Kapitel 13 Differentialgleichungen

§ 1 Typen und Methoden

Inhalt:

Differentialgleichungen, Lösungen, Anfangswertprobleme, Systeme von DGLn, Lipschitzbedingung, Existenz- und Eindeutigkeitssatz, getrennte Variable, lineare DGLn, Bernoullische DGLn, lineare Systeme, Fundamentalsysteme, Wronski-Determinanten, lineare DGLn 2. Ordnung.

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion $y = y(x)$ und ihre Ableitungen y', y'' ... vorkommen. Hat die Gleichung die Form

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

so spricht man von einer *impliziten Differentialgleichung*. Hat sie die Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung*.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung.

Beispiele.

1. $y'' = -\omega^2 y$ ist eine explizite DGL 2. Ordnung.
2. $(yy^{(5)})^2 + xy'' + \ln y = 0$ ist eine implizite DGL 5. Ordnung.

Wir werden hier im Wesentlichen mit expliziten DGLn arbeiten.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Unter einer *Lösung* der DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ versteht man eine n–mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\{(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \,:\, t \in I\} \subset B$.
2. Für alle $t \in I$ ist $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$.

Für implizite DGLn definiert man Lösungen analog.

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung, so nennt man die Kurve $\Phi : I \to B$ mit $\Phi(t) := (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ die zugehörige *Lösungskurve*.

Definition:

Ein Punkt $\mathbf{A}_0 = (t_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in (I \times \mathbb{R}^n) \cap B$ wird auch als ein *Satz von Anfangsbedingungen* zu der DGL bezeichnet. Unter dem zugehörigen *Anfangswertproblem* versteht man die Suche nach einer Lösung φ der DGL, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi(t_0) = a_0, \varphi'(t_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

Man nennt ein Anfangswertproblem *sachgemäß gestellt*, wenn es zu jedem Satz von Anfangsbedingungen eine eindeutig bestimmte lokale Lösung gibt, und wenn diese Lösung stetig von den Anfangsbedingungen abhängt (so daß das System bei kleinen Störungen stabil bleibt).

Beispiele.

1. Wir betrachten die DGL $y' = ky$ mit einer Konstanten $k \neq 0$. Als Anfangsbedingung sei $y(0) = 1$ gefordert.

   Das ist eine (homogene) lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die wir schon in Mathematik 1 (Kapitel 4, §7) behandelt haben. Wir wissen, daß es zu diesem Anfangswertproblem genau eine Lösung auf $\mathbb{R}$ gibt, nämlich $\varphi(t) = e^{kt}$.

   Zu jedem Satz $(0, c)$ von Anfangsbedingungen gibt es genau eine Lösung φ_c mit $\varphi_c(0) = c$, nämlich $\varphi_c(t) = ce^{kt}$. Da die Lösungen vom Parameter c (und damit von der Anfangsbedingung) stetig abhängen, ist das Problem sachgemäß gestellt.

2. Die DGL $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ verhält sich nicht so angenehm. Offensichtlich ist die Nullfunktion $\varphi_0(t) \equiv 0$ eine Lösung, aber auch jede Funktion $\varphi_c(t) := (t-c)^3$ löst die DGL. Also gehen durch jeden Punkt der x–Achse mindestens zwei Lösungskurven. Ein schlecht gestelltes Problem!

3. Die DGL $|y'| + |y| = 0$ besitzt nur die Nullfunktion als Lösung. Allgemeine Anfangswertprobleme sind dann überhaupt nicht mehr lösbar.

Unter einem *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung* versteht man ein System von n Gleichungen, in dem n unbekannte Funktionen $y_1, \dots, y_n$ und ihre ersten Ableitungen vorkommen. In der expliziten Version sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Eine *Lösung* ist dann ein System von Funktionen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ mit

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Wir schreiben ein solches System auch kurz in der Form

$$\vec{y}\,' = F(x, \vec{y}).$$

Diese Schreibweise erweist sich als besonders praktisch, wenn man mit *linearen Systemen* arbeitet:

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y},$$

mit einer Matrix-wertigen Funktion $A(x) = \big(a_{ij}(x) \mid i, j = 1, \dots, n\big)$.

Beispiel.

Das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

kann in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Wir kennen schon die Lösung dieses Systems unter der Anfangsbedingung $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$, nämlich $\varphi_1(t) = \sin(t)$ und $\varphi_2(t) = \cos(t)$.

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen einfachen DGLn n–ter Ordnung und den Systemen von DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System (**) zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Ist φ eine Lösung der DGL $(*)$, so ist $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$, und wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \ldots, \quad \varphi_n := \varphi^{(n-1)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \varphi'(t) = \varphi_2(t), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}'(t) &= \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi_n(t) \\ \text{und} \qquad \varphi_n'(t) &= \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

d.h., $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist eine Lösung des Systems (**).

Ist umgekehrt eine Lösung $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ des Systems gegeben, so setze man $\varphi := \varphi_1$. Dann ist

$$\varphi'(t) = \varphi_2(t), \quad \ldots, \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi_n(t)$$

und schließlich

$$\varphi^{(n)}(t) = \varphi_n'(t) = f(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)),$$

also φ Lösung von $(*)$.

Auf diese Weise kann man die Theorie der DGLn n–ter Ordnung auf die der Systeme 1. Ordnung zurückführen.

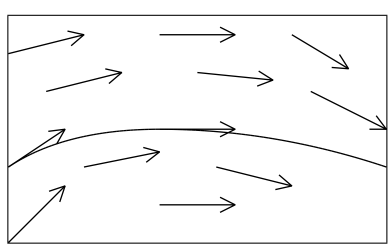
Betrachten wir also ein System $\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})$ (mit einer stetigen Abbildung $F : B \to \mathbb{R}^n$) und eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t)).$$

Für die zugehörige Lösungskurve $\boldsymbol{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ gilt:

$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = (1, \boldsymbol{\varphi}'(t)) = (1, F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))).$$

Im Falle $n = 1$ ist $F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ die „Steigung“ von $\boldsymbol{\varphi}$ zum Zeitpunkt t. Das durch F vorgegebene *Richtungsfeld* läßt den Verlauf der Lösungskurven schon ahnen.



Ein besonderer Fall liegt vor, wenn F nicht von t abhängt. Man spricht dann von einer *autonomen Differentialgleichung*: $\vec{y}\,' = F(\vec{y})$. Die Zuordnung $\vec{y} \mapsto F(\vec{y})$ ist ein Vektorfeld auf B. Eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der autonomen DGL wird auch als *Integralkurve* des Vektorfeldes bezeichnet. Der nicht-autonome Fall $\vec{y}\,' = F(t, \vec{y})$ ordnet sich dem unter, wenn man das Vektorfeld $V : (t, \vec{y}) \mapsto (1, F(t, \vec{y}))$ betrachtet. Die Integralkurve ist dann die Lösungskurve $\mathbf{\Phi}(t) = (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$.

Unter gewissen Voraussetzungen existieren eindeutig bestimmte Lösungskurven. Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und nach $y_1, \ldots, y_n$ sogar stetig differenzierbar.

Behauptung: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $K := I \times Q \subset B$, so gibt es eine Konstante $L \geq 0$, so daß gilt:

$$\|F(x, \mathbf{y}) - F(x, \mathbf{y}')\| \leq L \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| \quad \text{für } (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{y}') \in K.$$

BEWEIS: Sei $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ der aus den partiellen Ableitungen nach $y_1, \ldots, y_n$ gebildete Teil der Funktionalmatrix von F. Das ist eine $n \times n$-Matrix, und die Funktion $(x, \mathbf{y}) \mapsto \|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{y})\|$ ist stetig auf B. Da Q konvex ist, gilt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz: Zu $x \in I$ und $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Q$ gibt es ein $\mathbf{z}$ auf der Verbindungsstrecke von $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$ mit

$$\|F(x, \mathbf{y}) - F(x, \mathbf{y}')\| \leq \|\frac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{z})\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|.$$

Wir setzen dann einfach $L := \sup\{\|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{z})\| : (x, \mathbf{z}) \in K\}$. Da K kompakt ist, ist $0 \leq L < \infty$. Wenn F als Funktion von $y_1, \ldots, y_n$ nirgends konstant ist, dann ist sogar $L > 0$. ∎

Man nennt L eine *Lipschitz-Konstante* und sagt, daß F auf K einer *Lipschitz-Bedingung* genügt. Wenn man zu jedem Punkt $(x, \mathbf{y}) \in B$ eine Umgebung $U \subset B$ finden kann, auf der F einer Lipschitz-Bedingung genügt, so genügt F *lokal* der *Lipschitz-Bedingung.*

Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Abbildung $F : G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge lokal der Lipschitz-Bedingung.

Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ der DGL $\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *$t_0 \in I$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*
2. *I ist offen und maximal.*
3. *Die Integralkurve $\mathbf{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ verläuft in G von Rand zu Rand.*

Bedingung (1) bedeutet, daß φ das gegebene Anfangswertproblem löst, und Bedingung (2) bedeutet, daß die Lösung auf kein größeres Intervall fortgesetzt werden kann. Daß $\mathbf{\Phi}$ in G von Rand zu Rand läuft, ist etwas schwerer zu erklären. Gemeint ist Folgendes: Entweder ist $I = (t_-, t_+)$ unbeschränkt oder $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ wächst unbeschränkt oder die Werte $\mathbf{\Phi}(t)$ kommen dem Rand von G beliebig nahe. Das heißt **nicht**, daß $\lim\limits_{t\to t_+} \mathbf{\Phi}(t)$ existiert, wohl aber, daß $\mathbf{\Phi}(t)$ jede kompakte Teilmenge von G mit wachsendem t irgendwann verläßt.

Die Theorie der Differentialgleichungen ist eigentlich eine Sammlung unzähliger Spezialfälle, und man braucht fast jedesmal einen neuen trickreichen Ansatz, um die Lösung zu finden. Einige besonders einfache Typen von DGLn 1. Ordnung haben wir schon im 1. Semester behandelt, sie sollen hier noch einmal kurz angesprochen werden.

Beispiele.

1. Wir beginnen mit der DGL

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}\ ,$$

wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind. Man spricht von einer **DGL mit getrennten Variablen**. Ist g sogar stetig differenzierbar, so ist die Gleichung eindeutig lösbar.

Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $\varphi(t) \equiv y_0$ die einzige Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$. Deshalb setzen wir voraus, daß g auf J keine Nullstellen hat. Ist F eine Stammfunktion von f, G eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{g}$ und φ eine Lösung, so gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t)) \quad &\iff \quad \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = f(t) \\
&\iff \quad \int \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int f(t)\, dt \\
&\iff \quad \Big(\int \frac{1}{g(y)}\, dy\Big) \circ \varphi = \int f(t)\, dt \\
&\iff \quad G(\varphi(x)) = F(x) + c \\
&\iff \quad \varphi(x) = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Die Physiker haben dafür eine suggestivere, wenn auch etwas schwerer zu begründende Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\iff \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\iff \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\iff \quad G(y) = F(x) + c \\
&\iff \quad y = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Da $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ ist, ist G eine streng monotone Funktion, insbesondere also umkehrbar. Das rechtfertigt jeweils die letzte Folgerung.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $\quad y' = xy$. Dann ist $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$ definiert, und $g(y) = y$ können wir auf jedem Intervall J betrachten, das nicht die Null enthält. Wir erhalten die Stammfunktionen

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \text{ und } G(y) := \ln|y|, \text{ also } G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
y(x) &= \pm\exp(\frac{1}{2}x^2 + c) \\
&= C \cdot \exp(\frac{1}{2}x^2), \text{ mit } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung $y(x) \equiv 0$ mit ein. Liegt J in $\mathbb{R}_+$, so muß $C > 0$ gewählt werden, sonst $C < 0$.

Die Lösung mit Anfangwert $y(x_0) = y_0$ muß die Bedingung $y_0 = C \cdot \exp(x_0^2/2)$ erfüllt sein, also $\ln(C) = \ln(y_0) - x_0^2/2$. Damit ist

$$y(x) = \exp(\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \ln(y_0)).$$

2. Eine **lineare DGL 1. Ordnung** hat allgemein folgende Gestalt:

$$\boxed{y' + a(x)y = r(x).}$$

(a) Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom *homogenen* Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, daß $y(x) \neq 0$ für alle x ist. Dann gilt:

$$(\ln \circ |y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten c, die auch ≤ 0 sein darf.

(b) Nun betrachten wir den *inhomogenen* Fall ($r(x) \not\equiv 0$). Je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung unterscheiden sich um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat also die Gestalt
$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$
mit einer „partikulären Lösung“ $\varphi_p(t)$ der inhomogenen Gleichung. Die findet man z.B. über einen geeigneten Ansatz (Variation der Konstanten):
$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$$
Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL erhält man Bedingungen für $c(x)$ und damit
$$c(x) := \int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt.$$
Die Probe zeigt, daß y_p tatsächlich die inhomogene DGL löst. Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt
$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = (\int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt + c) \cdot e^{-A(x)}.$$

3. Unter einer **Bernoullischen Differentialgleichung** versteht man eine DGL der Form
$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 1},$$
mit stetigen Funktionen a, b auf einem Intervall $I = (c, d)$. Sei φ eine Lösung, die in der Nähe von x_0 positiv ist. Dann gilt:
$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(t)^\alpha.$$
Nun ist $\big(\varphi(t)^{1-\alpha}\big)' = (1-\alpha)\varphi(t)^{-\alpha}\varphi'(t)$. Teilt man die obige Gleichung durch $\varphi(t)^\alpha/(1-\alpha)$, so erhält man:
$$\big(\varphi(t)^{1-\alpha}\big)' = (1-\alpha)a(t)\varphi(t)^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t).$$
Das bedeutet, daß $\Phi(t) := \varphi(t)^{1-\alpha}$ Lösung der folgenden linearen DGL ist:
$$Y' = (1-\alpha)a(t)Y + (1-\alpha)b(t).$$
Umgekehrt ist für jede Lösung Φ dieser linearen DGL die Funktion $\varphi(t) = \Phi(t)^{1/(1-\alpha)}$ Lösung der Bernoulli-Gleichung.

