

Kapitel 10 Vektoranalysis

§ 1 Jordangebiete und Greenscher Satz

Inhalt:

Ketten von Wegen, Jordangebiete, Beispiele, Greenscher Satz

Unter einem Integrationsweg verstehen wir bekanntlich eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Abbildung α von einem Intervall in den \mathbb{R}^n . Der Weg heißt *stückweise glatt*, falls $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ bis auf endlich viele Ausnahmen ist. Wir wollen jetzt den Begriff des stückweise glatten Weges noch etwas verallgemeinern.

Beispiel.

Der Rand des Rechtecks

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ und } c < y < d\}$$

besteht aus 4 Strecken, die wir alle über dem Intervall $[0, 1]$ parametrisieren können:

$$\begin{aligned} \alpha_u(t) &:= (a + t(b - a), c), \\ \alpha_r(t) &:= (b, c + t(d - c)), \\ \alpha_o(t) &:= (a + t(b - a), d) \\ \text{und } \alpha_l(t) &:= (a, c + t(d - c)). \end{aligned}$$

Wenn wir α_o und α_l jeweils verkehrt herum und alle Wege der Reihe nach durchlaufen, so durchlaufen wir den gesamten Rand des Rechtecks Q gegen den Uhrzeigersinn. Wir könnten das auch mit einem einzigen Weg $\alpha : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^n$ erledigen:

$$\alpha(t) := \begin{cases} \alpha_u(t) & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ \alpha_r(t - 1) & \text{für } 1 \leq t < 2, \\ \alpha_o(3 - t) & \text{für } 2 \leq t < 3, \\ \alpha_l(4 - t) & \text{für } 3 \leq t < 4. \end{cases}$$

Dieses Verfahren ist umständlich, und meistens braucht man die gemeinsame Parametrisierung α überhaupt nicht. Deshalb verwendet man statt α den formalen Ausdruck $\alpha_u + \alpha_r - \alpha_o - \alpha_l$ und spricht von einer „Kette von Wegen“.

Definition:

1. Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ Wege und ist jeweils der Endpunkt von α_i gleich dem Anfangspunkt von α_{i+1} , so kann man die *Kette* $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ bilden. Gemeint ist damit der Weg, der alle einzelnen Wege hintereinander durchläuft.
2. Ist α ein geschlossener Weg und $m \in \mathbb{N}$, so versteht man unter $m \cdot \alpha$ den m -mal durchlaufenen Weg.
3. Ist α ein Weg, so ist $-\alpha$ der in umgekehrter Richtung durchlaufene Weg.

Darüber hinaus sind auch beliebige formale Linearkombinationen $\Gamma = m_1 \cdot \alpha_1 + \dots + m_k \cdot \alpha_k$ mit Koeffizienten $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ erlaubt. Eine anschauliche Deutung ist dann zwar i.a. nicht mehr möglich, aber man kann über Ketten integrieren:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} := \sum_{i=1}^k m_i \int_{\alpha_i} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

Wir werden hier nur mit anschaulichen Ketten von Wegen arbeiten. Dann ist z.B. auch klar, wann eine solche Kette „geschlossen“ ist. Meist lassen wir sogar das Wort „Kette“ weg und sprechen auch dann von Wegen, wenn eigentlich Ketten von Wegen gemeint sind. Ein Integrationsweg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *einfach geschlossen*, wenn er geschlossen ist und außerdem α auf $[a, b]$ injektiv ist, d.h. $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ für $a \leq s < t < b$.

Es sei daran erinnert, daß unter einem *Gebiet* immer eine zusammenhängende offene Menge zu verstehen ist. Das Gebiet heißt *beschränkt*, wenn es in einen hinreichend großen Quader paßt.

Definition:

Ein *Parametergebiet* oder *Jordangebiet* ist ein beschränktes Gebiet G im \mathbb{R}^2 , dessen Rand Spur eines einfach geschlossenen stückweise glatten Weges ist.

Beispiele.

1. Die Kreisscheibe $D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ ist ein Jordangebiet.
2. Das Innere des Rechtecks $Q = [a, b] \times [c, d]$ ist ein Jordangebiet.
3. Sind $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi(x) < \psi(x)$ für $x \in (a, b)$, so ist das *Normalgebiet*

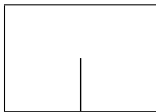
$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ und } \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

ein Jordangebiet. Dabei ist erlaubt, daß φ und ψ in den Endpunkten übereinstimmen. Durch $\alpha(t) := (t, \varphi(t))$ wird dann z.B. das untere Randstück von G parametrisiert. Weil $\alpha(t) = (1, \varphi'(t)) \neq (0, 0)$ ist, ist α glatt.

4. Das „Ringgebiet“ $R = \{\mathbf{x} : r_1 < \|\mathbf{x}\| < r_2\}$ ist kein Jordangebiet, denn sein Rand besteht aus **zwei** glatten Wegen.

Jordangebiete haben einige besonders schöne Eigenschaften, die hier ohne Beweis aufgezählt werden sollen:

- a) $\mathbb{R}^2 \setminus \partial G$ besteht aus genau zwei zusammenhängenden offenen Mengen, dem *Inneren* von G (also dem Gebiet G selbst) und dem *Äußeren* von G (der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$). Im Falle des Ringgebietes war diese Eigenschaft nicht erfüllt.
- b) Man kann zeigen, daß ∂G lokal wie ein Funktionsgraph aussieht und daß jeder Randpunkt von G auch Randpunkt von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ ist. Entfernt man etwa aus dem Rechteck $(a, b) \times (c, d)$ den „Stachel“ $\{(x, y) : a < x < (a+b)/2 \text{ und } y = (c+d)/2\}$, so stellt der Rest **kein** Jordangebiet mehr dar:



- c) Der Rand von G kann so orientiert werden, daß G immer „links“ von ∂G liegt. Im Detail ist das wie folgt zu verstehen:

Ist $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ ein glatter Randpunkt, so haben wir dort den Tangenteneinheitsvektor \mathbf{T} , dessen Richtung den Durchlaufungssinn angibt. Ist etwa $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$, so erhält man nach einer Drehung um 90° nach links den Vektor $\mathbf{N}_i = (-T_2, T_1)$. Das entspricht in der komplexen Ebene der Multiplikation mit der imaginären Einheit j . Wir nennen \mathbf{N}_i den *inneren Normalen(einheits)vektor*, er zeigt ins Innere von G . Der *äußere Normalen(einheits)vektor* $\mathbf{N}_a = -\mathbf{N}_i = (T_2, -T_1)$ zeigt nach außen (bzw. „rechts“). Ist $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, so liegen für $0 < t < \varepsilon$ alle Punkte $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{N}_i$ in G und alle Punkte $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{N}_a$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$.

- d) Der Rand von G ist eine Jordan-Nullmenge und G deshalb (Jordan)-meßbar.

Ist jetzt eine stetige Funktion auf \overline{G} gegeben, so ist sie – weil \overline{G} kompakt ist – beschränkt und damit über \overline{G} (oder über G) integrierbar. Ist andererseits ein stetiges Vektorfeld \mathbf{F} auf einer Umgebung von ∂G gegeben, so können wir das Kurvenintegral $\int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ bilden. Wir wollen nun zwischen beiden Integrationen einen Zusammenhang herstellen.

Dabei sei \mathbf{F} sogar auf einer Umgebung $U(\overline{G})$ definiert und zudem stetig differenzierbar. Wir können das Kurvenintegral auch wie folgt schreiben:

$$\int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{\partial G} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Auf der rechten Seite ist der Integrand die durch \mathbf{F} bestimmte 1-Form $\omega_{\mathbf{F}} = F_1 dx + F_2 dy$.

Satz von Green

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Jordangebiet und $\mathbf{F} = (f, g)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung $U = U(\overline{G})$. Dann ist

$$\int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_G (g_x - f_y) dx dy.$$

BEWEIS: Die Schwierigkeit liegt in der Geometrie des Jordangebietes. Wir beschränken uns deshalb auf ein Normalgebiet. In der Praxis vorkommende Jordangebiete kann man meistens aus solchen Normalgebieten zusammensetzen.

Sei also $G = \{(x, y) : a < x < b \text{ und } \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Der Rand wird jetzt durch folgende Wege parametrisiert:

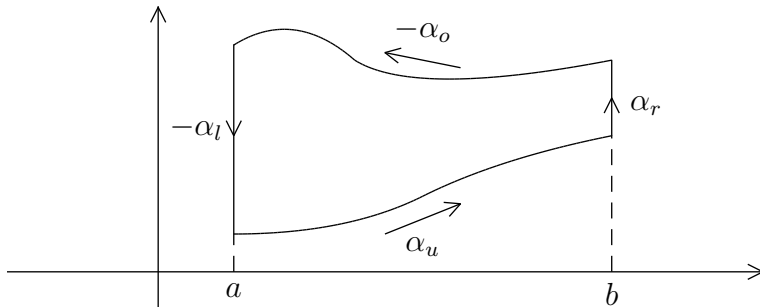
$$\alpha_u(t) := (t, \varphi(t)), \text{ für } a \leq t \leq b,$$

$$\alpha_r(t) := (b, \varphi(b) + t(\psi(b) - \varphi(b))), \text{ für } 0 \leq t \leq 1,$$

$$\alpha_o(t) := (t, \psi(t)), \text{ für } a \leq t \leq b$$

$$\text{und } \alpha_l(t) := (a, \varphi(a) + t(\psi(a) - \varphi(a))), \text{ für } 0 \leq t \leq 1.$$

Dabei müssen α_o und α_l umgekehrt durchlaufen werden, damit G immer links vom Weg liegt. Also wird ∂G durch die Kette $\alpha_u + \alpha_r - \alpha_o - \alpha_l$ beschrieben.



Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\mathbf{F} = (f, 0)$, also $g = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_G (g_x - f_y) dx dy &= - \int_G f_y(x, y) dx dy \\ &= - \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_y(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_a^b [f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x))] dx. \end{aligned}$$

Weiter ist $\alpha'_r(t) = (0, \psi(b) - \varphi(b))$ und $\alpha'_l(t) = (0, \psi(a) - \varphi(a))$, also

$$\int_{\alpha_r} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_0^1 f(\alpha_r(t)) \cdot 0 dt = 0 \quad \text{und analog} \quad \int_{\alpha_l} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_{\alpha_u} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} - \int_{\alpha_o} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &= \int_a^b f(t, \varphi(t)) dt - \int_a^b f(t, \psi(t)) dt \\ &= - \int_a^b [f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x))] dx. \end{aligned}$$

2. Fall: $\mathbf{F} = (0, g)$, also $f = 0$. Wir wollen diese Situation auf den ersten Fall zurückführen und führen deshalb folgende Hilfsfunktion ein:

$$u(x, y) := \int_{\varphi(x)}^y g(x, s) ds, \quad \text{für } (x, y) \in G.$$

Es folgt:

$$u_x(x, y) = \int_{\varphi(x)}^y g_x(x, s) ds - g(x, \varphi(x))\varphi'(x) \quad (\text{nach Leibniz}), \quad \text{und } u_y(x, y) = g(x, y),$$

$$\text{also } g_x = (u_y)_x = (u_x)_y.$$

Weil ∂G ein geschlossener Weg ist, ist $\int_{\partial G} (u_x dx + u_y dy) = \int_{\partial G} (\nabla u) \bullet d\mathbf{x} = 0$, also

$$\int_{\partial G} u_x dx = - \int_{\partial G} u_y dy = - \int_{\partial G} g dy.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_G (g_x - f_y) dx dy &= \int_G g_x(x, y) dx dy \\ &= \int_G (u_x)_y dy dx \\ &= - \int_{\partial G} (u_x, 0) \bullet d\mathbf{x} \quad (\text{nach Fall 1}) \\ &= - \int_{\partial G} u_x dx = \int_{\partial G} g dy \\ &= \int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

■

Man kann den Satz von Green zur Berechnung von Flächeninhalten heranziehen.

Satz

Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Jordan-Gebiet, so ist

$$v_2(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \, dy - y \, dx).$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \, dy - y \, dx) &= \frac{1}{2} \int_{\partial G} (-y, x) \bullet d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_G (x_x + y_y) \, dx \, dy \\ &= \int_G dx \, dy = v_2(G). \end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Ist $G = D_r(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$, so ist

$$\begin{aligned} v_2(G) &= \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \, dy - y \, dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_r(0)} (-y, x) \bullet d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-r \sin t, r \cos t) \bullet (-r \sin t, r \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, dt = r^2 \pi. \end{aligned}$$

2. Sei G die Ellipse, deren Rand durch $\alpha(t) := (a \cos t, b \sin t)$ beschrieben wird. Dann ist

$$\begin{aligned} v_2(G) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t, a \cos t) \bullet (-a \sin t, b \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = ab\pi. \end{aligned}$$

§ 2 Flächenintegrale

Inhalt:

Flächenstücke, Beispiele von Parametrisierungen, Flächeninhalt, Gramsche Determinante, Fluß-Integrale.

Definition:

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt ein *abgeschlossenes \mathcal{C}^k -Flächenstück*, falls es ein Jordansches Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, eine offene Umgebung $U = U(\overline{G}) \subset \mathbb{R}^2$ und eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so daß gilt:

1. $S = \varphi(\overline{G})$.
2. $\varphi|_G$ ist injektiv.
3. $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in G$.

