Kapitel 12 Fourieranalyse

§ 1 Quadratintegrable periodische Funktionen

Inhalt:

Periodische Funktionen, trigonometrische Polynome, quadratintegrable Funktionen, L^2-Norm, ON-Systeme, Konvergenz im quadratischen Mittel, die trigonometrischen Systeme, Parsevalsche Gleichung.

Zur Erinnerung:

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit *Periode* T, falls $T \neq 0$ ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t + T) = f(t).$$

Beispiele.

1. Die Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$ haben die Periode 2π,
   der Tangens hat die Periode π.

2. Die Eulerfunktion $e^{\mathsf{j}\,t} = \cos(t) + \mathsf{j}\,\sin(t)$ hat die Periode 2π.

3. Die Menge $\text{Per}(f)$ aller Perioden der Funktion f bildet einen *Modul*, d.h. es gilt:

   $$T_1, T_2 \in \text{Per}(f) \implies T_1 \pm T_2 \in \text{Per}(f).$$

   Hat also f die Periode T, so sind auch $2T$, $3T, \ldots$ Perioden von f.

4. Eine konstante Funktion $f(t) \equiv c$ hat **jedes** $T \in \mathbb{R}$ als Periode.

Wie das letzte Beispiel zeigt, kann der Periodenmodul $\text{Per}(f)$ aus ganz $\mathbb{R}$ bestehen. Ist f allerdings nicht konstant und hat f auf einem Periodenintervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, so kann man zeigen, daß f eine kleinste positive Periode T_0 besitzt. Dann besteht $\text{Per}(f)$ aus allen ganzzahligen Vielfachen von T_0. Z.B. ist die Zahl 2π die kleinste (positive) Periode beim Sinus.

Ein typisches Beispiel ist die *harmonische Schwingung*

$$f(t) := A \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Dabei heißt $|A|$ die *Amplitude*, ω die *Frequenz* und φ die *Anfangsphase*. f hat die Periode $T = (2\pi)/\omega$ und erfüllt offensichtlich die DGL $y'' + \omega^2 y = 0$.

Wendet man das Additionstheorem an, so erhält man die Darstellung

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

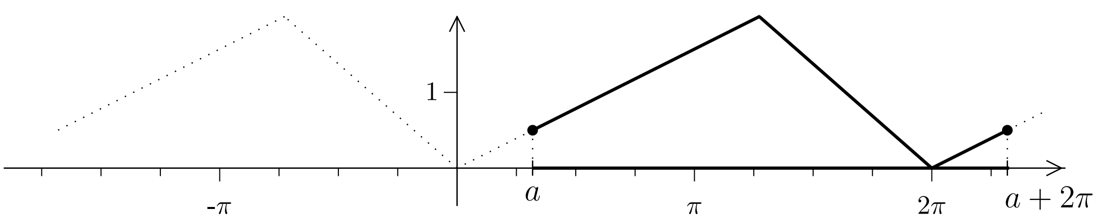
mit $a = A\sin(\varphi)$ und $b = A\cos\varphi$.

Hat f die Periode T, so hat $F(t) := f(\frac{T}{2\pi} \cdot t)$ die Periode 2π, denn es ist

$$\begin{aligned} F(t+2\pi) &= f(\frac{T}{2\pi}(t+2\pi)) \\ &= f(\frac{T}{2\pi} \cdot t + T) \\ &= f(\frac{T}{2\pi} \cdot t) \; = \; F(t). \end{aligned}$$

Deshalb ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nur Funktionen mit der Periode 2π betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, bedeutet hier künftig „**periodisch**" stets „**periodisch mit Periode** 2π". Das muß allerdings nicht in jedem Fall die kleinste Periode sein.

Ist nun $I = [a, a + 2\pi]$ und f eine Funktion auf I mit $f(a + 2\pi) = f(a)$, so kann man f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen:



Dabei spielt es keine Rolle, mit welchem Intervall (der Länge 2π) man begonnen hat, es kommt immer die gleiche Funktion heraus. Wir verwenden hier meistens das Intervall

$$I = [-\pi, +\pi],$$

manchmal aber auch das Intervall $[0, 2\pi]$.

Wichtigstes Beispiel sind die sogenannten *trigonometrischen Polynome*

$$T_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

Sie haben alle die Periode 2π.

Es sei $\mathcal{S}^0(I)$ die Menge der stückweise stetigen Funktionen auf I. Bei diesen Funktionen existiert in jedem $x \in I$ der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert, allerdings brauchen die beiden Grenzwerte nicht übereinzustimmen. Es sind endlich viele solcher Sprungstellen erlaubt, aber keine schlimmeren Unstetigkeiten.

Sei $I = [a, b]$, mit $b - a = 2\pi$. Mit $\mathcal{R}(I)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$, die höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben und für die das (eventuell uneigentliche) Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + \mathrm{j}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$$

existiert. Wir sprechen vom Raum der *integrierbaren Funktionen*.[1] Offensichtlich ist $\mathcal{S}^0(I) \subset \mathcal{R}(I)$. Ein Element $f \in \mathcal{R}(I)$ heißt *absolut integrierbar*, falls das Integral

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b \big((\mathrm{Re}\, f(t))^2 + (\mathrm{Im}\, f(t))^2\big)^{1/2}\,dt$$

existiert. Man beachte, daß stets $|\mathrm{Re}\, f(t)| \le |f(t)|$ und $|\mathrm{Im}\, f(t)| \le |f(t)|$ ist. Aus der absoluten Integrierbarkeit folgt also auch im Komplexen die gewöhnliche Integrierbarkeit. Ist f absolut integrierbar und g beschränkt und integrierbar, so ist auch $f \cdot g$ absolut integrierbar.

Mit $\mathcal{P}(I)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{R}(I)$, für die gilt:

$$f(a) = f(b).$$

Das sind diejenigen integrierbaren Funktionen auf I, die sich periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen. Da wir aber unsere Funktionen problemlos in einem einzelnen Punkt abändern können, spielt die Zusatzbedingung über die Randwerte eigentlich keine Rolle.

Alle betrachteten Funktionenmengen sind (komplexe) Vektorräume. $\mathcal{P}(I)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{R}(I)$ und $\mathcal{P}(I) \cap \mathcal{S}^0(I)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{S}^0(I)$.

Definition:

Eine Funktion $f \in \mathcal{R}(I)$ heißt *quadratintegrabel*, falls $|f|^2$ integrierbar ist. Die Zahl

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

nennt man die L^2-*Norm* von f.

[1] Das sind **nicht** die im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen (die unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben könnten) und es sind auch nicht die integrierbaren Funktionen im Sinne von Mathematik 1 (die immer eine Stammfunktion haben).

Beispiel.

$f(t) := \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ liegt in $\mathcal{R}([0,1])$, ist aber nicht quadratintegrabel.

Summe und Produkt von quadratintegrablen Funktionen

f_1, f_2 seien quadratintegrabel. Dann ist $f_1 \pm f_2$ quadratintegrabel und $f_1 \cdot f_2$ absolut integrierbar. Außerdem ist

$$\int_a^b |f_1(t) \cdot f_2(t)|\,dt \le \frac{1}{2}\left[(\|f_1\|_2)^2 + (\|f_2\|_2)^2\right]$$

und es gilt die Schwarzsche Ungleichung:

$$\left|\int_a^b f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)}\,dt\right| \le \|f_1\|_2 \cdot \|f_2\|_2.$$

Beweis: Es ist

$$0 \le (|f_1| - |f_2|)^2 = |f_1|^2 - 2|f_1 \cdot f_2| + |f_2|^2,$$

also

$$|f_1 \cdot f_2| \le \frac{1}{2} \cdot (|f_1|^2 + |f_2|^2).$$

Das liefert die erste Ungleichung und die absolute Integrierbarkeit von $f_1 f_2$.

Wegen $|\overline{f}_2|^2 = |f_2|^2$ ist auch $\overline{f_2}$ quadratintegrabel und damit $\mathrm{Re}(f_1 \cdot \overline{f_2})$ integrierbar. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ haben wir außerdem die Gleichung

$$|f_1 + \lambda f_2|^2 = (f_1 + \lambda f_2) \cdot (\overline{f_1} + \overline{\lambda f_2}) = |f_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\lambda} f_1 \cdot \overline{f_2}) + |\lambda|^2 |f_2|^2.$$

Das zeigt, daß $f_1 + \lambda f_2$ quadratintegrabel ist.

Weiter gilt :

$$0 \le \int_a^b |f_1 + \lambda f_2|^2\,dt = \int_a^b |f_1|^2\,dt + \overline{\lambda} \int_a^b f_1 \overline{f_2}\,dt + \lambda \int_a^b \overline{f_1} f_2\,dt + |\lambda|^2 \int_a^b |f_2|^2\,dt.$$

Mit $A := \int_a^b |f_1|^2\,dt$, $B := \int_a^b f_1 \overline{f_2}\,dt$ und $C := \int_a^b |f_2|^2\,dt$ liefert das die Ungleichung

$$A + B\overline{\lambda} + \overline{B}\lambda + C|\lambda|^2 \ge 0 \text{ (für alle } \lambda \in \mathbb{C}).$$

Ist $C \ne 0$, so setze man $\lambda := -B/C$. Dann erhält man die Ungleichung

$$AC - 2B\overline{B} + |B|^2 \ge 0, \text{ also } |B|^2 \le AC.$$

Ist $C = 0$ und $A \neq 0$, argumentiert man analog. Ist $C = A = 0$, so setze man $\lambda = -B$. Dann erhält man $-2B\overline{B} \geq 0$, also auch $B = 0$. Damit ist die Schwarzsche Ungleichung bewiesen.

■

Es folgt, daß die quadratintegrablen Funktionen auf I einen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{Q}_I$ bilden.

Definition:

Für quadratintegrable Funktionen f, g auf $I = [a, b]$ sei

$$<f\,,\, g> := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Das „Skalarprodukt" $<f\,,\, g>$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, und es gilt:

$$<f\,,\, g> = \overline{<g\,,\, f>}.$$

Für $c \in \mathbb{C}$ ist $<c \cdot f\,,\, g> = c \cdot <f\,,\, g>$, aber $<f\,,\, c \cdot g> = \overline{c} \cdot <f\,,\, g>$. Es liegt also ein hermitesches Skalarprodukt vor. Außerdem ist

$$\|f\|_2 = <f\,,\, f>^{1/2}.$$

Bei einem richtigen Skalarprodukt müßte eigentlich noch gelten: Ist $\|f\|_2 = 0$, so ist $f = 0$. Das ist hier nicht der Fall, f kann ja in endlich vielen Punkten einen Wert $\neq 0$ haben. Diese Schwierigkeit tritt übrigens nicht auf, wenn man nur mit stetigen Funktionen arbeitet.

Eigenschaften der L^2-Norm

1. $\|c \cdot f\|_2 = |c| \cdot \|f\|_2$.
2. $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ *(Dreiecksungleichung).*
3. $|<f\,,\, g>| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ *(Schwarzsche Ungleichung).*

BEWEIS: 1) ist trivial.

3) Die Schwarzsche Ungleichung haben wir oben schon bewiesen.

2) Die Dreiecksungleichung folgt wie üblich aus der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
(\|f+g\|_2)^2 &= <f+g\,,\,f+g> \\
&= <f\,,\,f> + <f\,,\,g> + \overline{<g\,,\,f>} + <g\,,\,g> \\
&= (\|f\|_2)^2 + (\|g\|_2)^2 + 2\,\mathrm{Re}<f\,,\,g> \\
&\le (\|f\|_2)^2 + (\|g\|_2)^2 + 2|<f\,,\,g>| \\
&\le (\|f\|_2)^2 + (\|g\|_2)^2 + 2\|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \\
&= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.
\end{aligned}$$

■

Definition:

Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{Q}_I$ heißen *orthogonal* zueinander, falls $<f\,,\,g> = 0$ ist.

