

---

# Kapitel VII

## Analysis 3

### §1 Orthogonale Funktionensysteme

In diesem Abschnitt untersuchen wir Orthonormalsysteme im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen.

#### Definition:

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine komplexwertige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *meßbar*, falls  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  meßbar sind. Dann definiert man:

$$\mathcal{L}^p(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ meßbar und } |f|^p \text{ integrierbar}\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{L}^p(I)$  nennt man  *$L^p$ -Funktionen*, und

$$\|f\|_p := \left( \int_I |f|^p d\mu_1 \right)^{1/p}$$

nennt man  *$L^p$ -Norm*.

Im Falle  $p = 2$  spricht man speziell von *quadratintegrierbaren* Funktionen.

#### Beispiel:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ liegt in } \mathcal{L}^1([0, 1]), \text{ aber nicht in } \mathcal{L}^2([0, 1]).$$

Die Elemente von  $\mathcal{L}^1(I)$  sind gerade die (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen auf  $I$ :

Ist  $f$  reell, so ist das mehr oder weniger klar. Ist  $f$  komplexwertig und integrierbar, so sind auch  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  integrierbar.  $|f|$  ist dann meßbar, und wegen  $|f| \leq |\operatorname{Re}(f)| + |\operatorname{Im}(f)|$  ist  $|f|$  auch integrierbar. Ist umgekehrt  $f$  meßbar und  $|f|$  integrierbar, so beachte man, daß  $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$  und  $|\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$  ist. Dann folgt, daß  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  und damit auch  $f$  integrierbar ist.

#### Summe und Produkt von quadratintegrierbaren Funktionen

$f_1, f_2$  seien Elemente von  $\mathcal{L}^2(I)$ . Dann gilt:

$$\|f_1 \cdot f_2\|_1 \leq \frac{1}{2}[(\|f_1\|_2)^2 + (\|f_2\|_2)^2], \quad f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{L}^1(I) \quad \text{und} \quad f_1 \pm f_2 \in \mathcal{L}^2(I).$$

BEWEIS: Es ist

$$0 \leq (|f_1| - |f_2|)^2 = |f_1|^2 - 2|f_1 \cdot f_2| + |f_2|^2,$$

also

$$|f_1 \cdot f_2| \leq \frac{1}{2} \cdot (|f_1|^2 + |f_2|^2).$$

Das liefert die gewünschte Ungleichung und damit auch:

Mit  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^2(I)$  liegt  $f_1 \cdot f_2$  in  $\mathcal{L}^1(I)$ .

Wegen  $|\overline{f_2}|^2 = |f_2|^2$  ist auch  $\overline{f_2}$  quadratintegabel, und  $\operatorname{Re}(f_1 \cdot \overline{f_2})$  und  $\operatorname{Im}(f_1 \cdot \overline{f_2})$  liegen in  $\mathcal{L}^1(I)$ . Außerdem haben wir die Gleichung

$$|f_1 \pm f_2|^2 = (f_1 \pm f_2) \cdot (\overline{f_1 \pm f_2}) = |f_1|^2 \pm 2\operatorname{Re}(f_1 \cdot \overline{f_2}) + |f_2|^2.$$

Das zeigt, daß  $f_1 \pm f_2$  quadratintegabel ist. □

Es folgt, daß  $\mathcal{L}^2(I)$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist.

### Definition:

Für  $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$  sei

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Das „Skalarprodukt“  $\langle f, g \rangle$  ist  $\mathbb{R}$ -bilinear, und es gilt:

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

Insbesondere ist dann  $\langle c \cdot f, g \rangle = c \cdot \langle f, g \rangle$  und  $\langle f, c \cdot g \rangle = \overline{c} \cdot \langle f, g \rangle$ , sowie

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}.$$

### Eigenschaften der $L^2$ -Norm

1.  $\|c \cdot f\|_2 = |c| \cdot \|f\|_2$ .
2.  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$  (Dreiecksungleichung).
3.  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$  (Schwarzsche Ungleichung).
4.  $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$  (Hölder-Ungleichung).

BEWEIS: 1) ist trivial.