Die Menge $\overset{\bullet}{S} := \varphi(G)$ nennt man ein *offenes Flächenstück*.

Wir nennen φ eine *Parametrisierung* von S und sprechen auch von einem *parametrisierten Flächenstück*. Bezeichnen wir die Parameter in G mit u und v , so erhalten wir die Funktionalmatrix

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u & (\varphi_1)_v \\ (\varphi_2)_u & (\varphi_2)_v \\ (\varphi_3)_u & (\varphi_3)_v \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathbf{u}_0 \in G$ und $\mathbf{p}_0 = \varphi(\mathbf{u}_0)$. Weil $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0) = 2$ ist, sind die beiden Spaltenvektoren

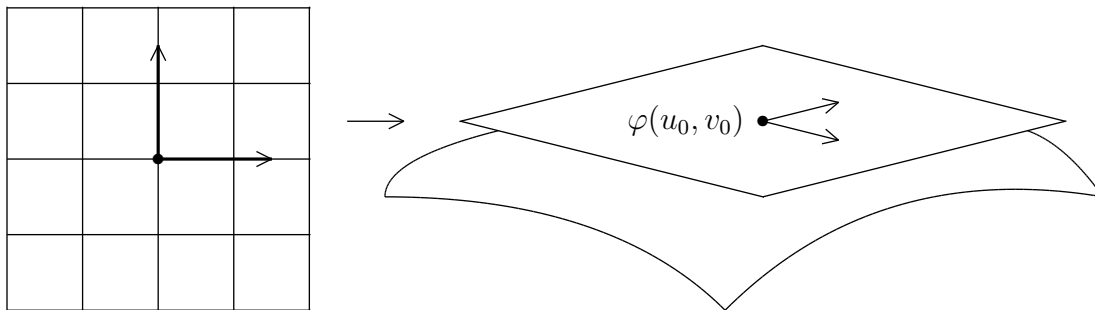
$$\vec{\varphi}_u := \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u \\ (\varphi_2)_u \\ (\varphi_3)_u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\varphi}_v := \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v \\ (\varphi_2)_v \\ (\varphi_3)_v \end{pmatrix}$$

in \mathbf{u}_0 linear unabhängig. Sie spannen einen 2-dimensionalen Unterraum $T_{\mathbf{p}_0}(S) \subset \mathbb{R}^3$ auf, den wir als die *Tangentialebene* von S im Punkt \mathbf{p}_0 bezeichnen. Motiviert wird diese Bezeichnung durch folgende Betrachtung:

Ist $\alpha(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_1)$ und $\beta(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_2)$, so verlaufen die Kurven α und β auf der Fläche, es ist $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbf{p}_0$ und

$$\vec{\alpha}'(0) = J_\varphi(\mathbf{u}_0) \cdot \vec{e}_1 = \vec{\varphi}_u(\mathbf{u}_0) \quad \text{und} \quad \vec{\beta}'(0) = J_\varphi(\mathbf{u}_0) \cdot \vec{e}_2 = \vec{\varphi}_v(\mathbf{u}_0).$$

Die Tangentialebene wird also von zwei Vektoren aufgespannt, die in \mathbf{p}_0 tatsächlich tangential zu S sind.



Beispiele.

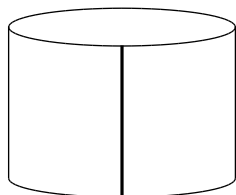
1. Sei $G := (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ und $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v).$$

Dann ist $S = \varphi(\overline{G}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } |z| \leq 1\}$ ein Zylindermantel der Höhe 2 mit Radius 1. Es ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind die Spalten immer linear unabhängig, und man kann sich leicht überlegen, daß φ auf G injektiv ist.

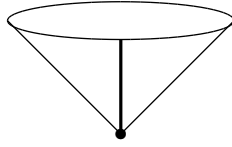


Man beachte, daß der Zylinder entlang der Linie $\{(1, 0, z) : |z| \leq 1\}$ zusammengeklebt wird. Auf \overline{G} ist φ nicht mehr injektiv.

2. Sei wieder $G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ und $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

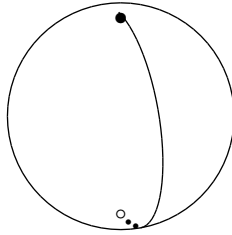
$$\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v).$$

Für jeden Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 1$ ist die Verbindungsstrecke von $\mathbf{0}$ und \mathbf{x} ganz in S enthalten.



Daher ist S ein kreisförmiger Kegelmantel mit einer Spitze bei $(0, 0, 0)$.

3. Sei $G := (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\varphi(u, v) := (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$. Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung der Oberfläche der Einheitskugel.



Die linke und die rechte Seite von G werden zu einem Längenskreis zusammengeklebt, die untere und die obere Seite von G ergeben den Südpol und den Nordpol.

4. Ist G ein Jordan-Gebiet, U eine offene Umgebung von \overline{G} und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist $S := \{(x, y, z) \in \overline{G} \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$ ein Flächenstück mit Parametrisierung $\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v))$. Solch ein glatter Graph ist der Prototyp eines Flächenstücks.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in N(h) := \{(x, y, z) \in U : h(x, y, z) = 0\}$. Dann kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden: Ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in N(h)$, so muß es zumindest eine partielle Ableitung von h geben, die in \mathbf{x}_0 nicht verschwindet. Ist etwa $h_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung V von $(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$, eine Umgebung W von z_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V \rightarrow W$, so daß $V \times W$ in U enthalten und

$$(V \times W) \cap N(h) = \{(x, y, z) \in V \times W : z = g(x, y)\}$$

ist. Ist G ein Jordangebiet mit $\overline{G} \subset V$, so ist $S = (\overline{G} \times W) \cap N(h)$ ein Flächenstück. Wir nennen $N(h)$ eine *glatte Fläche*.

5. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, $f(t) > 0$ auf $[a, b]$. Dann wird durch

$$\varphi(u, v) := (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

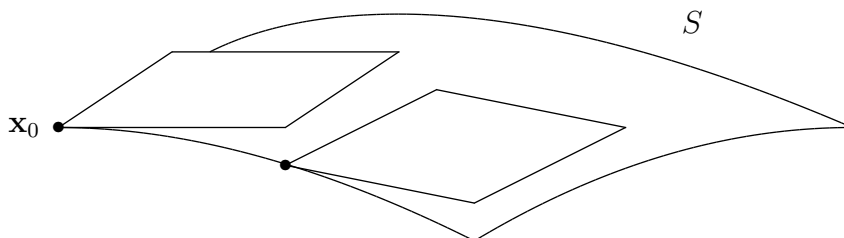
ein Flächenstück parametrisiert, die durch α bestimmte „Rotationsfläche“.

Wie kann man nun den Flächeninhalt eines Flächenstücks bestimmen? Wir versuchen es mit einer Approximation! Es sei ein Quader Q und eine Parametrisierung $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir zerlegen Q in viele kleine Teilquader. $(u_0, v_0) \in Q$ sei ein Gitterpunkt. Dann gibt es Zahlen s und t , so daß

$$\mathbf{x}_0 = (u_0, v_0), \mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_1 = (u_0 + s, v_0), \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_2 = (u_0, v_0 + t)$$

$$\text{und } \mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 = (u_0 + s, v_0 + t)$$

die Ecken eines Teilquaders sind. Die Bilder dieser Ecken auf der Fläche brauchen leider nicht unbedingt in einer Ebene zu liegen!!



Wir können Genaueres über die Lage der Bilder der Ecken herausbekommen, wenn wir die Differenzierbarkeit von φ in (u_0, v_0) ausnutzen: Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte (vektorwertige) Funktion r , so daß für (u, v) nahe (u_0, v_0) gilt:

$$1. \quad \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + L(u - u_0, v - v_0) + r(u - u_0, v - v_0).$$

$$2. \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Dabei ist

$$L(h_1, h_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)h_2.$$

Näherungsweise ist also

$$\varphi(u_0 + s, v_0 + t) \approx \varphi(u_0, v_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)s + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)t.$$

Setzen wir $\mathbf{a} := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ und $\mathbf{b} := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$, so werden die Ecken des Teilquaders auf die Punkte \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 + s\mathbf{a}$, $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ abgebildet, also auf die Ecken eines Parallelogramms. Wie gesagt, das gilt nur näherungsweise und nur für kleines s und t !

Die Fläche des Parallelogramms ist durch $\|s\mathbf{a} \times t\mathbf{b}\| = st\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ gegeben. Nun bezeichnen wir die Teilquader von Q mit $Q_{ij} = [t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}] \times [t_j^{(2)}, t_{j+1}^{(2)}]$. Zusätzlich setzen wir $t_{ij} := (t_i^{(1)}, t_j^{(2)})$ (= linke untere Ecke von Q_{ij}). Ist \mathcal{P} die Zerlegung von Q in die Q_{ij} , so approximieren wir $A(S)$ durch die „Riemannsche Summe“ $\Sigma(\mathcal{P})$, mit

$$\Sigma(\mathcal{P}) := \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t_{ij}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t_{ij}) \right\| \cdot (t_{i+1}^{(1)} - t_i^{(1)})(t_{j+1}^{(2)} - t_j^{(2)}).$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen konvergieren die „Riemannschen Summen“ gegen einen Wert, der in nachprüfaren Fällen mit dem erwarteten Flächeninhalt übereinstimmt.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Jordangebiet und $\varphi : \overline{G} \rightarrow S$ ein (parametrisiertes) C^1 -Flächenstück. Dann heißt

$$A(S) := \int_G \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

der *Flächeninhalt* von S .

Wir wollen zeigen, daß der Flächeninhalt nicht von der Parametrisierung abhängt. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Definition:

Ist $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, so heißt $G_A := \det(A^t \cdot A)$ die *Gramsche Determinante* von A .

Man beachte, daß $A^t \cdot A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix ist.

Satz

1. Sei $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{k,k}$. Dann ist $G_{A \cdot B} = \det(B)^2 \cdot G_A$.
2. Ist $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, so ist

$$G_A = \|\vec{a}_1\|^2 \cdot \|\vec{a}_2\|^2 - (\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2)^2 = \|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|^2.$$

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} G_{A \cdot B} &= \det((AB)^t \cdot (AB)) \\ &= \det(B^t \cdot (A^t \cdot A) \cdot B) \\ &= \det(B) \cdot \det(A^t \cdot A) \cdot \det(B) \\ &= \det(B)^2 \cdot G_A. \end{aligned}$$

2) Dieser Teil folgt aus den Definitionen und der Tatsache, daß $\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2\| \cos(\alpha)$ und $\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\| = \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2\| \sin(\alpha)$ ist, falls α der Winkel zwischen \vec{a}_1 und \vec{a}_2 ist. ■

Wir kehren zurück zu dem parametrisierten Flächenstück $\varphi : G \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein weiteres Jordangebiet und $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : B \rightarrow G$ ein (stetig differenzierbarer) Diffeomorphismus, so kann man Φ auch eine Parametertransformation nennen. Mit φ ist auch $\psi = \varphi \circ \Phi$ eine Parametrisierung von S , und mit der Kettenregel folgt:

$$J_\psi = (J_\varphi \circ \Phi) \cdot J_\Phi.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|\psi_s \times \psi_t\| &= \sqrt{G_{J_\psi}} = |\det(J_\Phi)| \cdot \sqrt{G_{J_\varphi \circ \Phi}} \\ &= |\det(J_\Phi)| \cdot \|(\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)\|. \end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel folgt:

$$\begin{aligned} \int_B \|\psi_s \times \psi_t\| \, dsdt &= \int_B |\det(J_\Phi)| \cdot \|(\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)\| \, dsdt \\ &= \int_G \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt hängt also nicht von der Parametrisierung ab.

Wir wollen nun Flächeninhalte berechnen.

Beispiele.

1. Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Gehen wir von der Parametrisierung $\varphi : Q = [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (r \cos(u), r \sin(u), v)$$

aus, so entsteht der Zylinder, indem wir das Rechteck zusammenrollen und entlang einer Seite verkleben. Daher erwarten wir, daß der Flächeninhalt $A(S) = 2r\pi \cdot (b - a)$ beträgt.

Nun ist $J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin(u) & 0 \\ r \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also

$$(J_\varphi(u, v))^t \circ (J_\varphi(u, v)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante

$$G_\varphi := \det(J_\varphi^t \cdot J_\varphi) = r^2,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_Q \sqrt{G(u, v)} \, dudv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^b r \, dv \, du \\
&= r(b-a) \cdot \int_0^{2\pi} du = 2r\pi(b-a),
\end{aligned}$$

ganz so, wie wir es erwartet haben.

2. Als nächstes wollen wir den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \cos(u) \cos(v), r \sin(u) \cos(v), r \sin(v)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

und daher

$$G_\varphi(u, v) = \det(J_\varphi^t(u, v) \cdot J_\varphi(u, v)) = \det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(v) \, dv \, du \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin(v) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) du \\
&= 2r^2 \int_0^{2\pi} du = 4r^2\pi.
\end{aligned}$$

Definition:

Sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines Flächenstücks S und F ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Umgebung U von S im \mathbb{R}^3 . Dann bezeichnet man das Integral

$$\int_\varphi F \bullet d\mathbf{O} := \int_G F(\varphi(u, v)) \bullet (\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)) \, dudv$$

als den *Fluß* des Vektorfeldes F durch die Fläche S .

