Kapitel 11 Funktionentheorie

§ 1 Holomorphe Funktionen

Inhalt:

Komplexwertige Funktionen, lineare Transformationen, Potenzreihen, komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

In diesem Abschnitt sollen komplexwertige Funktionen auf Gebieten $G \subset \mathbb{C}$ untersucht werden.

Beispiele.

1. Die *Konjugation* $c : z \mapsto \overline{z}$ stellt eine Spiegelung an der reellen Achse dar:

   $$c(x + \mathsf{j}\, y) := x - \mathsf{j}\, y.$$

   Sie ist auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und bijektiv, mit $c^{-1} = c$.

2. Sei $a = \alpha + \mathsf{j}\,\beta$ eine feste komplexe Zahl $\neq 0$. Die Abbildung $m_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $m_a(z) := a \cdot z$ ist $\mathbb{C}$-linear, und damit erst recht $\mathbb{R}$-linear.

   Die komplexen Zahlen 1 und j bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$. Wir wollen m_a bezüglich dieser Basis beschreiben. Offensichtlich gilt:

   $$\begin{aligned} m_a(1) &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \mathsf{j}\,, \\ m_a(\mathsf{j}\,) &= (-\beta) \cdot 1 + \alpha \cdot \mathsf{j}\,. \end{aligned}$$

   Also wird m_a durch die Matrix

   $$M_a = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

   beschrieben. Umgekehrt ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn ihre Matrix die gerade beschriebene spezielle Gestalt besitzt.

   Schreibt man a in der Form

   $$a = r \cdot e^{\mathsf{j}\, t} = r(\cos t + \mathsf{j}\, \sin t),$$

   mit $r > 0$ und $0 \leq t < 2\pi$, so setzt sich m_a aus der Drehung um den Winkel t und der Streckung um den Faktor r zusammen, ist also eine „Drehstreckung“. Weil wir $a \neq 0$ vorausgesetzt haben, ist m_a bijektiv, mit $(m_a)^{-1} = m_{1/a}$.

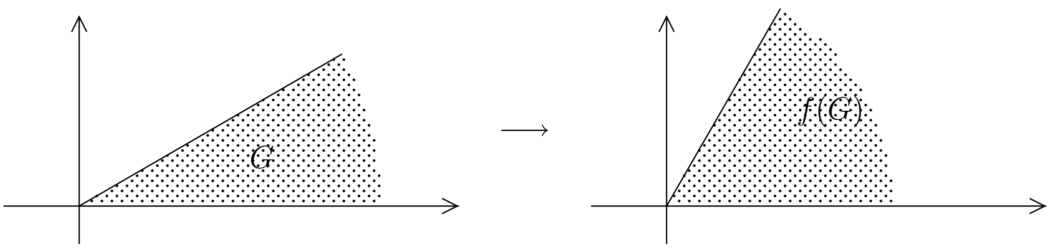
3. Sei $f(z) := z^2$. Diese Funktion kann man am besten verstehen, wenn man z in Polarkoordinaten schreibt: $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t}$. Dann ist nämlich

$$f(z) = r^2 \cdot e^{2\mathsf{j}\,t} = r^2 \cdot (\cos(2t) + \mathsf{j}\,\sin(2t)).$$

Der Abstand vom Nullpunkt wird quadriert und der Winkel verdoppelt. Dadurch wird z.B. der Sektor $G := \{z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t} \,:\, r > 0 \text{ und } 0 < t < \theta\}$ auf den verdoppelten Sektor

$$f(G) = \{w = \varrho \cdot e^{\mathsf{j}\,s} \,:\, \varrho > 0 \text{ und } 0 < s < 2\theta\}$$

abgebildet.



Wie sieht es mit der Umkehrabbildung aus? Ist $w = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t}$, so wollen wir natürlich $\sqrt{w} := \sqrt{r} \cdot e^{\mathsf{j}\,\frac{t}{2}}$ setzen. Aber es ist auch $w = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t + 2\pi\mathsf{j}}$, also könnten wir auch $\sqrt{w} = \sqrt{r} \cdot e^{\mathsf{j}\,\frac{t}{2} + \mathsf{j}\,\pi} = -\sqrt{r} \cdot e^{\mathsf{j}\,\frac{t}{2}}$ setzen. Die Wurzel ist nicht eindeutig bestimmt, und wir haben keine Möglichkeit, eine der beiden Wurzeln auszuzeichnen. (Im Reellen können wir die **positive** Wurzel wählen, aber im Komplexen gibt es keine positiven Zahlen.)

4. *Komplexe Polynome:* $\quad p(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$.

   $p(z)$ ist auf der gesamten komplexen Ebene definiert und stetig, und aus dem *Fundamentalsatz der Algebra* folgt:

   $p(z)$ besitzt n Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$, und man kann dann schreiben:

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

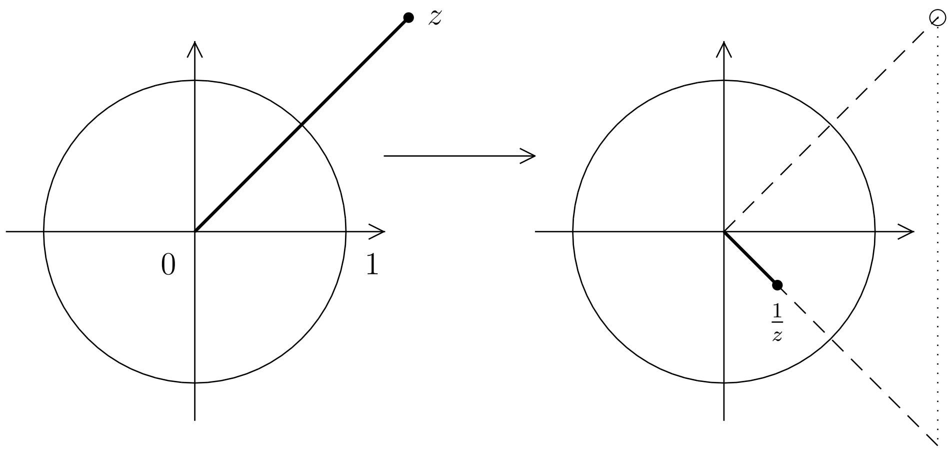
5. *Rationale Funktionen:* $\quad R(z) := \dfrac{p(z)}{q(z)}$, mit Polynomen p und q.

   Da $p(z)$ und $q(z)$ beide in Linearfaktoren zerfallen, kann man so lange kürzen, bis Zähler und Nenner keine gemeinsame Nullstelle mehr haben. Wir nehmen an, daß p und q schon selbst diese Eigenschaft besitzen. Dann nennt man jede Nullstelle des Nenners $q(z)$ eine *Polstelle* der rationalen Funktion R. Offensichtlich ist $R(z)$ außer in den endlich vielen Polstellen überall auf $\mathbb{C}$ definiert und stetig.

   Die einfachste rationale Funktion mit einer Polstelle ist die *Inversion*

$$I(z) := \frac{1}{z}.$$

In Polarkoordinaten sieht das so aus: $r \cdot e^{\mathrm{j}\,t} \mapsto \frac{1}{r} \cdot e^{-\mathrm{j}\,t}$. Man kann diese Abbildung zusammensetzen aus der sogenannten *Spiegelung am Einheitskreis* $s : z \mapsto \overline{z}^{-1}$ und der Konjugation $c : z \mapsto \overline{z}$.



6. Eine spezielle Klasse von rationalen Funktionen bilden die *(gebrochen) linearen Transformationen:*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ mit } ad - bc \neq 0.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $c = 0$.

Setzt man $A := \frac{a}{d}$ und $B := \frac{b}{d}$, so erhält man die *affin-lineare* Funktion

$$T(z) = A \cdot z + B,$$

die sich aus einer Drehstreckung und einer Translation zusammensetzt.

2. Fall: $c \neq 0$.

Setzt man diesmal $A := \frac{bc-ad}{c}$ und $B := \frac{a}{c}$, so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz+d} + B &= \frac{(a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{az+b}{cz+d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

Behauptung:

Eine lineare Transformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ac - bd \neq 0$ bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.

BEWEISIDEE: Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Bei affin-linearen Funktionen ergibt sich die Behauptung aus der Elementargeometrie. Drehungen und Translationen verändern die Gestalt von Geraden und Kreisen nicht. Eine Gerade wird durch eine Streckung um einen Faktor ϱ wieder auf eine Gerade abgebildet, und wenn ein Punkt $z = x + \mathrm{j}\, y$ eine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

erfüllt, so erfüllt $\varrho z = (\varrho x) + \mathrm{j}\,(\varrho y)$ die Gleichung

$$(\varrho x - \varrho x_0)^2 + (\varrho y - \varrho y_0)^2 = (\varrho r)^2.$$

2) Nun sei $w = I(z) = \dfrac{1}{z}$ die Inversion. Man kann zeigen, daß jede Gerade und jeder Kreis eine Menge M der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \delta = 0\}$$

ist, mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\overline{c} > \alpha\delta$. Eine Gerade liegt genau dann vor, wenn $\alpha = 0$ ist. Ist etwa $\alpha = 1$, so liegt ein Kreis um $z_0 := -\overline{c}$ mit Radius $r := \sqrt{c\overline{c} - \delta}$ vor.

Im Nullpunkt ist I nicht definiert, es sei also $z \neq 0$. Da $z = \dfrac{1}{w}$ ist, gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\overline{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\overline{c}}{\overline{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muß, können wir mit $w\overline{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\overline{w} + \overline{c}w + \delta w\overline{w} = 0.$$

Das Bild von M ist wieder eine Menge vom gewünschten Typ. ∎

Bei Anwendungen in der komplexen Wechselstromrechnung interessiert man sich z.B. für das Bild der reellen Achse unter einer linearen Transformation.

1. Fall: $T(z) = Az + B$ sei affin-linear. Dann ist $T(\mathbb{R})$ die Gerade $L = \{w = At + B \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

2. Fall: $I(z) = 1/z$ sei die Inversion. Dann ist $I(\mathbb{R})$ wieder die reelle Achse (ohne den Nullpunkt). Eine beliebige Gerade $L = \{z \in \mathbb{C} \,:\, cz + \overline{cz} + \delta = 0\}$

wird durch I auf die Menge $\{w : \overline{c}w + c\overline{w} + \delta w\overline{w} = 0\}$ abgebildet. Ist $\delta = 0$ (also L eine Gerade durch den Nullpunkt), so ist $I(L) = \overline{L}$ die an der x-Achse gespiegelte Gerade. Ist $\delta \neq 0$, so ist $I(L)$ ein Kreis mit Mittelpunkt $-c/\delta$ und Radius $r = (1/|\delta|)\sqrt{c\overline{c}}$.

Beispiele.

(a) Bei einer Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes $R \geq 0$ und einer Kapazität C mit $1/(\omega C) = 5$ ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$Z = R - \mathsf{j}\,\frac{1}{\omega C} = R - 5\mathsf{j}\,.$$

Man interessiert sich für die sogenannte *Ortskurve* $Y = Y(R)$ des *Leitwertes* $Y := 1/Z$, also die Funktion

$$Y(R) = \frac{1}{R - 5\mathsf{j}}\,,\ \text{für } R \geq 0.$$

Die Translation $T(R) = R - 5\mathsf{j}$ bildet die positive reelle Achse auf die Halbgerade

$$L = \{z = t - 5\mathsf{j}\ :\ t \geq 0\} = \{z\ :\ \mathsf{j}\,z + \overline{\mathsf{j}\,z} - 10 = 0,\ z + 5\mathsf{j}\ \geq 0\}$$

ab. Die Inversion macht daraus einen Halbkreis mit Mittelpunkt $z_0 = (-\mathsf{j}\,)/(-10) = \frac{1}{10}\mathsf{j}$ und Radius $r = (1/10)\sqrt{\mathsf{j}\,\overline{\mathsf{j}}} = \frac{1}{10}$. Weil L in der rechten Halbebene liegt, gilt das auch für den Halbkreis.