Ein Spezialfall ist die sogenannte **logistische Differentialgleichung** (auch als **Differentialgleichung des beschränkten Wachstums** bezeichnet):
$$y' = ay - by^2,\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ y > 0.$$
Ist $\varphi(t)$ Lösung der logistischen DGL, so ist $\Phi(t) = \varphi(t)^{-1}$ Lösung der linearen DGL $Y' + aY = b$. Die homogene Gleichung $Y' + aY = 0$ hat die Lösung

$Y(t) = c \cdot e^{-at}$. Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung können wir die konstante Funktion $y_p(x) = b/a$ nehmen. Also können wir $\Phi(t) = ce^{-at} + \dfrac{b}{a}$ setzen. Dann ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Phi(t)} = \frac{a}{b + ace^{-at}}\,.$$

Wir wollen nun **lineare Systeme 1. Ordnung** untersuchen:

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x).$$

Wie üblich beginnt man mit dem **homogenen** Fall $\vec{b}(x) \equiv 0$. Ist A auf einem Intervall I definiert und stetig, so ist $F(x, \vec{y}) := A(x) \cdot \vec{y}$ auf $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und genügt dort der Lipschitz-Bedingung. Daher sind die Lösungen auf ganz I definiert, und man sieht auch sofort, daß sie einen (reellen) Vektorraum $\mathcal{L}$ bilden.

Für ein festes $t_0 \in \mathbb{R}$ sei $E : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $E(\varphi) := \varphi(t_0)$. [1] Dann ist E offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz folgt, daß E bijektiv, also ein Isomorphismus von $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist.

> *Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Systems von n DGLn ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von $\mathcal{L}$ bezeichnet man auch als *Fundamentalsystem* (von Lösungen) und die Matrix

$$X(t) := \Big(\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)\Big)$$

als *Fundamentalmatrix*.

Definition:

Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein (beliebiges) System von n Lösungen der DGL $\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y}$, so heißt die Funktion $W(t) := \det\Big(\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)\Big)$ die zugehörige *Wronski-Determinante*.

Wir wollen eine interessante Gleichung für die Wronski-Determinante herleiten, müssen aber zuvor einige Tatsachen aus der Determinantentheorie nachtragen.

Sei $A = \Big(a_{ij} \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, n\Big) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $S_{ij}(A)$ die Streichungsmatrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A entsteht. Die Zahl

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}(A)$$

[1] „E“ steht für *evaluate* (auswerten).

haben wir als *Cofaktor*, *algebraisches Komplement* oder *Adjunkte* bezeichnet. Der Laplacesche Entwicklungssatz besagt: Für beliebiges i ist

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Man beachte dabei, daß der Koeffizient a_{ij} zu A_{ij} nichts beiträgt.

Definition:

$\operatorname{ad}(A) := \left(A_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right)$ heißt *adjungierte Matrix* zu A.

Hilfssatz

1. *Ist* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, *so ist* $(\det A)E_n = A \cdot \operatorname{ad}(A)^t$.
2. *Ist* $t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *differenzierbar, so ist*

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

Beweis: 1) Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz ist $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\operatorname{ad}(A))_{ij}$, also

$$(A \cdot \operatorname{ad}(A)^t)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \det(A)$$

und (für $k \neq i$)

$$(A \cdot \operatorname{ad}(A)^t)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = \det A^*,$$

wobei A^* aus A entsteht, indem man in A die k-te Zeile durch die i-te Zeile ersetzt. Dann ist nämlich $a^*_{kj} = a_{ij}$ und $A^*_{kj} = A_{kj}$. Weil aber in A^* eine Zeile doppelt auftritt, ist $\det A^* = 0$.

2) Weil alle a_{kj} in allen A_{ij} nicht vorkommen, ist

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{kj}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{kj}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} A_{ij} = A_{kj},$$

nach Kettenregel also

$$(\det\circ A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t)) \cdot a'_{ij}(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

■

Formel von Liouville

Ist $W(t)$ die Wronski-Determinante eines Systems $X(t)$ von Lösungen der DGL $\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y}$, so ist $W'(t) = W(t) \cdot \mathrm{Spur}(A(t))$. Ist $X(t)$ sogar eine Fundamentalmatrix der DGL, so gilt für beliebiges (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur} A(s)\, ds\right).$$

BEWEIS: Sei $X(t) = \big(x_{ij} \,|\, i,j = 1,\dots,n\,\big)$ und $W(t) = \det X(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\det\circ X)'(t) \\ &= \sum_{i,j} x'_{ij}(t) \cdot (\mathrm{ad}(X))_{ij}(t) \\ &= \sum_{i,j} (X'(t)_{ij} \cdot (\mathrm{ad}(X)^{\,t}(t))_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^{\,t}(t))_{ii} \\ &= \mathrm{Spur}(X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^{\,t}(t)). \end{aligned}$$

Da die Spalten von $X(t)$ Lösungen der DGL sind, ist $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$, also

$$\begin{aligned} W'(t) &= \mathrm{Spur}(A(t) \cdot (X(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^{\,t}(t))) \\ &= \mathrm{Spur}(A(t) \cdot (\det X(t) \cdot E_n)) \\ &= W(t) \cdot \mathrm{Spur}(A(t)). \end{aligned}$$

Ist $X(t)$ sogar ein Fundamentalsystem, so ist $X(t)$ für alle t invertierbar, also $W(t) \neq 0$ und

$$(\ln\circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \mathrm{Spur}(A(t)),$$

und damit

$$\ln(\frac{W(t)}{W(t_0)}) = \ln(W(t)) - \ln(W(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}(A(s))\, ds.$$

Wendet man exp an, so erhält man die Liouville-Formel. ■

$W(t)$ erfüllt also die lineare DGL erster Ordnung

$$Y' = \mathrm{Spur}(A(x)) \cdot Y.$$

Ist nun W nicht die Null-Lösung, so kann W keine Nullstelle haben, wegen des Eindeutigkeitssatzes.

Folgerung

Die Wronski-Determinante $W(t) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t)$ verschwindet entweder identisch oder nirgends.

Ist $W(t_0) \neq 0$ für ein t_0, so bilden die φ_i ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben!

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x)$$

gewinnt man mit der Methode der *Variation der Kostanten.*

Ist $X(t) = (\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t))$ eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n \cdot \vec{\varphi}_n(t).$$

Die Methode der Variation der Konstanten besagt nun, daß wir einen Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen sollen, bei dem wir die Konstanten durch Funktionen ersetzen:

$$\vec{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n(t) \cdot \vec{\varphi}_n(t) = X(t) \cdot \vec{c}(t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p\,'(t) &= X'(t) \cdot \vec{c}(t) + X(t) \cdot \vec{c}\,'(t) \\ &= A(t) \cdot X(t) \cdot \vec{c}(t) + X(t) \cdot \vec{c}\,'(t) \\ &= A(t) \cdot \vec{\varphi}_p(t) + X(t) \cdot \vec{c}\,'(t). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} \quad &\Longleftrightarrow \quad X(t) \cdot \vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t) \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{c}\,'(t) = X(t)^{-1} \cdot \vec{b}(t) \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{c}(t) = \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s)\, ds + \vec{k}, \end{aligned}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{k}$, den wir gleich Null setzen können. Das bedeutet:

$$\vec{\varphi}_p(t) = X(t) \cdot \left(\int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s)\, ds \right).$$

Wir betrachten jetzt eine (skalare) lineare DGL 2. Ordnung:

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).}$$

Man kann ihr ein System 1. Ordnung zuordnen,

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x),$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}.$$

$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$ sei eine Fundamentalmatrix, $W(t) = \det X(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ die Wronski-Determinante. Die Matrix $X(t)^{-1}$ kann durch die Formel

$$X(t)^{-1} = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Also ist

$$X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s) = \frac{1}{W(s)} \cdot \begin{pmatrix} -y_2(s)r(s) \\ y_1(s)r(s) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $\vec{\varphi}_p(t) = X(t) \cdot \left(\int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s)\, ds \right)$ ist Lösung des Systems, und die 1. Komponente davon ist Lösung der skalaren Gleichung. So erhalten wir:

$$\boxed{\varphi_p(t) = y_1(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{-y_2(s)r(s)}{W(s)}\, ds + y_2(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)}\, ds.}$$

Dabei haben wir die zweite Zeile des erhaltenen Spaltenvektors ignoriert. Man beachte, daß es sich nur um einen **Ansatz** handelt. Es ist also ratsam, hinterher die Probe zu machen. Dafür darf man meist die Integrationskonstanten weglassen.

Beispiel.

Wir betrachten die DGL $\quad y'' + y' - 2y = e^x$ mit konstanten Koeffizienten.

Das charakteristische Polynom $p(x) = x^2 + x - 2$ hat die beiden reellen Nullstellen $x = 1$ und $x = -2$. Also erhalten wir als Fundamentalsystem für die homogene DGL:

$$y_1(x) = e^x \text{ und } y_2(x) = e^{-2x}.$$

Als nächstes berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}.$$

Dann ist

$$\int \frac{-y_2(t)r(t)}{W(t)}\, dt = \int \frac{-e^{-t}}{-3e^{-t}}\, dt = \int \frac{1}{3}\, dt = \frac{1}{3}x + c_1$$

und

$$\int \frac{y_1(t)r(t)}{W(t)}\, dt = \int \frac{e^{2t}}{-3e^{-t}}\, dt = -\frac{1}{3}\int e^{3t}\, dt = -\frac{1}{9}e^{3x} + c_2.$$

Also erhalten wir als partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x + c.$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{e^x}{9}(3x-1) + c, \\ y_p'(x) &= \frac{e^x}{9}(3x+2) \\ \text{und} \quad y_p''(x) &= \frac{e^x}{9}(3x+5), \end{aligned}$$

also

$$y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) = \frac{e^x}{9}(3x+5+3x+2-6x+2) - 2c = e^x - 2c.$$

Mit $c = 0$ wird die DGL erfüllt.

§ 2 Die Laplacetransformation

Inhalt:

Funktionen mit höchstens exponentiellem Wachstum, die Laplacetransformation, elementare Eigenschaften, L-Funktionen, die Transformierte der Ableitung, periodische Funktionen, komplexe Umkehrformel, Methoden der Rücktransformation, Umkehrformel mit Residuen, Anwendung auf die Lösung von DGLn.

Wir betrachten Funktionen f mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ (etwa, um Einschaltvorgänge zu berücksichtigen) und wollen so etwas ähnliches wie eine Fouriertransformation anwenden. Leider existiert die Fourier-Transformierte von f i.a. nicht. Wir erzwingen die Konvergenz des Fourier-Integrals, indem wir einen „konvergenzerzeugenden Faktor" einführen, d.h. wir ersetzen $f(t)$ durch $f(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Dann ist

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty f(t)e^{-(\alpha + \mathrm{j}\,\omega)t}\,dt.$$

Dieses Integral existiert z.B., wenn $f(t)$ stückweise stetig und $f(t)e^{-\alpha t}$ absolut integrierbar ist.

Definition:

Eine (stückweise stetige) Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \to \mathbb{C}$ *wächst höchstens exponentiell von der Ordnung* γ, wenn es Konstanten $M > 0$ und $T > 0$ gibt, so daß für $t \geq T$ gilt:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}.$$

Existenz der Laplacetransformation

Wenn die (stückweise stetige) Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ *höchstens exponentiell von der Ordnung* γ *wächst, dann konvergiert das uneigentliche Integral*

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(z) > \gamma$.

Beweis: Wir schreiben z in der Form $z = x + \mathrm{j}\,y$, mit $x > \gamma$. Dann gilt für $t \geq T$:

$$|f(t)e^{-zt}| = |f(t)| \cdot e^{-xt} \leq M \cdot e^{(\gamma - x)t} = M \cdot e^{-|\gamma - x|t}.$$

Diese Funktion ist absolut integrierbar, denn es ist

$$\int_T^{T_1} e^{-|\gamma - x|t}\,dt = \left(-\frac{1}{|\gamma - x|} \cdot e^{-|\gamma - x|t}\right)\Big|_T^{T_1} = \frac{1}{|\gamma - x|} \cdot (e^{-|\gamma - x|T} - e^{-|\gamma - x|T_1}),$$

und dieser Ausdruck bleibt beschränkt für $T_1 \to \infty$. ∎

Definition:

Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Das uneigentliche Integral

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

heißt *Laplace-Transformierte* von f, sofern es für ein $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Man schreibt auch

$$F(z) = \mathcal{L}[f(t)],$$

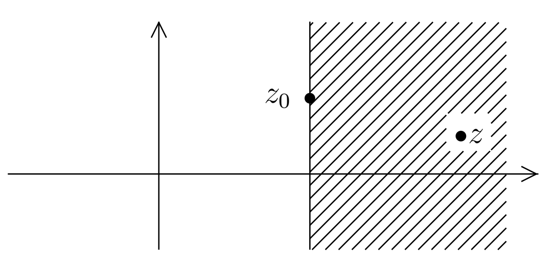
oder – wenn keine Verwechslungsgefahr besteht – wie bei der Fourier-Transformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z).$$

$f(t)$ heißt *Urbildfunktion*, $F(z)$ *Bildfunktion*.