Wir untersuchen zunächst die Abhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung. Zur Erinnerung: Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, so wird durch

$$\Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{a} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

eine alternierende Bilinearform $\Lambda_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Ist nun eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben, so gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{a}}(a\mathbf{v} + c\mathbf{w}, b\mathbf{v} + d\mathbf{w}) &= ab \cdot \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + ad \cdot \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &\quad + cb \cdot \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + cd \cdot \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= (ad - bc) \cdot \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbf{a} \bullet ((a\mathbf{v} + c\mathbf{w}) \times (b\mathbf{v} + d\mathbf{w})) = \det(A) \cdot \mathbf{a} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Setzt man in einem Skalarprodukt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{z}$ für \mathbf{a} die Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 ein, so erhält man die drei kartesischen Komponenten des Vektors \mathbf{z} . Daraus folgt:

$$(a\mathbf{v} + c\mathbf{w}) \times (b\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \det(A) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Wenden wir das auf eine Parametertransformation $\Phi : B \rightarrow G$, die Parametrisierung $\psi = \varphi \circ \Phi$, die Vektoren $\mathbf{v} = \varphi_u \circ \Phi$, $\mathbf{w} = \varphi_v \circ \Phi$ und die Matrix $A = J_{\Phi}$ an, so folgt aus der Gleichung $J_{\psi} = (J_{\varphi} \circ \Phi) \cdot J_{\Phi}$ die Beziehung

$$\psi_s \times \psi_t = \det(J_{\Phi}) \cdot ((\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\psi} F \bullet d\mathbf{O} &= \int_B F(\psi(s, t)) \bullet (\psi_s(s, t) \times \psi_t(s, t)) \, dsdt \\ &= \int_B F \circ \varphi(\Phi(s, t)) \bullet ((\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)) \cdot \det(J_{\Phi}) \, dsdt \\ &= \text{sign}(\det J_{\Phi}) \cdot \int_G F(\varphi(u, v)) \bullet (\varphi_u \times \varphi_v) \, dudv. \end{aligned}$$

Da Φ ein Diffeomorphismus ist, muß $\det(J_{\Phi}(s, t)) \neq 0$ für alle $(s, t) \in B$ sein. Da B zusammenhängend ist, hat die Funktionaldeterminante konstantes Vorzeichen. Wir nennen Φ *orientierungstreu*, falls $\det(J_{\Phi}) > 0$ ist, und *orientierungsumkehrend*, falls $\det(J_{\Phi}) < 0$ ist.

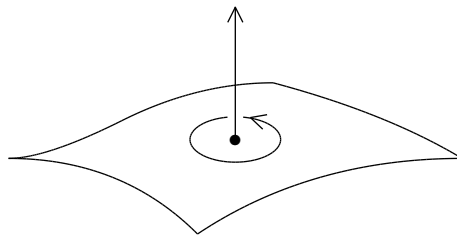
Was versteht man nun unter der Orientierung eines Flächenstücks? Der Vektor $\varphi_u \times \varphi_v$ steht auf der Tangentialebene senkrecht. Daher heißt

$$\mathbf{n}_S := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

die *Flächennormale* von S . Es ist anschaulich klar, daß es in jedem Punkt der Fläche S genau 2 Vektoren der Länge 1 gibt, die in diesem Punkt auf S senkrecht

stehen. Ändert man die Parametrisierung mittels einer Parametertransformation Φ , so multipliziert sich die Flächennormale mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(J_\Phi)$.

Die Richtung der Flächennormale legt die sogenannte „transversale Orientierung“ von S fest. Sie bestimmt, wo „oben“ und „unten“ ist. Die transversale Orientierung bestimmt auf eindeutige Weise eine „innere Orientierung“ von S , nämlich einen Umlaufsinn um die Normale. Dieser Umlaufsinn wird durch die Anordnung der Basis des Tangentialraumes festgelegt. Die Vektoren φ_u , φ_v und $\varphi_u \times \varphi_v$ bilden – in dieser Reihenfolge – ein Rechts-System (d.h. eine Basis des \mathbb{R}^3 mit positiver Determinante). Der Umlaufsinn wird so festgelegt, daß man – ausgehend von der durch φ_u festgelegten Richtung – nach einer positiven Drehung die durch φ_v festgelegte Richtung erreicht.



Halten wir eine (transversale oder innere) Orientierung von S fest, so sprechen wir von einem orientierten Flächenstück. Wir definieren den Fluß eines Vektorfeldes F durch ein orientiertes Flächenstück S durch

$$\int_S F \bullet d\mathbf{O} = \int_\varphi F \bullet d\mathbf{O},$$

wobei für φ nur positiv orientierte Parametrisierungen von S zugelassen sind. Geht man mittels einer orientierungstreuen Parametertransformation zu einer anderen Parametrisierung über, so ändert sich der Fluß nicht. Eine Umkehrung der Orientierung führt jedoch zu einem Vorzeichenwechsel.

Beispiel.

$E(\mathbf{x}) = q \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ ist das elektrische Feld einer Punktladung q im Nullpunkt.

Nun sei $S := \partial B_r(\mathbf{0})$. Verwenden wir die übliche Parametrisierung φ für S , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \varphi_v &= (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) \times (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v) \\ &= (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v) \\ &= \cos v \cdot \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Weil $\|\varphi(u, v)\| = 1$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} F \cdot d\mathbf{O} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q \cdot \frac{\varphi(u, v)}{\|\varphi(u, v)\|^3} \cdot (\cos v \cdot \varphi(u, v)) \, dvdu \\ &= q \cdot \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dvdu \\ &= q \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi q.\end{aligned}$$

Wegen der Ladung im Nullpunkt ist die Gesamtbilanz des Flusses durch die Kugeloberfläche (von innen nach außen) positiv.

§ 3 Der Satz von Stokes

Inhalt:

Flächenstücke mit stückweise glattem Rand, Satz von Stokes, Zirkulation und Wirbeldichte, Interpretation der Rotation, Integration über geschlossene Flächen.

Gegeben sei ein Jordansches Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, eine Zerlegung $\partial G = C_1 \cup \dots \cup C_N$ des Randes in glatte Kurven (mit Parametrisierungen $\alpha_\nu : I_\nu \rightarrow C_\nu$), eine offene Umgebung $U = U(\overline{G})$ und eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Es sei $\varphi|_G$ injektiv und $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in G$.

Definition:

Ist φ sogar auf \overline{G} injektiv und außerdem $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in \overline{G}$, so nennen wir $S := \varphi(\overline{G})$ ein *reguläres \mathcal{C}^k -Flächenstück mit stückweise glattem Rand*. Die Menge $bS := \varphi(\partial G)$ heißt der *Rand* von S .

Beispiel.

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar, so wird der Graph

$$S = \{(x, y, z) \in \overline{G} \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

durch $\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v))$ parametrisiert. Offensichtlich ist φ auf \overline{G} injektiv und $\text{rg } J_\varphi(u, v) = 2$ auf ganz U . Also ist S ein reguläres \mathcal{C}^k -Flächenstück mit stückweise glattem Rand. Der Rand bS setzt sich aus den glatten Kurven $K_\nu = \varphi(C_\nu)$ zusammen, die durch $\varphi \circ \alpha_\nu : I_\nu \rightarrow K_\nu \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert werden.

Für viele theoretische Untersuchungen reicht das Konzept des regulären Flächenstücks mit Rand aus. In der Praxis haben wir aber leider oft mit Parametrisierungen zu tun, die nicht die nötigen Voraussetzungen erfüllen.

Betrachten wir als Beispiel den Zylinder

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } a \leq z \leq b\}.$$

Als natürliche Parametrisierung bietet sich

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [a, b] \quad \text{mit } \varphi(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v)$$

an. Aber dann ist $\varphi(0, v) = \varphi(2\pi, v)$ für alle $v \in [a, b]$ (klar, es werden ja die linke und die rechte Kante miteinander verklebt). Also ist φ auf $\overline{G} = [0, 2\pi] \times [a, b]$ nicht mehr injektiv. Und es gibt andere wichtige Beispiele, bei denen auch noch die Rangbedingung auf dem Rand verletzt ist.

Im Beispiel des Zylinders könnten wir jeweils halbe Zylinder (z.B. die Teile mit $y \geq 0$ bzw. $y \leq 0$) als reguläre Flächenstücke auffassen, wir müßten dann aber immer mit zwei Parametrisierungen arbeiten. Das ist umständlich! **Um also das Rechnen zu vereinfachen**, müssen wir unsere Definition eines berandeten Flächenstücks verallgemeinern.

Wir gehen von einem gewöhnlichen Flächenstück aus und wollen uns überlegen, welches Verhalten wir für die Parametrisierung auf dem Rand zulassen wollen.

1. Ist $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) \equiv 0$ auf der Randkurve C_ν , so ist $(\varphi \circ \alpha_\nu)'(t) \equiv 0$ auf I_ν , also $\varphi \circ \alpha_\nu(t)$ konstant. Dann besteht $K_\nu = \varphi(C_\nu)$ nur aus einem einzigen Punkt, und wir nennen K_ν eine *entartete Randkomponente* oder eine *Spitze* von S .
2. Ist $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ in jedem Punkt der Randkurve C_ν und φ auf C_ν injektiv, so nennen wir $K_\nu = \varphi(C_\nu)$ eine *reguläre Randkomponente*. Wir werden fordern, daß es nur entartete oder reguläre Randkomponenten gibt.
3. Es kann vorkommen, daß zwei reguläre Randkomponenten K_ν und K_μ miteinander verklebt werden. Das ist aber nur erlaubt, wenn sie entgegengesetzt orientiert sind (damit sich später die Integrale über solche Kanten gegenseitig wegheben). Die Parametrisierungen α_ν und α_μ müssen immer so gewählt werden, daß das Jordangebiet G links vom Weg liegt. Ist nun $K_\nu = K_\mu$ (für zwei reguläre Randkomponenten), so soll es einen Parameterwechsel $\psi_{\nu\mu} : I_\mu \rightarrow I_\nu$ geben, so daß gilt:

$$\psi'_{\nu\mu}(t) < 0 \quad \text{und} \quad (\varphi \circ \alpha_\nu) \circ \psi_{\nu\mu} = \varphi \circ \alpha_\mu.$$

Außerdem dürfen immer nur zwei Randkomponenten miteinander verklebt werden. Wir nennen dann $K := K_\nu = K_\mu$ eine *Klebekante*. Wird K_ν mit keiner anderen Randkomponente verklebt, sprechen wir von einer *freien Randkomponente*.

4. Sind $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \overline{G}$ mit $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ und $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) =: \mathbf{p}$, so sollen \mathbf{u} und \mathbf{v} beide auf dem Rand von G liegen und eine der folgenden Bedingungen erfüllen:
 - (a) \mathbf{u} und \mathbf{v} liegen beide in einer Randkurve C_ν , und $K_\nu = \varphi(C_\nu)$ ist entartet.
 - (b) \mathbf{u} und \mathbf{v} liegen in zwei verschiedenen Randkurven C_ν und C_μ , und $K_\nu = K_\mu$ ist eine Klebekante.

Definition:

$S = \varphi(\overline{G})$ heißt ein *semireguläres Flächenstück mit stückweise glattem Rand*, falls die obigen Bedingungen erfüllt sind. Unter dem Rand bS verstehen wir die Vereinigung aller freien Randkomponenten von S . Ist $bS = \emptyset$, so heißt S eine *geschlossene Fläche*.

Beispiele.

1. Die Kugeloberfläche S^2 enthält zwei entartete Komponenten (Nord- und Südpol) und eine Klebekante. Da keine freie Randkomponente übrigbleibt, ist $bS^2 = \emptyset$, also S^2 eine geschlossene Fläche.

Genau sehen wir das alles an Hand der Parametrisierung

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)).$$

Es ist

$$\varphi(u, \pm \frac{\pi}{2}) = (0, 0, \pm 1) \text{ und } \varphi(0, v) = (\cos(v), 0, \sin(v)) = \varphi(2\pi, v).$$

Auf dem oberen und unteren Rand des Definitionsgebietes $G = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist φ konstant, der rechte und der linke Rand werden entlang eines Meridians verklebt. Damit der Rand von G richtig orientiert wird, müssen wir z.B. $\alpha(t) = (2\pi, t)$ (mit $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) als Parametrisierung für den rechten Rand von G nehmen, und $\beta(t) := (0, -t)$ für den linken Rand.

Die Parametertransformation $\psi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\psi(t) := -t$ erfüllt nun die Gleichung

$$\varphi \circ \beta \circ \psi(t) = \varphi \circ \alpha(t) = (\cos(v), 0, \sin(v)).$$

2. Der durch $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ parametrisierte Zylinder S hat eine Klebekante. Der Rand bS besteht aus zwei Kreisen, den Bildern der oberen und der unteren Kante des Definitionsgebietes unter φ .
3. Bei dem durch $\varphi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v)$ parametrisierten Kegel gibt es eine entartete Randkomponente (die „Spitze“) und eine Klebekante. Es bleibt ein Kreis als freie Randkomponente übrig.
4. Jedes reguläre Flächenstück ist auch semiregulär. Es besitzt nur freie Randkomponenten.