(b) Bei der Reihenschaltung eines Widerstandes R, einer Induktivität L und einer Kapazität C ist Z eine Funktion der Frequenz ω. Ist außerdem $k := 1/(\omega C)$ konstant und $X := \omega L$, so ist $Z = Z(X) = R + \mathsf{j}(X - k)$. Der Widerstand R sei fest. Dann ist die Ortskurve von $Z(X)$ eine vertikale Gerade. Wir wollen die Ortskurve von

$$Y(X) = \frac{1}{Z(X)} = \frac{1}{\mathsf{j}\,X + (R - \mathsf{j}\,k)}$$

berechnen.

Die Gerade $L = \{z = \mathsf{j}\,X + (R - \mathsf{j}\,k)\ :\ X \in \mathbb{R}\} = \{z\ :\ z + \overline{z} - 2R = 0\}$ wird durch die Inversion auf einen Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 1/(2R)$ und Radius $r = 1/(2R)$ abgebildet.

7. *Komplexe Potenzreihen:* $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$

Jede solche Potenreihe besitzt einen *Konvergenzradius* $R \geq 0$. Der Wert $R = +\infty$ ist auch zugelassen. Auf jeder Kreisscheibe $D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ mit $0 < r < R$ konvergiert die Reihe normal (und damit punktweise absolut) gegen eine stetige Funktion, in jedem Punkt z mit $|z| > R$ divergiert die Reihe. Zur Erinnerung:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen f_n konvergiert auf einer Menge $M \subset \mathbb{C}$ *normal*, falls es Zahlen $a_n \geq 0$ gibt, so daß gilt:

- Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.
- Für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auf ganz M die Ungleichung $|f_n(z)| \leq a_n$.

Wenn bei der obigen Potenzreihe (fast) alle $c_n \neq 0$ sind und die Folge $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ konvergiert, dann ist der Grenzwert der Konvergenzradius. Leider sind die Voraussetzungen dieses Kriteriums nicht immer erfüllt.

Ein wichtiges Beispiel ist die komplexe *Exponentialfunktion*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

deren Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Für reelles x ist $\exp(x) = e^x$ die bekannte Exponentialfunktion, und für rein imaginäres $z = \mathrm{j}y$ gilt die Eulersche Formel:

$$\exp(\mathrm{j}\,y) = \cos y + \mathrm{j}\,\sin y.$$

Außerdem gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Daraus folgt:

$$\exp(x + \mathrm{j}\,y) = \exp(x) \cdot \exp(\mathrm{j}\,y) = e^x \cdot (\cos(y) + \mathrm{j}\,\sin(y)).$$

Insbesondere ist exp periodisch, mit der Periode $2\pi\mathrm{j}$.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, falls es eine Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ gibt, so daß gilt:

1. Δ ist in z_0 stetig.
2. Für $z \in U$ ist $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$.

Den Wert $f'(z_0) := \Delta(z_0)$ nennt man die *(komplexe) Ableitung* von f in z_0.

Differenzierbarkeits-Kriterien

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
2. *f ist (als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) reell differenzierbar, und die reelle Ableitung $Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear.*
3. *$f = g + \mathsf{j}\, h$ ist in z_0 reell differenzierbar, und es gelten die*

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z_0).}$$

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_x(z_0) = -\mathsf{j}\, f_y(z_0).$$

BEWEIS:

(1) $\Longrightarrow$ (2) :

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ.

Setzen wir $L(w) := \Delta(z_0) \cdot w$ und $r(w) := (\Delta(z_0 + w) - \Delta(z_0)) \cdot w$, so ist L eine $\mathbb{C}$-lineare (und damit erst recht $\mathbb{R}$-lineare) Abbildung, und es gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$.
2. $\displaystyle\lim_{w \to 0} \frac{r(w)}{|w|} = \lim_{w \to 0} (\Delta(z_0 + w) - \Delta(z_0)) \cdot \frac{w}{|w|} = 0.$

Also ist f in z_0 reell differenzierbar, und $Df(z_0) = L$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(2) $\Longrightarrow$ (3) :

Wir schreiben

$$f(z) = g(z) + \mathsf{j}\, h(z),$$

mit reellwertigen Funktionen g und h. Ist f in z_0 total (reell) differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, so gibt es eine komplexe Zahl $c = \alpha + \mathsf{j}\,\beta$ mit $Df(z_0)(w) = c \cdot w$. Dann ist

$$J_f(z_0)) = \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Also muß gelten:

$$h_x(z_0) = -g_y(z_0) \text{ und } h_y(z_0) = g_x(z_0).$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) :

Ist $f = g + \mathsf{j}\,h$ in z_0 reell differenzierbar, mit $h_x(z_0) = -g_y(z_0)$ und $h_y(z_0) = g_x(z_0)$, so ist

$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} g_x(z_0) & -h_x(z_0) \\ h_x(z_0) & g_x(z_0) \end{pmatrix}$$

und $L := Df(z_0)$ offensichtlich eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Es gilt dann:

$$L(w) = f_x(z_0) \cdot w, \text{ für } f_x(z_0) := g_x(z_0) + \mathsf{j}\,h_x(z_0).$$

Wir setzen

$$\Delta(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0, \\ f_x(z_0) & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Aus der Darstellung $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ folgt für $z \neq z_0$:

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot L(z - z_0) + \frac{r(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= L(1) + \frac{r(z - z_0)}{z - z_0} \\ &\quad \to L(1) = f_x(z_0), \text{ für } z \to z_0. \end{aligned}$$

Also ist Δ in z_0 stetig und $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$ für alle z. Damit ist f in z_0 komplex differenzierbar.

Offensichtlich ist dann $f'(z_0) = \Delta(z_0) = f_x(z_0)$. ∎

Rechenregeln für die komplexe Differenzierbarkeit

$f, g : U \to \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, $a, b \in \mathbb{C}$ seien Konstanten. Dann gilt:

1. *$a \cdot f + b \cdot g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, mit*

$$\begin{aligned} (a \cdot f + b \cdot g)'(z_0) &= a \cdot f'(z_0) + b \cdot g'(z_0) \\ \text{und} \qquad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \end{aligned}$$

2. *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0, $\dfrac{f}{g}$ in z_0 komplex differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. *Ist f in $w_0 := g(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $f \circ g$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(w_0) \cdot g'(z_0).$$

Der Beweis geht genauso wie im Reellen.

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und f eine auf M definierte komplexwertige Funktion. Ist f in jedem Punkt von M komplex differenzierbar, so heißt f *auf M komplex differenzierbar*.

Beispiele.

1. Sei $f(z) := z^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist

$$f(z) - f(z_0) = z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Also existiert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \sum_{i=0}^{n} z^i z_0^{n-i-1} = n \cdot z_0^{n-1},$$

f ist in z_0 komplex differenzierbar, mit $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

Da z_0 beliebig war, ist $f(z) = z^n$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$.

2. Die Polynome $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

3. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich (also außerhalb ihrer Polstellen) komplex differenzierbar.

4. $\exp(z)$ ist gegeben durch $\exp(x + \mathrm{j} y) = e^x(\cos y + \mathrm{j} \sin y)$. Also ist $\exp = g + \mathrm{j} h$, mit

$$\begin{array}{rrcl} & g(x + \mathrm{j}\, y) & = & e^x \cos y \\ \text{und} & h(x + \mathrm{j}\, y) & = & e^x \sin y. \end{array}$$

Offensichtlich ist dann $g_x(x + \mathrm{j}\, y) = e^x \cos y = h_y(x + \mathrm{j}\, y)$ und $g_y(x + \mathrm{j}\, y) = -e^x \sin y = -h_x(x + \mathrm{j}\, y)$. Da die Cauchy-Riemannschen DGLn erfüllt sind, ist exp komplex differenzierbar und

$$\exp'(z) = \exp_x(z) = \exp(z).$$

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und f eine auf M definierte komplexwertige Funktion. f heißt auf M *holomorph*, wenn es zu jedem Punkt $z \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{C}$ und eine auf ganz W komplex differenzierbare Funktion F gibt, so daß $F|_{M \cap W} = f|_{M \cap W}$ ist.

Ist also f auf einer offenen Menge komplex differenzierbar, so ist f dort auch holomorph.

Eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{C}$ kann – wenn sie nicht konstant ist – niemals holomorph sein. Um das einzusehen, müssen wir etwas ausholen:

Charakterisierung konstanter Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist konstant.*

2. *f ist auf G holomorph, und es ist $f'(z) \equiv 0$.*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Wegen $f'(z) = g_x(z) + \mathrm{j}\, h_x(z)$ und wegen der Gültigkeit der Cauchy-Riemmanschen DGLn ist $Df(z) = 0$ für alle $z \in G$. Aus der reellen Analysis folgt dann, daß f auf G konstant ist. ∎

Nun folgt:

Funktionen mit reellen oder imaginären Werten

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Nimmt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist sie konstant.

Beweis: Nimmt etwa $f = g + \mathrm{j}\, h$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$, also $g_x = h_y = 0$ und $g_y = -h_x = 0$. Dann ist $f'(z) \equiv 0$ und f konstant.

Ist $g(z) \equiv 0$, so schließt man analog. ∎

Folgerung

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ konstant, so ist auch f selbst konstant.

Beweis: Sei $f\overline{f} = |f|^2$ konstant. Ist $f(z_0) = 0$ für ein z_0, so ist $f(z) \equiv 0$. Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist $\overline{f}(z) = \dfrac{1}{f(z)} \cdot |f(z)|^2$ holomorph. Aber dann müssen auch die Funktionen $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\mathrm{j}\ \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2}(f - \overline{f})$ holomorph sein. Das geht nur, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ konstant sind, also auch f selbst. ∎

Beispiel.

Sei $f(z) := |z|^2 = z\bar{z}$. Dann ist $f(z) = f(0) + \Delta(z) \cdot (z - 0)$, wobei $\Delta(z) := \bar{z}$ stetig in 0 ist. Also ist f in $z = 0$ komplex differenzierbar.

Aber weil f nur reelle Werte annimmt, kann f in $z = 0$ nicht holomorph sein.

Holomorphe Funktionen sind orientierungstreu

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f als reelle Abbildung orientierungserhaltend.

BEWEIS: Wir müssen die Funktionaldeterminante ausrechnen:

$$\begin{aligned}\det J_f(z) &= \det\begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z) \\ h_x(z) & h_y(z) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z) \\ -g_y(z) & g_x(z) \end{pmatrix} \\ &= g_x(z)^2 + g_y(z)^2 \; = \; |f'(z)|^2 > 0.\end{aligned}$$

■

Man kann darüber hinaus zeigen, daß holomorphe Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung winkeltreu sind. Das hat Anwendungen in der Feldtheorie, aber wir können hier nicht näher darauf eingehen. Verschwindet die Ableitung in einem Punkt, so verändert f dort den Winkel (wie z.B. $f(z) = z^2$ im Nullpunkt).