Bereiche absoluter Konvergenz

Wenn die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $f(z)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, dann tut sie das auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(z_0)$.



Beweis: Sei $z_0 := u + \mathrm{j}\,v$ und $z = x + \mathrm{j}\,y$, mit $x \geq u$. Dann ist

$$|e^{-zt}| = e^{-xt} \leq e^{-ut} = |e^{-z_0 t}|.$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Das Infimum α aller reeller Zahlen $x \geq 0$, so daß

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

für $\text{Re}(z) > x$ absolut konvergiert, heißt die *Abszisse absoluter Konvergenz* für $\mathcal{L}[f(t)]$. Die Halbebene, die links von der vertikalen Geraden $\{z \mid \text{Re}(z) = \alpha\}$ begrenzt wird, ist das genaue Konvergenzgebiet des Laplace-Integrals. Der Rand gehört entweder ganz dazu oder überhaupt nicht. Da $f(t) = 0$ für $t < 0$ ist, kann auch die ganze Ebene als Konvergenzgebiet vorkommen.

Beispiele.

1. Sei $f(t) \equiv 1$. Da wir nur Funktionen betrachten, die $= 0$ für $t < 0$ sind, lassen wir diese zusätzliche Bedingung meistens weg.

   Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^R 1 \cdot e^{-zt}\,dt &= \left(-\frac{1}{z}e^{-zt}\right)\Big|_0^R \\ &= \frac{1}{z}(1 - e^{-zR}),\end{aligned}$$

   und dieser Ausdruck konvergiert für $\text{Re}(z) > 0$ gegen $\dfrac{1}{z}$. Also haben wir:

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{z} \qquad (\text{für } \text{Re}(z) > 0)$$

2. Die Funktion $f(t) := e^{at}$ wächst höchstens exponentiell von der Ordnung a. Also können wir die Laplace-Transformierte bilden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at}e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{(a-z)t}\,dt \\ &= \left(\frac{1}{a-z}e^{(a-z)t}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{a-z}(0-1) = \frac{1}{z-a},\end{aligned}$$

   falls $\text{Re}(a-z) < 0$ ist, also $\text{Re}(z) > a$.

3. Sei $f(t) := \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}\,\omega t} + e^{-\mathrm{j}\,\omega t})$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(\mathrm{j}\,\omega - z)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(\mathrm{j}\,\omega + z)t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega - z}e^{(\mathrm{j}\,\omega - z)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{-(\mathrm{j}\,\omega + z)}e^{-(\mathrm{j}\,\omega + z)t}\Big|_0^\infty\right] \\
&= \frac{1}{2}[-\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega - z} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega + z}] \\
&= \frac{z}{z^2 + \omega^2},
\end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}(\mathrm{j}\,\omega - z) < 0$ und $\mathrm{Re}(\mathrm{j}\,\omega + z) > 0$, also $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Analog erhält man: $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \dfrac{\omega}{z^2 + \omega^2}$.

Bemerkung. Die Laplace-Transformierte

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

ist als Parameterintegral im Bereich der absoluten Konvergenz eine holomorphe Funktion von z. (Zum genauen Beweis vgl. G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, 3. Kap., §2, Satz 1.). Es kann allerdings vorkommen – wie die vorangegangenen Beispiele zeigen – , daß $F(z)$ auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann. Man wird dann auch die fortgesetzte Funktion als Laplace-Transformierte von f bezeichnen.

Beschränkt man sich auf reelle Parameter s, so endet der Existenzbereich von $F(s)$ stets bei der Abszisse der absoluten Konvergenz.

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Sei $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)$ *und* $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(z)$. *Dann gilt:*

1. *Linearität:* $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$.
2. *Ähnlichkeitssatz:*

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot F(\frac{1}{a}z). \quad \textit{(für } a \in \mathbb{R},\ a > 0\ \textit{)}$$

Eigenschaften der Laplace-Transformation (Forts.)

3. *Verschiebungssatz (Verschiebung im Zeitbereich):*

$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-zT} \cdot F(z). \qquad (\text{für } T \in \mathbb{R}\ )$$

(Man beachte, daß $f(t-T)$ links vom Nullpunkt abgeschnitten werden muß!)

4. *Dämpfungssatz (Verschiebung im Bildbereich):*

$$e^{-ct} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s+c). \qquad (\text{für } c \in \mathbb{C}\ )$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(at)e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(at)e^{-\frac{z}{a}at} \cdot a\,dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{z}{a}\tau}\,d\tau \\
&= \frac{1}{a}F(\frac{z}{a}).
\end{aligned}$$

3) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t-T)] &= \int_0^\infty f(t-T)e^{-zt}\,dt \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-z(\tau+T)}\,d\tau \\
&= e^{-zT} \cdot \int_0^\infty f(\tau)e^{-z\tau}\,d\tau \\
&= e^{-zT} \cdot F(z).
\end{aligned}$$

4) Es ist

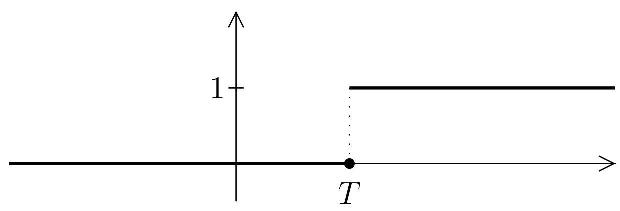
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{-ct}f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-(z+c)t}\,dt \\
&= F(z+c).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Beispiele.

1. Als erstes betrachten wir die Sprungfunktion

$$\sigma_T(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq T \\ 1 & \text{für } t > T. \end{cases}$$



Ist $H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$ die *Heaviside-Funktion*, so kann man schreiben:

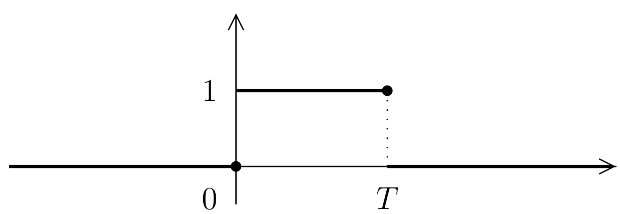
$$\sigma_T(t) = H(t - T).$$

Für die Laplace-Transformation besteht kein Unterschied zwischen H und der Funktion 1. Also gilt:

$$\mathcal{L}[\sigma_T(t)] = \mathcal{L}[H(t-T)] = e^{-zT} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{1}{z} \cdot e^{-zT}.$$

2. Als nächstes betrachten wir den Rechteck-Impuls

$$\pi_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

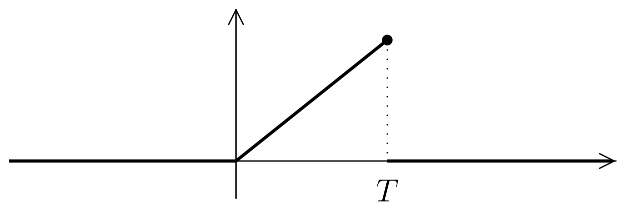


Es ist $\pi_T(t) = \sigma_0(t) - \sigma_T(t)$, also

$$\mathcal{L}[\pi_T(t)] = \frac{1}{z}(1 - e^{-zT}).$$

3. Nun untersuchen wir die folgende Zackenfunktion:

$$z_{a,T}(t) := \begin{cases} at & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \text{ mit } T > 0.$$



Ist $g(t) = at$, so ist

$$(g \cdot H)(t) - (g \cdot H)(t-T) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ at & \text{für } 0 < t \leq T \\ aT & \text{für } t > T. \end{cases}$$

Also folgt:

$$z_{a,T}(t) = (g \cdot H)(t) - (g \cdot H)(t-T) - aT \cdot \sigma_T(t).$$

Wir können jetzt die Laplace-Transformierte von $z_{a,T}$ bestimmen, wenn wir $\mathcal{L}[t]$ kennen. Es ist aber

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \int_0^\infty te^{-zt}\,dt \\ &= \left(t \cdot (-\frac{1}{z}e^{-zt})\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zt}\,dt \\ &= -\frac{1}{z^2}e^{-zt}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{z^2}, \end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[z_{a,T}(t)] &= \mathcal{L}[g(t)] - \mathcal{L}[g(t-T)] - aT \cdot \mathcal{L}[\sigma_T(t)] \\ &= a \cdot \mathcal{L}[t] - a \cdot \mathcal{L}[t-T] - aT\mathcal{L}[\sigma_T(t)] \\ &= \frac{a}{z^2} - a \cdot e^{-zT} \cdot \frac{1}{z^2} - aT \cdot e^{-zT} \cdot \frac{1}{z} \\ &= \frac{a}{z^2}(1 - e^{-zT} - zTe^{-zT}). \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt, wie sich *Differentiation und Integration im Zeitbereich* auswirkt. Dabei wollen wir die Klasse derjenigen Funktionen, die wir Laplace-transformieren können, geringfügig erweitern:

Definition:

Unter einer L-*Funktion* verstehen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f(t) = 0$ für $t < 0$.
2. f ist stückweise stetig für $t > 0$.
3. f ist bei 0 uneigentlich integrierbar.
4. Das Laplace-Integral
$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$
existiert für wenigstens ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ (und dann natürlich für alle ζ mit $\mathrm{Re}(\zeta) > \mathrm{Re}(z)$).

Selbstverständlich ist jede stückweise stetige Funktion mit höchstens exponentiellem Wachstum eine L-Funktion.

Die Laplace-Transformierte der Ableitung

$f(t)$ sei $= 0$ für $t < 0$ und differenzierbar für $t > 0$, und f' sei eine L-Funktion.

Dann ist f eine stückweise stetige Funktion von höchstens exponentiellem Wachstum, und mit $F(z) := \mathcal{L}[f(t)]$ gilt:

$$f'(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; z \cdot F(z) - f(0+).$$

Beweis: Da f' eine L-Funktion ist, existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^t f'(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}(f(t) - f(\varepsilon)),$$

und damit existiert auch

$$f(0+) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon),$$

und es ist

$$\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(0+).$$

Weiterhin existiert nach Voraussetzung für ein $z_0 = x_0 + \mathrm{j}y_0$ mit $x_0 > 0$ das Integral

$$\int_0^\infty f'(s)e^{-z_0 s}\,ds.$$

Also ist $M(t) := \int_0^t |f'(s)|e^{-x_0 s}\,ds$ durch eine Konstante $M > 0$ beschränkt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-x_0 t}| &= |\big(\int_0^t f'(s)\,ds + f(0*)\big)\cdot e^{-x_0 t}| \\
&\le \int_0^t |f'(s)|e^{-x_0 s}\,ds + |f(0+)e^{-x_0 t}| \text{ (weil } e^{-x_0 t} \le e^{-x_0 s} \text{ für } s \le t) \\
&= M(t) + |f(0+)e^{-x_0 t}| \ \le\ M + |f(0+)e^{-x_0 t}|,
\end{aligned}$$

also $|f(t)| \le \widetilde{M}\cdot e^{x_0 t}$, mit $\widetilde{M} = M + |f(0+)|$. Damit wächst f höchstens exponentiell von der Ordnung x_0.

Ist $x := \mathrm{Re}(z) > x_0$, so ist $|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|e^{-x_0 t}\cdot e^{-(x-x_0)t} \le M\cdot e^{-(x-x_0)t}$, und dieser Ausdruck strebt für $t \to \infty$ gegen Null. Mit partieller Integration folgt nun:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}\,dt \\
&= f(t)e^{-zt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-ze^{-zt})\,dt \\
&= -f(0+) + z\cdot\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\
&= -f(0+) + z\cdot F(z).
\end{aligned}$$

∎

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht:

Folgerung

Sei $f(t)$ für $t > 0$ n-mal differenzierbar, und $f^{(n)}$ eine L-Funktion. Dann ist auch f eine L-Funktion, und für die Laplace-Transformierte $F(z)$ von f gilt:

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^n\cdot F(z) - z^{n-1}\cdot f(0+) - z^{n-2}\cdot f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

Die Laplace-Transformierte des Integrals

Sei $f(t)$ stetig für $t > 0$ und von höchstens exponentiellem Wachstum. Es existiere $f(0+)$ und damit die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $f(t)$. Dann existiert auch die Laplace-Transformierte von

$$h(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau, \qquad \textit{und es gilt:} \quad h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{z}F(z).$$

BEWEIS: Da $h'(t) = f(t)$ für $t > 0$ ist, folgt aus den vorangegangenen Sätzen, daß die Laplace-Transformierte von h existiert. Außerdem ist h in $t = 0$ stetig, mit $h(0) = 0$.

Also ist $F(z) = z \cdot \mathcal{L}[h(t)]$ und $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{z}F(z)$. ∎

Beispiele.