Im Folgenden bezeichne $\|\ldots\|$ die $L^2 - Norm$.

Satz des Pythagoras

Ist $<f\,,\,g> = 0$, *so ist* $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Der *Beweis* erfolgt fast genauso wie im Falle des euklidischen Skalarproduktes im $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= <f+g\,,\,f+g> \\
&= <f\,,\,f> + <f\,,\,g> + <g\,,\,f> + <g\,,\,g> \\
&= \|f\|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}<f\,,\,g> + \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 + \|g\|^2.
\end{aligned}$$

Definition:

Eine (abzählbare) Teilmenge $\mathcal{S} = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathcal{Q}_I$ heißt ein *ON-System*, falls gilt:

1. $<\varphi_n\,,\,\varphi_m> = 0$ für $n \neq m$.
2. $\|\varphi_n\| = 1$ für alle n.

Es sei daran erinnert, daß eine unendliche Teilmenge B eines Vektorraumes V linear unabhängig heißt, wenn jede beliebige endliche Auswahl von Elementen von B linear unabhängig ist.

Orthonormalsysteme sind linear unabhängig

Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q}_I$ ein ON-System, so ist $\mathcal{S}$ linear unabhängig.

BEWEIS: Sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich und $0 = \sum_{i \in I} c_i \varphi_i$. Dann folgt:

$$0 = <\sum_{i \in I} c_i \varphi_i \,,\, \varphi_j> = \sum_{i \in I} c_i <\varphi_i \,,\, \varphi_j> = \sum_{i \in I} c_i \delta_{ij} = c_j,$$

für $j \in I$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt. ∎

Wir werden jetzt einige Beispiele von ON-Systemen betrachten.

Das trigonometrische System (T)

Sei $I = [-\pi, \pi]$. Dann bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} g_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ g_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \qquad \textit{für } n \geq 1 \\ \textit{und} \quad h_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt) \qquad \textit{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

ein ON-System in $\mathcal{Q}_I$.

BEWEIS: Wir betrachten zunächst die Funktionen 1, $\cos(nt)$ und $\sin(nt)$. Dabei benutzen wir die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \text{und} \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

1) Es ist $< 1, 1 > = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$.

2) $< 1, \cos(nt) > = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, dt = \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

3) $< 1, \sin(nt) > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, dt = -\frac{\cos(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

4) Wegen $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ ist

$$
\begin{aligned}
< \sin(nt), \cos(mt) > &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)t)\,dt \\
&= 0 \qquad \text{für beliebiges } n \text{ und } m.
\end{aligned}
$$

5) Wegen $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ ist

$$
\begin{aligned}
< \cos(nt), \cos(mt) > &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t)\,dt \\
&= \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

6) Wegen $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ ist

$$
\begin{aligned}
< \sin(nt), \sin(mt) > &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t)\,dt \\
&= \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Das gewünschte Ergebnis kann man nun direkt ablesen. ∎

Das komplexe trigonometrische System (E)

Sei $I = [-\pi, \pi]$. Dann bilden die Funktionen

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\mathrm{j}\,nt}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ein ON-System in $\mathcal{Q}_I$.

BEWEIS: Es ist

$$< e^{\mathrm{j}\,nt}, e^{\mathrm{j}\,mt} >= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{j}\,(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Rechnen im Komplexen ist erheblich einfacher! ∎

Sei $I = [a, b]$, $V := \mathcal{Q}_I$ und $\mathcal{F} := (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein ON-System in V. Für eine **endliche** Teilmenge $J \subset \mathbb{N}$ sei V_J der von den Funktionen $f_i, i \in J$, aufgespannte Untervektorraum von V.

Ist $f \in V$ beliebig und $i \in \mathbb{N}$, so nennt man

$$\widehat{f}(i) := <f\,,\, f_i>$$

den *i-ten (formalen) Fourierkoeffizienten* von f bezüglich $\mathcal{F}$. Das Element

$$p_J(f) := \sum_{i \in J} \widehat{f}(i) \cdot f_i \in V_J$$

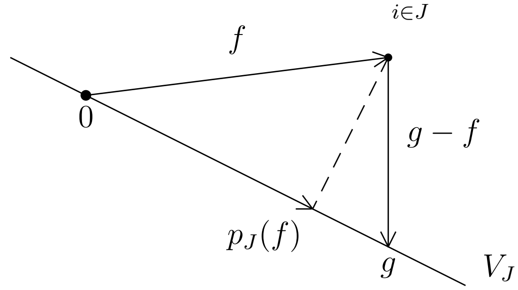
nennt man die *orthogonale Projektion* von f auf V_J.

Eigenschaften der orthogonalen Projektion

1. $\|f - p_J(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_J(f)\|^2$ *(Pythagoras).*
2. $\|f - p_J(f)\| \le \|f - g\|$ *für alle* $g \in V_J$.
3. $\|p_J(f)\|^2 = \sum_{i \in J} |\widehat{f}(i)|^2 \le \|f\|^2$.

Beweis: Es sei $c_i := \widehat{f}(i)$, für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $j \in J$:

$$\begin{aligned} <f - p_J(f)\,,\, f_j> &= <f\,,\, f_j> - \sum_{i \in J} c_i <f_i\,,\, f_j> \\ &= c_j - \sum_{i \in J} c_i \delta_{ij} \;==\; c_j - c_j \;=\; 0. \end{aligned}$$



Also ist $<f - p_J(f)\,,\, h> = 0$ für alle Elemente $h \in V_J$, insbesondere

$$<f - p_J(f)\,,\, p_J(f)> = 0.$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist also

$$\|f\|^2 = \|f - p_J(f)\|^2 + \|p_J(f)\|^2 \quad \text{und} \quad \|p_J(f)\|^2 \le \|f\|^2.$$

Für $g \in V_J$ ist außerdem

$$<f - p_J(f)\,,\, p_J(f) - g> = 0,$$

$$\text{also}\quad \begin{aligned}\|f-g\|^2 &= \|(f-p_J(f))+(p_J(f)-g)\|^2\\ &= \|f-p_J(f)\|^2+\|p_J(f)-g\|^2.\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $\|f - p_J(f)\| \le \|f - g\|$ für $g \in V_J$ ist.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}\|p_J(f)\|^2 &= <p_J(f)\,,\,p_J(f)>\\ &= <\sum_{i\in J} c_i f_i\,,\,\sum_{j\in J} c_j f_j>\\ &= \sum_{i,j} c_i\overline{c}_j <f_i\,,\,f_j>\\ &= \sum_{i\in J}|c_i|^2.\end{aligned}$$

■

Der Satz besagt, daß f unter allen Elementen von V_J durch $p_J(f)$ am besten approximiert wird (in der L^2-Norm). Man nennt $p_J(f)$ daher auch die *Bestapproximation* von f in V_J.

Aus den obigen Abschätzungen folgt insbesondere:

Besselsche Ungleichung

Ist $c_i = \widehat{f}(i)$ *für* $i \in \mathbb{N}$, *so ist*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 \le \|f\|^2.$$

Das bedeutet insbesondere, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$ konvergiert und die Folge (c_i) gegen Null konvergiert.

Definition:

Eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{Q}_I$ *konvergiert im quadratischen Mittel* gegen eine (quadratintegrable) Funktion f, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_2 = 0.$$

Dies ist ein neuer Grenzwertbegriff, und er ist mit Vorsicht zu genießen. Ist fast überall $f = g$, so ist $\|g - f_n\|_2 = \|(f - f_n) + (g - f)\|_2 = \|f - f_n\|_2$. Das hat zur

Folge, daß der Grenzwert einer (im quadratischen Mittel) konvergenten Folge nicht eindeutig bestimmt ist.

Für $f \in \mathcal{Q}_I$ und ein vorher festgelegtes ON-System $\mathcal{F} = (f_n)$ sei künftig

$$S_n(f) := \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i) \cdot f_i = \sum_{i=1}^{n} <f\,,\, f_i> \cdot f_i.$$

Die Reihe $S_f := \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}(i) \cdot f_i$ nennt man die *Fourier-Reihe* von f. Man interessiert sich dafür, unter welchen Umständen und auf welche Art $f = S_f$ ist.

Definition:

Sei $\mathcal{F} = (f_n)$ ein ON-System in $\mathcal{Q}_I$.

$\mathcal{F}$ heißt *vollständig*, falls für alle $f \in \mathcal{Q}_I$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\| = 0,$$

wenn also die formale Fourier-Reihe S_f immer im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

Charakterisierung vollständiger ON-Systeme

Sei $\mathcal{F}$ ein ON-System in $\mathcal{Q}_I$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1. *Alle $f \in Q_I$ erfüllen die* Parsevalsche Gleichung*:*

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |<f\,,\, f_i>|^2.$$

2. *$\mathcal{F}$ ist vollständig.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{Q}_I$ beliebig vorgegeben und $c_i := <f\,,\, f_i>$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|^2 &= \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \text{ (Pythagoras)} \\ &= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2. \end{aligned}$$

Also konvergiert $\|f - S_n(f)\|$ genau dann gegen Null, wenn $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ ist. ∎

Die Vollständigkeit des trigonometrischen Systems

Das trigonometrische System (T) der Funktionen

$$g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \quad \textit{und} \quad h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt), \ \textit{für } n \geq 1,$$

ist vollständig.

Den Beweis können wir hier leider nicht ausführen.

Unmittelbar folgt jetzt, daß auch das komplexe trigonometrische System (E) vollständig ist.

Wir betrachten nun Fourierreihen. Beginnen wir mit dem System (T) :

$$g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \quad \text{und} \quad h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt), \quad \text{für } n \geq 1.$$

Aus historischen Gründen setzt man

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot < f, g_0 >, \\ a_n &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot < f, g_n > \\ \text{und} \quad b_n &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot < f, h_n > . \end{aligned}$$

Dann hat die formale Fourierreihe S_f die Gestalt

$$\begin{aligned} S_f(x) &= < f, g_0 > g_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (< f, g_n > g_n(x) + < f, h_n > h_n(x)) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\sqrt{\pi} a_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + (\sqrt{\pi} b_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right), \end{aligned}$$

es ist also

$$\boxed{S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).}$$

Man beachte, daß die Koeffizienten a_n, b_n hier nicht mit den zuvor definierten formalen Fourierkoeffizienten übereinstimmen. Aus historischen Gründen nennt man a_0, a_n und b_n dennoch die *Fourierkoeffizienten von f (bzgl. (T))*.

Wir kommen jetzt zum System (E):

Setzt man $c_n := \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}\, b_n)$ und $c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{j}\, b_n) = \bar{c}_n$, für $n \geq 1$, sowie $c_0 := \frac{a_0}{2}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}\, nt} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\mathrm{j}\, nt} + c_{-n} e^{-\mathrm{j}\, nt}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((c_n + c_{-n})\cos(nt) + \mathrm{j}\,(c_n - c_{-n})\sin(nt)) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die komplexe Form der Fourierreihe von f gefunden:

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}\, nt}.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten c_n kann man übrigens auch direkt berechnen, ohne den Umweg über die a_n und b_n. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \\
\text{und} \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{j}\, nt}\, dt \quad (\text{für } n \geq 1).
\end{aligned}$$

Da (T) (und damit auch (E)) vollständig ist, konvergiert die Fourierreihe S_f im quadratischen Mittel gegen f, und es gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$|< f, g_0 >|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|< f, g_n >|^2 + |< f, h_n >|^2) = \|f\|^2,$$

also

$$|\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\sqrt{\pi} a_n|^2 + |\sqrt{\pi} b_n|^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

Das heißt:

$$\boxed{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt}$$

oder (mit den komplexen Fourierkoeffizienten)

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\,.}$$

Bei der harmonischen Analyse versucht man, eine periodische Bewegung in ihre harmonischen Bestandteile zu zerlegen. Ein guter Kandidat ist die Fouriersche

Reihe, deren Koeffizienten wir ja schon bestimmen können. Wir müssen jetzt allerdings wissen, wann eine Funktion tatsächlich durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, wann die Reihe also zumindest punktweise gegen die Funktion konvergiert. Man nennt das auch das *Konvergenzproblem*.