Bemerkung. Der „Rand“ bS eines Flächenstückes S stimmt nicht mit dem topologischen Rand von S im \mathbb{R}^3 überein. Da S keine inneren Punkte besitzt, ist $\partial S = S$.

Satz von Stokes

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein (semireguläres) Flächenstück mit stückweise glattem Rand und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von S . Dann gilt:

$$\int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} = \int_{bS} F \bullet d\mathbf{x}.$$

BEWEIS: Sei $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung von S , $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung von ∂G und $\beta := \varphi \circ \alpha$. Ist S regulär, so stellt β eine Parametrisierung von bS dar. Aber auch im semiregulären Fall ist

$$\int_{\beta} F \bullet d\mathbf{x} = \int_{bS} F \bullet d\mathbf{x},$$

denn das Integral über entartete Randkomponenten und Klebekanten verschwindet.

Weil $\vec{\beta}'(t) = J_\varphi(\alpha(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} \int_{bS} F \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b F(\beta(t)) \bullet \beta'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\varphi \circ \alpha(t)) \cdot (J_\varphi(\alpha(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)) dt \\ &= \int_a^b F(\varphi \circ \alpha(t)) \cdot (\alpha'_1(t) \cdot \vec{\varphi}_u(\alpha(t)) + \alpha'_2(t) \cdot \vec{\varphi}_v(\alpha(t))) dt \\ &= \int_{\partial G} (X du + Y dv) \\ &= \int_G (Y_u(u, v) - X_v(u, v)) du dv, \quad (\text{Greenscher Satz}), \end{aligned}$$

mit den durch

$$\begin{aligned} X(u, v) &= F \circ \varphi(u, v) \cdot \vec{\varphi}_u(u, v) \\ \text{und } Y(u, v) &= F \circ \varphi(u, v) \cdot \vec{\varphi}_v(u, v) \end{aligned}$$

definierten Funktionen $X, Y : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei der Punkt das Matrizenprodukt zwischen dem Zeilenvektor F und den Spaltenvektoren $\vec{\varphi}_u$ und $\vec{\varphi}_v$ bezeichnet).

Nach der Kettenregel ist

$$Y_u = (F \circ \varphi)_u \cdot \vec{\varphi}_v + (F \circ \varphi) \cdot \vec{\varphi}_{uv}$$

und $X_v = (F \circ \varphi)_v \cdot \vec{\varphi}_u + (F \circ \varphi) \cdot \vec{\varphi}_{uv},$

also

$$\int_{bS} F \bullet d\mathbf{x} = \int_G ((F \circ \varphi)_u \cdot \vec{\varphi}_v - (F \circ \varphi)_v \cdot \vec{\varphi}_u) du dv.$$

Um zu zeigen, daß dieses Integral mit dem Flächenintegral $\int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O}$ übereinstimmt, müssen wir weitere Umformungen vornehmen.

Laut Kettenregel ist $(F \circ \varphi)_u^t = (J_F \circ \varphi) \cdot \vec{\varphi}_u$ und $(F \circ \varphi)_v^t = (J_F \circ \varphi) \cdot \vec{\varphi}_v$, und deshalb

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi)_u \cdot \vec{\varphi}_v - (F \circ \varphi)_v \cdot \vec{\varphi}_u &= \\ &= \varphi_u \cdot (J_F \circ \varphi)^t \cdot \vec{\varphi}_v - \varphi_v \cdot (J_F \circ \varphi)^t \cdot \vec{\varphi}_u \\ &= \varphi_v \cdot (J_F \circ \varphi) \cdot \vec{\varphi}_u - \varphi_u \cdot (J_F \circ \varphi)^t \cdot \vec{\varphi}_v \\ &= \varphi_v \cdot (J_F \circ \varphi - (J_F \circ \varphi)^t) \cdot \vec{\varphi}_u. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ und eine Matrix $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ gilt: $\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b}^t$ ist ein Skalar, und deshalb ist

$$\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b}^t = (\mathbf{a} \cdot A \cdot \mathbf{b}^t)^t = \mathbf{b} \cdot A^t \cdot \mathbf{a}^t.$$

Nun benutzen wir die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} &= \int_G ((\mathbf{rot} F) \circ \varphi) \bullet (\varphi_u \times \varphi_v) dudv \\ &= \int_G \det((\mathbf{rot} F) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v) dudv. \end{aligned}$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können:

$$\mathbf{a} \cdot (J_F - J_F^t) \cdot \mathbf{b}^t = \det(\mathbf{rot} F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ für alle Vektoren } \mathbf{a}, \mathbf{b}.$$

Dafür genügt es, für \mathbf{a} und \mathbf{b} Einheitsvektoren einzusetzen. Es ist aber

$$\mathbf{e}_i \cdot (J_F - J_F^t) \cdot \mathbf{e}_j^t = (F_i)_{x_j} - (F_j)_{x_i}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{rot} F, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \sum_{k=1}^3 (\mathbf{rot} F)_k \cdot \det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= \text{sign}(k, i, j) \cdot (\mathbf{rot} F)_k \text{ (wenn } \{k, i, j\} = \{1, 2, 3\} \text{ ist)} \\ &= (F_i)_{x_j} - (F_j)_{x_i}. \end{aligned}$$

Ist nämlich (k, i, j) eine zyklische Vertauschung von $(1, 2, 3)$, so ist $\text{sign}(k, i, j) = +1$ und $(\mathbf{rot} F)_k = (F_i)_{x_j} - (F_j)_{x_i}$. Liegt keine zyklische Vertauschung vor, so ändert sich bei beiden Termen das Vorzeichen. ■

Wir wollen den Stokesschen Satz benutzen, um die Rotation eines Vektorfeldes zu interpretieren.

Sei \mathbf{n} ein Einheitsvektor (in beliebiger Richtung), $\varepsilon > 0$ und S_ε eine kleine Scheibe mit Radius ε um einen Punkt \mathbf{x}_0 , die in \mathbf{x}_0 auf \mathbf{n} senkrecht steht. Es gibt ein ON-System $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, so daß $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{n}$ ist. Wir können dann die Fläche S_ε wie folgt parametrisieren:

$$\varphi(u, v) := \mathbf{x}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \text{ für } (u, v) \in D_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2.$$

Es ist $\varphi_u = \mathbf{a}$ und $\varphi_v = \mathbf{b}$, also $\varphi_u \times \varphi_v = \mathbf{n}$. Die Kreisscheibe ist also so orientiert, daß die zugehörige transversale Orientierung durch \mathbf{n} gegeben ist. Offensichtlich handelt es sich um ein reguläres Flächenstück mit glattem Rand. Durch

$$\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + (r \cos t)\mathbf{a} + (r \sin t)\mathbf{b}$$

wird eine positive Parametrisierung $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow bS_\varepsilon$ gegeben. Ist F ein stetiges Vektorfeld, so heißt das Integral

$$Z(F, bS_\varepsilon) := \int_{bS_\varepsilon} F \bullet d\mathbf{x}$$

die *Zirkulation* von F auf bS_ε .

Definition:

Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so nennen wir

$$w_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{bS_\varepsilon} F \bullet d\mathbf{x}$$

die *Wirbeldichte* von F in \mathbf{x}_0 bezüglich \mathbf{n} .

Satz (Zusammenhang zwischen Rotation und Wirbeldichte)

Es ist $w_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \mathbf{rot} F \bullet \mathbf{n}$.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \int_{bS_\varepsilon} F \bullet d\mathbf{x} &= \int_{S_\varepsilon} \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} \\ &= \int_{D_\varepsilon(\mathbf{0})} \mathbf{rot} F(\varphi(u, v)) \bullet \mathbf{n} \, dudv \\ &= (\mathbf{rot} F(\varphi(\mathbf{q}_\varepsilon)) \bullet \mathbf{n}) \cdot v_2(D_\varepsilon(\mathbf{0})), \end{aligned}$$

wobei \mathbf{q}_ε ein Punkt aus $D_\varepsilon(\mathbf{0})$ ist (Mittelwertsatz der Integralrechnung!).

$$\text{Andererseits ist } A(S_\varepsilon) = \int_{D_\varepsilon(\mathbf{0})} dudv = v_2(D_\varepsilon(\mathbf{0})) = \varepsilon^2 \cdot \pi.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert das gewünschte Resultat. ■

Die Wirbeldichte mißt die infinitesimale Zirkulation des Vektorfeldes F um die Achse \mathbf{n} . Dies entspricht dem Anteil von $\mathbf{rot} F$ in Richtung des Vektors \mathbf{n} .

Satz (Integration über geschlossene Flächen)

Sei S eine geschlossene Fläche und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann ist $\int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} = 0$.

BEWEIS: Sei $S_0 \subset S$ ein kleines Flächenstück mit stückweise glattem Rand C . Dann ist

$$\int_{S_0} \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} = \int_C F \bullet d\mathbf{x}.$$

Den Rest $S \setminus S_0$ kann man (notfalls durch Zerlegung in kleinere Stücke) ebenfalls als Flächenstück mit Rand C auffassen. Dann ist

$$\int_{S \setminus S_0} \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} = - \int_C F \bullet d\mathbf{x},$$

weil der Rand eines Flächenstücks immer so orientiert werden muß, daß die Fläche „links“ vom Rand liegt. Nun folgt:

$$\int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} = \int_{S_0} \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} + \int_{S \setminus S_0} \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} = \int_C F \bullet d\mathbf{x} - \int_C F \bullet d\mathbf{x} = 0.$$

■

Zum Schluß ein Rechenbeispiel:

Beispiel.

Schneidet man im \mathbb{R}^3 den durch $x^2 + y^2 = 1$ gegebenen Zylinder mit der durch $z = y$ gegebenen Ebene, so erhält man eine elliptische Fläche S , parametrisiert durch $\varphi(u, v) = (u, v, v)$, für $(u, v) \in D_1(\mathbf{0})$. Dann ist

$$\varphi_u \times \varphi_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1) =: \mathbf{n}.$$

Will man $\int_{bS} F \bullet d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld $F(x, y, z) := (x, x + y, x + y + z)$ berechnen, so kann man stattdessen $\int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O}$ berechnen.

Nun ist $\mathbf{rot} F = (1, -1, 1)$, also

$$\begin{aligned}
 \int_{bS} F \bullet d\mathbf{x} &= \int_S \mathbf{rot} F \bullet d\mathbf{O} \\
 &= \int_{D_1(\mathbf{0})} (1, -1, 1) \bullet (0, -1, 1) \, dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \, dr d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} (r^2) \Big|_{r=0}^1 d\varphi = 2\pi.
 \end{aligned}$$

Man könnte das Integral natürlich auch direkt berechnen. Dazu muß man eine Parametrisierung des Randes finden, z.B. $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow bS$ mit $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, \sin t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{bS} F \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (\cos t, \cos t + \sin t, \cos t + 2 \sin t) \bullet (-\sin t, \cos t, \cos t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [-\sin t \cos t + \cos^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t] \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [\sin(2t) + 1 + \cos(2t)] \, dt \\
 &= \left(t + \frac{1}{2}(\sin(2t) - \cos(2t)) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

Der zweite Weg ist etwas umständlicher.

§ 4 Der Satz von Gauß

Inhalt:

Gebiete mit stückweise glattem Rand, Satz von Gauß, Quelledichte und Divergenz, Kontinuitätsgleichung, Maxwellsche Gleichungen, Gaußsches Gesetz.

Wir wollen jetzt Gebiete im \mathbb{R}^3 betrachten, deren Rand lokal wie ein reguläres Flächenstück aussieht. Allerdings kann man normalerweise nicht erwarten, daß der gesamte Rand des Gebietes aus einem einzigen Flächenstück besteht.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ heißt *regulärer Randpunkt* von Ω , falls es eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) < 0\}$,
2. $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in U$.

Man kann dann zeigen, daß $U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$ ist. Die „Randfunktion“ h ist nicht eindeutig bestimmt. Sind h_1, h_2 zwei solche Randfunktionen, so gibt es eine Funktion $\lambda > 0$, so daß $h_2 = \lambda \cdot h_1$ auf U ist.

Definition:

Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ heißt ein *Gebiet mit stückweise glattem Rand*, falls es endlich viele semireguläre Flächenstücke S_1, \dots, S_N mit stückweise glattem Rand gibt, so daß gilt:

1. $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$.
2. Für $i \neq j$ ist $S_i \cap S_j = \emptyset$ oder der Durchschnitt setzt sich aus endlich vielen gemeinsamen freien Randkomponenten von S_i und S_j zusammen.
3. Für alle i ist jeder Punkt $\mathbf{x} \in \overset{\bullet}{S}_i$ ein regulärer Randpunkt von Ω .

Beispiel.