3) Die Schwarzsche Ungleichung folgt aus der Hölder-Ungleichung, denn es ist

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int_I f \overline{g} d\mu_1 \right| \leq \int_I |f \cdot g| d\mu_1 = \|f \cdot g\|_1.$$

2) Die Dreiecksungleichung erhält man auch mit Hilfe der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 (\|f + g\|_2)^2 &= \int_I (f + g)(\bar{f} + \bar{g}) \, d\mu_1 \\
 &\leq \int_I |f(\bar{f} + \bar{g}) + g(\bar{f} + \bar{g})| \, d\mu_1 \\
 &\leq \int_I |f(\bar{f} + \bar{g})| \, d\mu_1 + \int_I |g(\bar{f} + \bar{g})| \, d\mu_1 \\
 &= \|f \cdot (f + g)\|_1 + \|g \cdot (f + g)\|_1 \\
 &\leq \|f\|_2 \cdot \|f + g\|_2 + \|g\|_2 \cdot \|f + g\|_2 \\
 &= \|f + g\|_2 \cdot (\|f\|_2 + \|g\|_2).
 \end{aligned}$$

Es bleibt, die Hölder-Ungleichung (4) selbst zu zeigen:

Ist  $\|f\|_2 = 0$ , so ist  $f = 0$  fast überall, und es ist nichts zu zeigen. Das gleiche gilt, wenn  $\|g\|_2 = 0$  ist. Wir können also annehmen, daß  $\|f\|_2 > 0$  und  $\|g\|_2 > 0$  ist, und wir setzen

$$u := \frac{f}{\|f\|_2} \quad \text{und} \quad v := \frac{g}{\|g\|_2}.$$

Dann liegen auch  $u$  und  $v$  in  $\mathcal{L}^2(I)$ , und wegen  $|u \cdot v| \leq \frac{|u|^2 + |v|^2}{2}$  ist

$$\|u \cdot v\|_1 \leq \frac{1}{2}((\|u\|_2)^2 + (\|v\|_2)^2) = 1,$$

also  $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ . □

Man beachte, daß  $\|f\|_2$  keine echte Norm ist! Ist nämlich  $\|f\|_2 = 0$ , so folgt nur, daß  $f = 0$  fast überall gilt.  $f$  braucht nicht die Nullfunktion zu sein. Diese Schwierigkeit wird in der Literatur meist dadurch beseitigt, daß man nicht mit einzelnen Funktionen arbeitet, sondern mit Klassen von Funktionen, wobei sich die Elemente einer Klasse höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden dürfen.

Im Folgenden bezeichne  $\|\dots\|$  immer die  $L^2$ -Norm.

### Definition:

Zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$  heißen *orthogonal* zueinander, falls  $\langle f, g \rangle = 0$  ist.

### Satz des Pythagoras

Ist  $\langle f, g \rangle = 0$ , so ist  $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ .

Der *Beweis* erfolgt fast genauso wie im Falle des euklidischen Skalarproduktes im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\
 &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\
 &= \|f\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\
 &= \|f\|^2 + \|g\|^2.
 \end{aligned}$$

**Definition:**

Eine (abzählbare) Teilmenge  $\mathcal{S} = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathcal{L}^2(I)$  heißt ein *ON-System*, falls gilt:

1.  $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$  für  $n \neq m$ .
2.  $\|\varphi_n\| = 1$  für alle  $n$ .

Es sei daran erinnert, daß eine unendliche Teilmenge  $B$  eines Vektorraumes  $V$  linear unabhängig heißt, wenn jede beliebige endliche Auswahl von Elementen von  $B$  linear unabhängig ist.

**Orthonormalsysteme sind linear unabhängig**

Ist  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2(I)$  ein ON-System, so ist  $\mathcal{S}$  linear unabhängig.

BEWEIS: Sei  $I \subset \mathbb{N}$  endlich und  $0 = \sum_{i \in I} c_i \varphi_i$ . Dann folgt:

$$0 = \left\langle \sum_{i \in I} c_i \varphi_i, \varphi_j \right\rangle = \sum_{i \in I} c_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \sum_{i \in I} c_i \delta_{ij} = c_j,$$

für  $j \in I$ . Damit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt. □

Wir werden jetzt einige Beispiele von ON-Systemen betrachten.

**Das trigonometrische System (T)**

Sei  $I = [-\pi, \pi]$ . Dann bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} g_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ g_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \quad \text{für } n \geq 1 \\ \text{und } h_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt) \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

ein ON-System in  $\mathcal{L}^2(I)$ .