§ 2 Konvergenz von Fourierreihen

Inhalt:

Dirichlet-Kern, stückweise glatte Funktionen, Riemann-Lebesguesches Lemma, Dirichletsche Integralformel, Hauptsatz der harmonischen Analyse, gleichmäßige Konvergenz, Gibbs'schen Phänomen, Beispiele von Fourierentwicklungen.

Hilfssatz

Für $x \neq 2k\pi$ ist $$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Beweis: Sei $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{j}\,nx}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(e^{\mathrm{j}\,x} - 1)D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{j}\,(n+1)x} - \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{j}\,nx} \\ &= e^{\mathrm{j}\,(N+1)x} - e^{-\mathrm{j}\,Nx}.\end{aligned}$$

Multiplikation mit $e^{-\mathrm{j}\,\frac{x}{2}}$ ergibt:

$$(e^{\mathrm{j}\,\frac{x}{2}} - e^{-\mathrm{j}\,\frac{x}{2}}) \cdot D_N(x) = e^{\mathrm{j}\,(N+\frac{1}{2})x} - e^{-\mathrm{j}\,(N+\frac{1}{2})x},$$

also

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{für } x \neq 2k\pi.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos(nx)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{N} (e^{\mathrm{j}\,nx} + e^{-\mathrm{j}\,nx})\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{j}\,nx} \\
&= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung. Die Gleichung bleibt auch für $x = 2k\pi$ richtig, wie man durch Anwendung von de l'Hospital auf der rechten Seite sehen kann. Der Wert ist dann $= N + \frac{1}{2}$.

Die Funktion

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathrm{j}\,nx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$$

heißt *(N–ter) Dirichlet–Kern.*

Hilfssatz

Es ist

$$D_N(-x) = D_N(x) \quad \textit{und} \quad \int_0^\pi D_N(x)\,dx = \pi.$$

Beweis: Die erste Aussage ist trivial, und weil

$$D_N(x) = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$$

ist, folgt:

$$\int_0^\pi D_N(x)\,dx = \pi + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin(nx)\,\Big|_0^\pi = \pi.$$

■

Ist die Funktion f (auf einem beschränkten Intervall) stückweise stetig, so ist sie bis auf endlich viele Stellen stetig, und als Unstetigkeiten kommen höchstens Sprungstellen vor. Ist a eine solche Sprungstelle, so existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} f(a-) &= \lim_{x \to a-} f(x) \\ \text{und} \quad f(a+) &= \lim_{x \to a+} f(x). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$M_f(a) := \frac{1}{2}(f(a-) + f(a+)).$$

Ist f in a stetig, so ist $M_f(a) = f(a)$. An den Sprungstellen ist M_f gerade der Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte.

Um die Konvergenz der Fourierreihe gegen die Funktion beweisen zu können, müssen wir stärkere Bedingungen an die Glattheit der Funktion stellen. Dazu noch eine Bemerkung über Differenzierbarkeit in Unstetigkeitsstellen:

Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwar nicht in x stetig, existiert aber der rechtsseitige Grenzwert $f(x+)$, so heißt f in x *rechtsseitig differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(x+) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}$$

existiert. Analog definiert man die linksseitige Differenzierbarkeit und die linksseitige Ableitung $f'(x-)$.

Definition:

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise glatt*, wenn sie bis auf endlich viele Ausnahmen stetig differenzierbar ist, und wenn in den Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte $f(x-)$ und $f(x+)$ und die einseitigen Ableitungen $f'(x-)$ und $f'(x+)$ existieren.

Ist f stückweise glatt, so ist f' stückweise stetig, also insbesondere integrierbar. Ist f sogar stetig, so ist f Stammfunktion von f'. Ist f stückweise glatt und stetig und g stetig differenzierbar, so gilt (vgl. 1. Semester, Kap. 4, §4):

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = (f(t)g(t))\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Hilfssatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stückweise glatte und stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, so daß gilt:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ für } a \le x \le b.$$

BEWEIS: Wir können Realteil und Imaginärteil gesondert behandeln. Deshalb nehmen wir an, daß f reellwertig ist. In Mathematik 1 (Kapitel 4, §3, Beweis der Integrierbarkeit stetiger Funktionen) wurde folgende Tatsache bewiesen: Es gibt eine Zerlegung des Intervalls, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, so daß für $i = 1, \ldots, m$ gilt:

$$\sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} < \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} + \varepsilon.$$

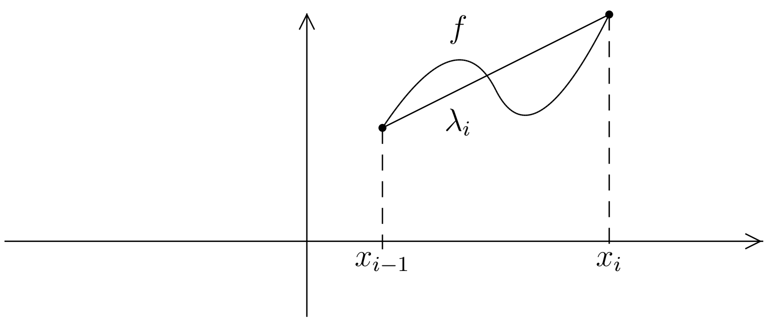
Für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ sei nun

$$\lambda_i(x) := f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Das ist eine lineare Approximation von f, die in den Endpunkten des Teilintervalls mit f übereinstimmt. Die Werte von λ_i liegen zwischen $\min(f(x_{i-1}), f(x_i))$ und $\max(f(x_{i-1}), f(x_i))$. Daher ist

$$-\varepsilon + f(x) < \lambda_i(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ für } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

also $|\lambda_i(x) - f(x)| < \varepsilon$ auf $[x_{i-1}, x_i]$.



Wir setzen $g(x) := \lambda_i(x)$ auf $[x_{i-1}, x_i]$, für $i = 1, \ldots, m$. Offensichtlich ist g stückweise glatt und stetig. ∎

Hilfssatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stückweise glatte und stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, so daß gilt:

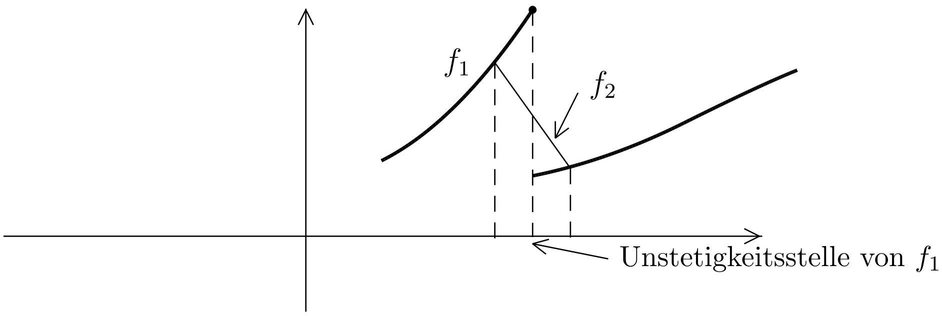
$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

BEWEIS: Wir nehmen wieder an, daß f reellwertig ist. Definitionsgemäß besitzt f nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Wir können Intervalle um diese Stellen herum finden, so daß das Integral über f und diese Intervalle insgesamt kleiner als $\varepsilon/3$ bleibt. Ersetzt man f auf den genannten Intervallen durch Null, so entsteht eine beschränkte integrierbare Funktion f_1 (mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen).

Als nächstes wählen wir Intervalle um die Unstetigkeitsstellen von f_1 herum, deren Gesamtlänge L folgende Bedingung erfüllen soll:

$$2 \cdot \sup_{[a,b]} |f_1| \cdot L < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wenn man jetzt auf diesen Intervallen die Unstetigkeiten durch ein lineares Stück überbrückt, erhält man eine stetige Funktion f_2, und es gilt:



$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx \le 2 \cdot \sup_{[a,b]} |f_1| \cdot L < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nach dem vorigen Hilfssatz gibt es eine stetige und stückweise glatte Funktion g auf $[a, b]$, so daß gilt:

$$|f_2(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad \text{für } a \le x \le b.$$

Dann ist $\displaystyle\int_a^b |f_2(x) - g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$, und es folgt:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \quad &\le \quad \int_a^b |f(x) - f_1(x)|\,dx + \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx \\ &\quad + \int_a^b |f_2(x) - g(x)|\,dx \\ &< \quad \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Riemann-Lebesguesches Lemma

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar und

$$F(y) := \int_a^b f(t)\sin(yt)\,dt.$$

Dann ist $\lim\limits_{y \to +\infty} F(y) = 0$.

BEWEIS: Wir können annehmen, daß f stetig und stückweise glatt ist. Dann ist

$$\int_a^b g(t)\sin(yt)\,dt = (-\frac{g(t)}{y}\cos(yt))\Big|_a^b + \frac{1}{y}\int_a^b g'(t)\cos(yt)\,dt.$$

Dieser Ausdruck strebt für $y \to \infty$ gegen Null. ∎

Bemerkung. Die gleiche Aussage gilt mit der Cosinus-Funktion. Es folgt, daß die Fourier-Koeffizienten einer absolut integrierbaren Funktion eine Nullfolge bilden. Für quadratintegrable Funktionen haben wir das schon im vorigen Paragraphen gesehen.

Wir können jetzt den entscheidenden Schritt in Richtung auf einen allgemeinen Konvergenzbeweis hin tun:

Dirichletsche Integralformel

Es sei f stückweise stetig und periodisch, und

$$T_{f,N}(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

das N-te Fourierpolynom von f. Dann ist

$$T_{f,N}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt.$$

BEWEIS: Setzt man die Integraldarstellungen der Koeffizienten a_0, a_n und b_n in die Definition von $T_{f,N}(x)$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
T_{f,N}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx))\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos(n(t-x))\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2}D_N(t-x)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)D_N(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde die Substitution $t(\tau) = x + \tau$ (mit $t'(\tau) = 1$) vorgenommen. Die Integrationsgrenzen mußten wegen der Periodizität des Integranden nicht verändert werden! ∎

Hauptsatz der harmonischen Analyse

Die Funktion f sei stückweise glatt und periodisch. Dann konvergiert die Fourierreihe von f ***punktweise*** *gegen M_f.*

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst nur für stetige Punkte von f. Sei $x \in (-\pi, +\pi)$ ein solcher Punkt. Wegen der Periodizität können wir immer annehmen, daß der Punkt im Innern des Periodenintervalls liegt.

Nach der Dirichletschen Integralformel ist

$$T_{f,N}(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x+t) - f(x)\Big]\frac{1}{2}D_N(t)\,dt.$$

Nun sei

$$\varphi(t) := \frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot\frac{t/2}{\sin(t/2)}.$$

Der erste Faktor bleibt für $t \to 0$ beschränkt, weil f in der Nähe von x stetig ist und der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten existiert (f ist ja stückweise glatt). Der zweite Faktor strebt für $t \to 0$ gegen 1 und bleibt auf $[-\pi, \pi]$ stetig. Es folgt, daß φ absolut integrierbar und außerhalb von $t = 0$ sogar stückweise glatt ist.