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Jordangebiet, $c \in \mathbb{R}$, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(\mathbf{x}) > c$ für alle $\mathbf{x} \in \overline{G}$. Dann ist

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G \text{ und } c < z < f(x, y)\}$$

ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Man kann das folgendermaßen sehen:

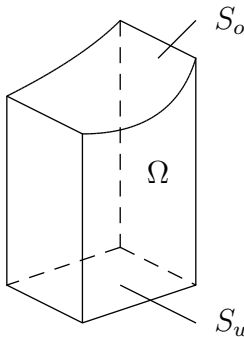
- $S_u := \{(x, y, c) : (x, y) \in \overline{G}\}$ ist der „Boden“ von Ω , mit der Parametrisierung $\varphi_u(u, v) = (u, v, c)$.
- $S_o := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \overline{G}\}$ ist der „Deckel“ von Ω mit der Parametrisierung $\varphi_o(u, v) := (u, v, f(u, v))$.
- Besteht ∂G aus den glatten Kurvenstücken C_1, \dots, C_N , so erhält man die Seitenflächen

$$S_\nu := \{(x, y, z) : (x, y) \in C_\nu \text{ und } c \leq z \leq f(x, y)\},$$

für $\nu = 1, \dots, N$. Ist $\alpha_\nu : [a_\nu, b_\nu] \rightarrow C_\nu$ eine Parametrisierung des ν -ten Kurvenstücks, so kann S_ν durch

$$\varphi_\nu(u, v) := (\alpha_\nu(u); v \cdot c + (1 - v) \cdot f(\alpha_\nu(u)))$$

parametrisiert werden, für $(u, v) \in [a_\nu, b_\nu] \times [0, 1]$.



Man kann leicht zeigen, daß alle Randpunkte auf $\overset{\bullet}{S}_u$, $\overset{\bullet}{S}_o$ und den $\overset{\bullet}{S}_i$ reguläre Randpunkte von Ω sind.

Sei jetzt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, durch $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$ sei die Zerlegung des Randes in semireguläre Flächenstücke gegeben. Für $\nu = 1, \dots, N$ sei $\varphi_\nu : \overline{G}_\nu \rightarrow S_\nu$ die Parametrisierung des ν -ten Randstückes. Dann sollen alle Punkte $\mathbf{x} \in \overset{\bullet}{S}_\nu = \varphi_\nu(\overline{G}_\nu)$ reguläre Randpunkte sein.

Wir wollen sehen, daß Ω in der Nähe eines regulären Randpunktes immer so ähnlich wie das obige Beispiel aussieht, und daß insbesondere in solchen Punkten auf eindeutige Weise eine innere und eine äußere Normale festgelegt werden kann.

Sei $\varphi : G \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines speziellen Randstückes, $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \in G$ und $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) := \varphi(\mathbf{u}_0) \in \overset{\bullet}{S}$. Da $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0) = 2$ ist, besitzt $J_\varphi(\mathbf{u}_0)$ eine nicht verschwindende 2-reihige Unterdeterminante.

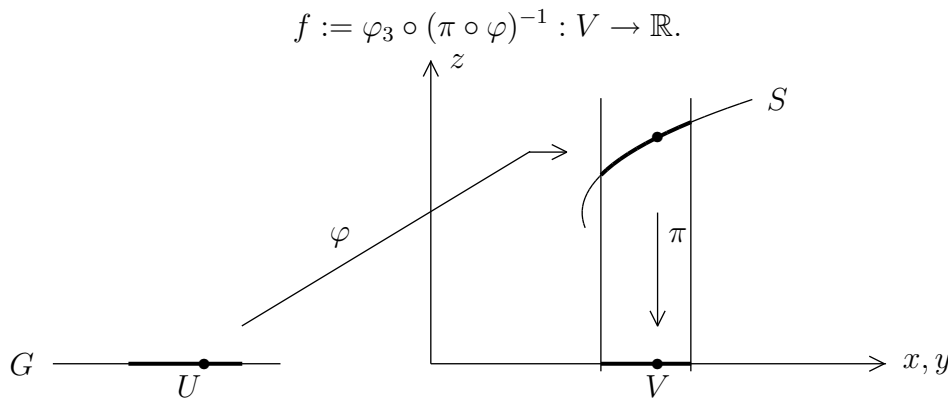
Wir nehmen an, es sei

$$\det \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u & (\varphi_1)_v \\ (\varphi_2)_u & (\varphi_2)_v \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } \mathbf{u}_0,$$

die anderen Fälle werden analog behandelt.

Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $\pi(x, y, z) := (x, y)$ definierte Projektion. Dann ist $\pi \circ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ und deshalb $\det J_{\pi \circ \varphi}(\mathbf{u}_0) \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gibt es Umgebungen $U = U(\mathbf{u}_0) \subset G$ und $V = V(\pi(\mathbf{x}_0)) \subset \mathbb{R}^2$, so daß $\pi \circ \varphi : U \rightarrow V$ bijektiv ist und eine differenzierbare Umkehrung besitzt. Nun sei



Behauptung: Für $(x, y, z) \in V \times \mathbb{R}$ gilt:

$$z = f(x, y) \iff \exists (u, v) \in U \text{ mit } (x, y, z) = \varphi(u, v).$$

BEWEIS: 1) Ist $(x, y) \in V$, so gibt es wegen der Bijektivität von $\pi \circ \varphi$ ein $(u, v) \in U$ mit $\pi \circ \varphi(u, v) = (x, y)$. Ist außerdem $z = f(x, y) = \varphi_3 \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x, y) = \varphi_3(u, v)$, so ist $\varphi(u, v) = (x, y, z)$.

2) Ist umgekehrt $(x, y) \in V$, $z \in \mathbb{R}$ und (x, y, z) das Bild eines Punktes $(u, v) \in U$ unter φ , so ist $(x, y) = \pi \circ \varphi(u, v)$ und $f(x, y) = \varphi_3 \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ (\pi \circ \varphi)(u, v) = \varphi_3(u, v) = z$. ■

S sieht also in der Nähe von \mathbf{x}_0 wie der Graph der Funktion f aus, und man kann zeigen, daß $h(x, y, z) := z - f(x, y)$ eine Randfunktion ist (eventuell muß man das Vorzeichen wechseln, damit h wirklich auf Ω negativ wird). Der Vektor

$$\mathbf{N} := \frac{\nabla h(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla h(\mathbf{x}_0)\|}$$

steht in \mathbf{x}_0 auf $\partial\Omega$ senkrecht. Jetzt sei $\varrho(t) := h(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{N})$. Dann ist $\varrho(0) = h(\mathbf{x}_0) = 0$ und $\varrho'(0) = \nabla h(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N} = \|\nabla h(\mathbf{x}_0)\| > 0$. Also wächst ϱ in der Nähe von $t = 0$ streng monoton. Daraus folgt: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\varrho(t) < 0$ (und damit $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{N} \in \Omega$) für $-\varepsilon < t < 0$ und $\varrho(t) > 0$ (und damit $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{N} \notin \Omega$) für $0 < t < \varepsilon$ ist. Deshalb heißt \mathbf{N} *äußerer (Einheits-)Normalenvektor* in \mathbf{x}_0 . Die innere Orientierung von S muß nun so gewählt werden, daß die zugehörige transversale Orientierung durch \mathbf{N} gegeben ist.

Bemerkungen.

1. Man kann zeigen, daß jeder Randpunkt von Ω auch Randpunkt von $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ist.
2. Weil der Rand von Ω lokal wie ein Graph aussieht, ist er eine Nullmenge. Daraus folgt, daß Ω meßbar ist.

Der Satz von Gauß

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und F ein Vektorfeld, das auf einer Umgebung von $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV_3 = \int_{\partial\Omega} F \bullet d\mathbf{O}.$$

Ist $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$, so ist $\int_{\partial\Omega} F \bullet d\mathbf{O} := \sum_{i=1}^N \int_{S_i} F \bullet d\mathbf{O}$.

Die *Divergenz* eines Vektorfeldes F ist im \mathbb{R}^3 definiert durch

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Zur Bedeutung der Divergenz kommen wir später.

BEWEIS: Der allgemeine Satz ist schwierig zu beweisen, wir beschränken uns auf den Fall

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \text{ und } c < z < f(x, y)\},$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Jordansches Gebiet und $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir übernehmen die Bezeichnungen von dem zu Anfang dieses Abschnittes behandelten Beispiel, setzen $C := C_1 \cup \dots \cup C_k = \partial G$ und $S := S_1 \cup \dots \cup S_k$. Dann ist $\partial\Omega = S_u \cup S_o \cup S$.

1. Schritt: Sei $F = (0, 0, u(x, y, z))$, mit einer stetig differenzierbaren Funktion u . Dann ist $\operatorname{div} F = \frac{\partial u}{\partial z}$ und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) \, dV_3 &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \, dV_3 \\ &= \int_G \left(\int_c^{f(x,y)} \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right) \, dx dy \\ &= \int_G [u(x, y, f(x, y)) - u(x, y, c)] \, dx dy. \end{aligned}$$

Die (äußere) Flächennormale zum Boden S_u ist $\mathbf{n}_u = (0, 0, -1)$. Also ist

$$\int_{S_u} F \bullet d\mathbf{O} = \int_G (0, 0, u(x, y, c)) \bullet (0, 0, -1) dx dy = - \int_G u(x, y, c) dx dy.$$

In jedem glatten Punkt der Seitenfläche S ist $\mathbf{n}_S = (a, b, 0)$, mit gewissen Zahlen a und b , also $F \bullet \mathbf{n}_S = 0$. Das Integral über die Seitenwände liefert keinen Beitrag.

Der Deckel S_o ist gegeben durch $z - f(x, y) = 0$, die (nicht normierte) Flächennormale

$$\mathbf{n}_o = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$$

zeigt nach oben. Dann ist

$$\int_{S_o} F \bullet d\mathbf{O} = \int_G (0, 0, u(x, y, f(x, y))) \bullet (-f_x, -f_y, 1) dx dy = \int_G u(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man die gewünschte Formel für das spezielle Vektorfeld.

2. Schritt: Jetzt sei $F(x, y, z) = (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), 0)$. Wir setzen

$$U_1(x, y, z) := - \int_c^z u_1(x, y, t) dt \quad \text{und} \quad U_2(x, y, z) := \int_c^z u_2(x, y, t) dt,$$

sowie $U_3 := (U_2)_y - (U_1)_x$. Dann können wir die Vektorfelder A und B definieren durch

$$A := (U_2, U_1, 0) \quad \text{und} \quad B := (0, 0, -U_3).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} A &= ((A_3)_y - (A_2)_z, (A_1)_z - (A_3)_x, (A_2)_x - (A_1)_y) \\ &= (-(U_1)_z, (U_2)_z, (U_1)_x - (U_2)_y) \\ &= (u_1, u_2, -U_3) = F + B. \end{aligned}$$

Weiter ist $(U_3)_z = ((U_2)_z)_y - ((U_1)_z)_x = (u_2)_y + (u_1)_x$, also

$$\mathbf{div} F = (u_1)_x + (u_2)_y = (U_3)_z = -\mathbf{div} B.$$

Weil $\partial\Omega$ eine geschlossene Fläche ist, ist $\int_{\partial\Omega} (\mathbf{rot} A) \bullet d\mathbf{O} = 0$, und daher

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \bullet d\mathbf{O} &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{rot} A - B) \bullet d\mathbf{O} \\ &= - \int_{\partial\Omega} B \bullet d\mathbf{O} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{div} B dV_3 \quad (\text{nach Schritt 1}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{div} F dV_3. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Eine stetige Funktion kennt man schon dann, wenn man ihr Integral über beliebige kleine Kugeln kennt. Das folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Hilfssatz

Sei f stetig auf dem Gebiet Ω .

Ist $\int_B f(\mathbf{x}) dV_3 = 0$ für jede Kugel $B \subset \Omega$, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$.

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Für kleines $\varepsilon > 0$ liegt die Kugel $B_\varepsilon = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ in Ω und es gibt ein $\mathbf{q}_\varepsilon \in B_\varepsilon$, so daß gilt:

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f(\mathbf{x}) dV_3 = f(\mathbf{q}_\varepsilon) \cdot v_3(B_\varepsilon).$$

Also ist

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(\mathbf{x}) dV_3 = 0.$$

Dieses Ergebnis wird zum Beispiel bei den Maxwell'schen Gleichungen beim Übergang von der Integral-Form zur differentiellen Form gebraucht (s.u.). Zunächst werden wir den Satz aber benutzen, um die Divergenz zu interpretieren.

Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet Ω , so nennen wir

$$\delta_F(\mathbf{x}_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} F \cdot d\mathbf{O}$$

die *Quelldichte* von F in \mathbf{x}_0 . Dabei bezeichnet B_ε wieder eine Kugel mit Radius ε um \mathbf{x}_0 . In der Umgebung einer „Quelle“ ist die Gesamtbilanz des Flusses von F durch die Kugeloberfläche (von innen nach außen) positiv, bei einer „Senke“ ist sie negativ. Nun ist aber

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} F \cdot d\mathbf{O} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} \mathbf{div} F(\mathbf{x}) dV_3 = \mathbf{div} F(\mathbf{x}_0).$$

Die Quelldichte ist also nichts anderes als die Divergenz.

Beispiel.

Wir betrachten die Strömung eines flüssigen oder gasförmigen Mediums. Das (zeitabhängige) Geschwindigkeitsfeld sei durch das Vektorfeld $F = F(\mathbf{x}, t)$ beschrieben, die Dichte des Mediums durch die Funktion $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$. Es

werde im Innern der Strömung weder Masse produziert noch vernichtet. Ist B ein kleines Gebiet, so wird durch

$$M(t) := \int_B \varrho(\mathbf{x}, t) dV_3$$

die Gesamtmasse in B zur Zeit t gegeben. Der Fluß des Mediums durch ein Flächenstück S wird durch das Integral $\int_S (\varrho \cdot F) \bullet d\mathbf{O}$ gegeben (Einheit = $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \cdot \text{Fläche} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}}$).