§ 2 Integration im Komplexen

Inhalt:

Komplexe Kurvenintegrale, Stammfunktionen, Hauptsatz über Kurvenintegrale, Satz von Goursat, Cauchyscher Integralsatz, Holomorphie von Potenzreihen, komplexer Logarithmus, allgemeine Potenzen, Umlaufzahlen.

Definition:

Sei $f = g + \mathsf{j}\, h : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b g(t)\, dt + \mathsf{j} \int_a^b h(t)\, dt.$$

Dies ist ein einfacher Spezialfall eines „vektorwertigen Integrals". Es gelten die meisten bekannten Regeln für komplexe Integrale. Nicht ganz selbstverständlich ist die folgende Aussage:

Behauptung: Es gilt die Abschätzung

$$|\int_a^b f(t)\, dt| \le \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Beweis: Sei $z := \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = r \cdot e^{\mathsf{j}\,\lambda}$, mit $r > 0$. (Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen)

Dann ist $e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot z = r = |\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt|$, also

$$|\int_a^b f(t)\, dt| = \mathrm{Re}\left(e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot \int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot f(t))\, dt.$$

Da für eine komplexe Zahl $w = u + \mathsf{j}\, v$ stets $\mathrm{Re}(w) = u \le \sqrt{u^2 + v^2}$ ist und die gewünschte Ungleichung für reellwertige Funktionen bekannt ist, folgt:

$$|\int_a^b f(t)\, dt| = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot f(t))\, dt \le \int_a^b |e^{-\mathsf{j}\,\lambda} \cdot f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

■

Wir wollen jetzt komplexe Integrale $\int_z^w f(z)\,dz$ einführen. Dabei stoßen wir auf gewisse Schwierigkeiten. Der Definitionsbereich der zu integrierenden Funktion ist meist ein Gebiet. Die Integralgrenzen z und w sind also nicht die Endpunkte eines Intervalls, und i.a. auch nicht die Endpunkte einer in G verlaufenden Strecke. Da bietet es sich an, über einen Weg zu integrieren. Als *Integrationswege* benutzen wir wie üblich stückweise stetig differenzierbare Wege $\alpha : [a,b] \to G$.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und α ein Integrationsweg in G. Dann wird das *komplexe Kurvenintegral* von f über α definiert durch

$$\int_\alpha f(z)\,dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt.$$

Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine monoton wachsende Parametertransformation, so ist

$$\int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_c^d f(\alpha(\varphi(s))\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt.$$

In diesem Sinne ist das komplexe Kurvenintegral unabhängig von der Parametrisierung. Ist φ allerdings monoton fallend, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Beispiele.

1. Ein fundamentaler Baustein der Funktionentheorie ist folgende Formel:

   Sei $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathrm{j}\,t}$, für $0 \le t \le 2\pi$, die Parametrisierung der Kreislinie $\partial D_r(z_0)$. Dann ist

$$\int_\alpha (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\mathrm{j} & \text{für } n=-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zum BEWEIS: Es ist

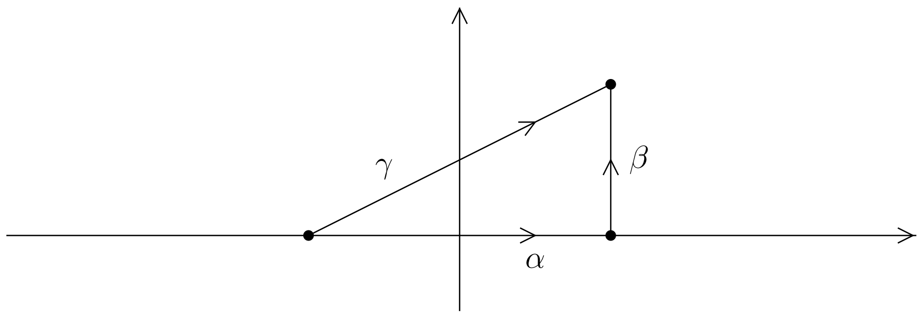
$$\begin{aligned} \int_\alpha \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathrm{j}\,t} \cdot r\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t}\,dt \\ &= \mathrm{j} \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{j}\,, \end{aligned}$$

   und für $n \ne -1$ ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (re^{\mathrm{j}\,t})^n \cdot r\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t}\,dt \\ &= r^{n+1}\mathrm{j} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{j}\,(n+1)t}\,dt \\ &= r^{n+1}\mathrm{j} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{j}\,(n+1)} e^{\mathrm{j}\,(n+1)t}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathrm{j}\, t \text{ und } \gamma(t) := (-1+2t) + \mathrm{j}\, t.$$



Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha+\beta} \overline{z}\, dz &= \int_0^1 (-1+2t)\cdot 2\, dt + \int_0^1 (1 - \mathrm{j}\, t)\cdot \mathrm{j}\; dt \\
&= 2\cdot(-t+t^2)\Big|_0^1 + \mathrm{j}\; \cdot (t - \frac{\mathrm{j}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\
&= 2\cdot(-1+1) + \mathrm{j}\; \cdot (1 - \frac{\mathrm{j}}{2}) \\
&= \mathrm{j}\; + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \bar{z}\, dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathrm{j}\, t)(2+\mathrm{j}\,)\, dt \\
&= (2+\mathrm{j}\,)\cdot(-t + \frac{2-\mathrm{j}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\
&= (2+\mathrm{j}\,)\cdot(-1+1-\frac{\mathrm{j}}{2}) \\
&= -\mathrm{j}\; + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab! Wir werden bald sehen, daß das damit zusammenhängt, daß $z \mapsto \overline{z}$ nicht holomorph ist.

Es gelten für das komplexen Kurvenintegral die bekannten Rechenregeln. Nur die *Standard-Abschätzung* schauen wir uns noch einmal an:

Ist α ein Integrationsweg und f eine stetige Funktion auf $|\alpha|$, so ist

$$\boxed{\left|\int_\alpha f(z)\, dz\right| \leq L(\alpha)\cdot \sup_{|\alpha|}|f|.}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \left|\int_\alpha f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt\right| \\ &\le \int_a^b |f(\alpha(t))|\cdot|\alpha'(t)|\,dt \\ &\le L(\alpha)\cdot\sup_{|\alpha|}|f|. \end{aligned}$$

Nun können wir den Satz über die Vertauschung von Limes und Integral auf komplexe Kurvenintegrale ausdehnen:

Vertauschung von Grenzwerten bei Kurvenintegralen

Sei $\alpha : I \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und (F_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $|\alpha|$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ sei dort normal konvergent. Dann ist $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ eine stetige Funktion auf $|\alpha|$, und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha F_n(z)\,dz = \int_\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty}F_n(z)\right)dz.$$

Der Beweis kann fast wörtlich aus Mathematik 1 (Kapitel 4, §5, erster Satz) übernommen werden. Statt über ein Intervall wird jetzt über einen Weg integriert, und die Intervall-Länge wird durch die Weglänge ersetzt.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Wir wollen jetzt den Hauptsatz für Kurvenintegrale ins Komplexe übertragen. Sei $f = g + \mathrm{j}\,h : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\alpha : [a, b] \to G$ ein Integrationsweg. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) &= (g(\alpha(t)) + \mathrm{j}\,h(\alpha(t)))\cdot(\alpha_1'(t) + \mathrm{j}\,\alpha_2'(t)) \\ &= (g(\alpha(t))\alpha_1'(t) - h(\alpha(t))\alpha_2'(t)) + \mathrm{j}\,(h(\alpha(t))\alpha_1'(t) + g(\alpha(t))\alpha_2'(t)). \end{aligned}$$

Ist etwa $f(z) = z^2 = (x+\mathrm{j}\,y)^2 = (x^2-y^2)+\mathrm{j}\,(2xy)$, so ist $g(z) = g(x+\mathrm{j}\,y) = x^2-y^2$ und $h(z) = h(x+\mathrm{j}\,y) = 2xy$.

Für komplexe Zahlen $z = a + \mathrm{j}\,b$ und $w = u + \mathrm{j}\,v$ bilden wir wie im Reellen das Skalarprodukt durch

$$z \bullet w := au + bv.$$

Mit dieser Bezeichnung ist

$$f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \overline{f(\alpha(t))} \bullet \alpha'(t) + \mathrm{j}\, \left[(\mathrm{j} \cdot \overline{f(\alpha(t))} \bullet \alpha'(t)\right],$$

und das ist auch tatsächlich die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Damit folgt:

1. $\displaystyle\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha \overline{f} \bullet d\mathbf{x} + \mathrm{j}\int_\alpha (\mathrm{j}\,\overline{f}) \bullet d\mathbf{x}.$
2. Ist $F = U + \mathrm{j}\,V$ holomorph und $F' = f$, so ist $(F \circ \alpha)'(t) = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$.

Zum Beweis der zweiten Gleichung benutzen wir die CR-DGLn ($U_x = V_y$ und $U_y = -V_x$) und die Beziehung $F' = F_x$. Damit ist

$$\begin{aligned}
(F \circ \alpha)'(t) &= (U \circ \alpha)'(t) + \mathrm{j}\,(V \circ \alpha)'(t) \\
&= [U_x(\alpha(t))\alpha_1'(t) + U_y(\alpha(t))\alpha_2'(t)] + \mathrm{j}\,[V_x(\alpha(t))\alpha_1'(t) + V_y(\alpha(t))\alpha_2'(t)] \\
&= [U_x(\alpha(t))\alpha_1'(t) - V_x(\alpha(t))\alpha_2'(t)] + \mathrm{j}\,[V_x(\alpha(t))\alpha_1'(t) + U_x(\alpha(t))\alpha_2'(t)] \\
&= [(U_x(\alpha(t)), -V_x(\alpha(t))) \bullet \alpha'(t)] + \mathrm{j}\,[(V_x(\alpha(t)), U_x(\alpha(t))) \bullet \alpha'(t)] \\
&= \overline{F_x(\alpha(t))} \bullet \alpha'(t) + \mathrm{j}\,[(\mathrm{j} \cdot \overline{F_x(\alpha(t))} \bullet \alpha'(t)] \\
&= F_x(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \;=\; F'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).
\end{aligned}$$

Der Hauptsatz für komplexe Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *$\displaystyle\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G.*

Beweis:

1) Sei F holomorph und $F' = f$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b F'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (F \circ \alpha)'(t)\,dt \\
&= F \circ \alpha(b) - F \circ \alpha(a) \;=\; 0
\end{aligned}$$

für alle geschlossenen Wege.

2) Verschwindet umgekehrt das Integral über $f(z)$ und jeden geschlossenen Weg α, so verschwinden auch die Integrale

$$\int_\alpha \overline{f} \bullet d\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \int_\alpha (\mathsf{j}\,\overline{f}) \bullet d\mathbf{x}.$$

Das bedeutet aber, daß es reellwertige Funktionen u und v gibt, so daß $\nabla u = \overline{f}$ und $\nabla v = \mathsf{j}\,\overline{f}$ ist, also

$$(u_x, u_y) = (g, -h) \quad \text{und} \quad (v_x, v_y) = (h, g).$$

Setzen wir $F := u + \mathsf{j}\,v$, so ist F reell differenzierbar, und weil $u_x = g = v_y$ und $u_y = -h = -v_x$ ist, ist F holomorph mit $F' = f$. ∎

Satz von Goursat

*Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion und $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

BEWEIS: Es gibt einen sehr schönen trickreichen Beweis für den Satz von Goursat, der in den meisten Büchern über Funktionentheorie nachgelesen werden kann. (vgl. z.B. W.Fischer / I.Lieb: Funktionentheorie). Aus Zeitgründen lassen wir den Beweis weg.