1. Die Funktion $f(t) = t^n$ erfüllt alle nötigen Voraussetzungen. Also ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^{n-1}] &= \mathcal{L}[(\frac{1}{n}t^n)'] \\ &= \frac{1}{n}(z \cdot \mathcal{L}[t^n] - 0) \\ &= \frac{z}{n} \cdot \mathcal{L}[t^n].\end{aligned}$$

Nachdem $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{z^2}$ ist, folgt aus der obigen Reduktionsformel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

2. Es ist $(\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$.

Also ist

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{z} \cdot \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{z(z^2+4)}.$$

Schließlich betrachten wir noch die Laplace-Transformation von periodischen Funktionen: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ periodisch mit Periode T. Dann gilt für die Laplace-Transformierte:

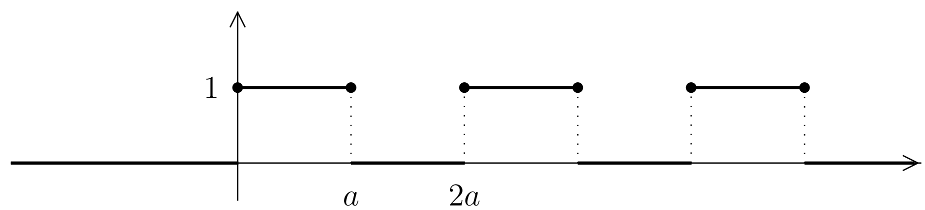
$$\begin{aligned}F(z) &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-zt}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(t+nT)e^{-z(t+nT)}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(t)e^{-zt}e^{-znT}\,dt \\ &= \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-znT}\right) \cdot \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt.\end{aligned}$$

Der Vorfaktor ist eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-znT} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{zT}}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-zT}}.$$

Beispiel.

Sei $a > 0$ und $f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2na \le t \le (2n+1)a \\ 0 & \text{für } (2n+1)a < t < (2n+2)a. \end{cases}$



Dann ist

$$\int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt = \int_0^a e^{-zt}\,dt = \left(\frac{1}{-z}\cdot e^{-zt}\right)\Big|_0^a = -\frac{1}{z}(e^{-az}-1),$$

also

$$F(z) = \frac{1-e^{-az}}{z(1-e^{-2az})}.$$

Aus den bekannten Transformationen kann man weitere ableiten:

Beispiele.

1. Es gilt:

$$\frac{1}{z-a} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}$$

$$\text{und}\quad \frac{1}{z-b} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{bt}.$$

Da $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1/(a-b)}{z-a} - \dfrac{1/(a-b)}{z-b}$ ist, folgt:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}.$$

2. Ist α positiv, so hat $t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$ höchstens exponentielles Wachstum, ist also Laplace-transformierbar. Mit der Substitution $u(t) = zt$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^\alpha] &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{z}\int_0^\infty \left(\frac{u(t)}{z}\right)^\alpha e^{-u(t)}\,u'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{z}\int_0^\infty \left(\frac{u}{z}\right)^\alpha e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{z^{\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{z^{\alpha+1}}\cdot\Gamma(\alpha+1),
\end{aligned}$$

denn es ist ja $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$.

Mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ folgt:

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2z\sqrt{z}}.$$

Wir wollen uns nun mit der Rücktransformation befassen:

Sei f stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum:

$$|f(t)| \le M\cdot e^{\gamma t},\ \text{für große } t.$$

Außerdem sei natürlich $f(t) = 0$ für $t < 0$. Ist $x > \gamma$ fest, aber beliebig gewählt, so ist auch $f_x(t) := e^{-xt}f(t)$ stückweise glatt und $= 0$ für $t < 0$. Außerdem ist f_x absolut integrierbar. Daher ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f_x}(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty f_x(t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-(x+\mathrm{j}\,\omega)t}\,dt \\
&= F(x+\mathrm{j}\,\omega),
\end{aligned}$$

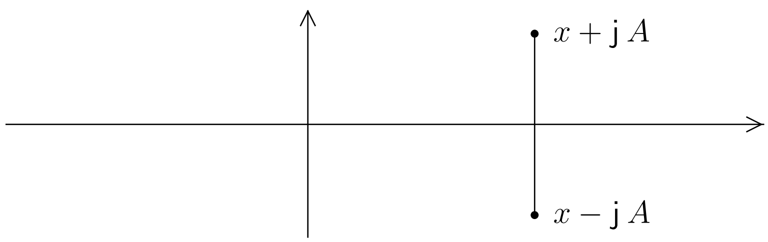
wenn wir mit $F(z)$ die Laplace-Transformierte von f bezeichnen. Weil f_x die Voraussetzungen des Fourier-Integral-Theorems erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f_x(t-) + f_x(t+)) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\widehat{f_x}(\omega)e^{\mathrm{j}\,\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}F(x+\mathrm{j}\,\omega)e^{\mathrm{j}\,\omega t}\,d\omega,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f(t-)+f(t+)) &= \frac{e^{xt}}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} F(x+\mathsf{j}\,\omega)e^{\mathsf{j}\,\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} F(x+\mathsf{j}\,\omega)e^{(x+\mathsf{j}\,\omega)t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi\mathsf{j}}\lim_{A\to\infty}\int_{x-\mathsf{j}\,A}^{x+\mathsf{j}\,A} F(z)e^{zt}\,dz,
\end{aligned}$$

wobei über den Weg $\omega \mapsto x+\mathsf{j}\,\omega$ komplex integriert wird.



Damit haben wir bewiesen:

Komplexe Umkehrformel

Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum, $F(z)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$, mit γ als Abszisse der absoluten Konvergenz. Dann ist

$$\frac{1}{2}\big(f(t-)+f(t+)\big) = \frac{1}{2\pi\mathsf{j}}\,\text{C.H.}\int_{x-\mathsf{j}\,\infty}^{x+\mathsf{j}\,\infty} F(z)e^{zt}\,dz.$$

Die Integration ist über die Gerade $\{z \mid \mathrm{Re}(z)=x\}$ zu erstrecken, wobei $x>\gamma$ beliebig gewählt werden kann. Ist f in t stetig, so steht auf der linken Seite der Gleichung einfach nur der Wert $f(t)$.

Die komplexe Umkehrformel kann nur auf solche holomorphen Funktionen angewandt werden, die Laplace-Transformierte sind. Wir hatten mehrfach eine gewisse Analogie zur Theorie der Potenzreihen festgestellt. Man kann sich nun fragen, ob jede holomorphe Funktion, die auf einer rechten Halbebene holomorph ist, schon automatisch die Laplace-Transformierte einer geeigneten Urbildfunktion ist. Leider gilt das nicht, es lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben.

Das Problem, ein vollständiges Kriterium dafür anzugeben, wann eine holomorphe Funktion eine Laplace-Transformierte ist, ist ungelöst. Es gibt bis jetzt nur hinreichende Kriterien. So reicht es z.B., wenn $F(x+\mathsf{j}\,y)$ auf jeder vertikalen Geraden absolut integrierbar ist und lokal gleichmäßig in x für $|y|\to\infty$ gegen Null konvergiert. Etwas konkreter ist folgender Satz:

Darstellbarkeitskriterium

Sei $F(z)$ in der Halbebene $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > x_1 \geq 0\}$ holomorph und von der Gestalt

$$F(z) = \frac{c}{z^\alpha} + \frac{g(z)}{z^{1+\varepsilon}},$$

mit $0 < \alpha \leq 1$, $\varepsilon > 0$ und einer für $\mathrm{Re}(z) \geq x_1 + \delta$, $\delta > 0$, beschränkten Funktion g.

Dann ist $F(z)$ die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$.

Zum Beweis vgl. Doetsch, 7. Kap., §2, Satz 4.

Wir kommen nun zu den verschiedenen Methoden, die Rück-Transformation praktisch durchzuführen. **Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen:**

Die folgende Tabelle kann benutzt werden:

$F(z)$		$f(t)$
$\frac{1}{z}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	1
$\frac{1}{z-a}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	e^{at}
$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
$\frac{1}{z^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	t
$\frac{1}{z^n}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$\frac{z}{z^2+\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sin(\omega t)$

$F(z)$		$f(t)$
$\frac{1}{z}e^{-zT}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sigma_T(t)$
$\frac{1}{z}(1-e^{-zT})$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\pi_T(t)$
$\frac{2}{z(z^2+4)}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sin^2 t$
$\arctan(\frac{\omega}{z})$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\frac{\sin(\omega t)}{t}$
$\frac{z}{z^2-\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\cosh(\omega t)$
$\frac{\omega}{z^2-\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sinh(\omega t)$
$\frac{1}{z\sqrt{z}}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

Die Formel $\frac{\sin(\omega t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \arctan(\frac{\omega}{z})$ haben wir nicht nachgewiesen, dafür sind weitere Sätze erforderlich und man muß dazu wissen:

$$\arctan(z) = \frac{1}{2\mathrm{j}} \cdot \log \frac{1 + \mathrm{j}\,z}{1 - \mathrm{j}\,z}$$

auf der Halbebene $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Rücktransformation durch Partialbruch-Zerlegung

Diese Methode ist anwendbar, wenn die gegebene Bildfunktion eine rationale Funktion der Gestalt

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomen P und Q mit $\deg(P) < \deg(Q)$ ist. Wir werden etwas später untersuchen, wann man der Funktion F ansehen kann, daß sie eine Laplace-Transformierte ist.

Sind $a_1, \ldots, a_k$ die (komplexen) Nullstellen des Nenner-Polynoms $Q(z)$, mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$, so gilt:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{m_i} \frac{A_{i\nu}}{(z - a_i)^\nu},$$

mit geeigneten komplexen Koeffizienten $A_{i\nu}$.

Man braucht nun lediglich die Formel

$$\frac{1}{(z-a)^n} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{z^n}] = e^{at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Beispiel.

Sei $F(z) := \dfrac{2z^2 - 9z + 19}{(z+3)(z-1)^2}$.

Die Partialbruchzerlegung hat die Gestalt

$$F(z) = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}\,.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{res}_{-3}(F(z)) = \lim_{z\to-3} \frac{2z^2 - 9z + 19}{(z-1)^2} = 4,\\
B &= \mathrm{res}_1(F(z)) = \lim_{z\to 1} \left[\frac{2z^2 - 9z + 19}{z+3}\right]'\\
&= \lim_{z\to 1} \frac{(4z-9)(z+3) - (2z^2 - 9z + 19)}{(z+3)^2} = \frac{(-5)4 - 12}{16} = -2,\\
\text{und } C &= \lim_{z\to 1} F(z)(z-1)^2 = \lim_{z\to 1} \frac{2z^2 - 9z + 19}{z+3} = \frac{2 - 9 + 19}{4} = 3\,,
\end{aligned}$$

also

$$F(z) = \frac{4}{z+3} - \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

Daraus folgt:

$$F(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\; 4e^{-3t} - 2e^t + 3te^t.$$

Rücktransformation mit Residuenkalkül

Sei $F(z)$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, so daß $z \cdot F(z)$ für $z \to \infty$ beschränkt bleibt. Dann ist F außerhalb einer genügend großen Kreisscheibe holomorph, und es gibt dort eine Laurententwicklung

$$z \cdot F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}.$$

Also ist

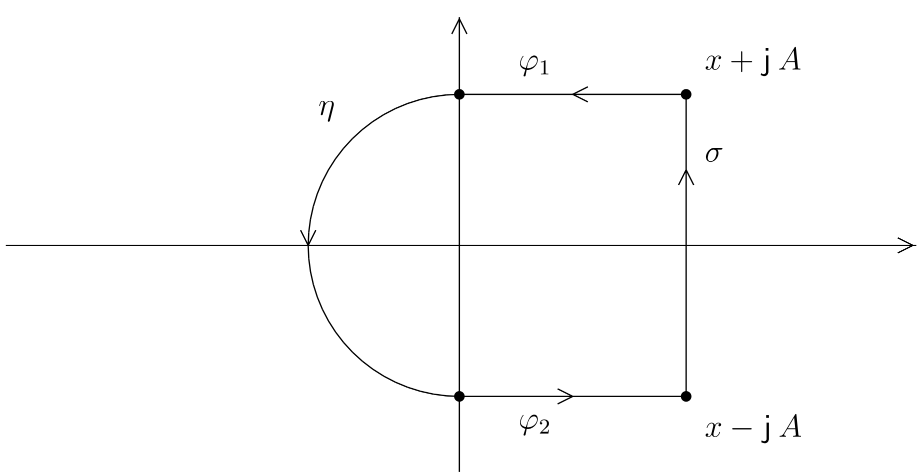
$$F(z) = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} z^{-n},$$

und das bedeutet, daß $F(z)$ eine Laplace-Transformierte ist. (Darstellbarkeitskriterium)

Ist $F(z)$ holomorph in der Halbebene $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > x_1 \geq 0\}$, so erhält man die Urbildfunktion $f(t)$ durch die komplexe Umkehrformel:

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \cdot \lim_{A\to\infty} \int_{x-\mathrm{j}\,A}^{x+\mathrm{j}\,A} F(z) e^{zt}\, dz.$$

Wir betrachten nun folgende Figur:



Dabei sei

$$\begin{array}{rrcll} & \sigma(\tau) & := & x + \mathrm{j}\,\tau, & (-A \le \tau \le A) \\ & \varphi_1(\tau) & := & (x-\tau) + \mathrm{j}\,A, & (0 \le \tau \le x) \\ & \varphi_2(\tau) & := & \tau - \mathrm{j}\,A, & (0 \le \tau \le x) \\ \text{und} & \eta(\tau) & := & Ae^{\mathrm{j}\,\tau}, & (\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{3\pi}{2}). \end{array}$$

$C := \sigma + \varphi_1 + \eta + \varphi_2$ ist ein geschlossener Weg, der bei genügend großem A alle Singularitäten von $F(z)$ in seinem Inneren enthält. Nach dem Residuensatz ist also

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_C F(z)e^{zt}\,dz = \sum_{\mathrm{Re}(z) \le x_1} \mathrm{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Wir können die Werte von f aus den Residuen von $F(z)e^{zt}$ berechnen, wenn wir zeigen können, daß die Integrale über φ_1, φ_2 und η für $A \to \infty$ verschwinden.

