z$ ist überall stetig, Summe und Produkt stetiger Funktionen sind wieder stetig. Insbesondere ist jedes komplexe Polynom eine auf ganz $\mathbb{C}$ stetige Funktion.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium dafür an, wann die Grenzfunktion einer Reihe von stetigen Funktionen wieder stetig ist.

Stetigkeits-Kriterium

Es sei M ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$, und es seien stetige Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$ gegeben. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $N > N_0$ gilt:

$$\Big| \sum_{n=N_0+1}^{N} f_n(x) \Big| < \varepsilon \text{ für } \textbf{\textit{alle}} \ x \in M.$$

Dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ punktweise konvergent, und die Grenzfunktion ist stetig auf M.

Beweis: Die punktweise Konvergenz folgt sofort mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums. Ist $F_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$, so konvergiert also $F_N(x)$ für jedes $x \in M$ gegen die Grenzfunktion $f(x)$.

Sei nun $x_0 \in M$ und (x_ν) eine Folge in M, die gegen x_0 konvergiert. Weiter sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Um zu beweisen, daß f in x_0 stetig ist, müssen wir zeigen:

$$\exists\, \nu_0, \text{ s.d. } |f(x_\nu) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für } \nu \geq \nu_0.$$

Die Idee dafür sieht folgendermaßen aus:

Weil $f_N(x)$ für jedes $x \in M$ gegen $f(x)$ konvergiert, wird $|f(x_\nu) - f_N(x_\nu)|$ und $|f(x_0) - f_N(x_0)|$ beliebig klein. Und weil f_N stetig ist, wird $|f_N(x_\nu) - f_N(x_0)|$ beliebig klein. Das setzen wir dann alles zusammen.

Diese Idee führen wir jetzt genau aus. Es ist ja

$$|F_N(x) - F_{n_0}(x)| = \Big| \sum_{n=n_0+1}^{N} f_n(x) \Big| .$$

Aus der Voraussetzung des Satzes folgt deshalb: Man kann n_0 so groß wählen, daß $|F_N(x) - F_{n_0}(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in M$ ist.

Bei festgehaltenem x strebt $F_N(x)$ für $N \to \infty$ gegen $f(x)$, also auch $|F_N(x) - F_{n_0}(x)|$ gegen $|f(x) - F_{n_0}(x)|$. Das bedeutet, daß die Ungleichung

$$|f(x) - F_{n_0}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für jedes $x \in M$ erfüllt ist.

Weil F_{n_0} in x_0 stetig ist, gibt es ein ν_0, so daß $|F_{n_0}(x_\nu) - F_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Jetzt setzen wir alles zusammen und verwenden die Dreiecksungleichung: Für $\nu \geq \nu_0$ ist

$$\begin{aligned} |f(x_\nu) - f(x_0)| &\leq |f(x_\nu) - F_{n_0}(x_\nu)| + |F_{n_0}(x_\nu) - F_{n_0}(x_0)| + |F_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $f(x_\nu)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, und f ist in x_0 stetig. ∎

Für die Praxis ist das obige Kriterium natürlich zu kompliziert. Jetzt kommt die normale Konvergenz ins Spiel.

Satz (Weierstraß–Kriterium)

Es sei M ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$, und es seien stetige Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$ gegeben. Weiter sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen, so daß gilt:

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \textit{für fast alle } n \in \mathbb{N} \textit{ und } \textbf{\textit{alle}}\ x \in M.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf M normal gegen eine stetige Funktion.

Beweis: Aus dem Majorantenkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf M normal konvergiert. Die Beschränktheit der f_n ergibt sich aus der Voraussetzung.

Da $\left|\sum_{n=N_0+1}^{N} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=N_0+1}^{N} |f_n| \leq \sum_{n=N_0+1}^{N} \|f_n\|$ für alle $x \in M$ gilt, folgt aus der normalen Konvergenz und dem Cauchy-Kriterium, daß die Voraussetzung des Stetigkeits-Kriteriums erfüllt ist. Also ist die Grenzfunktion stetig. ∎

§ 3 Potenzreihen

Inhalt:

Begriff der Potenzreihe, Konvergenzverhalten, Konvergenzradius, Quotientenformel, Stetigkeit der Grenzfunktion, Potenzreihen mit Lücken, Abelscher Grenzwertsatz.