Es ist aber zu beachten, daß der Satz von Goursat der zentrale Schritt in der Theorie der holomorphen Funktionen ist! Fordert man zusätzlich, daß f sogar *stetig differenzierbar* ist, so folgt der Satz von Goursat aus dem Satz von Green. ∎

Satz von Goursat in verschärfter Form

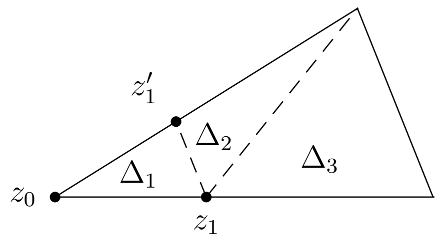
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

BEWEIS: Wir können annehmen, daß f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von $\triangle$.

Dann zerlegen wir $\triangle$ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt, daß $\int_{\partial\triangle_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)\,dz = 0$ ist, also

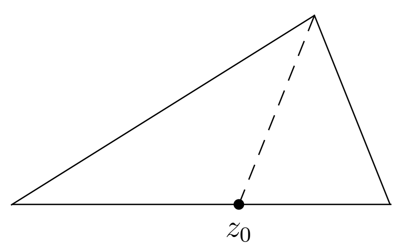
$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

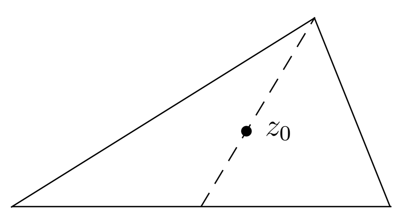
$$|\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz| \le L(\partial\triangle_1)\cdot \sup_{\triangle}|f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von $\triangle$, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man $\triangle$ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von $\triangle$. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb $\triangle$, so ist überhaupt nichts zu zeigen. ∎

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $z_0 \in M$ ein fester Punkt. M heißt *sternförmig* bezüglich z_0, falls für jeden weiteren Punkt $z \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen z und z_0 ganz zu M gehört.

Eine konvexe Menge ist natürlich sternförmig. Die Umkehrung ist i.a. falsch.

Existenzsatz für Stammfunktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Ist G sternförmig bezüglich a, so ist $F(z) := \displaystyle\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$ eine (holomorphe) Stammfunktion von f.

BEWEIS: Es gibt einen Punkt $a \in G$, so daß mit jedem anderen Punkt $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a mit z zu G gehört.

Nach dem Satz von Goursat verschwindet das Integral über $f(z)$ über jeden Dreiecksweg, und dann ist auch

$$\int_{\partial\Delta} \overline{f} \bullet d\mathbf{x} = 0 \text{ und } \int_{\partial\Delta} (\mathsf{j}\,\overline{f}) \bullet d\mathbf{x} = 0$$

für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$.

Mit praktisch dem gleichen Beweis wie beim Hauptsatz für Kurvenintegrale folgt dann, daß es Potentialfunktionen u und v für $\overline{f}$ und $\mathsf{j}\overline{f}$ gibt, und wie beim Hauptsatz für komplexe Kurvenintegrale folgt dann, daß $F = u + \mathsf{j}\,v$ eine Stammfunktion von f ist. Der Zusatz ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis. ■

Cauchyscher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G:

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen und dem vorhergehenden Satz folgt, daß f auf G eine Stammfunktion F besitzt. Aus dem Hauptsatz für komplexe Kurvenintegrale ergibt sich nun der Cauchysche Integralsatz. ∎

Holomorphie von Potenzreihen

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $R > 0$*.*

Dann ist f *auf* $D_R(z_0)$ *holomorph, und es gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Beweis: Wir haben bereits in Mathematik 1 bewiesen, daß

$$q(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-z_0)^{n-1}$$

auf $D_R(z_0)$ konvergiert (und damit dort eine stetige Funktion darstellt). Sei nun $\alpha : I \to D_R(z_0)$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_\alpha (z-z_0)^k \, dz = 0 \text{ für } k \geq 0, \text{ also } \int_\alpha q(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha \left(n \cdot c_n(z-z_0)^{n-1}\right) dz = 0.$$

Nach dem Hauptsatz über komplexe Kurvenintegrale muß q auf $D_R(z_0)$ eine (holomorphe) Stammfunktion Q besitzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
Q(z) &= \int_{z_0}^{z} q(\zeta)\, d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_0}^{z} (n \cdot c_n(\zeta-z_0)^{n-1})\, d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \int_{z_0}^{z} (\zeta-z_0)^{n-1}\, d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \frac{1}{n}(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \\
&= f(z) - c_0.
\end{aligned}$$

Also ist $f(z)$ holomorph und $f'(z) = Q'(z) = q(z)$. ∎

Der vorliegende Satz zeigt z.B., daß $\sin(z)$ und $\cos(z)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph sind. Wie im Reellen ist $\sin'(z) = \cos(z)$ und $\cos'(z) = -\sin(z)$.

$G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht sternförmig. Tatsächlich ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, es ist z.B.

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi \mathrm{j} \neq 0.$$

Setzen wir aber $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, so ist die „geschlitzte Ebene“ $G' := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$). Also gibt es auf G' für $f(z) := \dfrac{1}{z}$ eine Stammfunktion:

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in G' verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, daß das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Die Funktion $F(z)$ ist holomorph, es ist $F(1) = 0$ und $F'(z) = \dfrac{1}{z}$. Diese Eigenschaften kennen wir schon (im Reellen) vom natürlichen Logarithmus. Also stellt sich die Frage, ob wir hier auch im Komplexen die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gefunden haben. Leider ist das nur bedingt richtig. Immerhin gilt:

Behauptung: $\exp(F(z)) = z$.

Beweis: Mit einem kleinen Trick geht es ganz einfach. Sei $g(z) := z \cdot \exp(-F(z))$. Dann ist g holomorph und

$$g'(z) = \exp(-F(z)) + z \cdot (-F'(z)) \cdot \exp(-F(z)) = \exp(-F(z)) - \exp(-F(z)) = 0.$$

Also ist g lokal-konstant, und da der Definitionsbereich G' ein Gebiet ist, ist g sogar konstant: $g(z) \equiv c$. Es folgt:

$$c \cdot \exp(F(z)) \equiv z.$$

Setzen wir speziell $z = 1$ ein, so erhalten wir $1 = c \cdot \exp(F(1)) = c \cdot \exp(0) = c$. Also ist $\exp(F(z)) = z$. ∎

Definition:

Unter einem *Zweig des Logarithmus* auf einem Gebiet G versteht man eine holomorphe Funktion F auf G mit $\exp(F(z)) = z$.

$$\log(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad \text{heißt } \textit{Hauptzweig des Logarithmus} \text{ (auf } \mathbb{C}').$$

Da exp periodisch ist (mit Periode $2\pi \mathrm{j}$), kann exp gar nicht bijektiv sein! Es gibt aber Gebiete, auf denen die Exponentialfunktion injektiv ist:

Injektivitätsbereiche der Exponentialfunktion

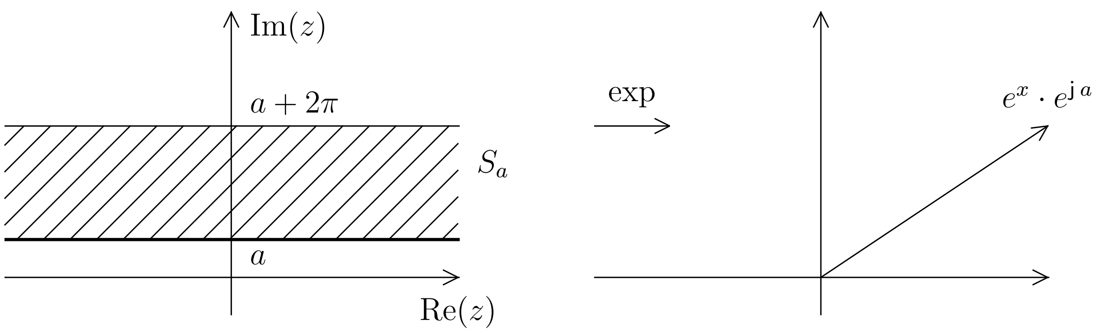
Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\} \to \mathbb{C}^*$$

bijektiv.

Beweis: Sei S_a der Streifen

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\}.$$



1) Injektivität: Es ist

$$\begin{aligned} \exp(z) = \exp(w) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exp(z - w) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad z = w + 2\pi \mathrm{j}\, n. \end{aligned}$$

Wenn z und w beide im gleichen Streifen S_a liegen, kann dieser Fall nicht eintreten.

2) Surjektivität:

Für $a \leq y < a + 2\pi$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x + \mathrm{j}\, y) = e^x \cdot e^{\mathrm{j}\, y}$. Man sieht mit bloßem Auge, daß dadurch die Parallele zur x-Achse durch $\mathrm{j}\, y$ bijektiv auf den Halbstrahl $\mathbb{R}_+ e^{\mathrm{j}\, y}$ abgebildet wird. Insbesondere wird S_a surjektiv auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet. ∎

Definition:

Die Umkehrabbildung

$$\log_{(a)} := \left(\exp \Big|_{\mathring{S}_a}\right)^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{\mathrm{j}\, a} \to \mathring{S}_a$$

heißt *der durch a bestimmte Logarithmuszweig.*

Um den Logarithmus von einer komplexen Zahl z explizit zu berechnen, muß man z in Polarform schreiben:

Ist $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,t}$ mit $a < t < a + 2\pi$, so ist

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathsf{j}\,t.$$

Der Hauptzweig des Logarithmus ist auf $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ definiert. Weil $-1 = \exp(\mathsf{j}\,\pi) = \exp(-\mathsf{j}\,\pi)$ ist, ist log die Umkehrung von $\exp|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,-\pi<\operatorname{Im}(z)<\pi\}}$, also $\log = \log_{(-\pi)}$. Liegt z gerade auf der negativen reellen Achse, so liegt $z = r \cdot e^{\mathsf{j}\,\pi}$ im Definitionsbereich von $\log_{(0)}$, und es ist $\log_{(0)}(z) := \ln(r) + \mathsf{j}\,\pi$.

Man beachte aber, daß mit $\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathsf{j}\,t$ auch die unendlich vielen Werte $\ln(r) + \mathsf{j}\,t + k \cdot 2\pi\mathsf{j}$, $k \in \mathbb{Z}$, Logarithmen von z sind.

Beispiele.

1. Sei $z = 2\mathsf{j}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}$.

2. Sei $z = -2\mathsf{j}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Dieses t liegt nicht zwischen $-\pi$ und π, wohl aber $t - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

   Dann ist $\log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}$.

   Da $\pi < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ oder $a = \pi$ wählen können. Es ist
   $$\log_{(0)}(z) = \log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathsf{j}\,\frac{3\pi}{2} = \log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\mathsf{j}\,.$$

Mit Hilfe des Logarithmus können wir jetzt auch beliebige Potenzen komplexer Zahlen definieren.

Definition:

Für komplexe Zahlen z und w sei $z^w := \exp(w \cdot \log(z))$.