Wir halten t fest. Bei den Wegen φ_i kommt es nicht auf den Durchlaufungssinn an. Daher gilt – wenn $|z \cdot F(z)| \le C$ ist – :

$$\begin{aligned} |\int_{\varphi_i} F(z)e^{zt}\,dz| &= |\int_0^x F(\tau \pm \mathrm{j}\,A)e^{(\tau \pm \mathrm{j}\,A)t}\,d\tau| \\ &\le \frac{C}{A}\int_0^x e^{\tau t}\,d\tau \\ &= \frac{C}{A}\cdot(\frac{1}{t}e^{\tau t})\Big|_0^x \\ &= \frac{C}{At}(e^{xt}-1) \to 0 \quad (\text{für } A \to \infty) \end{aligned}$$

Es ist $\eta(\tau) = A\cos\tau + \mathrm{j}\,A\sin\tau$. Wir benutzen, daß der Cosinus symmetrisch zur Achse $\tau = \pi$ ist, und daß gilt:

$$\cos\tau \le 1 - \frac{2}{\pi}\tau \quad \text{für } \frac{\pi}{2} \le \tau \le \pi.$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} |\int_\eta F(z)e^{zt}\,dz| &\le \frac{C}{A}\cdot\int_{\pi/2}^{(3\pi)/2} A\cdot|e^{\eta(\tau)t}|\,d\tau \\ &= C\cdot\int_{\pi/2}^{(3\pi)/2} e^{At\cos\tau}\,d\tau \\ &= 2C\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} e^{At\cos\tau}\,d\tau \\ &\le 2C\cdot e^{At}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\frac{2At}{\pi}\tau}\,d\tau \\ &= 2Ce^{At}\cdot\left(-\frac{\pi}{2At}e^{-\frac{2At}{\pi}\tau}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2Ce^{At}\cdot\left(-\frac{\pi}{2At}(e^{-2At}-e^{-At})\right) \\ &= \frac{C\pi}{At}(1-e^{-At}) \to 0 \quad (\text{für } A \to \infty) \end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen:

Umkehrformel mit Residuen

Ist $F(z)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ und holomorph für $\mathrm{Re}(z) > \gamma$ und $z \cdot F(z)$ beschränkt für $z \to \infty$, so ist $F(z)$ die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$, und es gilt:

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \sum_{\mathrm{Re}(z) \leq \gamma} \mathrm{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt, wenn $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ist, mit Polynomen P und Q, so daß

$$\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$$

ist.

Der vorangegangene Satz läßt sich auf die Situation verallgemeinern, daß $F(z)$ unendlich viele Singularitäten besitzt. Voraussetzung ist dann aber ein einigermaßen kontrolliertes Wachstum von F.

Jetzt wollen wir die Laplace-Transformation benutzen, um lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten zu lösen.

Man kann zeigen, daß die Lösungen einer solchen DGL Funktionen von höchstens exponentiellem Wachstum sind (vorausgesetzt, das trifft auf die Inhomogenität zu!). Auf einen Beweis wollen wir hier nicht eingehen, weil das für die praktische Anwendung keine große Rolle spielt.

Wir beginnen mit einer DGL 1. Ordnung:

$$y' + ay = g(t), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(0) = A.$$

Man kann nun schrittweise vorgehen:

1. **Laplace-Transformation**

   Sei $y(t)$ eine Lösung, $Y(z) := \mathcal{L}[y(t)]$ und $G(z) := \mathcal{L}[g(t)]$. Wendet man auf beide Seiten der DGL die Laplace-Transformation an, so erhält man:

   $$(z \cdot Y(z) - y(0)) + a \cdot Y(z) = G(z),$$

   also

   $$(z + a) \cdot Y(z) - A = G(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

   Wir lösen die gewonnene Gleichung nach $Y(z)$ auf:

$$Y(z) = \frac{G(z) + A}{z + a}.$$

3. **Rücktransformation**

   Wir suchen nun die Urbildfunktion $y(t)$ zu $Y(z)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{G(z) + A}{z + a}].$$

   Dabei können alle drei vorgestellten Methoden der Rück-Transformation zum Einsatz kommen. In der Praxis wird man es meist mit Tabellen versuchen.

Bemerkung. Die allgemeine Lösung der DGL setzt sich aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Das Verfahren mit der Laplace-Transformation liefert gleich die allgemeine Lösung, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beispiel.

Wir betrachten die DGL

$$y' + 2y = 2t - 4,$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

1. Schritt: Laplace-Transformation!

$$z \cdot Y(z) - 1 + 2 \cdot Y(z) = \mathcal{L}[2t - 4] = \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}.$$

2. Schritt: Lösung im Bildbereich!

$$\begin{aligned} (z+2) \cdot Y(z) - 1 &= \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}, \\ \text{also} \quad Y(z) &= \frac{2}{z^2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2}. \end{aligned}$$

3. Schritt: Rück-Transformation:

Die Funktionen, die als Summanden auf der rechten Seite auftreten, finden sich nicht alle in der Mini-Tabelle, die wir aufgestellt haben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+2)} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1 - e^{-2t}}{2} \\ \text{und} \quad \frac{1}{z+2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{-2t}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch die Urbildfunktion zu $\dfrac{1}{z^2(z+2)}$ finden. Wir tun dies mit Hilfe der Partialbruch-Zerlegung.

$$\textbf{Ansatz:}\quad \begin{aligned}\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z+2} &= \frac{az(z+2)+b(z+2)+cz^2}{z^2(z+2)}\\ &= \frac{(a+c)z^2+(2a+b)z+2b}{z^2(z+2)}.\end{aligned}$$

Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & & & c & = & 0,\\ 2a & + & b & & & = & 0,\\ & & 2b & & & = & 1.\end{array}$$

Also ist $b=\dfrac{1}{2}$, $a=-\dfrac{1}{4}$ und $c=\dfrac{1}{4}$, und damit

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z+2}\right)-\frac{4}{z(z+2)}+\frac{1}{z+2}\\ &= \frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{3}{2(z+2)}-\frac{4}{z(z+2)}\\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\ t-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}-2(1-e^{-2t})\\ &= t-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}e^{-2t}.\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir eine DGL 2. Ordnung:

$$y''+ay'+by=g(t),\quad \text{mit Anfangswerten } y(0)=A \text{ und } y'(0)=B.$$

Auch hier gibt es die drei Schritte:

1. **Laplace-Transformation**

$$(z^2\cdot Y(z)-z\cdot A-B)+a\cdot(z\cdot Y(z)-A)+b\cdot Y(z)=G(z),$$

   also

$$(z^2+az+b)\cdot Y(z)-(z+a)A-B=G(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

$$Y(z)=\frac{G(z)+(z+a)A+B}{z^2+az+b}.$$

3. **Rücktransformation** Hier kann man auf die bekannten Methoden zurückgreifen.

Beispiel.

$$y'' + 4y = \sin(\omega t).$$

1. Schritt:

$$z^2 Y(z) - zA - B + 4Y(z) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2+\omega^2},$$

also

$$(z^2+4)Y(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2} + zA + B.$$

2. Schritt:

$$Y(z) = \frac{\omega}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)} + A \cdot \frac{z}{z^2+4} + B \cdot \frac{1}{z^2+4},$$

für $\mathrm{Re}(z) > 0$.

3. Schritt: Die gesuchte Lösung ist

$$y(t) = \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)}] + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Zur Berechnung des ersten Termes müssen wir Fälle unterscheiden:

a) der Fall $\omega^2 \neq 4$:

In diesem Falle hat

$$F(z) := \frac{1}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)}$$

4 verschiedene einfache Polstellen, nämlich $z = \pm \mathrm{j}\,\omega$ und $z = \pm 2\mathrm{j}$. Es bietet sich die Residuen-Methode an:

$$\begin{aligned}
f(t) &:= \mathcal{L}^{-1}[F(z)] \\
&= \mathrm{res}_{\mathrm{j}\,\omega}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{-\mathrm{j}\,\omega}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{2\mathrm{j}}\,(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{-2\mathrm{j}}\,(F(z)e^{zt}) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{j}\,\omega(\omega^2-4)} \cdot (-e^{\mathrm{j}\,\omega t} + e^{-\mathrm{j}\,\omega t}) + \frac{1}{4\mathrm{j}\,(\omega^2-4)} \cdot (e^{2\mathrm{j}\,t} - e^{-2\mathrm{j}\,t}) \\
&= -\frac{1}{\omega(\omega^2-4)} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{2(\omega^2-4)}\sin(2t) \\
&= \frac{\omega\sin(2t) - 2\sin(\omega t)}{2\omega(\omega^2-4)}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$y(t) = \frac{\omega\sin(2t) - 2\sin(\omega t)}{2(\omega^2-4)} + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

b) der Fall $\omega^2 = 4$ (Resonanzfall):

Ist $\omega^2 = 4$, so ist

$$Y(z) = \frac{\pm 2}{(z^2+4)^2} + A \cdot \frac{z}{z^2+4} + B \cdot \frac{1}{z^2+4},$$

also

$$y(t) = \pm 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+4)^2}] + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(z) \;:=\; \frac{1}{(z^2+4)^2} &= \frac{1}{(z-2\mathrm{j}\,)^2(z+2\mathrm{j}\,)^2} \\ &= \frac{a}{z-2\mathrm{j}} + \frac{b}{(z-2\mathrm{j}\,)^2} + \frac{c}{z+2\mathrm{j}} + \frac{d}{(z+2\mathrm{j}\,)^2}\,, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{res}_{2\mathrm{j}}(f) \;=\; \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \left[\frac{1}{(z+2\mathrm{j}\,)^2}\right]' \\ &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \frac{-2}{(z+2\mathrm{j}\,)^3} \;=\; \frac{1}{32\mathrm{j}}\,, \\ b &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \frac{1}{(z+2\mathrm{j}\,)^2} \;=\; -\frac{1}{16}\,, \\ c &= \operatorname{res}_{-2\mathrm{j}}(f) \;=\; \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \left[\frac{1}{(z-2\mathrm{j}\,)^2}\right]' \\ &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \frac{-2}{(z-2\mathrm{j}\,)^3} \;=\; \frac{-1}{32\mathrm{j}}\,, \\ d &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \frac{1}{(z-2\mathrm{j}\,)^2} \;=\; -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Wir benutzen die so gewonnene Partialbruchzerlegung und die Formel

$$\mathcal{L}^{-1}[g(z)] = \sum_z \operatorname{res}_z\big(g(z)e^{zt}\big).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{z-2\mathrm{j}} &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} e^{zt} \;=\; e^{2\mathrm{j}\,t}, \\ \operatorname{res}_{2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{(z-2\mathrm{j}\,)^2} &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} te^{zt} \;=\; te^{2\mathrm{j}\,t}, \\ \operatorname{res}_{-2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{z+2\mathrm{j}} &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} e^{zt} \;=\; e^{-2\mathrm{j}\,t}, \\ \operatorname{res}_{-2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{(z+2\mathrm{j}\,)^2} &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} te^{zt} \;=\; te^{-2\mathrm{j}\,t}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2}\right] &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}(e^{2\mathrm{j}\,t}-e^{-2\mathrm{j}\,t})-\frac{t}{8}\cdot\frac{1}{2}(e^{2\mathrm{j}\,t}+e^{-2\mathrm{j}\,t})\\ &= \frac{1}{16}\cdot\sin(2t)-\frac{t}{8}\cos(2t).\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$y(t)=\pm\frac{1}{8}\cdot(\sin(2t)-2t\cos(2t))+A\cos(2t)+\frac{B}{2}\sin(2t).$$

Die Amplitude von $y(t)$ nimmt im Resonanzfall beliebig hohe Werte an.

§ 3 Weitere Methoden

Inhalt:

Die Exponentialfunktion für Matrizen, Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten, Additionstheorem, Jordansche Normalform und Berechnung der Exponentialfunktion, Beispiele, Potenzreihenansatz, Legendresche DGL, numerische Verfahren.

A) Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir erinnern an die Matrix-Norm. Für eine Matrix

$$A = \left(a_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right) \in M_{n,m}(K), \text{ mit } K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C},$$

setzen wir

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}\,.$$

Die Eigenschaften einer Norm sind erfüllt (vgl. Mathematik 2, Kapitel 8, §2, im reellen Fall). Es ist $\|A\| \geq 0$ (und $= 0 \iff A = 0$), $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ und $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Außerdem ist $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, wenn man die Matrizen miteinander multiplizieren kann. Im Falle eines Vektors ist die Matrix-Norm genau die euklidische Norm.