BEWEIS: Wir betrachten zunächst die Funktionen  $1$ ,  $\cos(nt)$  und  $\sin(nt)$ . Dabei benutzen wir die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \text{und } \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta). \end{aligned}$$

1) Es ist  $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$ .

$$2) \langle 1, \cos(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt = \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$3) \langle 1, \sin(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt = -\frac{\cos(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

4) Wegen  $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$  ist

$$\begin{aligned} \langle \sin(nt), \cos(mt) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)t) dt \\ &= 0 \quad \text{für beliebiges } n \text{ und } m. \end{aligned}$$

5) Wegen  $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$  ist

$$\begin{aligned} \langle \cos(nt), \cos(mt) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t) dt \\ &= \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

6) Wegen  $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  ist

$$\begin{aligned} \langle \sin(nt), \sin(mt) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t) dt \\ &= \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das gewünschte Ergebnis kann man nun direkt ablesen. □

### Das komplexe trigonometrische System (E)

Sei  $I = [-\pi, \pi]$ . Dann bilden die Funktionen

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{jnt}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ein ON-System in  $\mathcal{L}^2(I)$ .

BEWEIS: Es ist

$$\langle e^{jnt}, e^{jmt} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-m)t} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Rechnen im Komplexen ist erheblich einfacher! □

Schließlich wollen wir noch ein ganz anderes System betrachten:

**Definition:**

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \text{ heißt Legendre-Polynom der Ordnung } n.$$

Es ist

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 1)' = x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{8}[(x^2 - 1)^2]'' = \frac{1}{8}[4x^3 - 4x]' \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{8 \cdot 6}[(x^2 - 1)^3]''' = \frac{1}{8}[x(x^2 - 1)^2]'' \\ &= \frac{1}{8}[x^5 - 2x^3 + x]'' = \frac{1}{8}[5x^4 - 6x^2 + 1]' \\ &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned}$$

Allgemein ist  $\text{grad}(P_n(x)) = n$ , und es gilt:

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq \frac{n-m}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} (n-2k) \dots (n-2k-m+1) x^{n-2k-m}$$

$$\text{und speziell} \quad P_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

BEWEIS dazu: Es ist

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2n-2k} \right] \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-2k)(2n-2k-1) \dots (n-2k+1) x^{n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P_n^{(m)}(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} (x^{n-2k})^{(m)} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq \frac{n-m}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} (n-2k) \dots (n-2k-m+1) x^{n-2k-m}. \end{aligned}$$

Setzt man  $m = n$ , so ist  $\frac{n-m}{2} = 0$ , und man erhält:

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} n! = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

### Leibniz-Formel für höhere Ableitungen

Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils  $n$ -mal differenzierbar, so ist

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

BEWEIS: Man sieht sofort, daß mit  $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$  und  $(f \cdot g)'' = f \cdot g'' + 2 \cdot f' \cdot g' + f'' \cdot g$  die Formel für  $n = 1$  und  $n = 2$  erfüllt ist. Die allgemeine Aussage folgt durch Induktion, ähnlich wie bei der binomischen Formel.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)} &= (f \cdot g' + f' \cdot g)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\ &= f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

□

Damit kann man zeigen:

### Hilfssatz 1

Für  $m < n$  gibt es ein Polynom  $Q_m(x)$ , so daß gilt:

$$[(x^2 - 1)^n]^{(m)} = (x^2 - 1)^{n-m} \cdot Q_m(x).$$

Außerdem ist

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \left( (x+1)^n + (x-1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k} (x-1)^k \right),$$

also  $P_n(1) = 1$  und  $P_n(-1) = (-1)^n$ .

BEWEIS: Für  $1 \leq m \leq n$  ist

$$[(x^2 - 1)^n]^{(m)} = [(x+1)^n \cdot (x-1)^n]^{(m)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [(x+1)^n]^{(k)} \cdot [(x-1)^n]^{(m-k)} \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x+1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{(n-m+k)!} (x-1)^{n-m+k}.
\end{aligned}$$

Ist  $m < n$  und  $0 \leq k \leq m$ , so ist  $n-k \geq n-m$  und  $n-m+k \geq n-m$ . Also kann man einen Faktor  $(x^2-1)^{n-m}$  herausziehen.