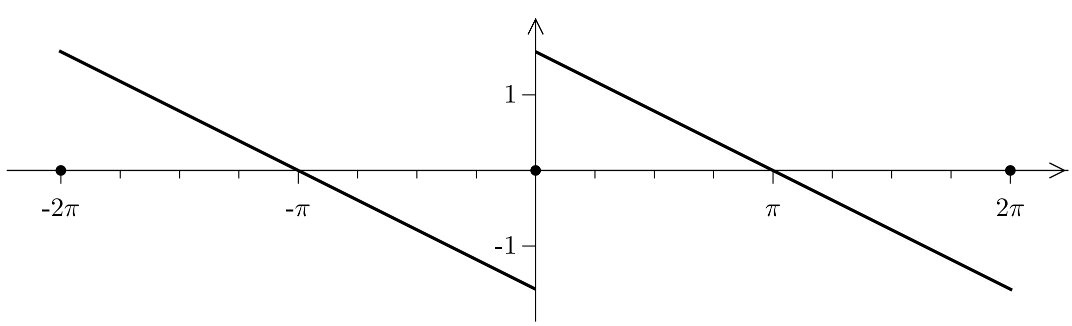
Nun ist aber

$$T_{f,N}(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin(N+\frac{1}{2})t\,dt.$$

Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma strebt $|T_{f,N}(x) - f(x)|$ dann für $N \to \infty$ gegen Null.

Den Beweis für die unstetigen Punkte tragen wir später nach. ■

Wir betrachten zunächst ein besonders wichtiges **Beispiel**:



$$\text{Sei}\quad f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{für } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = 2\pi. \end{cases}$$

Wir wollen die Fourierkoeffizienten von f_0 berechnen. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0,$$

und

$$\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{x\sin(nx)}{n}\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx &= -\frac{x\cos(nx)}{n}\,\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\ &= -\frac{2\pi}{n} - \frac{\sin(nx)}{n^2}\,\Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{2\pi}{n}.\end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx \;=\; \frac{1}{2\pi}(\pi x - \frac{1}{2}x^2)\,\Big|_0^{2\pi} = \;0, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,dx \;=\; 0 \\ \text{und}\qquad b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx \;=\; \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f_0 hat also die Gestalt

$$S_{f_0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Wir wissen schon, daß $S_{f_0}(x)$ für $x \neq 2\pi k$ punktweise gegen $f_0(x)$ konvergiert.

Ist $x = 2\pi k$, so ist $S_{f_0}(x)$ die Nullreihe. Da $M_{f_0}(x)$ in diesen Punkten ebenfalls den Wert Null annimmt, konvergiert also die Fourierreihe von f_0 überall gegen M_{f_0}.

Wir können jetzt den fehlenden Teil des Beweises des Hauptsatzes nachtragen.

Die stückweise glatte Funktion f sei in x_0 unstetig. Es liege eine Sprungstelle der Höhe h vor. Sei $g(x) := \frac{h}{\pi} f_0(x - x_0)$. Das ist eine stückweise glatte Funktion mit einer einzigen Sprungstelle der Höhe h bei x_0, und die Fourierreihe von g konvergiert überall gegen M_g.

Weil die Annäherung an x_0 bei $f - g$ von links und von rechts den gleichen Wert ergibt, ist die Funktion $f - g$ in x_0 stetig! Also konvergiert die Fourierreihe von $f - g$ in x_0 gegen $(f - g)(x_0) = M_f(x_0) - M_g(x_0)$. Damit ist

$$S_f(x_0) = S_{f-g}(x_0) + S_g(x_0) = (M_f(x_0) - M_g(x_0)) + M_g(x_0) = M_f(x_0)$$

und der Hauptsatz ist auch in unstetigen Punkten bewiesen.

Wir wollen jetzt etwas genauer untersuchen, wie gut die Fourierreihe konvergiert.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und (f_n) eine Folge von (reell- oder komplexwertigen) Funktionen auf I.

Definition:

Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert* auf I *gleichmäßig* gegen eine Funktion f, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ s.d. für } n \geq n_0 \text{ und } \textbf{alle } x \in I \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ist f reellwertig, so können wir die gleichmäßige Konvergenz noch anschaulicher deuten: Die Menge

$$\mathcal{U}_\varepsilon(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in I \text{ und } f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}$$

kann man als ε-Schlauch um G_f bezeichnen. Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet, daß in jedem ε-Schlauch die Graphen fast aller Funktionen f_n liegen.

Satz

Ist eine Funktionenreihe auf I normal konvergent, so konvergiert die Folge ihrer Partialsummen gleichmäßig auf I.

Beweis: Wir betrachten die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$. Daß die Reihe normal konvergiert, bedeutet: Die Reihe konvergiert punktweise gegen eine Funktion f, und es gibt reelle Zahlen a_n, so daß $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert und $|f_n(x)| \leq a_n$ auf ganz I gilt.

Sei $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ die N-te Partialsumme.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß $\sum_{n=k+1}^\infty a_n < \varepsilon$ für $k \geq n_0$ ist. Dann gilt für $x \in I$ und $m > k$:

$$|\sum_{n=k+1}^{m} f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{m} a_n < \varepsilon.$$

Läßt man m gegen ∞ gehen, so bleibt für $k \geq n_0$ die Abschätzung

$$|f(x) - S_k(x)| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)| \le \varepsilon.$$

Das ergibt die gleichmäßige Konvergenz. ∎

Beispiel.

Wir betrachten noch einmal die Funktion

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{für } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = 2\pi. \end{cases}$$

Sie hat die Fourierreihe $S_{f_0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

Behauptung: Die Fourierreihe von f_0 konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

Beweis dazu: Es sei

$$R_N(x) := T_{f_0,N}(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{1}{2}(\pi - x)$$

für $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$ und kleines $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} \int_{\pi}^{x} \cos(nt)\,dt + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x} dt \\ &= \int_{\pi}^{x} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt)\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x} D_N(t)\,dt \;=\; \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \end{aligned}$$

Dieses Integral werten wir mit Hilfe von partieller Integration aus. Außerdem benutzen wir noch den 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Sind $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p \ge 0$, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$.

Mit einem geeigneten c zwischen π und x ist daher

$$\begin{aligned}
&\int_\pi^x \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \\
&= \frac{-\cos(N+\frac{1}{2})t}{(2N+1)\sin\frac{t}{2}}\Big|_\pi^x + \int_\pi^x \frac{\cos(N+\frac{1}{2})t}{2N+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)'\,dt \\
&= \frac{-\cos(N+\frac{1}{2})x}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos(N+\frac{1}{2})c}{2N+1}\int_\pi^x \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)'\,dt \\
&= \frac{-\cos(N+\frac{1}{2})x}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos(N+\frac{1}{2})c}{2N+1}\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}-1\right) \\
&= \frac{1}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(-\cos((N+\frac{1}{2})x)+\cos((N+\frac{1}{2})c)\Big(1-\sin\frac{x}{2}\Big)\right).
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$ ist $\dfrac{\varepsilon}{2} \le \dfrac{x}{2} \le \pi - \dfrac{\varepsilon}{2}$, also

$$0 < \sin\frac{\varepsilon}{2} \le \sin\frac{x}{2} \le 1$$

und damit

$$1 \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\,.$$

Außerdem ist $0 \le 1 - \sin\dfrac{x}{2} < 1$. Daraus folgt:

$$|R_N(x)| \le \frac{2}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}} \le \frac{2}{(2N+1)\sin\frac{\varepsilon}{2}} \text{ für } \varepsilon \le x \le 2\pi-\varepsilon.$$

Das bedeutet aber, daß (R_N) für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert, und damit (T_{N,f_0}) gleichmäßig gegen f_0.

In der Nähe von $x = 0$ ist die Konvergenz *nicht* mehr *gleichmäßig*. Wie macht sich das bemerkbar?

Wir müssen die Werte der Partialsummen $T_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}$ in der Nähe von $x = 0$ abschätzen. Um etwaige Maxima zu ermitteln, berechnen wir die erste Ableitung:

$$T_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$T_N'(x) = 0 \iff \sin(N+\frac{1}{2})x = \sin\frac{x}{2}.$$

Bei festem N kann x so klein gewählt werden, daß

$$0 < \frac{x}{2} < (N + \frac{1}{2})x < \pi$$

ist. Da der Sinus zwischen 0 und π jeden Wert (zwischen 0 und 1) genau zweimal annimmt, und zwar symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{2}$, tritt die erste positive Nullstelle von T'_N genau dort auf, wo

$$\frac{x}{2} + (N + \frac{1}{2})x = \pi \text{ ist, also bei } x = x_N := \frac{\pi}{N+1}.$$

Da $T_N(0) = 0$ und $T_N(x_N) > 0$ ist und dazwischen kein Extremwert liegt, muß T_N in x_N ein Maximum besitzen. Wir wollen den Wert von T_N in diesem Maximum berechnen:

$$\begin{aligned} T_N(x_N) &= T_N(x_N) - T_N(0) = \int_0^{x_N} T'_N(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{x_N} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{x_N}{2}. \end{aligned}$$

Für großes N und $0 \le t \le x_N$ ist $\sin(\frac{t}{2}) < \frac{t}{2}$, also

$$T_N(x_N) > \int_0^{x_N} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{t}\,dt - \frac{x_N}{2}.$$

Mit der Substitution $u = u(t) = (N + \frac{1}{2})t$ ist

$$\int_0^{x_N} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{t}\,dt = \int_0^{\pi(1-\varepsilon_N)} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

mit $\varepsilon_N := \dfrac{1}{2N+2}$.

Läßt man N gegen Unendlich gehen, so strebt ε_N gegen Null und $\frac{\pi}{2N+2}$ gegen Null. Also nähert sich $T_N(x_N)$ für großes N einem Wert, der über der festen Zahl

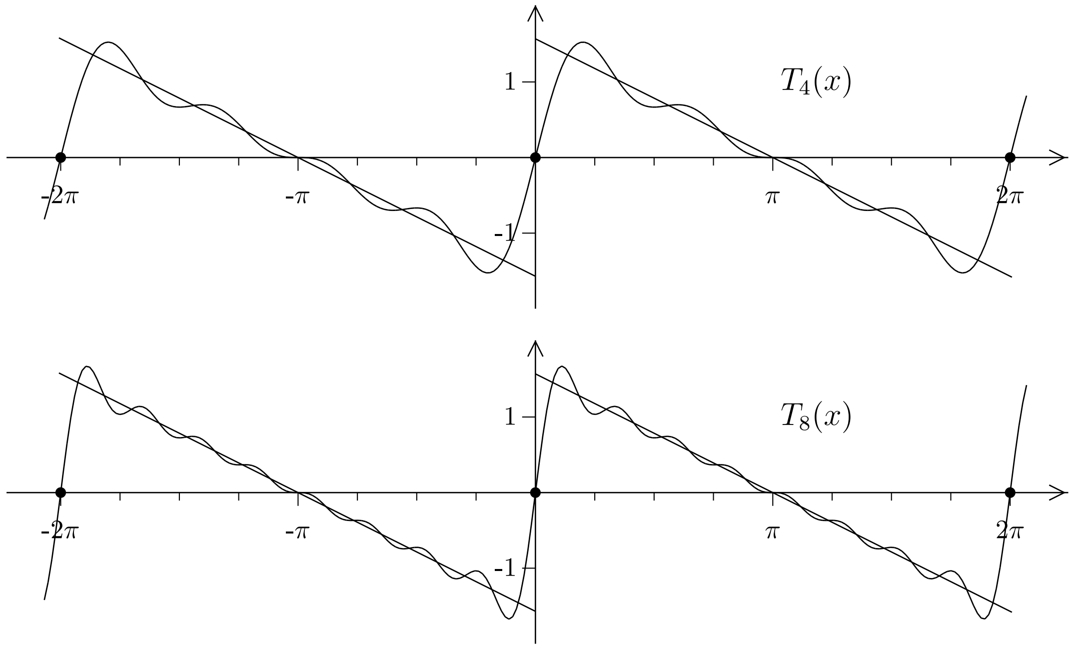
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u}\,du = 1.85193705\ldots$$

liegt, während

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2} = 1.570\ldots$$

ist. Die Partialsummen der Fourierreihe schießen in der Nähe der Unstetigkeitsstelle um einen unangenehm hohen Betrag über das Ziel hinaus, und die Approximation wird um so schlechter, je größer das N ist. Dieses Verhalten wird das *Gibbs'sche Phänomen* genannt, und es ist bei allen unstetigen stückweise glatten periodischen Funktionen zu beobachten.