Ist der Fluß durch ∂B positiv, so nimmt die Masse im Innern ab! Also gilt die Gleichung

$$-M'(t) = \int_{\partial B} (\varrho \cdot F) \bullet d\mathbf{O}.$$

Unter Verwendung der Formel für die Differentiation von Parameterintegralen folgt:

$$-M'(t) = -\frac{d}{dt} \int_B \varrho(\mathbf{x}, t) dV_3 = -\int_B \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV_3.$$

Andererseits gilt wegen des Gaußschen Satzes:

$$\int_{\partial B} (\varrho \cdot F) \bullet d\mathbf{O} = \int_B \mathbf{div}(\varrho \cdot F) dV_3.$$

Mit dem Hilfssatz ergibt sich nun die berühmte *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{div}(\varrho \cdot F) = 0.$$

Zum Schluß wollen wir als Anwendung die *Maxwellschen Gleichungen* betrachten:

Das *Coulombsche Gesetz* besagt: Eine Ladungsverteilung erzeugt ein *elektrisches Feld* \mathbf{E} und verändert damit die Struktur des Raumes. Wird eine Probeladung q in das elektrische Feld gebracht, so wirkt auf q eine zu q proportionale Kraft in Richtung der Feldlinien. Diese Kraft kann man messen und so für jede stückweise glatte Kurve C die Arbeit

$$A(q, C) = \int_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{x}$$

ermitteln, die verrichtet wird, wenn q entlang C bewegt wird. In einem elektrostatischen Feld, also bei ruhender Ladungsverteilung, hängt das Integral nicht vom Verlauf der Kurve ab, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt, und sein Wert gibt die *Spannungsdifferenz* zwischen diesen Punkten wieder.

Die durch das elektrische Feld veränderte Struktur des Raumes wird durch die *elektrische Verschiebungsdichte* \mathbf{D} beschrieben. Der Unterschied zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} ist etwas schwer zu verstehen. Aus physikalischer Sicht unterscheiden sich die Felder

(im Vakuum) um eine Konstante, und sie werden in unterschiedlichen Einheiten gemessen. Außerdem beschreibt \mathbf{E} die Fernwirkung und \mathbf{D} die Nahwirkung des elektrischen Feldes. Aus mathematischer Sicht sind diese Unterschiede irrelevant. Allerdings ist zu beobachten, daß \mathbf{E} immer über Kurven integriert wird, während \mathbf{D} benutzt wird, um den Fluß des Feldes durch Flächenstücke zu messen. Das liegt daran, daß \mathbf{E} eigentlich eine 1-Form und \mathbf{D} eine 2-Form ist. Im Rahmen der Vorlesung können wir darauf nicht eingehen.

Ist in einem Gebiet Ω eine Ladungsverteilung durch eine Dichtefunktion ϱ gegeben, so besagt das sogenannte **Gaußsche Gesetz**:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\Omega} \varrho dV_3.$$

Zusammen mit dem Gaußschen Satz ergibt das für beliebige Gebiete Ω :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \varrho) dV_3 = 0.$$

Daraus folgt die *1. Maxwell'sche Gleichung*:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho.$$

Als nächstes nehmen wir an, daß ein Magnetfeld vorliegt. Man interessiert sich für den Fluß $\int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{O}$ der magnetischen Feldlinien durch Flächenstücke S . Das Vektorfeld \mathbf{B} nennt man die *magnetische Induktion*. Bewegt man eine Leiterschleife im Magnetfeld, so beobachtet man einen Spannungsstoß, der nach Faraday der negativen zeitlichen Änderung des Flusses durch diejenige Fläche entspricht, die von der Leiterschleife berandet wird. Auf Grund der Spannung fließt Strom, werden Ladungen entlang der Leiterschleife bewegt und es entsteht ein elektrisches Feld. Da man die Spannung auch als die beim Ladungstransport verrichtete Arbeit auffassen kann, gilt:

$$\int_{bS} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{O}.$$

Nach Stokes und wegen der eindeutigen Rekonstruierbarkeit der Vektorfelder aus ihren Flächenintegralen folgt das *Induktionsgesetz*, die *2. Maxwell'sche Gleichung*):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

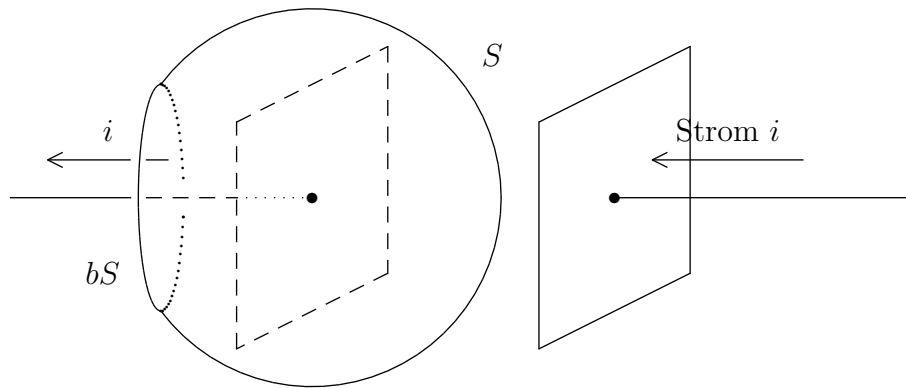
Da man außerdem noch nie magnetische Monopole (also magnetische Quellen) entdeckt hat, fordert man zusätzlich als *3. Maxwell'sche Gleichung*):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Fließt Strom durch eine Leiterschleife, so kann man beobachten, daß sich ein Magnetfeld um die Stromlinien herum aufbaut. Durch Integration der *magnetischen Erregung* \mathbf{H} über geschlossene Wege erhält man den Gesamtstrom durch die eingeschlossene Fläche. Ist die Stromverteilung durch eine (vektorielle) Dichtefunktion \mathbf{J} gegeben, die sogenannte *Stromdichte*, so ergibt sich der Gesamtstrom als Integral über die Stromdichte. Das ist das *Durchflutungsgesetz*

$$\int_{bS} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{O}.$$

Maxwell entdeckte als erster, daß das Gesetz so unvollständig ist und in gewissen Situationen zu Widersprüchen führt.



Wählt man die Fläche S wie im Bild, so ergibt das Integral $\int_{bS} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{x}$ den Gesamtstrom i , der durch den Leiter fließt. Aber das Integral auf der rechten Seite der Gleichung, $\int_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{O}$, verschwindet, denn zwischen den Kondensatorplatten fließt kein Strom.

Maxwell fand heraus, daß zur Stromdichte als Korrekturterm noch die zeitliche Änderung der elektrischen Verschiebungsdichte addiert werden muß:

$$\int_{bS} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \bullet d\mathbf{O}.$$

Mit dem Stokesschen Satz führt das zur 4. *Maxwellschen Gleichung*:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Wir wollen jetzt noch den Beweis des Gaußschen Gesetzes in einem besonders einfachen Fall nachtragen. Im Nullpunkt des \mathbb{R}^3 sei eine punktförmige Ladung q gegeben. Physikalische Überlegungen zeigen, daß das folgende elektrische Feld erzeugt wird:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi r^3} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{mit } r := \|\mathbf{x}\|).$$

Satz (Gaußsches Gesetz, mathematischer Teil)

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} = \begin{cases} 4\pi & \text{falls } \mathbf{0} \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{r^3}$. Im Falle $\Omega = B_1(\mathbf{0})$ haben wir das Integral schon früher berechnet.

1. Fall: $\mathbf{0} \notin \Omega$. In diesem Fall ist \mathbf{F} stetig differenzierbar auf Ω , und es ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, also

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV_3 = 0.$$

2. Fall: $\mathbf{0} \in \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \subset \Omega$ ist. Sei $\Omega' := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\mathbf{0})}$. Dann ist

$$0 = \int_{\partial\Omega'} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} - \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O},$$

also

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 4\pi \quad (\text{früher gezeigt}).$$

■

Als Folgerung ergibt sich nun:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O} = \frac{q}{4\pi} \cdot \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{0} \notin \Omega, \\ q & \text{falls } \mathbf{0} \in \Omega. \end{cases}$$

Das ist das Gaußsche Gesetz im Falle einer Punktladung.

§ 5 Krummlinige Koordinaten u. Tensoranalysis

Inhalt:

Orthogonale krummlinige Koordinaten, der Gradient in krummlinigen Koordinaten, Tensoren und Differentialformen, der Differentialformen-Kalkül, Divergenz und Rotation in krummlinigen Koordinaten, Integration über Differentialformen.

Achtung! Der Inhalt dieses Paragraphen wurde nur zu einem kleinen Teil in der Vorlesung behandelt und wird nicht Thema der Klausur sein.

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Durch $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ sei ein Diffeomorphismus von G auf ein anderes Gebiet $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Als Beispiel kann man sich etwa die Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = z$$

vorstellen. Hier ist $G = \{(r, \varphi, z) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$ und $\tilde{G} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0 \text{ und } z \text{ beliebig}\}$.

Die Parameter u, v, w (im Beispiel also r, φ, z) nennt man auch *krummlinige Koordinaten*. Man nennt sie *orthogonal*, falls die Gradienten $\nabla u, \nabla v$ und ∇w überall paarweise zueinander orthogonal sind (wobei u, v, w vermöge Φ^{-1} als Funktionen von x, y, z aufgefaßt werden).

Durch den Punkt $(u, v, w) = (c_1, c_2, c_3)$ gehen die drei Flächen $u = c_1, v = c_2$ und $w = c_3$. Auch sie treffen sich dort paarweise orthogonal. Je zwei der Flächen schneiden sich entlang einer Kurve, parametrisiert durch u, v oder w . Die Tangentialvektoren an diese Kurven in $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ sind die Vektoren

$$\mathbf{a}_u := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(\mathbf{c}), \quad \mathbf{a}_v := \frac{\partial \Phi}{\partial v}(\mathbf{c}) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_w := \frac{\partial \Phi}{\partial w}(\mathbf{c}).$$

Bei orthogonalen krummlinigen Koordinaten sind auch diese Tangentialvektoren paarweise zueinander orthogonal (und natürlich $\neq \mathbf{0}$). Dabei ist

$$\vec{a}_u = J_\Phi(\mathbf{c}) \cdot \vec{e}_1, \quad \vec{a}_v = J_\Phi(\mathbf{c}) \cdot \vec{e}_2 \quad \text{und} \quad \vec{a}_w = J_\Phi(\mathbf{c}) \cdot \vec{e}_3.$$

Setzen wir $h_1 := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|$, $h_2 := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|$ und $h_3 := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\|$, so bilden die Vektoren

$$\mathbf{e}_u := \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v := \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_w := \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w}$$

ein ON-System.

Im Beispiel ist $h_1 = 1$, $h_2 = r$ und $h_3 = 1$, also

$$\mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1).$$

Im allgemeinen ist

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w) \\ &= \det\left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \det J_\Phi, \end{aligned}$$

also $\det J_\Phi = h_1 h_2 h_3$.

Beispiel.

Wir betrachten die Kugelkoordinaten (räumliche Polarkoordinaten):

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta.$$

Die Fläche $r = c_1$ ist eine Sphäre, also zeigt $\nabla r(\mathbf{c})$ in Richtung des Vektors \mathbf{c} (radial nach außen). Die Fläche $\varphi = c_2$ ist eine Halbebene, die auf der x - y -Ebene senkrecht steht. Offensichtlich ist $\nabla \varphi(\mathbf{c})$ parallel zur x - y -Ebene und tangential zu der Sphäre durch \mathbf{c} , insbesondere orthogonal zu \mathbf{c} . Schließlich ist die Fläche $\theta = c_3$ ein zur z -Achse rotationssymmetrischer Kegel. Daher ist $\nabla \theta(\mathbf{c})$ orthogonal zu \mathbf{c} und liegt in der Halbebene $\varphi = c_2$ durch \mathbf{c} . Das bedeutet, daß die Kugelkoordinaten ein orthogonales System krummliniger Koordinaten bilden.

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta), \\ \mathbf{a}_\varphi &= (-r \sin \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \cos \theta, 0) \\ \text{und} \quad \mathbf{a}_\theta &= (-r \cos \varphi \sin \theta, -r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta). \end{aligned}$$

Daraus folgt: $h_1 = 1$, $h_2 = r \cos \theta$ und $h_3 = r$. Als Anwendung erhalten wir sehr viel einfacher als durch Determinantenberechnung:

$$\det J_\Phi = h_1 h_2 h_3 = r^2 \cos \theta.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta), \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ \text{und} \quad \mathbf{e}_\theta &= (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$

Man möchte nun gerne die Differentialoperatoren **grad**, **div** und **rot** in krummlinigen Koordinaten ausdrücken. Was heißt das?