Definition:

Sei $A_k = \left(a_{ij}^{(k)} \;:\; i, j = 1, \dots, n\right)$ eine Folge von quadratischen Matrizen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ heißt *konvergent* gegen eine Matrix $A = \left(a_{ij} \;:\; i, j = 1, \dots, n\right)$, falls $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ für jedes Indexpaar (i, j) gegen a_{ij} konvergiert.

Die Exponentialfunktion für Matrizen

1. *Wenn* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

2. *Die Reihe* $\displaystyle e^A := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ *konvergiert für jede Matrix* A.

Beweis: 1) Weil $|a_{ij}^{(k)}| \le \|A_k\|$ ist, ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ eine Majorante für jede der Reihen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$. Aus dem Majorantenkriterium folgt die Behauptung.

2) Die Zahlen-Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert gegen $e^{\|A\|}$. Weil $\|A^k\| \le \|A\|^k$ ist, konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\|\frac{1}{k!}A^k\|$. Und das bedeutet wiederum, daß die Exponentialreihe konvergiert. ∎

Achtung: Die Komponenten von e^A sind normalerweise **nicht** die Funktionen $\exp(a_{ij})$.

Die Berechnung von e^A ist i.a. schwierig. Sehr nützlich sind dabei die folgenden Regeln:

Regeln zur Berechnung von e^A

1. *Ist* $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *eine Diagonalmatrix, so ist* $e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

2. *Ist* A *beliebig und* P *invertierbar, so ist*

$$e^{P^{-1}\cdot A\cdot P} = P^{-1}\cdot e^A \cdot P.$$

Ist A *diagonalisierbar, so ist auch* e^A *diagonalisierbar.*

Beweis: Zunächst eine Vorbemerkung: Daß eine Matrizenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergiert, bedeutet, daß die Folge $S_N := \sum_{k=1}^{N} A_k$ im üblichen Sinne in $M_{n,n}(K) = K^{n\cdot m}$ konvergiert. Da für festes B die Abbildung $X \mapsto B\cdot X$ linear und damit stetig ist, folgt: Konvergiert S_N gegen S, so konvergiert $B \cdot S_N \to B \cdot S$. Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty}(B \cdot A_k) = B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

1) Es ist $D^0 = E_n$ (Einheitsmatrix) und $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ Daraus folgt:

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(\frac{1}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \frac{1}{k!}\lambda_n^k) \\ &= \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}). \end{aligned}$$

2) Es ist $(P^{-1} \cdot A \cdot P)^k = P^{-1} \cdot A^k \cdot P$, also

$$\begin{aligned} e^{P^{-1} \cdot A \cdot P} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(P^{-1} \cdot A \cdot P)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1} \cdot (\frac{1}{k!} A^k) \cdot P \\ &= P^{-1} \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k) \cdot P \\ &= P^{-1} \cdot e^A \cdot P. \end{aligned}$$

Ist nun $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so ist $P^{-1} \cdot e^A \cdot P = \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$. ■

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $X(t)$ des linearen Systems $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$ mit $X(0) = E_n$ ist gegeben durch

$$X(t) := e^{tA}.$$

Beweis: Es ist $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$. Wir wollen zeigen, daß dies eine differenzierbare (matrizen-wertige) Funktion ist. Ist $A^k = \left(c_{ij}^{(k)}\right)$, so sind die Einträge in e^A konvergente Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{ij}^{(k)} t^k$ (mit Konvergenzradius $R = \infty$). Diese sind alle differenzierbar, und ihre Ableitungen sind die formal abgeleiteten Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} c_{ij}^{(k)} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{ij}^{(k+1)} t^k,$$

die wiederum auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren. Also ist $X(t) = e^{At}$ differenzierbar und

$$X'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = A \cdot e^{At}.$$

Außerdem ist $X(0) = E$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist damit alles bewiesen. ∎

Das Additionstheorem für die Exponentialfunktion

1. *Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}$.*
2. *Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.*
3. *Die Matrix e^A ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:*

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

BEWEIS: Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist

$$B \cdot e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B \cdot (tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \cdot B = e^{tA} \cdot B.$$

Wir setzen $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \cdot e^{t(A+B)} - A \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} - e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot (e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}) \\ &= (A+B) \cdot F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$ ist also die eindeutig bestimmte Lösung der DGL $\vec{y}\,' = (A+B) \cdot \vec{y}$, mit $F(0) = 0$. Daher muß $F(t) \equiv 0$ sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

2) Für $t = 1$ erhält man: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

1) Die Matrizen sA und tA sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

3) Es ist $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = E$, also e^A invertierbar, mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Aus der Liouville-Formel ergibt sich für $X(t) = e^{tA}$:

$$\det(e^{tA}) = W(t) = \exp(\int_0^t \mathrm{Spur}(A)\, ds) = e^{t \cdot \mathrm{Spur}(A)}.$$

Mit $t = 1$ erhält man die gewünschte Formel. ■

Wir können lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten lösen, sofern wir die Matrizen e^{tA} berechnen können. Im Falle von Diagonalmatrizen ist das möglich, und auch im Falle diagonalisierbarer Matrizen. Um beliebige Fälle behandeln zu können, muß man auf den Satz von der Jordanschen Normalform zurückgreifen.

Wir nehmen zusätzlich an, daß $p_A(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt:

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - x)^{m_r},$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Über $\mathbb{C}$ ist diese Voraussetzung immer erfüllt. Ist $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist A diagonalisierbar und wir können e^{tA} wie oben gezeigt ausrechnen.

Ist $g(\lambda_i) < a(\lambda_i)$ für irgendwelche i, so ist A nicht diagonalisierbar, aber es gilt noch der Satz von der Jordanschen Normalform. Wir brauchen ihn nur in der folgenden vereinfachten Form:

Ist A eine beliebige Matrix, so gibt es eine reguläre Matrix P mit

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Dabei hat die m_i-reihige Jordan-Matrix $J_i = J(\lambda_i)$ jeweils die Gestalt

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & * & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i & * \\ 0 & & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

wobei an Stelle der Sterne Einsen oder Nullen stehen können. Man schreibt J_i auch in der Form

$$J_i = \lambda_i \cdot E_{m_i} + N_i,$$

wobei N_i höchstens oberhalb der Diagonalen Einträge $\neq 0$ besitzt. Ist $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$, so ist $N_i = 0$. Allgemein gilt:

Behauptung: Es ist $(N_i)^{m_i} = 0$, d.h. N_i ist eine *nilpotente Matrix*.

Beweis dafür:

Sei $N = N_i$ und $m = m_i$. Wir zeigen, daß $(N^k)_{\nu\mu} = 0$ für $\mu = 1, \ldots, \nu + k - 1$ ist, d.h.

$$\begin{aligned} (N^k)_{1,1} = \ldots = (N^k)_{1,k} &= 0, \\ (N^k)_{2,1} = \ldots = (N^k)_{2,k+1} &= 0 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Für $k = 1$ ist das klar. Wenn die Behauptung für ein k bewiesen ist, dann folgt:

$$(N^{k+1})_{\nu\mu} = \sum_{j=1}^{n}(N^k)_{\nu j}N_{j\mu} = \sum_{j=\nu+k}^{n}(N^k)_{\nu j}N_{j\mu}.$$

Ist aber $\nu + k \leq j \leq n$ und $1 \leq \mu \leq \nu + k$, so ist $1 \leq \mu \leq j$, also $N_{j\mu} = 0$. Damit ist die Zwischen-Behauptung gezeigt.

Weil $\lambda \cdot E_m$ und N vertauschbar sind, ist

$$e^{\lambda E+N} = e^{\lambda E} \cdot e^N = e^\lambda \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}N^k.$$

Ist

$$A^* := P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix},$$

so ist

$$(A^*)^k = \begin{pmatrix} (J_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (J_r)^k \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1} \cdot e^{At} \cdot P = e^{A^*t} = \begin{pmatrix} e^{J_1t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_rt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1t}Q_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_rt}Q_r(t), \end{pmatrix}$$

mit

$$Q_i(t) = e^{N_it} = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{1}{k!}(N_i)^kt^k = \begin{pmatrix} 1 & q_{12}^{(i)}(t) & \cdots & q_{1,m_i}^{(i)}(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & q_{m_i-1,m_i}^{(i)}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $q_{\nu\mu}^{(i)}(t)$ ein Polynom vom Grad $\leq \mu - \nu \leq m_i - 1$.

Nun gilt: $P \cdot e^{A^*t} = e^{At} \cdot P =: Y(t)$. Dann ist offensichtlich $Y'(t) = A \cdot Y(t)$, also $Y(t) = P \cdot e^{A^*t}$ eine Fundamentalmatrix von $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$. Diese wollen wir noch etwas genauer ausrechnen. Ist $P = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$, so ist

$$\begin{aligned} Y(t) &= (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1t} \cdot Q_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_rt} \cdot Q_r(t) \end{pmatrix} \\ &= \Big((\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{m_1}) \cdot e^{\lambda_1t}Q_1(t), \ldots, (\vec{y}_{n-m_r+1}, \ldots, \vec{y}_n) \cdot e^{\lambda_rt}Q_r(t)\Big) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m) \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & q_{12}(t) & \cdots & q_{1,m_i}(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & q_{m_i-1,m_i}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= e^{\lambda t}(\vec{y}_1, q_{12}(t)\vec{y}_1 + \vec{y}_2, \ldots, q_{1,m}(t)\vec{y}_1 + \cdots + q_{m-1,m}(t)\vec{y}_{m-1} + \vec{y}_m) \\ &= \big(e^{\lambda t}\vec{q}_1(t), \ldots, e^{\lambda t}\vec{q}_m(t)\big), \end{aligned}$$

wobei die Einträge in den Vektoren $\vec{q}_j$ Polynome in t vom Grad $\leq m-1$ sind.

Faßt man alles zusammen, so erhält man folgendes Ergebnis:

Lösungen von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten

Sei A eine beliebige n-reihige Matrix und $p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - x)^{m_r}$.

1. *Ist $g(\lambda_i) = a(\lambda_i) = m_i$ und sind $\vec{y}_1^{(i)}, \ldots, \vec{y}_{m_i}^{(i)}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i, so sind $\vec{\varphi}_\nu := e^{\lambda_i t}\vec{y}_\nu^{(i)}$, $\nu = 1, \ldots, m_i$, linear unabhängige Lösungen der DGL $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$.*
2. *Ist $g(\lambda_i) < a(\lambda_i) = m_i$, so gibt es linear unabhängige Lösungen $\vec{\varphi}_\nu(t) = e^{\lambda_i t}\vec{q}_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, m_i$, wobei die Vektoren $\vec{q}_\nu(t)$ als Einträge jeweils Polynome in t vom Grad $\leq m_i$ enthalten.*

   Ist $g_i = g(\lambda_i)$ und $\{\vec{y}_1^{(i)}, \ldots, \vec{y}_{g_i}^{(i)}\}$ eine Basis des Eigenraumes $E(\lambda_i)$, so kann man für $\nu = 1, \ldots, g_i$ schon $\vec{\varphi}_\nu(t) = e^{\lambda_i t}\vec{y}_\nu^{(i)}$ als Lösungen benutzen.

Dieser Satz ermöglicht es, die Lösungen über einen Ansatz zu finden.

Beispiele.

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Wir wollen die DGL $\vec{y}\,' = A \circ \vec{y}$ lösen.

   Zunächst ist $p_A(x) = \det(A - xE_3) = -x^3 + x^2 + x - 1$. Durch Probieren findet man die erste Nullstelle $x = 1$. Dann ist $p_A(x) : (x-1) = -x^2 + 1$, und das ergibt zwei weitere Nullstellen $x = \pm 1$. Wir setzen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

   Der Vektor $\mathbf{y}_1 = (-1, 1, 1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Der Eigenraum von $\lambda_{2/3}$ ist $E(1) = \{(x, y, z) \;:\; -x + 4y - 3z = 0\}$. Eine Basis von $E(1)$

bilden die Vektoren $\mathbf{y}_2 = (4,1,0)$ und $\mathbf{y}_3 = (-3,0,1)$. Das liefert folgendes Fundamentalsystem:

$$\vec{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},\ \vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \text{ und } \vec{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

2. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A. Es ist $p_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$. Der Eigenwert $\lambda_1 = 2$ hat die Vielfachheit 1. Man findet sofort einen Eigenvektor dazu, nämlich $\mathbf{y}_1 := (0,1,1)$. Der Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ hat die algebraische Vielfachheit 2. Der zugehörige Eigenraum ist $E(1) = \{(x,y,z) : x = y \text{ und } z = 0\}$, eine Basis stellt der Vektor $\mathbf{y}_2 = (1,1,0)$ dar.