Betrachten wir noch zwei Partialsummen im Bild:



Satz über gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

Die Funktion f sei stückweise glatt, periodisch und zusätzlich stetig. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.

Beweis:

Sei $S_f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Die Funktion $g := f'$ ist stückweise stetig, also kann man formal auch ihre Forierreihe bilden:

$$S_g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)).$$

Weil f stetig und stückweise glatt ist, kann man partielle Integration anwenden:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}(f(t)\cos(nt))\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)n\sin(nt)\,dt \\ &= n \cdot b_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}(f(t)\sin(nt))\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)n\cos(nt)\,dt \\ &= -n\cdot a_n. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{\pi}f(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Nun erinnern wir uns an die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt.$$

Daraus folgt, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2)$ konvergent ist. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\le \left(|c_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = c_n^2 - \frac{2|c_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \\ \text{und}\quad 0 &\le \left(|d_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = d_n^2 - \frac{2|d_n|}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$|a_n| + |b_n| = \frac{|c_n|}{n} + \frac{|d_n|}{n} \le \frac{1}{2}(c_n^2 + d_n^2 + \frac{2}{n^2}).$$

Damit besitzt $S_f(x)$ eine konvergente Majorante, und nach dem Weierstraß–Kriterium ist $S_f(x)$ gleichmäßig konvergent. ∎

Im Beispiel der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ hatten wir etwas mehr herausbekommen, nämlich die gleichmäßige Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Unstetigkeitsstelle enthält. Auch das ist ganz allgemein richtig:

Konvergenzverhalten außerhalb der Sprungstellen

Ist f stückweise glatt und periodisch und $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, das keine der Unstetigkeitsstellen von f enthält, so konvergiert die Fourierreihe $S_f(x)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f.

BEWEIS: Sei $\psi(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ die Funktion aus dem Beispiel. Dann hat ψ in $[-\pi, +\pi]$ genau eine Sprungstelle der Höhe π, nämlich bei $x = 0$.

Sei $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ein Punkt, h eine reelle Zahl. Dann hat die Funktion $\dfrac{h}{\pi}\psi(x - x_0)$ nur jeweils in den Punkten $x_0 + 2k\pi$ eine Sprungstelle (von der Höhe h), und von diesen Stellen liegt nur x_0 selbst in $[-\pi, \pi]$.

Hat jetzt $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ die Sprungstellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit den Höhen $h_1, h_2, \ldots, h_k$, so hat

$$F(x) := f(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{\pi}\psi(x - x_i)$$

überhaupt keine Sprungstellen mehr. Die Fourierreihe S_F konvergiert überall gleichmäßig, und die Fourierreihe des Korrekturterms konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig, das keine der Sprungstellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ enthält. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Fourierkoeffizienten gerader und ungerader Funktionen

$S_f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *sei die (formale) Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion* $f(x)$*. Dann gilt:*

1. *Ist* f *gerade (also* $f(-x) = f(x)$ *), so ist* $b_n = 0$ *für* $n \geq 1$.
2. *Ist* f *ungerade (also* $f(-x) = -f(x)$ *), so ist* $a_n = 0$ *für* $n \geq 0$.

Beweis: Ist f gerade, so ist $f(x)\sin(nx)$ für jedes $n \geq 1$ ungerade, und dann ist

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0,$$

weil sich die positiven und die negativen Teile gerade wegheben.

Ist f ungerade, so ist $a_0 = 0$ und $f(x)\cos(nx)$ ungerade, also auch $a_n = 0$ für $n \geq 1$. ∎

Beispiele.

1. Wir beginnen mit einer Fourierreihe, zu der wir die passende Funktion suchen:

   Sei $F(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Da die konvergente Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Majorante ist, konvergiert $F(x)$ überall gleichmäßig, stellt also eine stetige Funktion dar.

Die gliedweise differenzierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(nx)}{n} = \frac{x-\pi}{2}$ konvergiert auf jedem Intervall $I_\varepsilon = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ gleichmäßig. Auf solchen Intervallen ist also $F'(x) = \frac{x-\pi}{2}$, d.h. $F(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + C$ mit einer Konstanten C.

Die Gleichung gilt zunächst nur außerhalb der Punkte $2n\pi$, aber da $F(x)$ als gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen selbst wieder stetig ist, gilt sie sogar überall. Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 dx + 2\pi C \\ &= \frac{(x-\pi)^3}{12}\Big|_0^{2\pi} + 2\pi C \\ &= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi C \end{aligned}$$

und andererseits wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $F(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Also ist $C = -\frac{\pi^2}{12}$ und

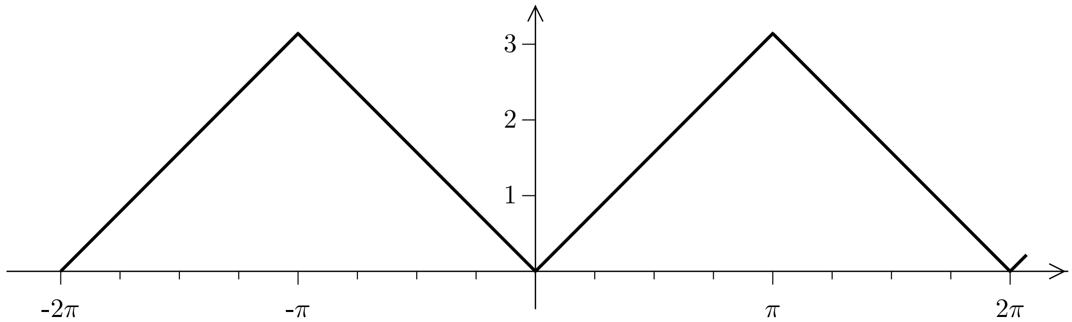
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Der Fall $x = 0$ ergibt insbesondere die Formel

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

So liefert uns die Fouriertheorie den Grenzwert einer Reihe, deren Konvergenz uns schon lange bekannt ist.

2. Als nächstes betrachten wir die Fourierreihe einer stetigen Funktion:



Wir definieren $f(x) := |x|$ auf $[-\pi, \pi]$ und setzen wie üblich periodisch fort.

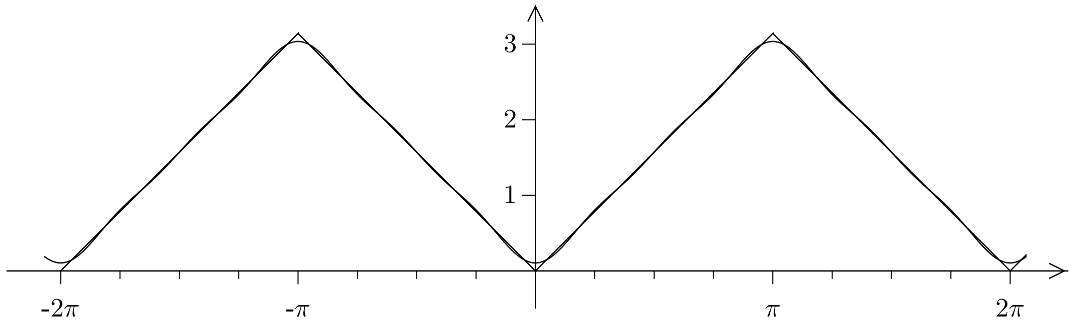
Dann erhalten wir folgende Fourierkoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot t^2 \Big|_0^{\pi} = \pi, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(t\cdot\frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(nt)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi)-1) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \\
\text{und}\quad b_n &= 0, \quad \text{weil } f \text{ eine gerade Funktion ist.}
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir die Fourierreihe

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \cdots\right).$$

Hier ist schon $T_5(x)$ eine gute Approximation:



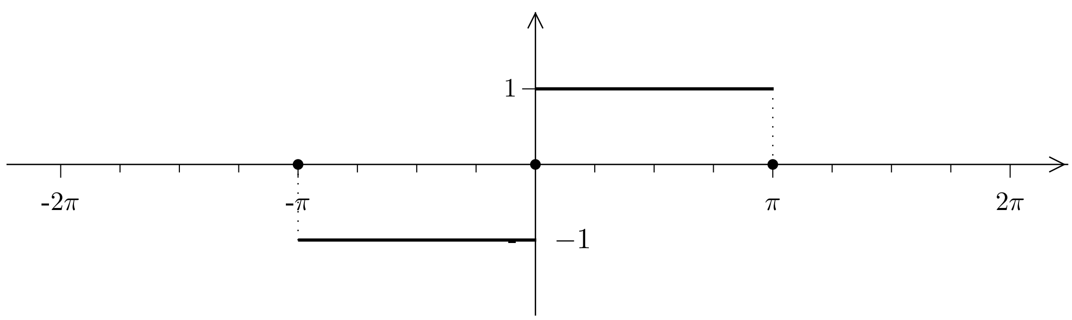
Insbesondere ergibt sich für $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

3. Schließlich betrachten wir noch einen typischen „Rechteckimpuls“:

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{falls } 0 < x < \pi. \end{cases}$$



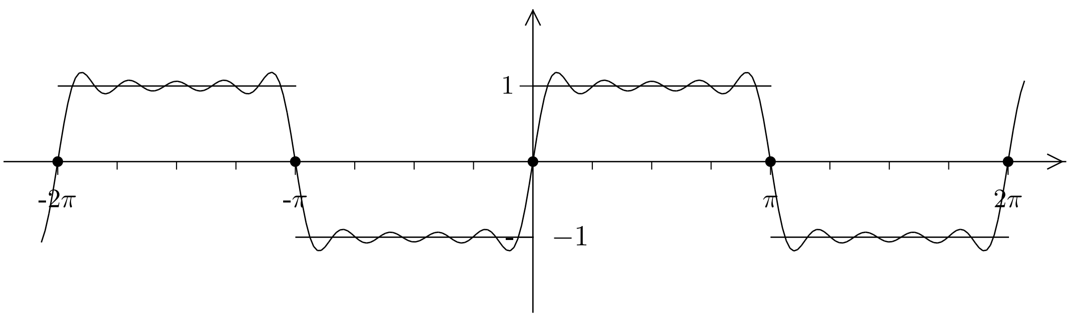
Da f eine ungerade Funktion ist, ist $a_n = 0$ für alle n. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe hat also die Gestalt

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Wegen der Unstetigkeitsstellen tritt natürlich wieder das Gibbs'sche Phänomen auf! Wir skizzieren das Polynom $T_9(x)$:



§ 3 Die Fouriertransformation

Inhalt:

Die Fouriertransformierte, einfache Beispiele und Regeln, Fouriertransformation und Ableitung, die Faltung, das Fourier-Integral-Theorem, Rücktransformation mit Hilfe des Residuensatzes, stark abfallende Funktionen und Distributionen.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, so daß das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

konvergiert. Dann kann man zeigen, daß das Integral $F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,dt$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ darstellt. Außerdem ist $\lim\limits_{\omega\to\infty} F(\omega) = 0$. Ist sogar $|t \cdot f(t)|$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so ist F stetig differenzierbar und

$$F'(\omega) = -\mathsf{j} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,dt.$$

Definition:

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,dt$$

heißt die *Fourier-Transformierte* von f.