Dabei kann der Exponent w beliebig gewählt werden. z muß $\neq 0$ sein und im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Normalerweise benutzt man den Hauptzweig, dann darf z nicht in $\mathbb{R}_-$ liegen.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist $\mathsf{j}^{\,\mathsf{j}}$? Benutzen wir die Beziehung $\mathsf{j} = e^{\mathsf{j}\,\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathrm{j}^{\mathrm{j}} = \exp(\mathrm{j}\cdot\log_{(-\pi)}(e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879\ldots$$

Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich $e^{-\pi/2}e^{-2\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathrm{j}t}$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp(\frac{1}{2}\cdot[\log_{(-\pi)}(z)+2\pi\mathrm{j}\,k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2}\cdot[\ln(r)+\mathrm{j}\,t+2\pi\mathrm{j}\,k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2}\ln(r))\cdot\exp(\mathrm{j}\,(\frac{t}{2}+\pi k)) \\ &= \pm\sqrt{r}\cdot e^{\mathrm{j}\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r}\cdot e^{\mathrm{j}\frac{t}{n}+\mathrm{j}\frac{2k}{n}\pi} \\ &= \sqrt[n]{r}\cdot e^{\mathrm{j}\frac{t}{n}}\cdot(\zeta_n)^k,\ k=0,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch die Umlaufszahl behandeln.

Definition:

Sei γ ein beliebiger geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$ und z_0 ein Punkt, der nicht auf $|\gamma|$ liegt. Dann heißt

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$$

die *Umlaufszahl* von γ um z_0.

Beispiel.

Durch $\gamma(t) := z_0 + re^{\mathrm{j}\,kt}$, $t\in[0,2\pi]$, wird der Kreis um z_0 mit Radius r parametrisiert, und zwar so, daß er k-mal durchlaufen wird. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{\mathrm{j}\,kt}} r \mathrm{j}\, k\, e^{\mathrm{j}\,kt}\, dt = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = k.$$

Das Integral mißt tatsächlich, wie oft der Punkt z_0 von γ umlaufen wird.

Wir wollen sehen, daß $n(\gamma, z_0)$ auch im allgemeinen die Anzahl der Umläufe berechnet und insbesondere eine ganze Zahl ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß $z_0 = 0$ ist.

Wenn es möglich ist, berechnet man ein Integral mit Hilfe einer Stammfunktion. Die Stammfunktion von $f(\zeta) = 1/\zeta$ ist der Logarithmus, aber welcher? Um eine vernünftige Logarithmusfunktion einsetzen zu können, müssen wir aus der Ebene einen Halbstrahl herausnehmen. Das ist aber nicht so ohne weiteres möglich, denn wir müssen damit rechnen, daß jeder von 0 ausgehende Halbstrahl die Spur von γ trifft. Was tun?

Wir wählen eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Definitionsintervalls von γ, so daß $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils ganz in einer längs eines Halbstrahls aufgeschlitzten Ebene enthalten ist. Dann existiert dort jeweils ein Zweig f_i des Logarithmus, der als Stammfunktion für $1/z$ dienen kann. Sei $z_i := \gamma(t_i)$, für $i = 0, \ldots, n$. Dann ist $z_0 = z_n$ und

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = f_i(z_i) - f_i(z_{i-1}).$$

Da $f_{i+1}(z_i) = f_i(z_i) - 2\pi \mathrm{j}\, k_i$ und $f_n(z_n) = f_1(z_0) + 2\pi \mathrm{j}\, k_n$ ist, mit gewissen ganzen Zahlen k_i bzw. k_n, folgt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= (f_1(z_1) - f_1(z_0)) + (f_2(z_2) - f_2(z_1)) + \cdots + (f_n(z_n) - f_n(z_{n-1})) \\
&= -f_1(z_0) + (f_1(z_1) - f_2(z_1)) + \cdots + (f_{n-1}(z_{n-1}) - f_n(z_{n-1})) + f_n(z_n) \\
&= (f_n(z_n) - f_1(z_0)) + 2\pi \mathrm{j} \cdot k_1 + \cdots + 2\pi \mathrm{j} \cdot k_{n-1} \\
&= 2\pi \mathrm{j} \cdot (\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k_n).
\end{aligned}$$

Also ist

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

eine ganze Zahl.

Diese - zugegebenermaßen etwas theoretische - Berechnung der Umlaufszahl zeigt zugleich, was man sich darunter vorstellen soll.

Ist $f_i = \log_{(a_i)}$, so kann man nach Konstruktion schreiben:

$$\gamma(t) = r(t) \cdot e^{\mathsf{j}\, s(t)}, \text{ mit } a_i < s(t) < a_i + 2\pi \text{ für } t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\mathsf{j}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi\mathsf{j}} \left(\ln(r(t_i)) - \ln(r(t_{i-1}))\right) + \frac{1}{2\pi}(s(t_i) - s(t_{i-1})).$$

Die radialen Anteile heben sich in der Summe weg, und so ergibt die Umlaufszahl die Summe aller Winkeldifferenzen $s(t_i) - s(t_{i-1})$, geteilt durch 2π. Sie mißt also tatsächlich, wie oft sich γ um den Nullpunkt herumwindet.

Das gerade beschriebene Verfahren ist kaum praktikabel. Zum Glück gibt es bei einigermaßen vernünftigen Wegen eine einfachere Methode zur Bestimmung der Umlaufszahl. Dazu sind einige Vorbemerkungen nötig.

Da $|\gamma|$ kompakt und somit abgeschlossen ist, ist $G := \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ offen. Allerdings ist G i.a. nicht zusammenhängend, sondern besteht aus mehreren durch $|\gamma|$ voneinander getrennten Stücken, sogenannten *Zusammenhangskomponenten.* Wir verzichten hier auf die genaue Definition des Begriffs *Zusammenhangskomponente*, da anschaulich klar ist, was damit gemeint ist.

Unter den Komponenten kann es nur eine unbeschränkte Menge geben, denn die kompakte Menge $|\gamma|$ liegt immer in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $K = \overline{D_R(0)}$, und alle Punkte aus $\mathbb{C} \setminus K$ gehören zu der unbeschränkten Komponente von G. Die restlichen - dann natürlich beschränkten - Komponenten liegen alle in K.

Das Werteverhalten der Umlaufszahl

Die Funktion $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant und auf der unbeschränkten Menge sogar $\equiv 0$.

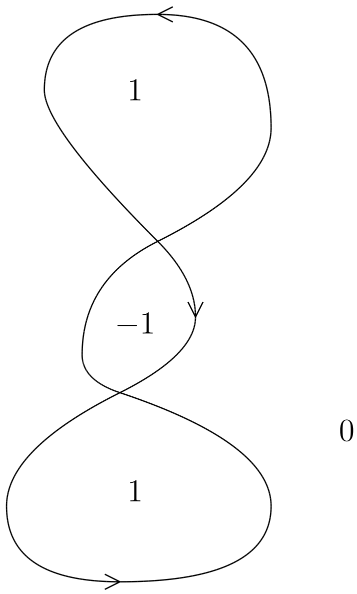
Auf den Beweis verzichten wir hier. Wir kennen nun einen Wert der Umlaufszahl, nämlich den „weit draußen". Wenn wir wissen, wie sich die Umlaufszahl beim Überqueren von $|\gamma|$ ändert, dann können wir alle Werte bestimmen.

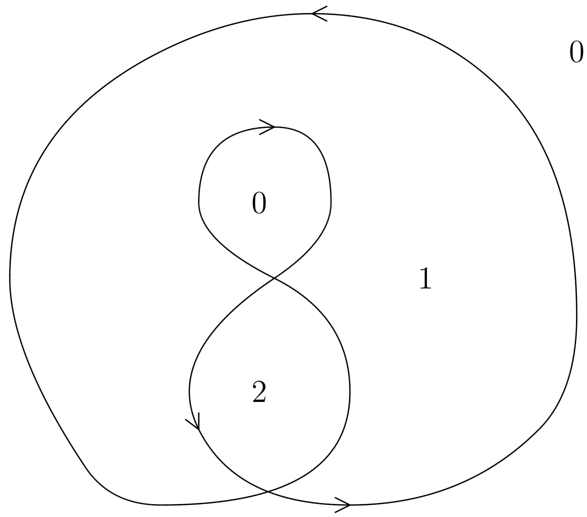
Wir beschränken uns auf einen Kreis $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathsf{j}\, t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Wenn wir – von außen kommend – den Kreis überschreiten, so ändert sich die Umlaufszahl von 0 nach +1. Dabei kommt der Weg „von links". Ändern wir nun den Umlaufssinn, so müssen wir den Weg $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{-\mathsf{j}\, t}$ betrachten. Überqueren wir ihn von außen nach innen, so kommt er „von rechts". Wie steht es mit der Umlaufszahl im Inneren des Kreises? Es ist

$$n(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathsf{j}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cdot e^{-\mathsf{j}\, t}} (-\mathsf{j}\, r) e^{-\mathsf{j}\, t}\, dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = -1.$$

Dieses Ergebnis kann man auf den allgemeinen Fall übertragen. Überquert man γ so, daß γ dabei von „links“ kommt, so erhöht sich die Umlaufszahl um 1. Kommt γ von „rechts“, so erniedrigt sich die Umlaufszahl um 1.

Beispiel.





§ 3 Die Cauchysche Integralformel

Inhalt:

Cauchysche Integralformel, Entwicklungssatz, höhere Integralformeln, analytische Funktionen, Satz von Morera, Riemannscher Hebbarkeitssatz, Identitätssatz, Maximumprinzip, Satz von Liouville, Fundamentalsatz der Algebra.

Die Cauchysche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to G$ ein geschlossener Weg und $z \in G \setminus |\gamma|$ beliebig.

Dann gilt:

$$f(z) \cdot n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis:

$$\text{Sei} \qquad g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g überall stetig und auf $G \setminus \{z\}$ auch holomorph. Auf der sternförmigen Menge G können wir dann den Cauchyschen Integralsatz auf g anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi \mathrm{j} \cdot n(\gamma, z). \end{aligned}$$

■

Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist. Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

BEWEIS: Man kann ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß die (sternförmige) Kreisscheibe $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0)$ noch in G enthalten ist. γ sei die Parametrisierung von ∂D, das ist ein geschlossener Weg in D' mit $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in D$. Nun folgt die gewünschte Aussage aus der Cauchyschen Integralformel. ∎

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist sehr stark die **komplexe** Differenzierbarkeit von f ausgenutzt worden. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde. Der ganze Paragraph ist diesen Konsequenzen gewidmet.

Beispiele.

1. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz$ berechnet werden. Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z+2} \right] \cdot e^z\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\, dz - \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z - (-2)}\, dz \\
&= 2\pi \mathsf{j} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] \\
&= \pi \mathsf{j}\,(1 - e^{-2}).
\end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}\mathsf{j})$. Dann liegt j im Innern von C, und $-\mathsf{j}$ nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} &= \frac{1}{2\mathsf{j}} \int_C \frac{dz}{z - \mathsf{j}} - \frac{1}{2\mathsf{j}} \int_C \frac{dz}{z + \mathsf{j}} \\
&= \frac{1}{2\mathsf{j}} \cdot [2\pi \mathsf{j} \cdot - 0] \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Cauchysche Integralformel für Kreisringe

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $0 < r < R$. Wenn das „Ringgebiet“

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}$$

noch relativ-kompakt in G liegt, so gilt:

$$\int\limits_{\partial K_{r,R}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 2\pi \mathrm{j} \cdot f(z) & \text{falls } z \in K_{r,R}\,, \\ \quad 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \cdot [n(\partial D_R(z_0), z) - n(\partial D_r(z_0), z)].$$

Ist $z \in K_{r,R}(z_0)$, so ist $n(\partial D_R(z_0), z) = 1$ und $n(\partial D_r(z_0), z) = 0$. In den anderen Fällen sind entweder beide Umlaufszahlen $= 1$ oder beide $= 0$. ∎

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel. Der „Entwicklungssatz“ wird die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen lassen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwuchs also aus der Absicht, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte das passende Hilfsmittel.

Entwicklungssatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpaßt, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ normal gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem ist dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } n.$$

BEWEIS-Skizze:

Sei $0 < r < R$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel für $z \in D_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n,
\end{aligned}$$

also $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z)$, mit $F_n(\zeta, z) := \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$, und die Reihe konvergiert für alle $z \in D_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ absolut (Majorantenkriterium).

Weil $|f|$ auf der kompakten Menge $\partial D_r(z_0)$ beschränkt ist, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z)$ für festes z auf $\partial D_r(z_0)$ normal gegen $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, und aus dem Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwerten (§2) folgt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z) \right) d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in D_r(z_0)$. ∎

Folgerung (Höhere Cauchysche Integralformeln)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z \in G$ und $D_r(z) \subset\subset G$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

BEWEIS: Sei $D := D_r(z) \subset\subset D_R(z) \subset G$. Dann kann f in D in der Form

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z)^n$$

geschrieben werden. Also ist f in z beliebig oft differenzierbar, die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation der Reihe gewonnen werden und es gilt:

$$f^{(n)}(z) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta.$$

■

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *in eine Potenzreihe entwickelbar*, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G *analytisch*, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, daß man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn $\displaystyle\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$ ist, dann ist f holomorph auf G.

BEWEIS: Aus der Voraussetzung folgt, daß f zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F besitzt. Aber weil F beliebig oft komplex differenzierbar ist, ist auch $f = F'$ holomorph. ■

Wir fassen nun alle bisherigen Ergebnisse zusammen:

Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist holomorph.*
4. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
5. *f ist analytisch.*
6. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*
7. *f ist stetig, und es ist $\displaystyle\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle$ in G.*

Wir haben eine erstaunliche Entdeckung gemacht. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie!

Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere wundersame Eigenschaften auf.

Hilfssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt, daß f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. ∎

Riemannscher Hebbarkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

Beweis: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z)\cdot(z-z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. F muß dann auf ganz G holomorph sein.

Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z)\cdot(z-z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, folgt, daß Δ sogar auf ganz G holomorph ist. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. ∎

Von besonderer Bedeutung sind die beiden folgenden Sätze:

Identitätssatz

$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet (hier ist wichtig, daß G zusammenhängend ist!), und $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien zwei holomorphe Funktionen.

1. *Es gebe eine Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat, so daß $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$ ist. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*
2. *Es gebe einen Punkt $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*

Die Menge M, die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

Maximumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

Ist G beschränkt, f auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

Aus Zeitgründen müssen wir auf die Beweise verzichten.

Definition:

Eine *ganze Funktion* ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Polynome, aber auch die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus.

Satz von Liouville

Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

BEWEIS: Sei $|f(z)| \le C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $r > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi r) \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Das ist nur möglich, wenn $f'(z) \equiv 0$ ist, also f konstant. ∎

Jetzt sind wir in der Lage, einen einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra anzugeben:

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

BEWEIS: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \ge 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(\frac{1}{z})},$$

mit einem Polynom $q(w) := a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n$. Da $q(0) = a_n \neq 0$ ist, ist

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion. Das geht nur, wenn f konstant ist, im Gegensatz zur Annahme. ∎

§ 4 Isolierte Singularitäten und Residuenkalkül

Inhalt:

Typen isolierter Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstraß, lokale Beschreibung von Nullstellen und Polstellen, Laurentreihen, Beispiele von Laurent-Entwicklungen, meromorphe Funktionen, nullhomologe geschlossene Wege.

Residuen und ihre Berechnung, der Residuensatz, die Anzahl von Null- und Polstellen, Partialbruchzerlegung, Berechnung uneigentlicher rationaler Integrale.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine *isolierte Singularität* von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär" f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, daß z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, daß es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der Logarithmus hat z.B. im Nullpunkt keine isolierte Singularität, weil man einen kompletten Halbstrahl aus $\mathbb{C}$ herausnehmen muß, um log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f, wenn es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf U gibt, so daß $f = \widehat{f}|_{U \setminus \{z_0\}}$ ist.
2. z_0 heißt eine *Polstelle* von f, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ ist.
3. z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt (Riemannscher Hebbarkeitssatz). Eine Polstelle liegt genau dann vor, wenn die Werte von $|f(z)|$ bei Annäherung an z_0 unbeschränkt wachsen. Und was passiert bei einer wesentlichen Singularität? Ohne Beweis geben wir den folgenden merkwürdigen Satz an:

Satz von Casorati-Weierstraß

Hat f in z_0 eine wesentliche (isolierte) Singularität, so kommt $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe.

Das bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, so daß $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ ist.

Man kann sogar zeigen: Auf jeder Umgebung von z_0 läßt f höchstens einen einzigen Wert aus (Satz von Picard).

Beispiele.

1. Sei $f(z) := \dfrac{z}{\sin z}$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= z \cdot (1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \pm \cdots) \\ &= z \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß $|\dfrac{\sin(z)}{z}| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

Also ist $|f(z)| = |\dfrac{z}{\sin(z)}| < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Im Nullpunkt muß der Wert $1/h(0) = 1$ ergänzt werden.

2. $f(z) := \dfrac{1}{z}$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

3. Sei $f(z) := \exp(\dfrac{1}{z})$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

Setzen wir $z_n := 1/n$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

Setzen wir dagegen $z_n := -\frac{1}{2\pi n}\mathrm{j}$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathrm{j}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht besonders praktisch. Wir werden noch bessere Methoden kennen lernen.

Lokale Beschreibung von Nullstellen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion h auf $D := D_\varepsilon(z_0)$, so daß gilt:

1. *$D \subset U$.*
2. *$h(z) \neq 0$ für $z \in D$.*
3. *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot h(z)$ für $z \in D$.*

Die Zahl k und der Wert $h(z_0)$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß sich f auf $D_\delta(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muß $a_0 = 0$ sein. Da f nicht konstant ist, können nicht alle $a_n = 0$ sein.

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $k \geq 1$, so daß

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0 \text{ und } a_k \neq 0$$

ist. Daraus folgt für $z \in D_\delta(z_0)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \;=\; (z - z_0)^k \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit $h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots$.

Die Reihe $h(z)$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Reihe von $f(z)$ (da der Konvergenzradius durch die Koeffizienten bestimmt ist). Da $h(z_0) = a_k \neq 0$ ist, gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$, so daß $h(z) \neq 0$ für alle $z \in D_\varepsilon(z_0)$ ist. ■

Die Zahl k nennt man die *Ordnung der Nullstelle*.

Folgerung

f hat in z_0 genau dann eine Polstelle, wenn es eine Umgebung $W = W(z_0)$, eine holomorphe Funktion h auf W und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $h(z_0) \neq 0$ ist, und

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z) \textit{ für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt.

BEWEIS: f hat genau dann in z_0 eine Polstelle, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |\frac{1}{f(z)}| = 0$ ist, wenn also $\frac{1}{f}$ in z_0 eine hebbare Singularität hat, in der man den Wert 0 ergänzen kann. Das bedeutet, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so daß gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \text{ und } \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z), \quad \text{mit } h(z) := \frac{1}{\widetilde{h}(z)}.$$

■

Die Zahl k heißt hier die *Polstellenordnung* von f in z_0.

Sei jetzt f eine Funktion mit einer Polstelle in z_0, also $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$, mit einer holomorphen Funktion h. Wir können h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ für } |z-z_0| < r.$$

Für $z \neq z_0$ und $|z - z_0| < r$ gilt dann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1} \cdot (z-z_0) + \cdots$$

Betrachten wir dagegen die wesentliche Singularität $f(z) := \exp(1/z)$, so erhalten wir für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z.

Wir versuchen nun, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition:

Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der *Entwicklungspunkt*.

$$H(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

heißt *Hauptteil* der Reihe,

$$N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

heißt *Nebenteil* der Reihe.

Ein Hauptteil $H(z) = \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$ heißt *konvergent* in einem Punkt $z_1 \neq z_0$, falls die „zugehörige Potenzreihe“

$$w \mapsto H(z_0 + \frac{1}{w}) = a_{-1} w + a_{-2} w^2 + \cdots$$

im Punkt $w_1 := \dfrac{1}{z_1 - z_0}$ konvergiert.

Ist r^* der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe, so konvergiert diese für $|w| < r^*$, und sie divergiert für $|w| > r^*$. Das bedeutet aber, daß $H(z)$ für $|z - z_0| > 1/r^*$ konvergiert und für $|z - z_0| < 1/r^*$ divergiert. Man nennt $r := 1/r^*$ den *Konvergenzradius* des Hauptteils $H(z)$.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent* in z, falls Hauptteil und Nebenteil beide in z konvergieren.

Konvergenzverhalten von Laurentreihen

Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0, $r > 0$ der Konvergenzradius des Hauptteils $H(z)$ und $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils.

1. *Ist $r \geq R$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*
2. *Ist $r < R$, so konvergiert $L(z)$ auf dem Kreisring*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

absolut und auf jeder kompakten Teilmenge normal gegen eine holomorphe Funktion.

Beweis: Klar! ∎

Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Läßt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

Umgekehrt läßt sich jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln.

Satz von der „Laurent-Trennung“

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \text{ und } f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$$

mit

1. *$f^+ + f^- = f$ auf $K_{r,R}(z_0)$.*
2. *$|f^-(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$.*

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten.

Folgerung

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann läßt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln.

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Zum Beweis führt man die Laurent-Trennung durch:

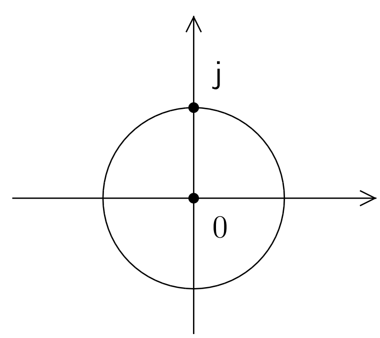
$$f(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

Die Taylorentwicklung von f^+ liefert den Nebenteil. Für den Hauptteil betrachtet man $g(w) := f^-(z_0 + 1/w)$. Dann ist g holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, und da $\lim\limits_{w \to 0} g(w) = 0$ ist, kann man den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Die Taylorreihe der holomorphen Fortsetzung von g liefert dann den Hauptteil.

Beispiel.