Wir beginnen mit dem Gradienten. Sei f eine differenzierbare Funktion auf $\Phi(G)$. Dann ist $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ein Vektorfeld auf $\Phi(G)$ und $(\nabla f) \circ \Phi$ ein Vektorfeld auf G . Da die Felder \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v und \mathbf{e}_w in jedem Punkt von G eine ON-Basis bilden, kann man nach der Darstellung von $(\nabla f) \circ \Phi$ bezüglich dieser Basis fragen. Im Prinzip ist das einfach. Weil eine ON-Basis vorliegt, gilt für jedes Feld A :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e}_u)\mathbf{e}_u + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e}_v)\mathbf{e}_v + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e}_w)\mathbf{e}_w.$$

Wir müssen noch die Skalarprodukte ausrechnen. Nach Kettenregel ist

$$\begin{aligned} ((\nabla f) \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_u &= \frac{1}{h_1} \cdot ((\nabla f) \circ \Phi) \bullet \frac{\partial \Phi}{\partial u} \\ &= \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u}, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} ((\nabla f) \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_v &= \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v} \\ \text{und } ((\nabla f) \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_w &= \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial w}. \end{aligned}$$

Beispiele.

1. Im Falle der Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z)$ ist

$$(\nabla f) \circ \Phi = \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

2. Im Falle der Kugelkoordinaten $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, \theta)$ ist

$$(\nabla f) \circ \Phi = \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

Man beachte, daß die Kugelkoordinaten in der Literatur unterschiedlich definiert werden, und daß deshalb die obige Formel in der Literatur auch anders lauten kann.

Wir kommen jetzt zur Divergenz. Es sei ein differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3)$ auf $\Phi(G)$ gegeben. Dann ist $\mathbf{div}(F) = (F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z$ eine Funktion auf $\Phi(G)$ und $\mathbf{div}(F) \circ \Phi$ eine Funktion auf G . Wir wollen diese Funktion mit Hilfe von Ableitungen der Komponentenfunktionen $F_i \circ \Phi$ nach u , v und w beschreiben. Das auf dem direkten Wege durchzuführen, erweist sich als überraschend schwierig. Wir werden das später mit geeigneteren Methoden tun.

Ähnlich ergeht es einem bei der Rotation. Für ein Vektorfeld F auf $\Phi(G)$ soll $(\mathbf{rot} F) \circ \Phi$ als Linearkombination von \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v und \mathbf{e}_w dargestellt werden, mit Koeffizienten, die sich aus den Ableitungen der Funktionen $F_i \circ \Phi$ nach u , v und w zusammensetzen. Auch dies ist schwierig durchzuführen, wir werden es mit Hilfe von Differentialformen tun.

Ein *Tensor(feld)* k -ter Stufe ordnet jedem k -Tupel (A_1, \dots, A_k) von Vektorfeldern eine Funktion $T[A_1, \dots, A_k]$ zu, so daß gilt:

$$\begin{aligned} T[\dots, fA_i, \dots] &= f \cdot T[\dots, A_i, \dots] \text{ (für differenzierbare Funktionen } f), \\ T[\dots, A_i + B_i, \dots] &= T[\dots, A_i, \dots] + T[\dots, B_i, \dots]. \end{aligned}$$

Speziell ist eine k -Form ein *alternierender* Tensor k -ter Stufe, also ein Tensor mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$T[\dots, A_i, \dots, A_j, \dots] = -T[\dots, A_j, \dots, A_i, \dots].$$

Es gibt aber auch andere Tensoren. Ein beliebiger Tensor 2-ter Stufe ist durch eine Matrix

$$T_{ij} = T[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$$

gegeben. Ein Beispiel ist etwa der *Spannungstensor* in der Physik. Ein Tensor höherer Stufe ist der *Krümmungstensor* in der Riemannschen Geometrie.

Wir wollen jetzt Differentialformen näher betrachten. Auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ stehen uns folgende Sorten von Differentialformen zur Verfügung:

- Eine 0-Form ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf G .
- Eine 1-Form auf G ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion

$$\omega : G \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

die im zweiten Argument linear ist. Sie wirkt wie folgt auf Vektorfelder: Ist $A = (A_1, A_2, A_3)$ ein Vektorfeld auf G , so wird die Funktion $\omega[A]$ definiert durch

$$\omega[A](\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})).$$

Jedem (beliebig oft) differenzierbaren Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3)$ kann eine 1-Form ω_F zugeordnet werden, durch

$$\omega_F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := F(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}.$$

Insbesondere ist $\omega_F[A] = F \bullet A$. Das ist übrigens kein Spezialfall, weil jede 1-Form die Gestalt ω_F besitzt.

Speziell ist $df := \omega_{\nabla f}$ das totale Differential der Funktion f . Die Differentiale dx , dy und dz sind den konstanten Einheits-Vektorfeldern \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 zugeordnet, es ist

$$dx(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{v} = v_1, \quad dy(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_2 \quad \text{und} \quad dz(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_3.$$

Da eine lineare Abbildung durch ihre Werte auf den Einheitsvektoren festgelegt ist, besitzt jede 1-Form eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\omega = \omega_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

mit $F_i(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Integrationsweg, so setzt man

$$\int_{\alpha} \omega_F := \int_a^b \omega_F(\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_a^b F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt = \int_{\alpha} F \bullet d\mathbf{x}.$$

- Eine 2-Form auf G ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion

$$\Omega : G \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

die im zweiten und dritten Argument bilinear und alternierend ist, d.h., es gilt:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}), \\ \Omega(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \lambda \cdot \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \text{und} \quad \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= -\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Ω wirkt auf Vektorfelder A und B durch

$$\Omega[A, B](\mathbf{x}) := \Omega(\mathbf{x}, A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})).$$

Jedem (beliebig oft) differenzierbaren Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3)$ kann eine 2-Form Ω_F zugeordnet werden, durch

$$\Omega_F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \det(F(\mathbf{x}), \mathbf{v}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{x}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Dann ist $\Omega_F[A, B] = F \bullet (A \times B) = \det(F, A, B)$.

Sind ω und φ zwei 1-Formen, so wird die 2-Form $\omega \wedge \varphi$ (das „Dachprodukt“ von ω und φ) definiert durch

$$(\omega \wedge \varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - \omega(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Speziell ist

$$\begin{aligned}
(\omega_A \wedge \omega_B)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}) \cdot (B(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{w}) - (A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{w}) \cdot (B(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}) \\
&= (A(\mathbf{x}) \times B(\mathbf{x})) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
&= \Omega_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),
\end{aligned}$$

also

$$\omega_A \wedge \omega_B = \Omega_{A \times B}.$$

Man sieht unmittelbar:

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \varphi &= \omega_1 \wedge \varphi + \omega_2 \wedge \varphi, \\
(c \cdot \omega) \wedge \varphi &= c \cdot (\omega \wedge \varphi) \\
\text{und } \omega \wedge \varphi &= -\varphi \wedge \omega \quad (\text{und damit } \omega \wedge \omega = 0).
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
(dx \wedge dy)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= v_1 w_2 - v_2 w_1, \\
(dx \wedge dz)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= v_1 w_3 - v_3 w_1 \\
\text{und } (dy \wedge dz)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= v_2 w_3 - v_3 w_2.
\end{aligned}$$

Behauptung: $\Omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}
\Omega_F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= F(\mathbf{x}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
&= F_1(\mathbf{x}) \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + F_2(\mathbf{x}) \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) \\
&\quad + F_3(\mathbf{x}) \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
&= (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

■

Das Differential einer 1-Form $\omega_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ ist die 2-Form

$$\begin{aligned}
d\omega_F &:= dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz \\
&= ((F_1)_y dy + (F_1)_z dz) \wedge dx + ((F_2)_x dx + (F_2)_z dz) \wedge dy \\
&\quad + ((F_3)_x dx + (F_3)_y dy) \wedge dz \\
&= ((F_3)_y - (F_2)_z) dy \wedge dz + ((F_1)_z - (F_3)_x) dz \wedge dx \\
&\quad + ((F_2)_x - (F_1)_y) dx \wedge dy \\
&= \Omega_{\text{rot } F}.
\end{aligned}$$

Behauptung: f, g seien Funktionen, ω eine 1-Form. Dann gilt:

1. $d(f \cdot g) = f dg + g df$.
2. $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$.
3. $ddf = 0$.

BEWEIS: 1) $d(f \cdot g) = \omega_{\nabla(f \cdot g)} = \omega_{f \nabla g + g \nabla f} = f dg + g df$.

2) Sei $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(f \cdot \omega) &= d(f \cdot F_1) \wedge dx + d(f \cdot F_2) \wedge dy + d(f \cdot F_3) \wedge dz \\ &= (f \cdot dF_1 + F_1 \cdot df) \wedge dx + (f \cdot dF_2 + F_2 \cdot df) \wedge dy \\ &\quad + (f \cdot dF_3 + F_3 \cdot df) \wedge dz \\ &= f \cdot d\omega + df \wedge \omega. \end{aligned}$$

3) Wir schreiben hier dx_1, dx_2 und dx_3 an Stelle von dx, dy und dz . Dann ist

$$\begin{aligned} ddf &= d\left(\sum_{j=1}^3 f_{x_j} dx_j\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 df_{x_j} \wedge dx_j\right) \\ &= \sum_{i,j} f_{x_i x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i < j} (f_{x_i x_j} - f_{x_j x_i}) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0 \quad (\text{weil } f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \text{ ist}). \end{aligned}$$

■

Weil $ddf = d(\omega_{\nabla f}) = \Omega_{\text{rot}(\nabla f)}$ ist, folgt:

$$\mathbf{rot grad}(f) = \mathbf{0} \quad \text{für alle Funktionen } f.$$

Ist $\varphi : U \rightarrow G$ ein parametrisiertes Flächenstück, so setzt man

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \Omega_F &:= \int_U \Omega_F(\varphi(u, v), \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)) du dv \\ &= \int_U F(\varphi(u, v)) \bullet (\varphi_u \times \varphi_v) dudv = \int_{\varphi} F \bullet d\mathbf{O}. \end{aligned}$$

- Eine 3-Form auf G ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion

$$\Lambda : G \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

die im zweiten, dritten und vierten Argument multilinear und alternierend ist.

Da es auf dem \mathbb{R}^3 (bis auf einen konstanten Faktor) nur eine alternierende dreifache Multilinearform gibt (nämlich die Determinante), hat jede 3-Form die Gestalt

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{x}) \cdot \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

mit einer (beliebig oft) differenzierbaren Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben dies in der Form

$$\Lambda = f dx \wedge dy \wedge dz$$

und können deshalb das Dachprodukt dreier 1-Formen ω_A, ω_B und ω_C durch

$$\omega_A \wedge \omega_B \wedge \omega_C = \det(A, B, C) dx \wedge dy \wedge dz$$

definieren. Speziell ist $\omega_A \wedge \omega_B = (A \bullet B) dx \wedge dy \wedge dz$.

Das Differential einer 2-Form $\Omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$ ist die 3-Form

$$\begin{aligned} d\Omega_F &:= dF_1 \wedge dy \wedge dz + dF_2 \wedge dz \wedge dx + dF_3 \wedge dx \wedge dy \\ &= ((F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \mathbf{div}(F) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Jede alternierende 4-Form auf dem \mathbb{R}^3 muß verschwinden, weil die vier Argumente immer linear abhängig sind. Deshalb setzt man auch $d\Lambda = 0$ für jede 3-Form Λ .

Behauptung: Ist f eine Funktion und Ω eine 2-Form, und sind ω und φ 1-Formen, so gilt:

1. $d(f \cdot \Omega) = df \wedge \Omega + f \cdot d\Omega$.
2. $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi - \omega \wedge d\varphi$.
3. $dd\omega = 0$.

BEWEIS: 1) wird genauso wie bei 1-Formen bewiesen.

2) Wir betrachten nur den einfachen Fall $\omega = f dx_i$ und $\varphi = g dx_k$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= d(fg dx_i \wedge dx_k) \\ &= d(fg) \wedge dx_i \wedge dx_k \\ &= (f dg + g df) \wedge dx_i \wedge dx_k \\ &= (df \wedge dx_i) \wedge (g dx_k) + dg \wedge (f dx_i) \wedge dx_k \\ &= d\omega \wedge \varphi - \omega \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Für beliebige 1-Formen folgt's per Linearität.

3) Ist $\omega = \sum_{i=1}^3 F_i dx_i$, so ist

$$\begin{aligned}
dd\omega &= d\left(\sum_{i=1}^3 dF_i \wedge dx_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^3 d(dF_i \wedge dx_i) \\
&= \sum_{i=1}^3 ((ddF_i) \wedge dx_i - dF_i \wedge ddx_i) \quad (\text{nach (2)}) \\
&= 0 \quad (\text{weil } ddf = 0 \text{ f\u00fcr Funktionen gilt}).
\end{aligned}$$

■

Weil $dd\omega_F = d(\Omega_{\text{rot } F}) = \mathbf{div}(\text{rot } F) dx \wedge dy \wedge dz$ ist, folgt:

$$\mathbf{div}(\text{rot } F) = 0 \quad \text{f\u00fcr alle Vektorfelder } F.$$

Ist $\Phi : G \rightarrow \tilde{G}$ ein Diffeomorphismus, der krummlinige Koordinaten definiert (durch $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$), und $\Lambda = f dx \wedge dy \wedge dz$, so setzen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi} \Lambda &:= \int_G \Lambda(\Phi(u, v, w), \Phi_u, \Phi_v, \Phi_w) du dv dw \\
&= \int_G f(\Phi(u, v, w)) \det J_{\Phi}(u, v, w) du dv dw \\
&= \pm \int_{\tilde{G}} f(x, y, z) dx dy dz,
\end{aligned}$$

je nach Vorzeichen der Funktionaldeterminante.