Ist  $m = n$ , so erhält man die Formel

$$\begin{aligned}
[(x^2-1)^n]^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!} (x+1)^{n-k} (x-1)^k \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k} (x-1)^k \\
&= n! \cdot \left( (x+1)^n + (x-1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k} (x-1)^k \right).
\end{aligned}$$

Jetzt sieht man sofort:  $P_n(1) = 1$  und  $P_n(-1) = (-1)^n$ . □

### Hilfssatz 2

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

BEWEIS: Wir benutzen die Zerlegung  $(1-t^2)^n = (1+t)^n \cdot (1-t)^n$  und partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{n+1} (1+t)^{n+1} \right]' (1-t)^n dt \\
&= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+1} (1-t)^{n-1} dt \\
&= \dots \\
&= \frac{n!}{(n+1)(n+2) \cdots 2n} \int_{-1}^1 (1+t)^{2n} (1-t)^0 dt \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2n+1} (1+t)^{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

□



### Folgerung 1

Ist  $f$  auf  $I$   $m$ -mal differenzierbar, so ist

$$\langle f, P_m \rangle = \frac{1}{2^m m!} (-1)^m \int_{-1}^1 f^{(m)}(t) (t^2 - 1)^m dt.$$

BEWEIS: Wieder verwenden wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} \langle f, P_m \rangle &= \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 f(t) [(t^2 - 1)^m]^{(m)} dt \\ &= \frac{1}{2^m m!} \left( (f(t) \cdot [(t^2 - 1)^m]^{(m-1)}) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(t) [(t^2 - 1)^m]^{(m-1)} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 f'(t) [(t^2 - 1)^m]^{(m-1)} dt \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2^m m!} (-1)^m \int_{-1}^1 f^{(m)}(t) (t^2 - 1)^m dt. \end{aligned}$$

□

### Folgerung 2

Ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $< m$ , so ist  $\langle f, P_m \rangle = 0$ .

BEWEIS: Klar, denn es ist  $f^{(m)}(t) \equiv 0$ .

□

## Die Orthogonalität der Legendre-Polynome

$$\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Ist  $n \neq m$ , so kann man o.B.d.A. annehmen, daß  $n < m$  ist. Da  $P_n$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist, ergibt sich die Beziehung  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$  aus Folgerung 2.

Weiter gilt nach Folgerung 1 :

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_n \rangle &= \frac{1}{2^n n!} (-1)^n \int_{-1}^1 P_n^{(n)}(t) (t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{1}{2^n n!} (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{(2n)!}{2^n n!} (t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

□

### Das Legendre-System (L)

Die Funktionen

$$F_n(x) := \sqrt{n + \frac{1}{2}} \cdot P_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

bilden ein ON-System im Raum  $\mathcal{L}^2([-1, 1])$ . Sie entstehen durch Orthonormalisierung aus den Polynomen  $1, x, x^2, x^3, \dots$

**BEWEIS:** Der erste Teil der Behauptung ist klar, wir haben alles nötige dafür schon gezeigt.

Sei nun  $V_n$  der von den (linear unabhängigen) Polynomen  $1, x, x^2, \dots, x^n$  erzeugte Untervektorraum von  $V := \mathcal{L}^2([-1, 1])$ . Offensichtlich ist  $\dim(V_n) = n + 1$ , und die Funktionen  $F_0, F_1, \dots, F_n$  liegen alle in  $V_n$ . Da sie als Elemente eines ON-Systems linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von  $V_k$ .

Es gibt aber nur ein Funktionensystem, das diese Eigenschaften besitzt, nämlich das, das aus  $1, x, x^2, \dots$  durch Orthonormalisierung entsteht. □

Nachdem nun gezeigt wurde, daß es genügend viele Beispiele für ON-Systeme gibt, wollen wir untersuchen, wozu sie gut sind.

Sei  $a < b$ ,  $V := \mathcal{L}^2([a, b])$  und  $\mathcal{F} := (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ein ON-System in  $V$ . Für eine **endliche** Teilmenge  $I \subset \mathbb{N}$  sei  $V_I$  der von den Funktionen  $f_i, i \in I$ , aufgespannte Untervektorraum von  $V$ .