   Zwei Lösungen kann man also direkt angeben:

$$\vec{\varphi}_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \text{ und } \vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}.$$

   Für die dritte Lösung machen wir den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} q_1 + p_1 t \\ q_2 + p_2 t \\ q_3 + p_3 t \end{pmatrix} e^{t}.$$

   Setzt man $\vec{y}(t)$ in die DGL ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (q_1+p_1)+p_1 t \\ (q_2+p_2)+p_2 t \\ (q_3+p_3)+p_3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_2-q_3)+(p_2-p_3)t \\ (-2q_1+3q_2-q_3)+(-2p_1+3p_2-p_3)t \\ (-q_1+q_2+q_3)+(-p_1+p_2+p_3)t \end{pmatrix}.$$

   Der Vergleich der Koeffizienten bei t liefert:

$$p_1 = p_2 - p_3, \quad p_2 = -2p_1 + 3p_2 - p_3 \text{ und } p_3 = -p_1 + p_2 + p_3.$$

   Also ist $p_1 = p_2 =: \alpha$ und $p_3 = 0$.

   Der Vergleich der Koeffizienten bei 1 liefert:

$$q_1 + p_1 = q_2 - q_3, \quad q_2 + p_2 = -2q_1 + 3q_2 - q_3 \text{ und } q_3 + p_3 = -q_1 + q_2 + q_3.$$

   Das ergibt

$$q_1 = q_2 =: \beta \text{ und } q_3 = -\alpha.$$

Mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ erhalten wir die Lösung

$$\vec{\varphi}_3(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

3. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -5 & 6 & -15 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Es ist $p_A(x) = -x^3 + 6x^2 - 21x + 26$. Durch Probieren kann man $\lambda_1 = 2$ finden. Polynomdivision liefert $p_A(x) : (x-2) = -x^2 + 4x - 13$ und damit die weiteren Eigenwerte $\lambda_2 = 2 + 3\mathsf{j}$ und $\lambda_3 = 2 - 3\mathsf{j}$.

   Zu λ_1 findet man schnell den Eigenvektor $\mathbf{y}_1 = (-3, 0, 1)$. Aber was machen wir mit den komplexen Eigenwerten λ_2 und λ_3? Ein (komplexer) Eigenvektor zu λ_2 ist $\mathbf{y}_2 = (-1+\mathsf{j}, 1+2\mathsf{j}, 1)$. Wir zerlegen die komplexe Lösung $\varphi(t) = \mathbf{y}_2 e^{\lambda_2 t}$ in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}(t) &= \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{2t}(\cos(3t) + \mathsf{j}\,\sin(3t)) \\ &= \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(3t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3t)\right] e^{2t} \\ &\quad + \mathsf{j}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(3t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(3t)\right] e^{2t}. \end{aligned}$$

   $\vec{\varphi}_1(t) = \mathrm{Re}(\vec{\varphi}(t))$ und $\vec{\varphi}_2(t) = \mathrm{Im}(\vec{\varphi}(t))$ sind dann reelle Lösungen. Das funktioniert übrigens immer!

B) Potenzreihenansatz

Wenn z.B. eine DGL der Form

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = r(t)$$

vorliegt, mit analytischen Funktionen a, b und r, so kann man versuchen, auch die Lösung $\varphi(t)$ als Potenzreihe anzusetzen und diesen Ansatz in die DGL einzusetzen. Wenn man Glück hat, liefert dann ein Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der gesuchten Potenzreihe oder womöglich gar die komplette Lösung.

Das Verfahren soll hier nur am Beispiel der *Legendreschen DGL* demonstriert werden:

$$[L] \qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Wir machen für die Lösung den Ansatz

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu.$$

Setzen wir φ in die DGL ein, so erhalten wir:

$$\varphi''(t) - t^2\varphi''(t) - 2t\varphi'(t) + n(n+1)\varphi(t) = 0,$$

also

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \cdot \nu(\nu-1)t^{\nu-2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \cdot \nu(\nu-1)t^\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cdot 2\nu t^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot n(n+1)t^\nu = 0,$$

also

$$2a_2 = -n(n+1)a_0, \qquad 6a_3 = (2-n(n+1))a_1$$

und

$$a_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1) = a_\nu(\nu(\nu+1) - n(n+1)) \quad \text{für } \nu \geq 2.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_0 \cdot \frac{(-n)(n+1)}{1\cdot 2}, \quad a_3 \;=\; a_1 \cdot \frac{(1-n)(1+n+1)}{2\cdot 3}, \\
a_4 &= a_2 \cdot \frac{(2-n)(2+n+1)}{(2+1)(2+2)} \;=\; a_0 \cdot \frac{(-n)(2-n)(n+1)(2+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \\
a_5 &= a_3 \cdot \frac{(3-n)((3+n+1)}{(3+1)(3+2)} \;=\; a_1 \cdot \frac{(1-n)(3-n)(n+2)(2+n+2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \\
\text{und } a_{\nu+2} &= a_\nu \cdot \frac{(\nu-n)(\nu+n+1)}{(\nu+1)(\nu+2)} \quad \text{für } \nu \geq 2.
\end{aligned}$$

Die letzte Formel gilt sogar für $\nu \geq 0$. Induktiv erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
a_{2\mu} &= a_0 \cdot \frac{1}{(2\mu)!} \cdot \prod_{k=0}^{\mu-1}(2k-n)(2k+n+1) \\
\text{und} \quad a_{2\mu+1} &= a_1 \cdot \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \prod_{k=0}^{\mu-1}(2k+1-n)(2k+n+2).
\end{aligned}$$

Das bedeutet: Ist n gerade, so ist $a_{2\mu} = 0$ für $2\mu > n$. Ist n ungerade, so ist $a_{2\mu+1} = 0$ für $2\mu + 1 > n$.

Polynomlösungen der Legendreschen DGL

Ist $n = 2m$, so ist

$$\varphi_{1,m}(t) := \sum_{\mu=0}^{m} \frac{a_0}{(2\mu)!} \left(\prod_{k=0}^{\mu-1} (2k-n)(2k+n+1) \right) t^{2\mu}$$

eine Lösung von [L] mit $\varphi_{1,m}(0) = a_0$ und $(\varphi_{1,m})'(0) = 0$.

Ist $n = 2m+1$, so ist

$$\varphi_{2,m}(t) := \sum_{\mu=0}^{m} \frac{a_1}{(2\mu+1)!} \left(\prod_{k=0}^{\mu-1} (2k-n+1)(2k+n+2) \right) t^{2\mu+1}$$

eine Lösung von [L] mit $\varphi_{2,m}(0) = 0$ und $(\varphi_{1,m})'(0) = a_1$.

Es gibt jeweils noch eine zweite Lösung, die dann aber kein Polynom ist.

Der Beweis des Satzes ergibt sich aus den vorangegangenen Rechnungen.

Im Falle $n = 2m$ und $a_0 = 1$ schreibt man

$$\varphi_{1,m}(t) = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!} \cdot 2^{2m} \cdot P_{2m}(t)$$

und nennt $P_{2m}(t)$ das Legendre-Polynom der Ordnung $2m$.

Im Falle $n = 2m+1$ und $a_1 = 1$ schreibt man

$$\varphi_{2,m}(t) = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \cdot 2^{2m} \cdot P_{2m+1}(t)$$

und nennt $P_{2m+1}(t)$ das Legendre-Polynom der Ordnung $2m+1$.

D) Numerische Lösungsverfahren

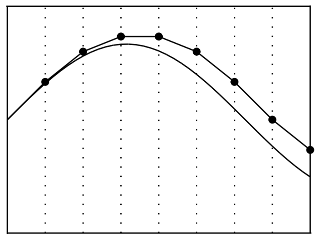
Am einfachsten ist das *Eulersche Polygonzug-Verfahren*.

Wir betrachten hier nur eine explizite DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' = F(t, y), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(t_0) = y_0.$$

Wir nehmen an, daß es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : [t_0, t_0^*] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t_0) = y_0$ gibt.

Um nun φ numerisch zu approximieren, teilt man $I := [t_0, t_0^*]$ in N Teilintervalle der Länge h. Es sei $t_n := t_0 + n \cdot h$, $n = 1, \ldots, N$.



Nach Voraussetzung ist $\varphi'(t_0) = F(t_0, y_0)$, und das ist die Steigung von φ bei t_0. Die affin-lineare Funktion $L_1(t) := y_0 + (t - t_0) \cdot F(t_0, y_0)$ ist offensichtlich die Tangente an den Graphen von φ bei t_0. Auf dem ersten Teilintervall ersetzen wir nun φ durch L_1. Das ist eine (i.a. nicht besonders gute) Approximation, durch die der unbekannte Wert $\varphi(t_1)$ durch den berechenbaren Wert

$$y_1 := L_1(t_1) = y_0 + h \cdot F(t_0, y_0)$$

ersetzt wird. Mit diesem Wert arbeitet man weiter, nach der allgemeinen Rekursionsformel

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} := y_n + h \cdot F(t_n, y_n).$$

Die so berechneten Punkte ergeben einen Polygonzug, der den Graphen von φ approximiert, und zwar um so besser, je kleiner man die Schrittweite h macht. Man wird aber kaum vermeiden können, daß der Fehler bei jedem Schritt größer und schließlich nicht mehr beherrschbar wird.

Die Steigung einer stetig differenzierbaren Lösung zwischen t_n und t_{n+1} wird sich zwischen $F(t_n, \varphi(t_n))$ und $F(t_n + h, \varphi(t_n + h))$ bewegen. Statt also die Steigung am Anfang des Intervalls heranzuziehen, wird es i.a. besser sein, als Steigung den mittleren Wert $F(t_n + \frac{h}{2}, \varphi(t_n + \frac{h}{2}))$ zu wählen. Das Problem dabei ist, daß man $\varphi(t_n + \frac{h}{2})$ normalerweise nicht kennt, selbst wenn $\varphi(t_n)$ noch bekannt ist oder zumindest gut approximiert wurde. Also ersetzt man $\varphi(t_n + \frac{h}{2})$ durch $y_n + \frac{h}{2} \cdot F(t_n, y_n)$. Das liefert die Rekursion für das *verbesserte Polygonzug-Verfahren* :

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} := y_n + h \cdot F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot F(t_n, y_n)).$$

Da auch das verbesserte Polygonzug-Verfahren meist nicht ausreicht, hat man verfeinerte Verfahren entwickelt. Ich stelle speziell das Verfahren von *Runge-Kutta* vor, bei dem jeweils ein gewichteter Mittelwert aus vier approximativ bestimmten Steigungen benutzt wird:

$$\begin{aligned} k_{n,1} &:= F(t_n, y_n), \\ k_{n,2} &:= F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_{n,1}), \\ k_{n,3} &:= F(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_{n,2}), \\ k_{n,4} &:= F(t_n + h, y_n + h \cdot k_{n,3}). \end{aligned}$$

Die Rekursion nach Runge-Kutta sieht nun wie folgt aus:

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} := y_n + h \cdot \frac{1}{6}(k_{n,1} + 2 \cdot k_{n,2} + 2 \cdot k_{n,3} + k_{n,4}).$$

Mit diesem Verfahren kann man schon recht gute Ergebnisse erzielen. Man spricht übrigens von einem *Ein-Schritt-Verfahren*, weil man bei jedem neuen Approximationsschritt jeweils nur den vorher berechneten Punkt (t_n, y_n) benutzt. Es gibt auch *Mehr-Schritt-Verfahren*, bei denen nicht nur der letzte, sondern auch die vorhergehenden Schritte bei der Rekursion benutzt werden. Solche Verfahren sind genauer, aber auch wesentlich komplizierter.

Anhang: Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Der Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes gliedert sich in mehrere Teile. Wir beginnen mit dem „lokalen“ Teil.

Lokaler Existenz– und Eindeutigkeitssatz

Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, \mathbf{y}_0) \in B$.

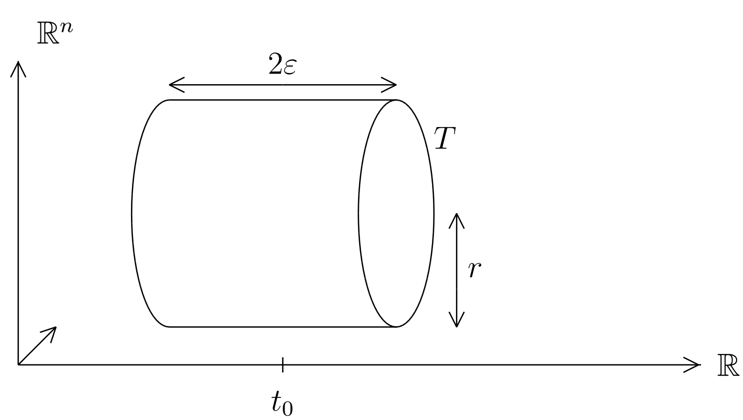
Wenn es reelle Zahlen $r, \varepsilon > 0$ gibt, so daß

$$T := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| < \varepsilon \text{ und } \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < r\} \subset B$$

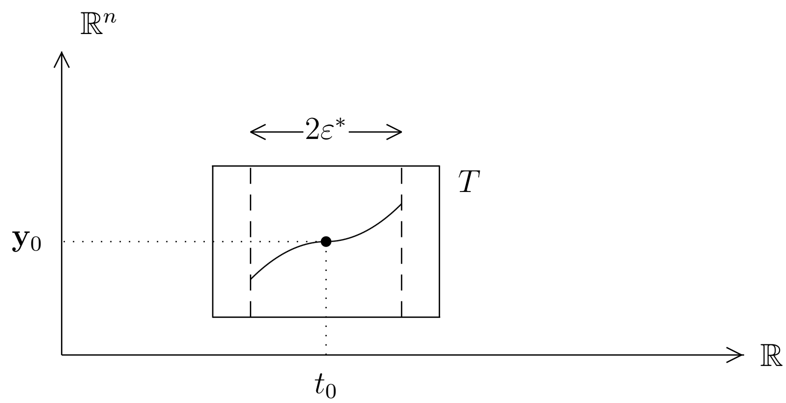
ist und F auf T einer Lipschitzbedingung (mit einer Lipschitzkonstanten L) genügt, so gibt es ein ε^* mit $0 < \varepsilon^* \le \varepsilon$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : [t_0 - \varepsilon^*, t_0 + \varepsilon^*] \to \mathbb{R}^n$, so daß gilt:

1. $\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0\| < r$ *für* $|t - t_0| < \varepsilon^*$.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ *ist Lösung der DGL* $\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})$.
3. $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Wir nennen die Menge T eine „Tonne“, sie ist ein Produkt aus einem Intervall der Länge 2ε und einer Kugel vom Radius r.