Man schreibt auch $\quad F(\omega) = \widehat{f}(\omega) \quad$ oder $\quad F = \mathcal{F}[f]$.

f heißt *Originalfunktion* oder *Urbildfunktion*, F heißt *Spektralfunktion* oder *Bildfunktion*. Den Zusammenhang zwischen Originalfunktion und Bildfunktion macht man auch mit folgender Symbolik deutlich:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega)$$

Bemerkung. Die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ ist wie folgt beschränkt:

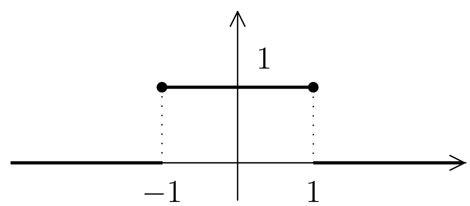
$$|\widehat{f}(\omega)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,dt| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt.$$

Die Funktionen $f = f(t)$ sind im sogenannten *Original- oder Zeitbereich* angesiedelt. Man kann sich darunter irgendwelche eingehenden elektromagnetischen Signale vorstellen. Mit Hilfe der Fourier-Transformation wird das Signal wie beim Empfang durch eine Antenne als kontinuierliche Überlagerung von harmonischen Schwingungen dargestellt. Die im *Bild- oder Frequenzbereich* angesiedelte Fourier-Transformierte $F = F(\omega)$ beschreibt, welchen Beitrag die verschiedenen Frequenzen leisten.

Beispiele.

1. Wir beginnen mit dem „Rechteck-Impuls“

$$\pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$



Die Fourier-Transformierte $F = \mathcal{F}[\pi]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-1}^{1} e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,dt \\ &= \frac{\mathsf{j}}{\omega} \cdot e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{\mathsf{j}}{\omega} \cdot (e^{-\mathsf{j}\,\omega} - e^{\mathsf{j}\,\omega}) \\ &= \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega). \end{aligned}$$

Führen wir die Schreibweise

$$\mathrm{si}(x) := \frac{\sin x}{x}$$

ein, so erhalten wir:

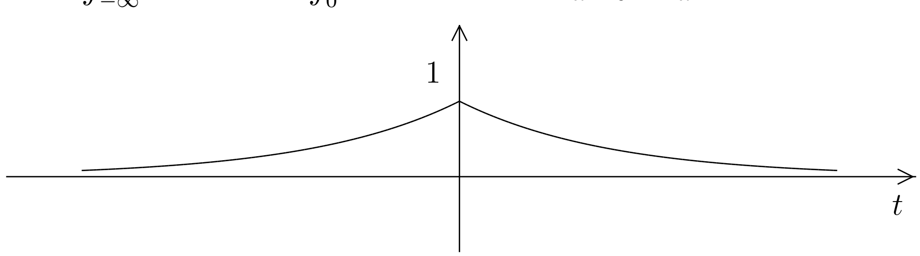
$$\pi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\mathrm{si}(\omega)\,.$$

2. Als nächstes betrachten wir den symmetrisch abfallenden Impuls

$$f(t) := e^{-a|t|}.$$

f ist stetig und absolut integrierbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-at}\,dt = 2 \cdot \frac{e^{-at}}{-a}\,\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{a}.$$

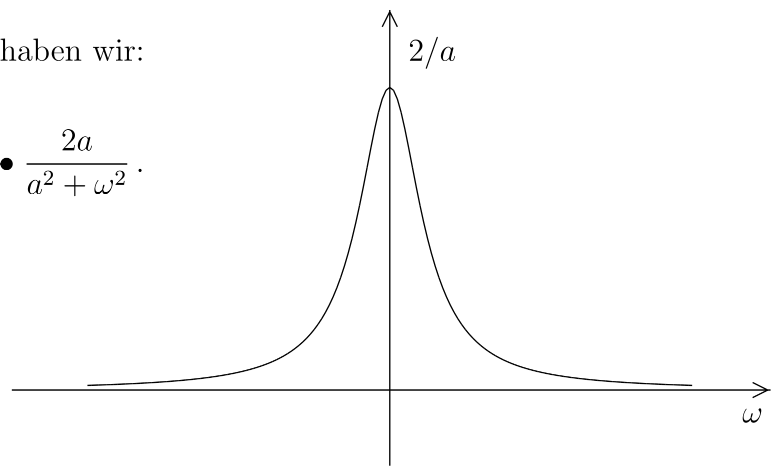


Die Fourier-Transformierte ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+\mathrm{j}\,\omega)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(-a+\mathrm{j}\,\omega)t}\,dt \\ &= -\frac{1}{a+\mathrm{j}\,\omega} e^{-(a+\mathrm{j}\,\omega)t}\,\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-a+\mathrm{j}\,\omega} e^{-(-a+\mathrm{j}\,\omega)t}\,\Big|_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{a+\mathrm{j}\,\omega} - \frac{1}{-a+\mathrm{j}\,\omega} \\ &= \frac{-2a}{-\omega^2 - a^2} \\ &= \frac{2a}{\omega^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Also haben wir:

$$e^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.$$



Man beachte, daß man zu vielen Standard-Funktionen nicht die Fourier-Transformierte bilden kann (z.B. Konstante, sin, cos usw.) !

Eigenschaften der Fourier-Transformation

1. $\mathcal{F}[f_1 + f_2] = \mathcal{F}[f_1] + \mathcal{F}[f_2]$.
2. *Ist* $\alpha \in \mathbb{C}$, *so ist* $\mathcal{F}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathcal{F}[f]$.
3. $f(t-c) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\omega) e^{-\mathrm{j}\,\omega c}$.
4. $f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{|a|} \cdot \widehat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

BEWEIS: (1) und (2) sind trivial.

Zu (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-c)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathrm{j}\,\omega(s+c)}\,ds = e^{-\mathrm{j}\,\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathrm{j}\,\omega s}\,ds.$$

Zu (4):

Sei $\varphi(t) := at$. Im Endlichen gilt :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} g(at)\,dt &= \frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{a\alpha}^{a\beta} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{|a|}\cdot\int_{|a|\alpha}^{|a|\beta} g(s)\,ds.\end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathrm{j}\,\omega\frac{s}{a}}\,ds = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

■

Beispiele.

1. Wir betrachten einen etwas modifizierten Rechteck-Impuls:

   $$\pi_{A,T} := A\cdot\pi(\frac{2}{T}t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

   Dann gilt:

   $$\pi_{A,T} \circ\!\!-\!\!\bullet\; A\cdot T\cdot \mathrm{si}(\frac{T}{2}\omega).$$

2. Als nächstes untersuchen wir einen modifizierten und verschobenen Rechteck-Impuls:

   $$f(t) := \pi(\frac{t-a}{T}) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t-a| \le T \\ 0 & \text{für } |t-a| > T. \end{cases}$$

   Wir gehen aus von der Beziehung $\quad \pi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\mathrm{si}(\omega)$.

   Sei $f_1(t) := \pi(t - \frac{a}{T})$. Dann ist $f(t) = \pi(\frac{1}{T}t - \frac{a}{T}) = f_1(\frac{1}{T}t)$. Damit folgt:

   $$f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \widehat{\pi}(\omega)e^{-\mathrm{j}\,\omega\frac{a}{T}} = 2\mathrm{si}(\omega)e^{-\mathrm{j}\,\omega\frac{a}{T}}$$

   und

   $$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; T\cdot\widehat{f_1}(T\omega) = 2T\cdot\mathrm{si}(T\omega)e^{-\mathrm{j}\,\omega a}.$$

Translation im Bildbereich

$$\begin{array}{llcl} \textit{Wenn} & f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(\omega), \\ \textit{dann} & e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(\omega-\omega_0). \end{array}$$

BEWEIS: Es ist

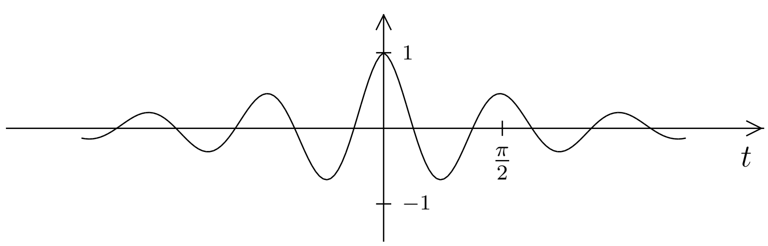
$$\begin{aligned} F(\omega-\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{j}\,(\omega-\omega_0)t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t}\right] e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt. \end{aligned}$$

∎

Beispiel.

Wir berechnen die Fourier-Transformierte einer amplitudenmodulierten Cosinus-Schwingung:

$$f(t) := e^{-a|t|} \cdot \cos(\Omega t),\ \Omega, a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$



Wir erinnern uns an die Formeln

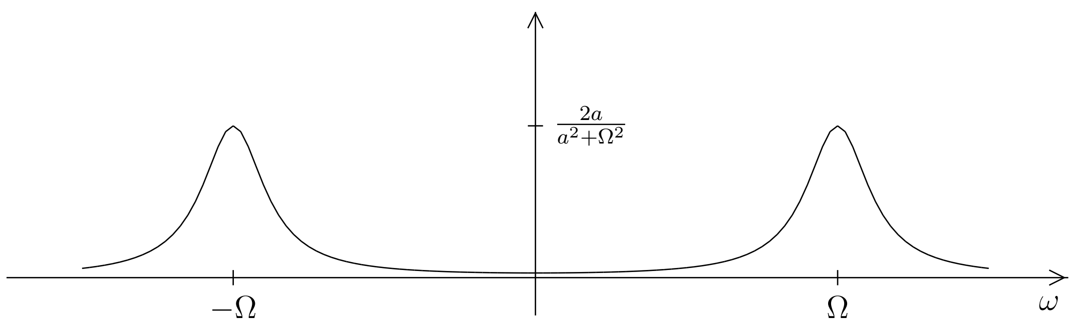
$$\begin{aligned} e^{\mathrm{j}\,z} &= \cos z + \mathrm{j}\,\sin z \\ \text{und} \quad e^{-\mathrm{j}\,z} &= \cos z - \mathrm{j}\,\sin z. \end{aligned}$$

Also ist $\cos z = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}\,z} + e^{-\mathrm{j}\,z})$ und

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-a|t|} (e^{\mathrm{j}\,\Omega t} + e^{-\mathrm{j}\,\Omega t}).$$

Nun haben wir:

$$
\begin{aligned}
&& e^{-a|t|} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2},\\
\text{also} && e^{-a|t|}e^{\mathrm{j}\,\Omega t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega-\Omega) = \frac{2a}{a^2+(\omega-\Omega)^2}\\
\text{und} && e^{-a|t|}e^{-\mathrm{j}\,\Omega t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega+\Omega) = \frac{2a}{a^2+(\omega+\Omega)^2},\\
\text{und damit} && e^{-a|t|}\cos(\Omega t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{a}{a^2+(\omega-\Omega)^2} + \frac{a}{a^2+(\omega+\Omega)^2}.
\end{aligned}
$$



Die Fouriertransformierte der Ableitung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise glatt. Außerdem seien f und f' über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Dann gilt:

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{j}\,\omega \cdot \widehat{f}(\omega).$$

Beweis: Auf Grund der Voraussetzungen muß $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ sein. Außerdem kann man partielle Integration anwenden:

$$\int_{-N}^{M} f'(t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt = f(t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\Big|_{-N}^{M} - \int_{-N}^{M} f(t)(-\mathrm{j}\,\omega)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt.$$

Für $N, M \to \infty$ strebt der erste Summand auf der rechten Seite gegen 0 und der zweite gegen $\mathrm{j}\,\omega \cdot \widehat{f}(\omega)$. ∎

Bemerkung. Bei höherer Differenzierbarkeit erhält man die Formel

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; (\mathrm{j}\,\omega)^n \cdot \widehat{f}(\omega).$$

Auf die Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

Die Ableitung der Fouriertransformierten

Sei f stückweise stetig. Die Funktionen f und $t \mapsto t \cdot f(t)$ seien über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar.