Ist  $f \in V$  beliebig und  $i \in \mathbb{N}$ , so nennt man

$$\hat{f}(i) := \langle f, f_i \rangle$$

den *i*-ten (formalen) Fourierkoeffizienten von  $f$  bezüglich  $\mathcal{F}$ . Das Element

$$p_I(f) := \sum_{i \in I} \hat{f}(i) \cdot f_i \in V_I$$

nennt man die *orthogonale Projektion* von  $f$  auf  $V_I$ .

### Eigenschaften der orthogonalen Projektion

1.  $\|f - p_I(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_I(f)\|^2$ .
2.  $\|f - p_I(f)\| < \|f - g\|$  für alle  $g \in V_I$  mit  $g \neq p_I(f)$ .
3.  $\|p_I(f)\|^2 = \sum_{i \in I} |\hat{f}(i)|^2 \leq \|f\|^2$ .

BEWEIS: Es sei  $c_i := \hat{f}(i)$ , für  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $j \in I$ :

$$\begin{aligned} \langle f - p_I(f), f_j \rangle &= \langle f, f_j \rangle - \sum_{i \in I} c_i \langle f_i, f_j \rangle \\ &= c_j - \sum_{i \in I} c_i \delta_{ij} \\ &= c_j - c_j = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\langle f - p_I(f), h \rangle = 0$  für alle Elemente  $h \in V_I$ , insbesondere

$$\langle f - p_I(f), p_I(f) \rangle = 0.$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist also

$$\|f\|^2 = \|f - p_I(f)\|^2 + \|p_I(f)\|^2 \quad \text{und} \quad \|p_I(f)\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Für  $g \in V_I$  ist außerdem

$$\langle f - p_I(f), p_I(f) - g \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad \|f - g\|^2 &= \|(f - p_I(f)) + (p_I(f) - g)\|^2 \\ &= \|f - p_I(f)\|^2 + \|p_I(f) - g\|^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß  $\|f - p_I(f)\| < \|f - g\|$  für  $g \neq p_I(f)$  ist.

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \|p_I(f)\|^2 &= \langle p_I(f), p_I(f) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i \in I} c_i f_i, \sum_{j \in I} c_j f_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \langle f_i, f_j \rangle \\ &= \sum_{i \in I} |c_i|^2. \end{aligned}$$

□

Der Satz besagt, daß  $f$  unter allen Elementen von  $V_I$  durch  $p_I(f)$  am besten approximiert wird (in der  $L^2$ -Norm). Man nennt  $p_I(f)$  daher auch die *Bestapproximation* von  $f$  in  $V_I$ .

Aus den obigen Abschätzungen folgt insbesondere:

### Besselsche Ungleichung

Ist  $c_i = \hat{f}(i)$  für  $i \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|f\|^2.$$

Das bedeutet insbesondere, daß die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$  konvergiert und die Folge  $(c_i)$  gegen Null konvergiert. Man kann sich nun z.B. fragen, welche Folgen  $(c_i)$  als Fourier-Koeffizienten einer quadratintegrablen Funktion angesehen werden können.

Wir sagen, eine Folge von Funktionen  $f_n \in \mathcal{L}^2([a, b])$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen eine (quadratintegrablen) Funktion  $f$ , wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Dies ist ein neuer Grenzwertbegriff, und er ist mit Vorsicht zu genießen. Ist  $f = g$  fast überall, so ist  $\|g - f_n\|_2 = \|(f - f_n) + (g - f)\|_2 = \|f - f_n\|_2$ . Das hat zur Folge, daß der Grenzwert einer (im quadratischen Mittel) konvergenten Folge nicht eindeutig bestimmt ist. Aber immerhin gilt:

### Satz von Riesz-Fischer

Ist  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen aus  $\mathcal{L}^2([a, b])$ , die bezüglich der  $L^2$ -Norm eine Cauchy-Folge ist, so konvergiert  $(f_n)$  im quadratischen Mittel gegen eine Funktion  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$ .

BEWEIS: Daß  $(f_n)$  bezüglich der  $L^2$ -Norm eine Cauchy-Folge bildet, bedeutet insbesondere:

$$\forall k \exists N_k, \text{ s.d. } \|f_n - f_m\| < 2^{-k} \text{ für } n, m \geq N_k.$$

Dabei kann man annehmen, daß  $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$  ist.