Man kann auch jeder 3-Form $\Lambda = f dx \wedge dy \wedge dz$ auf \tilde{G} die 3-Form $\Phi^*\Lambda$ auf G zuordnen, durch

$$\begin{aligned}
\Phi^*\Lambda &:= (f \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \wedge d\Phi_3 \\
&= (f \circ \Phi) \cdot J_{\varphi} du \wedge dv \wedge dw.
\end{aligned}$$

Dann ist $\int_G \Phi^*\Lambda = \int_{\Phi} \Lambda$.

Ist $\Omega = \Omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$ eine 2-Form auf \tilde{G} , so definiert man die 2-Form $\Phi^*\Omega$ auf G durch

$$\Phi^*\Omega := (F_1 \circ \Phi) d\Phi_2 \wedge d\Phi_3 + (F_2 \circ \Phi) d\Phi_3 \wedge d\Phi_1 + (F_3 \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge d\Phi_2.$$

Ist $\omega = \omega_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ eine 1-Form auf \tilde{G} , so definiert man die 1-Form $\Phi^*\omega$ auf G durch

$$\Phi^*\omega := (F_1 \circ \Phi) d\Phi_1 + (F_2 \circ \Phi) d\Phi_2 + (F_3 \circ \Phi) d\Phi_3.$$

Es folgt dann, da\u00df $\Phi^*\omega \wedge \Phi^*\varphi = \Phi^*(\omega \wedge \varphi)$ ist.

Schließlich sei $\Phi^*(f) := f \circ \Phi$ für jede differenzierbare Funktion f .

Behauptung: Für jede Differentialform ψ ist $d(\Phi^*\psi) = \Phi^*(d\psi)$.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \Phi^*(df) &= \sum_{i=1}^3 (f_{x_i} \circ \Phi) d\Phi_i \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 (f_{x_i} \circ \Phi) \cdot ((\Phi_i)_{u_k}) \right) du_k \\ &= \sum_{k=1}^3 (f \circ \Phi)_{u_k} du_k \\ &= d(f \circ \Phi) = d(\Phi^*f), \end{aligned}$$

also z.B.

$$\begin{aligned} d(\Phi^*(f dx_i)) &= d((f \circ \Phi) d\Phi_i) \\ &= d(f \circ \Phi) \wedge d\Phi_i + (f \circ \Phi) dd\Phi_i \\ &= \Phi^*(df) \wedge \Phi^*(dx_i) \\ &= \Phi^*(df \wedge dx_i) = \Phi^*(d(f dx_i)). \end{aligned}$$

Für 2-Formen folgt die Behauptung auf ähnliche Weise. ■

Wir kehren nun zurück zu unseren orthogonalen krummlinigen Koordinaten. Es sei $(x_1, x_2, x_3) = \Phi(u_1, u_2, u_3)$, sowie

$$h_i = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right\| \text{ und } \mathbf{e}_{u_i} = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

Außerdem sei $f = f(x_1, x_2, x_3)$ eine differenzierbare Funktion und $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein differenzierbares Vektorfeld im (x_1, x_2, x_3) -Raum. Dann gilt:

Satz (Differentialformen in krummlinigen Koordinaten)

1. Es ist $\mathbf{F} \circ \Phi = \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_i \mathbf{e}_{u_i}$, mit $\tilde{F}_i = (\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_{u_i}$.

2. Für $\omega_{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^3 F_i dx_i$ ist $\Phi^*(\omega_{\mathbf{F}}) = \sum_{j=1}^3 (\tilde{F}_j h_j) du_j$.

3. Für $\Omega_{\mathbf{F}} = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$ ist

$$\Phi^*(\Omega_{\mathbf{F}}) = (\tilde{F}_1 h_2 h_3) du_2 \wedge du_3 + (\tilde{F}_2 h_3 h_1) du_3 \wedge du_1 + (\tilde{F}_3 h_1 h_2) du_1 \wedge du_2.$$

4. Es ist $\Phi^*(f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = (f \circ \Phi) h_1 h_2 h_3 du_1 \wedge du_2 \wedge du_3$.

BEWEIS: Wir müssen nur noch die Formeln für $\Phi^*(\omega_{\mathbf{F}})$ und $\Phi^*(\Omega_{\mathbf{F}})$ beweisen.

a) Es ist

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega_{\mathbf{F}}) &= \Phi^*\left(\sum_{i=1}^3 F_i dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (F_i \circ \Phi) d\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (F_i \circ \Phi) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} du_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 (F_i \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right) du_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left((\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right) du_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (\tilde{F}_j h_j) du_j. \end{aligned}$$

b) Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\Phi^*(dx_1 \wedge dx_2) &= d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_j} du_i \wedge du_j \\
&= \sum_{i<j} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_j} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_j} \right] du_i \wedge du_j \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right)_3 du_i \wedge du_j,
\end{aligned}$$

und analog $\Phi^*(dx_2 \wedge dx_3) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right)_1 du_i \wedge du_j$

und $\Phi^*(dx_3 \wedge dx_1) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right)_2 du_i \wedge du_j$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\Omega_{\mathbf{F}}) &= (F_1 \circ \Phi) \Phi^*(dx_2 \wedge dx_3) + (F_2 \circ \Phi) \Phi^*(dx_3 \wedge dx_1) + (F_3 \circ \Phi) \Phi^*(dx_1 \wedge dx_2) \\
&= \sum_{i<j} (\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right) du_i \wedge du_j \\
&= \sum_{i<j} h_i h_j (\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet (\mathbf{e}_{u_i} \times \mathbf{e}_{u_j}) du_i \wedge du_j \\
&= \sum_{\substack{i<j \\ \text{sign}(k,i,j)=1}} h_i h_j ((\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_{u_k}) du_i \wedge du_j \\
&= (\tilde{F}_1 h_2 h_3) du_2 \wedge du_3 + (\tilde{F}_2 h_3 h_1) du_3 \wedge du_1 + (\tilde{F}_3 h_1 h_2) du_1 \wedge du_2.
\end{aligned}$$

■

Daraus ergeben sich nun Formeln für **div** und **rot** in krummlinigen Koordinaten:

Divergenz in krummlinigen Koordinaten

Es ist

$$(\mathbf{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (\tilde{F}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (\tilde{F}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (\tilde{F}_3 h_1 h_2) \right].$$

BEWEIS: Es ist

$$\Phi^*(\mathbf{div} \mathbf{F} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = ((\mathbf{div} \mathbf{F}) \circ \Phi) h_1 h_2 h_3 du_1 \wedge du_2 \wedge du_3,$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\mathbf{div} \mathbf{F} \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) &= \Phi^*(d\Omega_F) = d(\Phi^*\Omega_F) \\
&= d\left((\tilde{F}_1 h_2 h_3) \, du_2 \wedge du_3 + (\tilde{F}_2 h_3 h_1) \, du_3 \wedge du_1 + (\tilde{F}_3 h_1 h_2) \, du_1 \wedge du_2\right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\tilde{F}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\tilde{F}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\tilde{F}_3 h_1 h_2) \right] \, du_1 \wedge du_2 \wedge du_3.
\end{aligned}$$

■

Rotation in krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi &= \\
&= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(\tilde{F}_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(\tilde{F}_2 h_2) \right] \mathbf{e}_{u_1} + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3}(\tilde{F}_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(\tilde{F}_3 h_3) \right] \mathbf{e}_{u_2} \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\tilde{F}_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(\tilde{F}_1 h_1) \right] \mathbf{e}_{u_3}.
\end{aligned}$$

BEWEIS: Es sei

$$(\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi = \sum_{i=1}^3 \tilde{R}_i \mathbf{e}_{u_i}.$$

Dann ist

$$\Phi^*(\Omega_{\mathbf{rot} \mathbf{F}}) = (\tilde{R}_1 h_2 h_3) \, du_2 \wedge du_3 + (\tilde{R}_2 h_3 h_1) \, du_3 \wedge du_1 + (\tilde{R}_3 h_1 h_2) \, du_1 \wedge du_2$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\Omega_{\mathbf{rot} \mathbf{F}}) &= \Phi^*(d\omega_{\mathbf{F}}) = d(\Phi^*\omega_{\mathbf{F}}) \\
&= d\left(\sum_{j=1}^3 (\tilde{F}_j h_j) \, du_j\right) \\
&= d\omega_{(\tilde{F}_1 h_1, \tilde{F}_2 h_2, \tilde{F}_3 h_3)} \\
&= \Omega_{\mathbf{rot}(\tilde{F}_1 h_1, \tilde{F}_2 h_2, \tilde{F}_3 h_3)},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}(\tilde{F}_1 h_1, \tilde{F}_2 h_2, \tilde{F}_3 h_3) &= \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u_2}(\tilde{F}_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(\tilde{F}_2 h_2), \frac{\partial}{\partial u_3}(\tilde{F}_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(\tilde{F}_3 h_3), \frac{\partial}{\partial u_1}(\tilde{F}_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(\tilde{F}_1 h_1) \right).
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das gewünschte Ergebnis. ■

Der Vollständigkeit halber soll noch an die Formel für den Gradienten erinnert werden:

$$(\mathbf{grad} f) \circ \Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} (f \circ \Phi) \mathbf{e}_{u_i}.$$

Beispiele.

1. Zylinderkoordinaten r, φ, z (mit $h_1 = 1, h_2 = r$ und $h_3 = 1$):

$$(\mathbf{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_2) + \frac{\partial}{\partial z} (r \tilde{F}_3) \right].$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_r = (F_1 \circ \Phi) \cos \varphi + (F_2 \circ \Phi) \sin \varphi, \\ \tilde{F}_2 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_\varphi = -(F_1 \circ \Phi) \sin \varphi + (F_2 \circ \Phi) \cos \varphi \\ \text{und } \tilde{F}_3 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \bullet \mathbf{e}_z = F_3. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_3) - \frac{\partial}{\partial z} (r \tilde{F}_2) \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\tilde{F}_1) - \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{F}_3) \right] \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_2) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_1) \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

2. Kugelkoordinaten r, φ, θ (mit $h_1 = 1, h_2 = r \cos \theta$ und $h_3 = r$):

$$(\mathbf{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = \frac{1}{r^2 \cos \theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{F}_1 \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \tilde{F}_2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \tilde{F}_3 \cos \theta) \right],$$

und

$$(\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi = \sum_{i=1}^3 \tilde{R}_i \mathbf{e}_{u_i}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \frac{1}{r^2 \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (r \tilde{F}_3) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \tilde{F}_2 \cos \theta) \right] \\ &= \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_3) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{F}_2 \cos \theta) \right], \\ \tilde{R}_2 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{F}_1) - \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_3) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{F}_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_3), \\ \tilde{R}_3 &= \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_2 \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_1) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_2) - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_1). \end{aligned}$$

Zum Schluß noch ein paar Worte zur Integration von Differentialformen:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^k$ ein abgeschlossener Quader, $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $S := \varphi(Q)$ (k -dimensionale Fläche). $bS := \varphi(\partial Q)$ heißt der Rand von S .

Ist ω eine k -Form auf einer Umgebung von S , so definiert man die k -Form $\varphi^*\omega$ auf Q durch

$$\varphi^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \omega(\varphi(\mathbf{x}), D\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \dots, D\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k)).$$

Man braucht das hier nur für $n = 3$ und $k \in \{1, 2, 3\}$ zu verstehen.

Wir setzen

$$\int_S \omega := \int_Q \varphi^*\omega,$$

mit

$$\int_Q f du_1 \wedge \dots \wedge du_k := \int_Q f(\mathbf{x}) dV_k.$$

Dann kann man zeigen:

(Allgemeiner) Satz von Stokes

Ist ω eine $(k - 1)$ -Form auf einer Umgebung von S , so ist

$$\int_S d\omega = \int_{bS} \omega.$$

Wir kennen viele Spezialfälle:

- $k = 1$ und n beliebig: Ist C eine Kurve und f eine Funktion, so ist

$$\int_C df = f(\mathbf{x}_E) - f(\mathbf{x}_A).$$

Ist auch noch $n = 1$, so ist dies der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

- $k = 2$ und $n = 2$: Ist $\omega = f dx + g dy$, so ist $d\omega = (g_x - f_y) dx \wedge dy$. So erhält man den Satz von Green:

$$\int_Q (g_x - f_y) dx dy = \int_{\partial Q} (f dx + g dy).$$

- $k = 2$ und $n = 3$: Ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$, so ist $d\omega = \Omega_{\text{rot } \mathbf{F}}$. Das liefert den klassischen Satz von Stokes:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

- $k = 3$ und $n = 3$: Hier ist $\omega = \Omega_{\mathbf{F}}$ und daher $d\omega = (\text{div } \mathbf{F}) dx \wedge dy \wedge dz$. In diesem Fall erhält man den Gaußschen Satz:

$$\int_Q (\text{div } \mathbf{F}) dV_3 = \int_{\partial Q} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.$$