Dann ist $\widehat{f}$ stetig differenzierbar, und es gilt:

$$t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{j} \cdot \widehat{f}'(\omega).$$

Beweis: Auf Grund der Voraussetzungen existiert $\widehat{f}$ und ist stetig differenzierbar. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-\mathrm{j}\, t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\, dt \\ &= -\mathrm{j} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\, dt \\ &= -\mathrm{j} \cdot \mathcal{F}[t \cdot f(t)]. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Beispiel.

Sei $f(t) := e^{-t^2}$. Die Funktion ist stetig, ≥ 0 und über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Also existiert die Fourier-Transformierte

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\, dt.$$

f ist sogar stetig differenzierbar, und $f'(t) = -2t \cdot e^{-t^2} = -2t \cdot f(t)$ ist ebenfalls absolut integrierbar. Wir haben deshalb zwei Darstellungsmöglichkeiten für die Fourier-Transformierte von $f'(t)$:

$$\begin{array}{lccl} & f'(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & -2\mathrm{j}\, F'(\omega) \quad \text{(Ableitung der Fouriertransformierten)} \\ \text{und} & f'(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathrm{j}\,\omega F(\omega) \quad \text{(Fouriertransformierte der Ableitung)} \end{array}$$

Also ist

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= -\frac{\omega}{2}F(\omega) \\ \text{und} \quad F(0) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Das ist eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit Anfangsbedingung. Die Lösung ist einfach:

$$(\ln F)'(\omega) = \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{\omega}{2},$$

also

$$\ln F(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + \text{const.}, \quad \text{d.h. } F(\omega) = C \cdot e^{-(\omega^2/4)},$$

und wegen der Anfangsbedingung ist $C = \sqrt{\pi}$. Also haben wir:

$$f(t) = e^{-t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-(\omega^2/4)}.$$

Jetzt folgt:

„Fixpunkt“ der Fouriertransformation

$$e^{-(t^2/2)} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sqrt{2\pi} e^{-(\omega^2/2)}.$$

BEWEIS: Wir verwenden die Formel

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|} \cdot \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Daraus ergibt sich (mit $F(\omega) := \sqrt{\pi} e^{-(\omega^2/4)}$):

$$e^{-(t^2/2)} = e^{-(t/\sqrt{2})^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sqrt{2} \cdot F(\sqrt{2}\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(\omega^2/2)}.$$

∎

Tatsächlich ist $e^{-(t^2/2)}$ nicht wirklich ein Fixpunkt der Fouriertransformation. Setzen wir aber

$$\widetilde{\mathcal{F}}[f(t)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\, dt,$$

so ergibt sich:

$$\widetilde{\mathcal{F}}[e^{-(t^2/2)}] = e^{-(\omega^2/2)}.$$

Deshalb findet sich in der Literatur häufig auch $\widetilde{\mathcal{F}}$ als Fourier-Transformation.

Existenz der Faltung

f und g seien stückweise stetig, beschränkt und über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Dann ist die Faltung *(das* Konvolutionsprodukt*)*

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau)\, d\tau$$

eine stetige und absolut integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$.

Außerdem ist $f \star g = g \star f$.

Wir verzichten hier auf den Beweis.

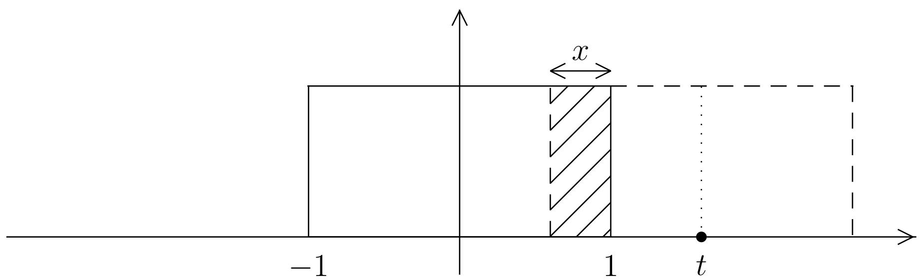
Beispiel.

Wir wollen sehen, was herauskommt, wenn man den Rechteckimpuls π mit sich selbst faltet:

Es ist

$$(\pi \star \pi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\tau)\pi(t-\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{1} \pi(t-\tau)\,d\tau.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist $= 1$, wenn $|\tau| \leq 1$ und $|t-\tau| \leq 1$ ist, sonst ist er $= 0$. Nur wenn $|t| \leq 2$ ist, überlappen sich die beiden Bereiche:



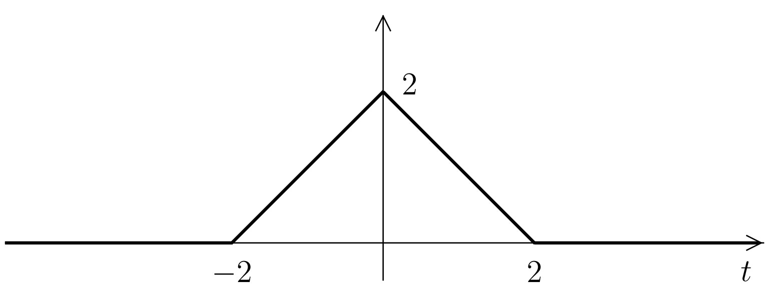
Ist x die Länge des Überlappungsbereiches, so ist

$$1 - x = |t| - 1, \qquad \text{also } x = 2 - |t|.$$

Daraus folgt:

$$(\pi \star \pi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |t| \geq 2 \\ 2 - |t| & \text{falls } |t| < 2. \end{cases}$$

Das ist ein Dreiecks-Impuls der Breite 4 und der Höhe 2.



Fouriertransformation der Faltung

Die Funktionen f und g seien stückweise stetig, beschränkt und über $\mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

$$(f \star g)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega).$$

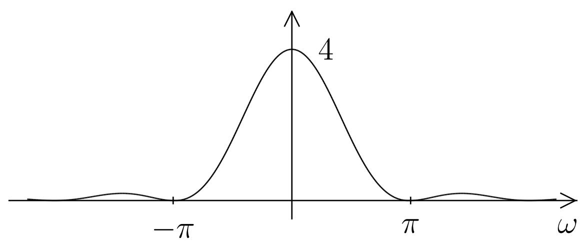
Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\omega)f(t)e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}g(\tau)\,d\tau\right)f(t)\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\,\omega(t+\tau)}g(\tau)f(t)\,d\tau\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\,\omega u}g(\tau)f(u-\tau)\,d\tau\,du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\,\omega u}(g\star f)(u)\,du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(f\star g)(u)e^{-\mathrm{j}\,\omega u}\,du.
\end{aligned}$$

■

Beispiel.

Es ist $(\pi\star\pi)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \widehat{\pi}(\omega)\cdot\widehat{\pi}(\omega) = 4\mathrm{si}^2(\omega).$



Fourier-Integral-Theorem

Sei f stückweise glatt und absolut integrierbar. Dann ist

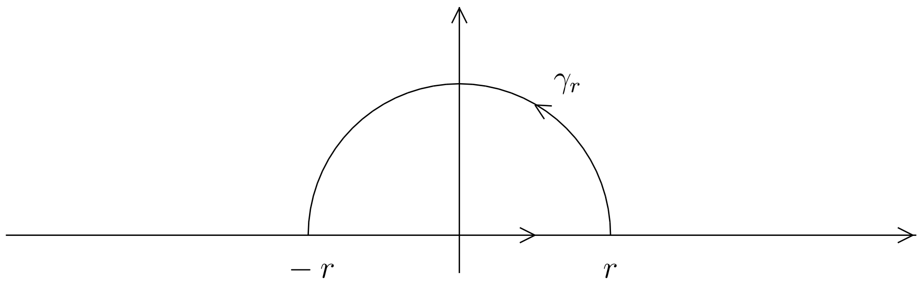
$$\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)] = \frac{1}{2\pi}\text{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{\mathrm{j}\,\omega x}\,d\omega.\ \textit{(Cauchyscher Hauptwert)}$$

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten. In einem speziellen Fall können wir aber die Rücktransformation praktisch ausführen.

Wir nehmen zusätzlich an, daß $\widehat{f}$ Einschränkung einer **meromorphen** Funktion F auf $\mathbb{C}$ ist (Achtung!! F ist hier nicht die Fourier-Transformierte, sondern deren Fortsetzung ins Komplexe).

Wir nehmen außerdem an, daß F nur endlich viele Polstellen hat und daß $z \cdot F(z)$ für großes z beschränkt bleibt, und wir betrachten zunächst nur den Fall $t > 0$.

Dann benutzen wir folgenden Integrationsweg:



Nach dem Residuensatz ist

$$\int_{\gamma_r} F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}\,dz + \int_{-r}^{r} \widehat{f}(\omega)e^{\mathrm{j}\,\omega t}\,d\omega = 2\pi\mathrm{j}\ \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}).$$

Ist $|z \cdot F(z)| \le M$ für $|z| \ge R$, so gilt für $r \ge R$:

$$\begin{aligned}
|\int_{\gamma_r} F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}\,dz| &= |\int_0^{\pi} F(re^{\mathrm{j}\,s})\mathrm{j}\,re^{\mathrm{j}\,s}\cdot e^{\mathrm{j}\,\gamma_r(s)t}\,ds| \\
&\le \int_0^{\pi} r|F(re^{\mathrm{j}\,s})|e^{-rt\sin s}\,ds \\
&\le M\cdot\int_0^{\pi} e^{-rt\sin s}\,ds \\
&= 2M\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-rt\sin s}\,ds.
\end{aligned}$$

Um das verbliebene Integral auszuwerten, müssen wir die Sinusfunktion näher untersuchen:

Ist $0 \le s \le \dfrac{\pi}{2}$, so ist $\sin s \ge \dfrac{2}{\pi}s$, also

$$e^{-rt\sin s} \le e^{-rt\frac{2}{\pi}s}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{-rt\sin s}\,ds &\le \int_0^{\pi/2} e^{-rt\frac{2}{\pi}s}\,ds \\
&= \left(\frac{-\pi}{2rt}\right)e^{-rt\frac{2}{\pi}s}\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2rt}(1-e^{-rt}),
\end{aligned}$$

und es folgt:

$$|\int_{\gamma_r} F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}\,dz| \le \frac{M\pi}{rt}(1-e^{-rt}) \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\text{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\mathrm{j}\,\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \widehat{f}(\omega)e^{\mathrm{j}\,\omega t}\,d\omega \\ &= \mathrm{j}\cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z\big(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}\big). \end{aligned}$$

Die Formel gilt nur für $t > 0$. Ist $t < 0$, so muß man durch die untere Halbebene laufen und erhält:

$$f(t) = -\mathrm{j}\cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)<0} \mathrm{res}_z\big(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}\big).$$

Wir wollen das Ergebnis auf rationale Funktionen $F(z)$ anwenden:

Ist $F(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit $\deg(q) \ge \deg(p) + 1$, so ist $|z \cdot F(z)|$ im Unendlichen beschränkt. Für unsere Zwecke reicht diese Bedingung, denn für die Rücktransformation brauchen wir nur den Cauchyschen Hauptwert, nicht die Existenz des uneigentlichen Integrals von $-\infty$ bis $+\infty$.

Beispiel.