Wir setzen  $g_1 := f_{N_1}$  und  $g_k := f_{N_k} - f_{N_{k-1}}$  für  $k \geq 2$ . Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| \leq \|g_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|g_1\| + 1 =: M.$$

**Zwischenbehauptung:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ konvergiert fast überall gegen ein } f \in \mathcal{L}^2([a, b]), \text{ mit } \|f\| \leq M.$$

Den BEWEIS dafür tragen wir unten nach.

Nun ist

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{N_k}\| + \|f_{N_k} - f\|, \quad \text{für } n \geq N_k.$$

Außerdem ist

$$\|f - f_{N_k}\| = \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \right\| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|g_i\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1},$$

also

$$\begin{aligned}\|f - f_n\| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{2^k} \quad \text{für } n \geq N_k.\end{aligned}$$

Damit konvergiert  $(f_n)$  im quadratischen Mittel gegen  $f$ .

BEWEIS der Zwischenbehauptung:

Die Funktion  $H_n := \sum_{j=1}^n |g_j|$  liegt wieder in  $\mathcal{L}^2([a, b])$ , es ist  $0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots$  und  $\|H_n\| \leq \sum_{j=1}^n \|g_j\| \leq M$ ,

also  $\int_a^b H_n(t)^2 dt \leq M^2$ . Aus dem Satz über die monotone Konvergenz (von Beppo Levi) folgt nun:  $h_n := (H_n)^2$  konvergiert fast überall punktweise gegen eine integrierbare Funktion  $h$ , mit

$$\int_a^b h(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(t) dt \leq M^2.$$

Dann konvergiert auch  $(H_n)$  fast überall, und  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$  konvergiert fast überall absolut gegen eine meßbare Funktion  $f$ .

Setzen wir  $G_n := |\sum_{k=1}^n g_k|^2$ , so ist  $G_n$  integrierbar und fast überall gegen  $|f|^2$  konvergent. Außerdem ist  $G_n \leq h_n \leq h$  fast überall. Nach dem Lebesgueschen Satz von der dominierten Konvergenz ist dann  $|f|^2$  integrierbar und  $\int_a^b |f(t)|^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b G_n(t) dt$ . Also liegt  $f$  in  $\mathcal{L}^2([a, b])$

Wegen  $\int_a^b G_n(t) dt \leq \int_a^b h_n(t) dt \leq M^2$  ist auch  $\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \leq M^2$ , also  $\|f\| \leq M$ .  $\square$

### Folgerung

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$ , so gibt es eine Funktion  $F \in \mathcal{L}^2([a, b])$  mit

$$\langle F, f_i \rangle = c_i \quad \text{und} \quad \|F\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2.$$

BEWEIS: Sei  $F_n := \sum_{i=1}^n c_i f_i$ . Dann gilt:

$$\|F_n - F_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^n c_i f_i \right\| = \sum_{i=m+1}^n |c_i|^2 \rightarrow 0,$$

für  $n > m$  und  $n \rightarrow \infty$ .

Also ist  $(F_n)$  eine  $L^1$ -Cauchy-Folge. Nach dem Satz von Riesz-Fischer konvergiert  $(F_n)$  gegen eine Funktion  $F \in \mathcal{L}^2([a, b])$ . Es gilt für beliebiges  $j$  und  $n \geq j$ :

$$|\langle F, f_j \rangle - c_j| = |\langle F - F_n, f_j \rangle| \leq \|F - F_n\| \cdot \|f_j\| = \|F - F_n\| \rightarrow 0.$$

Da die rechte Seite nicht von  $j$  abhängt, ist  $\langle F, f_j \rangle = c_j$ .

Setzt man  $I := \{1, \dots, n\}$ , so ist  $p_I(F) = F_n$  und

$$\|F\|^2 - \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \|F\|^2 - \|p_I(F)\|^2 = \|F - p_I(F)\|^2 = \|F - F_n\|^2 \rightarrow 0.$$

Das beweist den zweiten Teil der Behauptung.  $\square$

Für  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$  und ein vorher festgelegtes ON-System  $\mathcal{F} = (f_n)$  sei künftig

$$S_n(f) := \sum_{i=1}^n \hat{f}(i) \cdot f_i = \sum_{i=1}^n \langle f, f_i \rangle \cdot f_i.$$

Die Reihe  $S_f := \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}(i) \cdot f_i$  nennt man die *formale Fourier-Reihe* von  $f$ . Man interessiert sich dafür, unter welchen Umständen und auf welche Art  $f = S_f$  ist.