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z - \mathrm{j})^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathrm{j}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\dfrac{1}{z-z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z-a| < |z_0-a|$ ist

$$|\frac{z-a}{z_0-a}| < 1,$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a-(z_0-a)} \\ &= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-(z-a)/(z_0-a)} \\ &= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Ist $|z-a| > |z_0-a|$, so geht man analog vor:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-(z_0-a)/(z-a)} \\ &= \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Ist schließlich $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^{(m-1)}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\dfrac{1}{z-z_0}$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{1}{z-\mathrm{j}} = \mathrm{j}\cdot\frac{1}{1-(z/\mathrm{j})} = \mathrm{j}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{j}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{j})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{j}}\right)' = -\mathrm{j}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{\mathrm{j}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{z}{\mathrm{j}}\right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{\mathrm{j}^{\,n}}z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{\mathrm{j}^{\,n+1}}z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist

$$\frac{1}{z-\mathrm{j}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{j}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{j}^{\,n-1}\frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{j}\,)^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{j}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{j}^{\,n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{j}^{\,n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{j}^{\,n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty}\mathrm{j}^{\,n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3}\mathrm{j}^{\,-n-1}(n+2)z^n,$$

wegen $\mathrm{j}^{\,-n-3}(-n-2) = \mathrm{j}^{\,-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathrm{j}\,)$:

Hier soll nach Potenzen von $(z-\mathrm{j}\,)$ entwickelt werden. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-\mathrm{j}\,)-(-\mathrm{j}\,)} = \frac{1}{\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{1-(z-\mathrm{j}\,)/(-\mathrm{j}\,)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{j}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathrm{j}}{-\mathrm{j}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{j}^{\,n+1})(z-\mathrm{j}\,)^n,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-\mathrm{j}\,)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{j}^{\,n+1})(z-\mathrm{j}\,)^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty}(-\mathrm{j}^{\,n+3})(z-\mathrm{j}\,)^n \\ &= \frac{-\mathrm{j}}{(z-\mathrm{j}\,)^2}+\frac{1}{z-\mathrm{j}}+\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{j}^{\,n+1}(z-\mathrm{j}\,)^n.\end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathrm{j}\,)$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

Charakterisierung von Singularitäten

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \textit{ hebbar} &\iff a_n = 0 \textit{ für } \textbf{\textit{alle}} \; n < 0, \\ z_0 \textit{ Polstelle} &\iff \exists\, n < 0 \textit{ mit } a_n \neq 0 \textit{ und } a_k = 0 \textit{ für } k < n, \\ z_0 \textit{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \textit{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

BEWEIS: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\,\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das läßt nur die Möglichkeit, daß $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. ∎

Beispiele.

1. $$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \ldots$$

besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2.

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathsf{j}\,)^2}$$

hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in j . Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

3.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.

$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$

ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$. Aber dann ist auch $\dfrac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$

Also ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Das bedeutet, daß f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $D \subset G$ heißt *diskret in* G, falls sie in G keinen Häufungspunkt besitzt. Sie kann dann zwar Häufungspunkte auf dem Rand von G haben, besitzt aber im Innern von G nur isolierte Punkte.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine *meromorphe Funktion* auf G besteht aus einer diskreten (oder leeren) Menge $D \subset G$ und einer holomorphen Funktion $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$, die in den Punkten von D höchstens Polstellen als isolierte Singularitäten besitzt.

Jede rationale Funktion ist Beispiel einer meromorphen Funktion, aber z.B. auch die Funktion $1/\sin z$.

Wir wollen jetzt ein möglichst effektives Verfahren für die Berechnung von Kurvenintegralen über meromorphe Funktionen entwickeln. Dabei soll die Kurve keine der Polstellen treffen.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein **geschlossener** Weg γ in G wird *nullhomolog* in G genannt, falls $n(\gamma, z) = 0$ für jeden Punkt $z \notin G$ gilt (falls also γ um keinen Punkt außerhalb von G herumläuft).

Wir kennen schon zwei wichtige Beispiele:

1. Ist G beliebig und parametrisiert γ den positiv orientierten Rand eines Teilgebietes $G' \subset\subset G$, so ist $n(\gamma, z) = 1$ für alle Punkte $z \in G'$ und $n(\gamma, z) = 0$ für $z \notin G'$, insbesondere für $z \notin G$. Also ist γ nullhomolog in G.

2. Ist G sternförmig und γ ein beliebiger geschlossener Weg in G, so gilt für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, daß $f(z) := \frac{1}{z-z_0}$ auf G holomorph ist. Dann ist aber $n(\gamma, z_0) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}} \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, nach dem Cauchyschen Integralsatz.

Mit erheblich mehr Aufwand kann man den Cauchyschen Integralsatz folgendermaßen verallgemeinern:

Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz

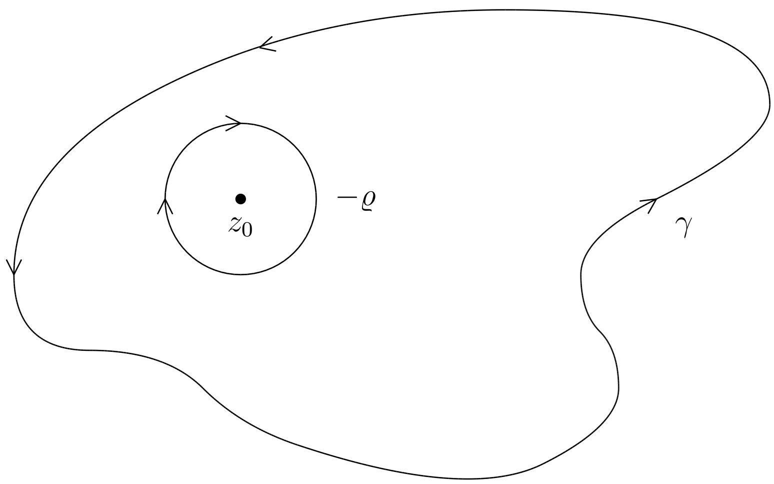
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein geschlossener Integrationsweg γ (oder eine geschlossene Kette von Wegen) in G ist genau dann nullhomolog in G, wenn $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f auf G ist.

Ist $G = \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ und γ eine Parametrisierung von $\partial D_\varepsilon(z_0)$, so ist γ nicht nullhomolog in G, denn es ist ja $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi \mathrm{j} \neq 0$.

Wir betrachten jetzt folgende einfache Situation:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, γ der positiv orientierte Rand eines Teilgebietes $G' \subset\subset G$ und $z_0 \in G'$. Weiter sei f eine meromorphe Funktion auf G mit einer einzigen Polstelle in z_0.

$$\text{Wie berechnet man } \int_\gamma f(z)\,dz \quad ?$$



Sei ϱ der positiv orientierte Rand einer kleinen Kreisscheibe um z_0, die noch ganz in G' liegt:

$$\varrho(t) := z_0 + \varepsilon \cdot e^{\mathrm{j}\,t}, \text{ für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dann stellt die Kette $\gamma - \varrho$ eine Parametrisierung des Randes des Gebietes $G'' := G' \setminus \overline{D_\varepsilon(z_0)}$ dar. Offensichtlich ist f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph und $\partial G''$ nullhomolog in $G \setminus \{z_0\}$. Aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz folgt dann:

$$0 = \int_{\partial G''} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\varrho f(z)\,dz.$$

Damit wird die Berechnung von $\int_\gamma f(z)\,dz$ auf die Berechnung des „Restintegrals" $\int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz$ zurückgeführt.

Ist das eine Erleichterung? Eventuell schon! Wir können ja f in der Nähe von z_0 in eine Laurentreihe um z_0 entwickeln. Es ist $f(z) = N(z)+H(z)$, wobei der Hauptteil

$$H(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z)$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und darüber hinaus

$$\varphi(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion besitzt. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist daher

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{a_{-1}}{z-z_0}\,dz \\ &= a_{-1} \cdot 2\pi\mathrm{j} \cdot n(\partial D_\varepsilon(z_0), z_0) = a_{-1} \cdot 2\pi\mathrm{j}\,. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch die Zahl a_{-1} berechnen.

An früherer Stelle haben wir schon festgestellt, daß

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz$$

ist, und das ist (bis auf $2\pi\mathrm{j}$) wieder das „Restintegral“.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so daß $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta$$

das *Residuum* von f in z_0.

Bemerkungen.

1. $\operatorname{res}_{z_0}(f)$ ist der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f um z_0. Daraus folgt insbesondere, daß f nicht von dem gewählten ε abhängt.

2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

3. Es ist
$$\operatorname{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) + b \cdot \operatorname{res}_{z_0}(g).$$

4. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn da f eine Stammfunktion besitzt, verschwindet das Integral über f und jeden geschlossenen Weg.

   Insbesondere ist $\operatorname{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z-z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

5. Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist
$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

   BEWEIS: Wir schreiben
$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad h \text{ holomorph in } z_0.$$

   Dann folgt:
$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) h(z) \to a_{-1} \text{ für } z \to z_0.$$

∎

6. Man kann die vorangegangene Aussage auf m-fache Polstellen verallgemeinern. Wir beschränken uns hier allerdings auf den Fall $k = 2$.

   Hat f in z_0 eine 2-fache Polstelle, so ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'.$$

   BEWEIS: Es ist

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

   also

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + \cdots + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \cdots$$

   Damit ist

$$[(z - z_0)^2 f(z)]' = a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\ldots),$$

   und es folgt die Behauptung. ■

7. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

   Dann ist $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{h}\right) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

   BEWEIS: Nach Voraussetzung besitzt h in z_0 eine einfache Nullstelle und $f := g/h$ daher in z_0 eine einfache Polstelle. Also ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(h(z) - h(z_0))/(z - z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

   ■

Beispiele.

1. Sei $f(z) := \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z^2 + 1} = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,z}}{(z - \mathrm{j}\,)(z + \mathrm{j}\,)}$.

   f hat einfache Polstellen bei j und $-\mathrm{j}$. Es ist

$$\text{res}_{\mathrm{j}}(f) = \lim_{z \to \mathrm{j}} (z - \mathrm{j}\,) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{j}} \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z + \mathrm{j}} = -\frac{1}{2e}\mathrm{j}\,,$$

   und analog

$$\text{res}_{-\mathrm{j}}(f) = \lim_{z \to -\mathrm{j}} (z + \mathrm{j}\,) f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{j}} \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z - \mathrm{j}} = \frac{e}{2}\mathrm{j}\,.$$

2. Es soll das Residuum von $f(z) := \exp(-1/z)$ in $z_0 = 0$ berechnet werden. Dort liegt keine Polstelle, sondern eine wesentliche Singularität vor, aber das ist auch erlaubt. Am besten verwendet man die Laurentreihe.

$$\exp(-\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + (-1)\frac{1}{z} \pm \ldots.$$

   Also ist $\mathrm{res}_0(f) = a_{-1} = -1$.

3. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ hat bei $z = -1$ eine doppelte Polstelle. Also ist

$$\mathrm{res}_{-1}(f) = \lim_{z \to -1} \left[(z+1)^2 f(z)\right]' = \lim_{z \to -1} \frac{2z^2 + 8z - 8}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

4. Sei $f(z) := \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$. Weil $\cos(0) \neq 0$, $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) \neq 0$ ist, gilt:

$$\mathrm{res}_0\left(\frac{\cos(z)}{\sin(z)}\right) = \frac{\cos(0)}{\sin'(0)} = 1.$$

Als erste Anwendung greifen wir das Problem der Partialbruchzerlegung noch einmal auf, denn wir haben jetzt neue Methoden zur Hand. Wir betrachten eine rationale Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ (gekürzt, mit $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(q)$) und nehmen an, daß wir den Nenner in Linearfaktoren zerlegen können:

$$q(z) = \prod_{i=1}^{N} (z - a_i)^{r_i}, \quad a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j.$$

Dann gibt es eine Darstellung

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{c_{ij}}{(z - a_i)^j} \ ,$$

und wir wollen versuchen, die Koeffizienten c_{ij} zu bestimmen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß alle $r_i \leq 2$ sind.