Gegeben sei die Funktion $\widehat{f}(\omega) := \dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$, mit einer Konstanten $a > 0$. Dann ist $\widehat{f}$ Einschränkung einer meromorphen Funktion

$$F(z) := \frac{2a}{(z-\mathrm{j}\,a)(z+\mathrm{j}\,a)},$$

die zwei einfache Polstellen aufweist. Sie erfüllt alle Bedingungen, die wir brauchen, um die Rücktransformation vornehmen zu können.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{\mathrm{j}\,a}(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}) &= \frac{2a}{2\mathrm{j}\,a}e^{-at} = \frac{1}{\mathrm{j}}e^{-at} \\ \text{und} \qquad \mathrm{res}_{-\mathrm{j}\,a}(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}) &= \frac{2a}{-2\mathrm{j}\,a}e^{at} = \frac{1}{-\mathrm{j}}e^{at}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Für $t > 0$ ist $f(t) = \mathrm{j}\cdot \mathrm{res}_{\mathrm{j}\,a}(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}) = e^{-at}$,
und für $t < 0$ ist $f(t) = -\mathrm{j}\cdot \mathrm{res}_{-\mathrm{j}\,a}(F(z)e^{\mathrm{j}\,zt}) = a^{at}$.

Zusammen ergibt das:

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

Das ist genau das, was wir erwartet haben.

Wir beschließen den Paragraphen mit einem Ausblick auf weitere Aspekte der Theorie der Fourier-Transformationen:

Definition:

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,:\, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < \infty \text{ für } p, q \in \mathbb{N}_0\}$$

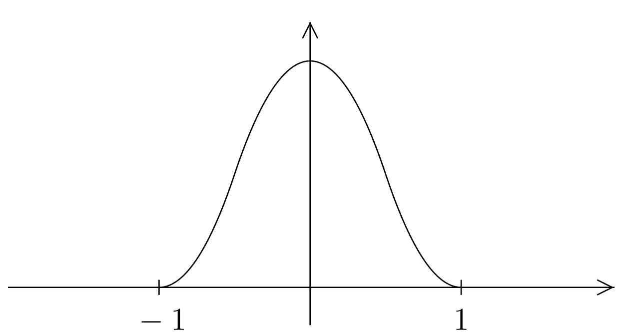
heißt *Raum der stark abfallenden Funktionen.*

$\mathcal{S}$ ist ein Vektorraum von komplexwertigen Funktionen. Die Funktion e^{-x^2} gehört dazu, und natürlich jede C^∞-Funktion mit kompaktem Träger. Mit f gehört auch die Ableitung f' zu $\mathcal{S}$. Das Produkt eines Elementes von $\mathcal{S}$ mit einem Polynom gehört wieder zu $\mathcal{S}$. Zu jedem $f \in \mathcal{S}$ existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$, und auch sie liegt wieder in $\mathcal{S}$. f läßt sich aus $\widehat{f}$ zurückgewinnen, mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathrm{j}\,\omega t}\, d\omega.$$

Man kann eine Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. $\varphi(t) \geq 0$ für alle t und $\varphi(t) = 0$ für $|t| \geq 1$.
2. $\varphi(-t) = \varphi(t)$ für alle t.
3. $\varphi(t)$ streng monoton wachsend für $-1 < t < 0$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = 1.$
5. $\varphi^{(q)}(0) = 0$ für alle $q \geq 1$.



Wir setzen

$$\varphi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi(\frac{t}{\varepsilon}).$$

Dann hat φ_ε ähnliche Eigenschaften wie φ, aber der Träger schrumpft nun auf ein Intervall der Länge 2ε, und das Maximum bei 0 wächst mit fallendem ε. Das Integral über die ganze Achse behält immer den Wert 1.

Sei nun f auf $\mathbb{R}$ stetig und absolut integrierbar und $t_0 \in \mathbb{R}$.

Behauptung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t - t_0)\, dt = f(t_0).$$

BEWEIS: Wir können den Beweis nur skizzieren: Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t-t_0)\, dt - f(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(t_0))\varphi_\varepsilon(t-t_0)\, dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)(f(t) - f(t_0))\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi(s)(f(s\varepsilon + t_0) - f(t_0))\, ds,
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. ∎

Ist f stetig und absolut integrierbar, so wird durch

$$T_f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\, dt, \qquad (\text{für } \varphi \in \mathcal{S}\,)$$

eine Abbildung (ein Funktional, ein Operator)

$$T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$

definiert. Man überzeugt sich sofort davon, daß T_f linear ist, wir können also auch von einer Linearform auf $\mathcal{S}$ sprechen.

Wir haben oben gezeigt, daß man die Funktionswerte von f aus den Integralen $T_f[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{S}$, wieder berechnen kann. Anders ausgedrückt:

Sind f, g zwei stetige und absolut integrierbare Funktionen, und ist $T_f[\varphi] = T_g[\varphi]$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$, so ist auch $f = g$.

Das lineare Funktional T_f ist somit nur eine andere Erscheinungsform der Funktion f. Wir können f und T_f miteinander identifizieren. Aber die Beschreibung einer Funktion als Linearform auf dem Raum der stark abfallenden Funktionen erlaubt es jetzt, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern:

Definition:

Eine **stetige** Linearform $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ nennt man eine *verallgemeinerte Funktion* oder *(temperierte) Distribution.*

Bemerkung. Generell nennt man lineare Funktionale auf einem Funktionenraum Distributionen. Von „temperierten“ Distributionen spricht man, wenn der Grundraum der Raum $\mathcal{S}$ der stark abfallenden Funktionen ist. Sehr wichtig ist auch der Raum der Schwartzschen Distributionen, die Linearformen auf dem Raum der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger sind.

Die „Stetigkeit“ von T bedeutet: Wenn (φ_n) in $\mathcal{S}$ gegen φ konvergiert, dann konvergiert auch $T[\varphi_n]$ in $\mathbb{C}$ gegen $T[\varphi]$. Wir verzichten aber darauf, hier die Folgenkonvergenz in $\mathcal{S}$ zu definieren. Für den Anwender ist das nicht so relevant, alle hier vorkommenden Distributionen sind in der Tat stetige Linearformen.

Die Menge aller Distributionen (also aller stetigen Linearformen auf $\mathcal{S}$) bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$. Wir haben gesehen, daß die Zuordnung

$$f \mapsto T_f$$

(von der Menge der stetigen absolut integrierbaren Funktionen nach $\mathcal{D}$) eine injektive Abbildung ist, so daß wir jede solche Funktion f auch als Distribution auffassen können. Umgekehrt geht es nicht! Es gibt Distributionen, die nicht irgendwelchen Funktionen entsprechen.

Beispiel.

Durch $\delta[\varphi] := \varphi(0)$ wird eine Distribution definiert, die sogenannte Dirac'sche δ-Distribution.

Dazu muß nur nachgerechnet werden, daß δ linear auf $\mathcal{S}$ operiert, aber das ist trivial. Daß δ auch stetig ist, muß hier ohne Beweis akzeptiert werden.

Wir nehmen nun an, es gäbe eine Funktion f, so daß $\delta = T_f$ ist! Dann wäre (für $t_0 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t-t_0)\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} T_f[\varphi_\varepsilon(t-t_0)] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \delta[\varphi_\varepsilon(t-t_0)] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(-t_0) \\ &= \begin{cases} \infty & \text{für } t_0 = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aber eine solche Funktion gibt es nicht! Die Distributionen sind also wirklich „verallgemeinerte Funktionen".

Wir betrachten nun eine Distribution $T = T_f$, die zu einer **stetig differenzierbaren** Funktion f gehört. Ist auch f' absolut integrierbar, so können wir f' als Distribution auffassen:

$$\begin{aligned} T_{f'}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt \\ &= f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= -T_f[\varphi']. \end{aligned}$$

Wir haben ein Gesetz gefunden, daß sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Definition:

Ist $T \in \mathcal{D}$ eine beliebige Distribution, so definiert man die *Ableitung* T' von T durch

$$T'[\varphi] := -T[\varphi'].$$

Bei stetig differenzierbaren Funktionen mit absolut integrierbarer Ableitung ist die distributionelle Ableitung nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung.

Beispiel.

Wir beginnen mit der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

f ist stetig differenzierbar, aber leider nicht absolut integrierbar. Da jedoch mit $\varphi \in \mathcal{S}$ auch $t^n\varphi(t)$ für jedes $n \ge 0$ eine stark abfallende Funktion ist, wird auch durch

$$T_f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^2\varphi(t)\,dt$$

eine Distribution definiert.

Nun ist

$$
\begin{aligned}
(T_f)'[\varphi] &= -T_f[\varphi'] \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2\varphi'(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\cdot[(t^2\varphi(t))\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2t\varphi(t)\,dt] \\
&= \int_0^\infty t\varphi(t)\,dt \\
&= T_{f'}[\varphi].
\end{aligned}
$$

Auch hier ist die distributionelle Ableitung gleich der gewöhnlichen Ableitung. Die Funktion

$$
f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}
$$

ist stetig, aber nicht absolut integrierbar. Wie schon f selbst definiert f' aber dennoch eine Distribution.

f' hat eine Knick-Stelle und ist daher im gewöhnlichen Sinne nicht mehr differenzierbar, wohl aber im Distributions-Sinne:

$$
\begin{aligned}
(T_{f'})'[\varphi] &= -T_{f'}[\varphi'] \\
&= -\int_0^\infty t\varphi'(t)\,dt \\
&= -[(t\varphi(t))\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(t)\,dt] \\
&= \int_0^\infty \varphi(t)\,dt \;=\; T_H[\varphi],
\end{aligned}
$$

wobei H die sogenannte *Heaviside-Funktion* ist, definiert durch

$$
H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}
$$

H ist nun nicht einmal mehr stetig! Dennoch ist T_H eine Distribution. Man beachte aber, daß H durch T_H nicht mehr eindeutig bestimmt ist. Wir können den Wert von H in $t = 0$ beliebig abändern, ohne daß sich T_H ändert. Die Injektivität der Zuordnung $f \mapsto T_f$ gilt nur für stetige Funktionen!

Nichts kann uns daran hindern, T_H erneut zu differenzieren:

$$
\begin{aligned}
(T_H)'[\varphi] &= -T_H[\varphi'] \\
&= -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt \\
&= -\varphi(t)\Big|_0^\infty \;=\; \varphi(0).
\end{aligned}
$$

Also ist $(T_H)' = \delta$ die Dirac-Distribution!

Und nun differenzieren wir δ ein weiteres Mal:

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0).$$

Offensichtlich kann man das beliebig oft so weitertreiben und erhält schließlich

$$\delta^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \cdot \varphi^{(n)}(0).$$

Distributionen sind immer beliebig oft differenzierbar.

Nun kommen wir endlich wieder zu den Fourier-Transformationen zurück.

Ist f stetig und absolut integrierbar, so existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$. Sie ist stetig und beschränkt und definiert daher eine Distribution. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
T_{\widehat{f}}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathrm{j}\,st}\,ds\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-\mathrm{j}\,st}\,dt\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{\varphi}(s)\,ds \\
&= T_f[\widehat{\varphi}].
\end{aligned}$$

Also bietet sich folgende Verallgemeinerung der Fourier-Transformation an:

Definition:

Ist T eine Distribution, so wird ihre *Fourier-Transformierte* $\widehat{T}$ definiert durch

$$\widehat{T}[\varphi] := T[\widehat{\varphi}].$$

Beispiel.

Wir berechnen die Fourier-Transformierte der Dirac-Distribution:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}[\varphi] &= \delta[\widehat{\varphi}] = \widehat{\varphi}(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt \\
&= T_1[\varphi].
\end{aligned}$$

Also ist $\widehat{\delta} = 1$.