### Definition:

Sei  $\mathcal{F} = (f_n)$  ein ON-System in  $\mathcal{L}^2([a, b])$ .

1.  $\mathcal{F}$  heißt *vollständig*, falls für alle  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\| = 0,$$

d.h. die formale Fourier-Reihe  $S_f$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$ .

2.  $\mathcal{F}$  heißt *abgeschlossen*, falls gilt:

Ist  $\langle f, f_i \rangle = 0$  für alle  $i$ , so ist  $f = 0$  fast überall.

### Charakterisierung vollständiger ON-Systeme

Sei  $\mathcal{F}$  ein ON-System in  $\mathcal{L}^2([a, b])$ . Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1. Alle  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$  erfüllen die Parsevalsche Gleichung:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2.$$

2.  $\mathcal{F}$  ist vollständig.

3.  $\mathcal{F}$  ist abgeschlossen.

BEWEIS: Sei  $c_i := \langle f, f_i \rangle$  für  $i \in \mathbb{N}$ .

(1)  $\implies$  (2):

$$\begin{aligned}\|f - S_n(f)\|^2 &= \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \text{ (Pythagoras)} \\ &= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \\ &\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ (Parseval)}.\end{aligned}$$

(2)  $\implies$  (3): Ist  $\langle f, f_i \rangle = 0$  für alle  $i$ , so ist  $S_n(f) = 0$  für alle  $n$ , also  $\|f\| = 0$ , da  $\mathcal{F}$  vollständig vorausgesetzt wurde. Aber dann ist  $f = 0$  fast überall.

(3)  $\implies$  (1): Sei  $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$  beliebig vorgegeben,  $c_i = \langle f, f_i \rangle$ . Dann gibt es ein  $F \in \mathcal{L}^2([a, b])$  mit  $\langle F, f_i \rangle = c_i$  und  $\|F\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ . Offensichtlich ist dann  $\langle F - f, f_i \rangle = 0$  für alle  $i$ , und da  $\mathcal{F}$  abgeschlossen vorausgesetzt wurde, ist  $F = f$  fast überall. Aber dann erfüllt auch  $f$  die Parsevalsche Gleichung.  $\square$

### Die Vollständigkeit des trigonometrischen Systems

*Das trigonometrische System (T) der Funktionen*

$$g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \quad \text{und} \quad h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt), \quad \text{für } n \geq 1,$$

*ist vollständig.*

Der BEWEIS erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst wird das Problem reduziert:

Sei  $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Numerierung des trigonometrischen Systems (T). Wir wollen zeigen:

1. Ist  $f \in \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$  (also stetig) und  $\langle f, f_i \rangle = 0$  für alle  $i$ , so ist  $f = 0$ .
2. Ist  $f$  eine beliebige  $L^2$ -Funktion auf  $[-\pi, \pi]$ , so ist

$$F(x) := \int_{-\pi}^x f(t) dt$$

stetig auf  $[-\pi, \pi]$ , und  $F(-\pi) = 0$ .

Ist  $\langle f, g_n \rangle = \langle f, h_n \rangle = 0$  für  $n \geq 1$ , so ist auch  $\langle F - C, g_n \rangle = \langle F - C, h_n \rangle = 0$  für alle  $n \geq 1$  und jede Konstante  $C$ . Man kann  $C$  so wählen, daß auch noch  $\langle F - C, g_0 \rangle = 0$  ist, also  $F = C$ . Aber dann muß sogar  $F = 0$  gelten, und das bedeutet, daß  $f = 0$  fast überall ist.

In (2) wird gezeigt, daß  $\mathcal{F}$  abgeschlossen und damit vollständig ist. Bevor wir (2) im Detail beweisen, müssen wir einen Satz aus der Integrationstheorie (ohne Beweis) zitieren:

### Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar (im Sinne von Lebesgue). Dann ist

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

stetig und fast überall differenzierbar, und es ist  $F' = f$  fast überall.