Offensichtlich ist $\displaystyle\sum_{j=1}^{r_i} \frac{c_{ij}}{(z - a_i)^j}$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in a_i (denn alle anderen Summanden sind in a_i holomorph). Damit folgt sofort:

$$c_{i1} = \mathrm{res}_{a_i}(f).$$

Ist $r_i = 1$, so ist $c_{i1} = \lim_{z \to a_i} (z - a_i) f(z)$.

Ist $r_i = 2$, so ist $c_{i1} = \lim\limits_{z \to a_i} \left[(z - a_i)^2 f(z)\right]'$.

Der Koeffizient c_{i2} kommt nur vor, wenn $r_i = 2$ ist. Offensichtlich ist dann

$$c_{i2} = \lim_{z \to a_i} (z - a_i)^2 f(z).$$

Jetzt kommen wir aber zur wichtigsten Anwendung der Residuen:

Der Residuensatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein nullhomologer geschlossener Weg in G. Weiter sei f eine meromorphe Funktion auf G mit endlich vielen Polstellen $z_1, \ldots, z_N \in G \setminus |\gamma|$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int\limits_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^N n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname{res}_{z_k}(f).$$

Beweis: Sei $H_k(z) := \dfrac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k} + \varphi_k(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in z_k, so daß φ_k auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ jeweils eine Stammfunktion besitzt. Dann ist

$$f(z) - \sum_{k=1}^N \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k} - \sum_{k=1}^N \varphi_k(z)$$

holomorph auf G, und daher

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^N a_{-1}^{(k)} \cdot \int_\gamma \frac{dz}{z - z_k}.$$

Das ergibt die Behauptung. ∎

Beispiel.

Die Funktion

$$f(z) := \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

hat einen doppelten Pol bei $z = -1$ und einfache Pole bei $z = \pm 2\mathrm{j}$.

Das Residuum bei -1 haben wir oben schon ausgerechnet, es ist $\operatorname{res}_{-1}(f) = -\dfrac{14}{25}$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{2\mathrm{j}}(f) &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2\mathrm{j})} = \frac{-4-4\mathrm{j}}{(1+2\mathrm{j})^2 4\mathrm{j}} \\
&= \frac{-(1+\mathrm{j})}{(-3+4\mathrm{j})\mathrm{j}} = \frac{1+\mathrm{j}}{4+3\mathrm{j}} \\
&= \frac{(1+\mathrm{j})(4-3\mathrm{j})}{(4+3\mathrm{j})(4-3\mathrm{j})} = \frac{7+\mathrm{j}}{25}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2\mathrm{j}}(f) &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2\mathrm{j})} = \frac{-4+4\mathrm{j}}{(1-2\mathrm{j})^2(-4\mathrm{j})} \\
&\frac{1-\mathrm{j}}{(-3-4\mathrm{j})\mathrm{j}} = \frac{1-\mathrm{j}}{4-3\mathrm{j}} \\
&\frac{(1-\mathrm{j})(4+3\mathrm{j})}{(4-3\mathrm{j})(4+3\mathrm{j})} = \frac{7-\mathrm{j}}{25}.
\end{aligned}$$

Von den Polstellen liegen -1 und $-2\mathrm{j}$ in der Kreisscheibe $D_2(-\mathrm{j})$ (es ist $|-1-(-\mathrm{j})| = |-1+\mathrm{j}| = \sqrt{2} < 2$). Der Punkt $2\mathrm{j}$ liegt außerhalb. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial D_2(-\mathrm{j})} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz &= 2\pi\mathrm{j}\cdot[\operatorname{res}_{-1}(f) + \operatorname{res}_{-2\mathrm{j}}(f)] \\
&= 2\pi\mathrm{j}\cdot\left[-\frac{14}{25} + \frac{7-\mathrm{j}}{25}\right] \\
&= \frac{2\pi\mathrm{j}}{25}\cdot(-7-\mathrm{j}) = \frac{2\pi}{25}(1-7\mathrm{j}).
\end{aligned}$$

Oft wendet man den Residuensatz in folgender Form an:

Das Argument-Prinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ der positiv orientierte Rand eines Gebietes $G' \subset\subset G$.

Weiter sei f auf G meromorph, n die Anzahl der Nullstellen und p die Anzahl der Polstellen von f in G'. Beides werde jeweils mit Vielfachheiten gezählt. Keine der Null- und Polstellen von f liege auf $|\gamma|$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = n - p.$$

BEWEIS: Ist $z_0 \in G'$ ein beliebiger Punkt, so kann man f in der Nähe von z_0 schreiben als

$$f(z) = (z-z_0)^m \cdot h(z),$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$. Ist $m > 0$, so liegt eine Nullstelle der Ordnung m vor. Ist $m < 0$, so hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung m. Ist $m = 0$, so ist f in z_0 holomorph und $\neq 0$.

Nun ist $f'(z) = m \cdot (z - z_0)^{m-1} \cdot h(z) + (z - z_0)^m \cdot h'(z)$, also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m \cdot h(z) + (z - z_0)h'(z)}{(z - z_0)h(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

wobei der zweite Summand in z_0 holomorph ist. Daraus folgt: $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$.

Nur bei den endlich vielen Nullstellen und Polstellen, die f eventuell in G' besitzt, kann ein Residuum $\neq 0$ herauskommen. Deshalb folgt die Formel unmittelbar aus dem Residuensatz. ∎

Zur Deutung des Argument-Prinzips beachten wir, daß $f \circ \gamma$ ein geschlossener Weg ist, der den Nullpunkt nicht trifft, und für den gilt:

$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = n - p. \end{aligned}$$

Ist z_0 eine k-fache Nullstelle der Funktion f, um die γ herumläuft, so ist $n(f \circ \gamma, 0) = k$. Der Weg $f \circ \gamma$ umläuft also den Nullpunkt k-mal. Das bedeutet: Ist $z = \gamma(t)$, so wird $w := f(\gamma(t))$ k-mal angenommen.

Das Integral $\displaystyle\frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ liefert bis auf den Faktor 2π die Gesamtänderung des Arguments von $f(z)$ (vom Nullpunkt aus betrachtet), wenn z den Weg γ durchläuft.

Beispiel.

Die Funktion $f(z) := z^2$ besitzt in $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung und ist ansonsten holomorph ohne Nullstellen. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := e^{\mathsf{j}\,t}$ umrundet diese Nullstelle einmal, ist also eine einfach geschlossene Kurve, auf der keine Nullstelle von f liegt. Daher ist $n(f \circ \gamma, 0) = 2$. Und tatsächlich umläuft $f \circ \gamma(t) = e^{2\mathsf{j}\,t}$ den Nullpunkt zweimal! Jeder Wert $w \neq 0$ wird zweimal angenommen, es gibt ja jeweils 2 Wurzeln.

Eine besonders wichtige Anwendung des Residuensatzes stellt die Berechnung gewisser reeller Integrale dar. Wir betrachten hier vorerst nur einen Fall, nämlich die Berechnung uneigentlicher rationaler Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\;,$$

wobei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ist, mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

Hilfssatz

Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten c, $C > 0$ und ein $R > 0$, so daß gilt:

$$c|z|^n \le |p(z)| \le C|z|^n \qquad \textit{für } |z| \ge R.$$

BEWEIS:

$$\text{Sei} \quad p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \text{ mit } a_n \neq 0.$$

Für $z \neq 0$ ist $q(z) := \dfrac{p(z)}{z^n} = a_n + a_{n-1} \cdot \dfrac{1}{z} + \cdots + a_0 \cdot \dfrac{1}{z^n} = a_n + H(z)$

eine Laurentreihe mit konstantem Nebenteil a_n und endlichem Hauptteil $H(z)$. Also ist $\lim\limits_{|z|\to\infty} (q(z) - a_n) = 0$, und es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß $|q(z)| \le C$ für $|z| \ge 1$ ist.

Weiter ist $|q(z)| \ge |a_n| - |H(z)|$, und da $|H(z)|$ für $|z| \to \infty$ beliebig klein wird, gibt es ein $c > 0$, so daß $|q(z)| \ge c$ für $|z| \ge R$ und genügend großes R ist. ∎

Folgerung

Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) \ge \deg(p) + k$ und $1 \le k \le 2$, so folgt:

1. *Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}|$ im Unendlichen beschränkt.*
2. *Ist $k = 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral*
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx.$$

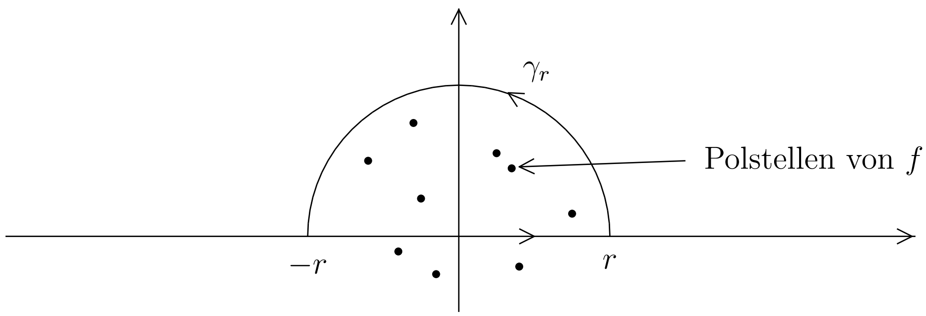
BEWEIS: Sei $m := \deg(p)$ und $n := \deg(q)$. Dann ist $m - n \le -k$, und es gibt Konstanten c und C, so daß gilt:

$$|p(z)| \le C|z|^m \quad \text{und} \quad c|z|^n \le |q(z)|$$

und daher $|\dfrac{p(z)}{q(z)}| \le C^* \cdot |z|^{m-n}$, für $|z| \ge R$ und $C^* := \dfrac{C}{c}$.

Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}| \le C^*$. Ist $k = 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus dem Majoranten-Kriterium und der Integrierbarkeit von $1/|x|^2$. ∎

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ erfüllt, mit $k = 2$. Insbesondere ist dann $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch höchstens endlich viele sein. Wir betrachten folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathrm{j}\,t}$, $0 \le t \le \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man beachte, daß das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine *endliche* Summe!

Da $|f(z)| \le \dfrac{C}{|z|^2}$ für große z ist, folgt:

$$|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz| \le \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall. Zur Erinnerung: Der Grenzwert

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt *Cauchyscher Hauptwert* des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, daß der Cauchysche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

Beispiel.

Wir wollen $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathsf{j}\,\pi/4} = e^{\mathsf{j}\,\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos(\frac{\pi+2\pi k}{4}) + \mathsf{j}\,\sin(\frac{\pi+2\pi k}{4}),$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Dabei ist $\mathrm{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da alle 4 Nullstellen von $1 + z^4$ verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathsf{j}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathsf{j}\,) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathsf{j}\,e^{\mathsf{j}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{j}\,-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 \\ \text{und} \quad \mathrm{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1, \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\mathsf{j}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{j}\,) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathsf{j}\,)\right) \\ &= \frac{\pi\mathsf{j}}{2\sqrt{2}}(-2\mathsf{j}\,) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$