Die gesuchte Lösungskurve durch $(t_0, \mathbf{y}_0)$ kann nur innerhalb einer kleineren Tonne der Länge $2\varepsilon^*$ konstruiert werden. Darin läuft sie allerdings vom Boden bis zur Decke, und sie ist eindeutig bestimmt.



BEWEIS (nach Picard-Lindelöf):

Sei $A := \sup_T \|F\|$ und $\varepsilon^* := \min(\varepsilon, \dfrac{r}{A})$, sowie $I_0 := [t_0 - \varepsilon^*, t_0 + \varepsilon^*]$.

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \{\boldsymbol{\varphi} : I_0 \to \overline{B_r(\mathbf{y}_0)}\ :\ \boldsymbol{\varphi} \text{ stetig und } \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Behauptung: $\mathcal{F}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Vektorraumes $V := \mathcal{C}^0(I_0, \mathbb{R}^n)$.

Beweis dazu: Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$, die in V gegen ein Element f konvergiert. Konvergenz in V bedeutet, daß $\|f_n - f\|$ gegen 0 konvergiert. Die Norm eines Elementes $g \in V$ ist dabei definiert als $\|g\| := \sup_{I_0} \|g(t)\|$.

Wir müssen zeigen, daß die Grenzfunktion f in $\mathcal{F}$ liegt.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\|\mathbf{y}_0 - f(t_0)\| = \|f_n(t_0) - f(t_0)\| \le \|f_n - f\|$, und dieser Ausdruck konvergiert gegen Null. Also muß $f(t_0) = \mathbf{y}_0$ sein.

b) Es ist $\|f_n(t) - \mathbf{y}_0\| \le r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in I_0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|f(t) - \mathbf{y}_0\| &\le \|f(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - \mathbf{y}_0\| \\ &\le \|f - f_n\| + r. \end{aligned}$$

Läßt man $n \to \infty$ gehen, so ergibt sich $\|f(t) - \mathbf{y}_0\| \le r$. Aus (a) und (b) folgt die Behauptung. ■

Nun definiert man einen Operator $S : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ durch

$$(S\boldsymbol{\varphi})(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du.$$

Tatsächlich ist $S\boldsymbol{\varphi}$ stetig, $S\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ und

$$\begin{aligned} \|S\boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} F(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\, ds\| \\ &\le |t - t_0| \cdot \sup_T \|F\| \\ &\le \varepsilon^* \cdot A \ \le\ r. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\|S\boldsymbol{\varphi} - S\boldsymbol{\psi}\| &= \sup_{I_0} \Big| \int_{t_0}^{t} (F(s,\boldsymbol{\varphi}(s)) - F(s,\boldsymbol{\psi}(s)))\, ds \Big| \\ &\le \varepsilon^* \cdot \sup_{I_0} \|F(s,\boldsymbol{\varphi}(s)) - F(s,\boldsymbol{\psi}(s))\| \\ &\le \varepsilon^* \cdot L \cdot \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|.\end{aligned}$$

Wählt man ε^* sogar so klein, daß $q := \varepsilon^* \cdot L < 1$ ist, so ist S eine kontrahierende Abbildung von $\mathcal{F}$ auf sich.

Es sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt! Also besitzt der Operator S genau einen Fixpunkt $\boldsymbol{\varphi}_0$. Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} S\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \quad &\iff \quad \boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{\varphi}_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s,\boldsymbol{\varphi}_0(s))\, ds \\ &\iff \quad \boldsymbol{\varphi}_0 \text{ ist Lösung der DGL } \vec{y}\,' = F(x,\vec{y}).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\varphi}_0$ ist also die gesuchte Lösung und zudem eindeutig bestimmt. Der Satz ist bewiesen. ∎

Bevor wir mit dem Beweis des globalen Existenzsatzes fortfahren, wollen wir ein Beispiel für den Satz von Picard-Lindelöf betrachten. Wir wissen ja: Ist $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}$ ein beliebiger Anfangswert, so konvergiert die Folge $(S^k\boldsymbol{\varphi})$ gegen den Fixpunkt $\boldsymbol{\varphi}_0$. Das liefert im Prinzip ein konstruktives Verfahren.

Wir betrachten das DGL-System $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$. Hier ist

$$F(x, y_1, y_2) := (y_2, -y_1)$$

sicherlich Lipschitz-stetig. Es muß also genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ mit $\boldsymbol{\varphi}(0) = (0,1)$ geben.

Wir gehen aus von dem Startwert $\boldsymbol{\varphi}_0(t) := (0,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1(t) &:= \boldsymbol{\varphi}_0(0) + \int_0^t F(s, \boldsymbol{\varphi}_0(s))\, ds \\
&= (0,1) + \int_0^t (1,0)\, ds \\
&= (0,1) + (t,0) \;=\; (t,1), \\
\boldsymbol{\varphi}_2(t) &:= \boldsymbol{\varphi}_1(0) + \int_0^t F(s, \boldsymbol{\varphi}_1(s))\, ds \\
&= (0,1) + \int_0^t (1,-s)\, ds \\
&= (0,1) + (t, -\frac{t^2}{2}) \;=\; (t, 1 - \frac{t^2}{2}), \\
\boldsymbol{\varphi}_3(t) &= \boldsymbol{\varphi}_2(0) + \int_0^t F(s, \boldsymbol{\varphi}_2(s))\, ds \\
&= (0,1) + \int_0^t (1 - \frac{s^2}{2}, -s)\, ds \\
&= (0,1) + (t - \frac{t^3}{6}, -\frac{t^2}{2}) \;=\; (t - \frac{t^3}{6}, 1 - \frac{t^2}{2}).
\end{aligned}$$

Per Induktion zeigt man schließlich:

$$\boldsymbol{\varphi}_{2k}(t) = (t - \frac{t^3}{6} \pm \cdots + (-1)^{k-1}\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}, 1 - \frac{t^2}{2} \pm \cdots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!})$$

und

$$\boldsymbol{\varphi}_{2k+1}(t) = (t - \frac{t^3}{6} \pm \cdots + (-1)^{k}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, 1 - \frac{t^2}{2} \pm \cdots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}).$$

Also ist $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin(t), \cos(t))$.

Wir betrachten wieder eine DGL $\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})$ mit Lipschitz-stetigem F. Dann gilt:

Das maximale Lösungs-Intervall ist offen

Sei $\boldsymbol{\varphi} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Dann gibt es ein $t_2 > t_1$ und eine Lösung $\widehat{\boldsymbol{\varphi}} : [t_0, t_2) \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|_{[t_0,t_1]} = \boldsymbol{\varphi}$.

BEWEIS: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{\psi} : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_1)$. Außerdem ist

$$\boldsymbol{\psi}'(t_1) = F(t_1, \boldsymbol{\psi}(t_1)) = F(t_1, \boldsymbol{\varphi}(t_1)) = \boldsymbol{\varphi}'(t_1).$$

Also ist $\widehat{\boldsymbol{\varphi}} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t) := \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & \text{für } t_0 \le t \le t_1, \\ \boldsymbol{\psi}(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

differenzierbar und damit eine Lösung über $[t_0, t_1 + \varepsilon)$. ∎

Die globale Eindeutigkeit der Lösung

Sind $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$.

Beweis: Sei $X := \{t \in [t_0, t_1] : \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)\}$. Das ist eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von $[t_0, t_1]$. Wenn $X \ne [t_0, t_1]$ wäre, müßte es ein größtes $t^* > t_0$ geben, so daß $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)$ für $t_0 \le t < t^*$ ist. Weil X abgeschlossen ist, muß auch noch $\boldsymbol{\varphi}(t^*) = \boldsymbol{\psi}(t^*)$ sein. Wegen der Offenheit des maximalen Lösungsintervalls und wegen des lokalen Eindeutigkeitssatzes gibt es dann auch noch ein $t^{**} > t^*$, so daß $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)$ für $t_0 \le t < t^{**}$ ist. Das ist aber ein Widerspruch. ∎

Die Existenz einer maximalen Lösung

Es gibt Zahlen $t_- < t_0 < t_+$ und eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.
2. *$\boldsymbol{\varphi}$ läßt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.*
3. *Ist $\boldsymbol{\psi} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung mit $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$.*

Beweis: Wir beschränken uns auf die Konstruktion von t_+, die von t_- kann dann analog durchgeführt werden. Es sei

$$\varepsilon_+ := \sup\{\varepsilon > 0 : \exists \text{ Lösung } \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0\}$$

und

$$t_+ := t_0 + \varepsilon_+.$$

Ist nun $t \in [t_0, t_+)$, so gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon^+$, so daß t in $[t_0, t_0 + \varepsilon)$ liegt, und wir setzen

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t).$$

Diese Definition ist wegen der globalen Eindeutigkeit unabhängig vom gewählten ε, und $\boldsymbol{\varphi}$ ist deshalb auch eine Lösung der DGL. Nach Konstruktion von ε_+ läßt sich $\boldsymbol{\varphi}$ nicht über t_+ hinaus zu einer erweiterten Lösung fortsetzen.

Ist schließlich $\boldsymbol{\psi}$ eine weitere Lösung auf $[t_0, t_+)$ mit $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so stimmt $\boldsymbol{\psi}$ auf jedem abgeschlossenen Teilintervall und damit auf ganz $[t_0, t_+)$ mit $\boldsymbol{\varphi}$ überein. ∎

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß die Integralkurven von Rand zu Rand laufen, also nicht in einer kompakten Teilmenge steckenbleiben.

Die (maximalen) Integralkurven enden nicht im Innern

Sei $\boldsymbol{\varphi} : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung und $\boldsymbol{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ die zugehörige Integralkurve. Wenn es eine kompakte Menge $K \subset B$ mit $\boldsymbol{\Phi}([t_0, t_1)) \subset K$ gibt, so kann man $\boldsymbol{\varphi}$ auf das abgeschlossene Intervall $[t_0, t_1]$ fortsetzen.

BEWEIS: Weil eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt bleibt, gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß $\|F(x, \mathbf{y})\| \le C$ für $(x, \mathbf{y}) \in K$ ist.

Weil $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ ist, folgt, daß $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \le C$ für $t \in [t_0, t_1)$ ist, und daher

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(s)\| \le C \cdot |t - s|\,, \text{ für } t, s \in [t_0, t_1).$$

Sei nun (s_n) eine gegen t_1 konvergente Folge. Dann ist $(s_n, \boldsymbol{\varphi}(s_n))$ eine Folge in K, die einen Häufungspunkt $(t_1, \mathbf{y}_1) \in K$ besitzt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein n_0, so daß $|s_n - t_1| \le \varepsilon/(4C)$ für $n \ge n_0$ ist. Und es gibt ein $n_1 \ge n_0$, so daß $\|\boldsymbol{\varphi}(s_{n_1}) - \mathbf{y}_1\| \le \varepsilon/2$ ist. Nun folgt für $n \ge n_0$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}(s_n) - \boldsymbol{\varphi}(s_{n_1})\| &\le C|s_n - s_{n_1}| \\ &\le C(|s_n - t_1| + |s_{n_1} - t_1|) \le \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}(s_n) - \mathbf{y}_1\| &\le \|\boldsymbol{\varphi}(s_n) - \boldsymbol{\varphi}(s_{n_1})\| + \|\boldsymbol{\varphi}(s_{n_1}) - \mathbf{y}_1\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $(s_n, \boldsymbol{\varphi}(s_n))$ gegen $(t_1, \mathbf{y}_1)$ konvergiert. Ist nun (s_n^*) eine andere Folge, die gegen t_1 konvergiert, so wird auch $\|\boldsymbol{\varphi}(s_n) - \boldsymbol{\varphi}(s_n^*)\|$ beliebig klein, und man kann folgern, daß $(s_n^*, \boldsymbol{\varphi}(s_n^*))$ gegen $(t_1, \mathbf{y}_1)$ konvergiert. Deshalb ist

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t) := \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & \text{für } t_0 \le t < t_1, \\ \mathbf{y}_1 & \text{für } t = t_1. \end{cases}$$

eine stetige Funktion. Offensichtlich gilt für $t < t_1$:

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s))\, ds.$$

Weil aber $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ und damit beide Seiten der Gleichung auf $[t_0, t_1]$ stetig sind, bleibt auch die Gleichung auf ganz $[t_0, t_1]$ gültig. Das bedeutet, daß $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ dort eine Lösung ist. ∎