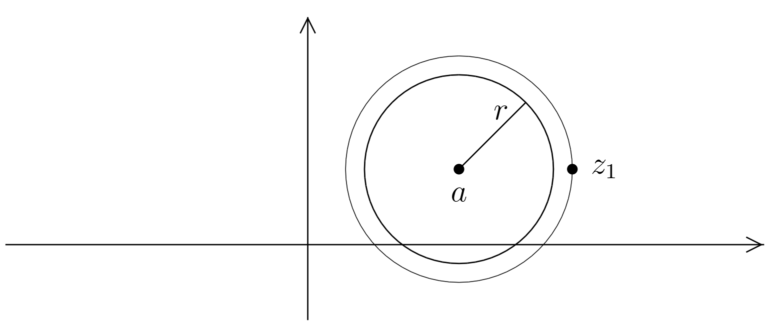
Sei (c_n) eine Folge (reeller oder komplexer) Zahlen, $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* a. Die Zahlen c_n heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe. Ist $a \in \mathbb{R}$ und sind alle Koeffizienten c_n reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe* und schreibt die Variable auch reell: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.
Um nicht doppelte Arbeit machen zu müssen, betreiben wir die Theorie gleich im Komplexen. Der reelle Fall ist darin enthalten. Man beachte: $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann reell, wenn $\overline{z} = z$ ist.

Über das Konvergenz von Potenzreihen

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergiere für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$. Ist dann $0 < r < |z_1 - a|$, so konvergiert $P(z)$ und auch die Reihe $P'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ auf der Kreisscheibe $D_r(a)$ normal.



Beweis: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß $|c_n(z_1 - a)^n| \leq M$ für alle n ist. Und da $r < |z_1 - a|$ sein soll, ist $q := \dfrac{r}{|z_1 - a|} < 1$.

Für alle z mit $|z - a| \leq r$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |c_n(z-a)^n| &= |c_n(z_1 - a)^n| \cdot |\frac{z-a}{z_1 - a}|^n \\ &\leq M \cdot q^n. \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ absolut konvergiert, und mit dem Weierstraßkriterium folgt, daß die Reihe auf $D_r(a)$ sogar normal konvergiert.

2) Nach (1) ist $|n \cdot c_n(z-a)^{n-1}| \leq n \cdot M \cdot q^{n-1}$, und $\dfrac{(n+1)M \cdot q^n}{nM \cdot q^{n-1}} = \dfrac{n+1}{n} \cdot q$ konvergiert gegen $q < 1$.

Aus dem Quotientenkriterium folgt jetzt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot M \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ auf $D_r(a)$ normal konvergiert. ∎

Der vorliegende Satz hat weitreichende Konsequenzen für das Konvergenzverhalten von Potenzreihen.

Definition:

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Die Zahl

$$R := \sup\{r \geq 0 \mid \exists\, z_1 \in \mathbb{C}, \text{ so daß } f(z) \text{ in } z_1 \text{ konvergent und } r = |z_1 - a| \text{ ist.}\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen!

Der Kreis um a mit Radius R heißt der *Konvergenzkreis* der Reihe.

Konvergenzverhalten und Konvergenzradius

R sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $P(z)$. Dann gilt:

1. *Für $0 < r < R$ konvergiert $P(z)$ auf $D_r(a)$ normal (und damit insbesondere punktweise absolut).*
2. *Ist $|z_1 - a| > R$, so divergiert $P(z)$ in z_1.*

BEWEIS: 1) ist klar, wegen des obigen Satzes.

2) Nach Definition von R kann $P(z)$ in einem Punkt z_1 mit $|z_1 - a| > R$ nicht mehr konvergieren. ∎

Bemerkung. Bei **reellen** Potenzreihen geht alles genauso, man hat lediglich den Konvergenzkreis durch ein Konvergenzintervall zu ersetzen.

Wir wissen jetzt, daß eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises konvergiert und außerhalb divergiert. Das Verhalten auf dem Rand des Kreises kann man nicht allgemein vorhersagen. Dafür sind gesonderte Betrachtungen erforderlich, die manchmal sehr schwierig werden können.

Auf jeden Fall ist es wichtig, den Konvergenzradius bestimmen zu können. In vielen Fällen gibt es dafür eine praktische Formel:

Quotientenformel für den Konvergenzradius

Sei (c_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen, $c_n \neq 0$ für fast alle n. Wenn die Folge $|\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ konvergiert, dann ist

$$R := \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$$

der Konvergenzradius der Reihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Man beachte, daß der Entwicklungspunkt a dabei keine Rolle spielt!

BEWEIS: Wir verwenden das Quotientenkriterium: Es ist

$$|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}| = |\frac{c_{n+1}}{c_n}| \cdot |z-a|,$$

und dieser Ausdruck konvergiert (für festes z) gegen $\frac{1}{R} \cdot |z-a|$.

Ist $|z-a| < R$, also $\frac{1}{R} \cdot |z-a| < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $|z-a| > R$, so divergiert sie. Also muß R der Konvergenzradius sein! ■

Beispiele.

1. Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dann ist $a = 0$ und $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ergibt den Konvergenzradius $R = 1$.

   Für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe gegen $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Da alle Koeffizienten reell sind, kann man die Reihe auch reell auffassen. Tatsächlich nimmt die Grenzfunktion dann auf dem Konvergenzintervall $(-1, 1)$ nur reelle Werte an. An den Randpunkten $x = -1$ und $x = +1$ divergiert die Reihe.

2. Sei $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Hier ist $a = 0$ und $c_n = \frac{1}{n}$.

   Da $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$ gegen 1 konvergiert, ist $R = 1$. An den Rändern des Konvergenzintervalls ist das Verhalten diesmal unterschiedlich:

   Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert.

3. Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wieder ist $a = 0$, und außerdem ist $c_n = \frac{1}{n!}$ für alle n, also

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \text{ konvergent gegen } +\infty.$$

   Diese Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

Potenzreihen liefern Beispiele stetiger Funktionen:

Stetigkeit von Potenzreihen

Hat die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *den Konvergenzradius* R*, so ist die Grenzfunktion* $f(z)$ *im Konvergenzkreis* $D_R(a)$ *stetig.*

BEWEIS: Jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig. Da die Potenzreihe auf jeder Kreisscheibe $D_r(a)$, $0 < r < R$, normal konvergiert, ist die Grenzfunktion $f(z)$ dort auch stetig. Aber jeder Punkt des Konvergenzkreises liegt im Innern einer solchen Kreisscheibe $D_r(a)$. ■

Beispiel.

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Dann ist der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, und die Koeffizienten sind die Zahlen

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = 2k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können die Formel für den Konvergenzradius nicht benutzen, aber da es sich um eine geometrische Reihe handelt, können wir direkt sehen, daß $R = 1$ ist. Als Grenzfunktion ergibt sich die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig, obwohl die Reihe nur auf $(-1, 1)$ konvergiert.

Manchmal reicht die Quotientenformel nicht aus.

Konvergenzradius für Potenzreihen mit Lücken

In der Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *sei* $c_{2k} = 0$ *und* $c_{2k+1} \neq 0$ *für fast alle* k*, und es existiere*

$$c := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}}\right|.$$

Dann ist $R := \sqrt{c}$ *der Konvergenzradius.*

Wenn $c_{2k+1} = 0$ *und* $c_{2k} \neq 0$ *für fast alle* k *ist und der Grenzwert*

$$c := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{2k}}{c_{2k+2}}\right|$$

existiert, so ist ebenfalls $R := \sqrt{c}$ *der Konvergenzradius.*

Der Beweis geht ähnlich wie bei der früher bewiesenen Formel. Wir betrachten nur den Fall $c_{2k+1} = 0$:

$$|\frac{c_{2k+2}z^{2k+2}}{c_{2k}z^{2k}}| = |\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}| \cdot |z|^2$$

konvergiert gegen $\frac{1}{c}|z|^2$, und dieser Ausdruck muß < 1 sein, damit die Reihe (nach Quotientenkriterium) konvergiert. Also muß $|z| < \sqrt{c}$ sein. ∎

Normalerweise kann man über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe auf dem Rand des Konvergenzkreises keine Aussage machen. Es gibt allerdings eine ganz kleine Ausnahme.

Abelscher Grenzwertsatz

Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und dem Konvergenzradius* $R = 1$. *Dann gilt:*

$$\textit{Ist } a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty, \textit{ so ist } \lim_{x \to 1-} f(x) = a.$$

Die Grenzfunktion wird also bei $x = 1$ *durch* $f(x) := a$ *stetig fortgesetzt.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $\left|\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n\right| < \varepsilon$ für $k \geq 1$ ist.

Zur Abkürzung setzen wir $S_k := \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n x^n &= S_1 x^{m+1} + (S_2 - S_1)x^{m+2} + \cdots + (S_k - S_{k-1})x^{m+k} \\ &= S_1(x^{m+1} - x^{m+2}) + S_2(x^{m+2} - x^{m+3}) + \cdots + S_k x^{m+k}.\end{aligned}$$

Da $|S_k| < \varepsilon$ für $k \geq 1$ und $x^{n+1} \leq x^n \leq 1$ für $x \in [0,1]$ ist, folgt:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n x^n\right| < \varepsilon \cdot x^{m+1} \leq \varepsilon \text{ für } x \in [0,1].$$

Aus dem Stetigkeits-Kriterium folgt nun, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig auf $[0,1]$ ist. ∎

Anwendungsbeispiele können wir erst im nächsten Kapitel geben.