Ist  $g$  auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar, so sind die Funktionen  $F \cdot g'$  und  $f \cdot g$  integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b F(t)g'(t) dt = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Wenden wir diesen Satz an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle F, g_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[ F(x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right] \\ &= -\frac{1}{n} \cdot \langle f, h_n \rangle, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle F, h_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[ -F(x) \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{n} \cdot \langle f, g_n \rangle. \end{aligned}$$

Ist also  $\langle f, g_n \rangle = \langle f, h_n \rangle = 0$  für  $n \geq 1$ , so ist auch  $\langle F, g_n \rangle = \langle F, h_n \rangle = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Weil außerdem  $\langle C, g_n \rangle = \langle C, h_n \rangle = 0$  für alle  $n \geq 1$  und alle Konstanten  $C$  ist, betrachten wir  $F^* := F - C$ , mit  $C := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt$ . Dann ist

$$\langle F^*, g_n \rangle = \langle F^*, h_n \rangle = 0 \text{ für } n \geq 1,$$

und

$$\begin{aligned} \langle F^*, g_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt - C \cdot 2\pi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hat man (1) bewiesen, so kann man nun schließen, daß  $F^* = 0$  sein muß, also  $F = C$ . Weil aber  $F(-\pi) = 0$  ist, folgt:  $F = 0$ . Dann ist  $f = F' = 0$  fast überall.



Es bleibt nun noch (1) zu zeigen.

Wir führen folgende Redeweise ein: Unter einem *trigonometrischen Polynom vom Grad  $\leq n$*  versteht man eine Funktion der Gestalt

$$f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Die Zahlen  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots$  heißen die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms.

Mit  $\mathcal{T}([-\pi, \pi])$  bezeichnen wir die Menge aller auf  $[-\pi, \pi]$  eingeschränkten trigonometrischen Polynome.

Ist  $\langle f, f_i \rangle = 0$  für alle  $i$ , so ist auch  $\langle f, T \rangle = 0$  für jedes trigonometrische Polynom. Wir zeigen deshalb:

### Abgeschlossenheit der trigonometrischen Polynome

*Sei  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ist  $f \neq 0$ , so gibt es ein trigonometrisches Polynom  $T_n$  mit  $\langle f, T_n \rangle > 0$ .*

**BEWEIS:** Mit  $t$  ist auch  $T^*(x) := T(x - x_0)$  ein trigonometrisches Polynom. Deshalb kann man o.B.d.A. annehmen, daß  $f(0) > 0$  ist. Es gibt dann ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $\delta > 0$ , so daß  $f(t) \geq \varepsilon$  für  $|t| < \delta$  ist. Wegen der Stetigkeit gibt es außerdem ein  $M > 0$ , so daß  $|f(t)| \leq M$  für  $t \in [-\pi, \pi]$  ist. Wir wählen eine Konstante  $A > \frac{2\pi M}{\varepsilon}$ .

Die Funktion  $T(x) := 1 + \cos x - \cos \delta$  hat folgende Eigenschaften:

1. Ist  $|x| \leq \delta$ , so ist  $T(x) \geq 1$ , und ist  $|x| \leq \delta' < \delta$ , so ist  $T(x) \geq c := 1 + \cos \delta' - \cos \delta > 1$ .
2. Ist  $\delta < |x| \leq \pi$ , so ist  $0 \leq T(x) < 1$ .

$T_n(x) := (T(x))^n$  ist sicherlich wieder ein trigonometrisches Polynom, und es gilt:

1.  $T_n(x) \geq 1$  für  $|x| \leq \delta$ .
2.  $T_n(x) \geq c^n \rightarrow \infty$  für  $|x| \leq \delta' < \delta$  und  $n \rightarrow \infty$ .
3.  $|T_n(x)| \leq 1$  für  $\delta < |x| \leq \pi$ .

Wählt man  $n$  groß genug, so ist  $\int_{-\delta}^{\delta} T_n(t) dt > A$ . Für solche  $n$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \langle f, T_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T_n(t) dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} f(t) T_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} f(t) T_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} f(t) T_n(t) dt \\ &> A \cdot \varepsilon - 2\pi M > 0. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

## §2 Harmonische Analyse

### Definition:

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *periodisch* mit *Periode*  $T$ , falls für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(t + T) = f(t).$$

### Beispiele :

1. Die Funktionen  $\sin(t)$  und  $\cos(t)$  haben die Periode  $2\pi$ , der Tangens hat die Periode  $\pi$ .
2. Die Eulerfunktion  $e^{\mathbf{j}t} = \cos(t) + \mathbf{j} \sin(t)$  hat die Periode  $2\pi$ .
3. Hat  $f$  die Periode  $T$ , so sind auch  $2T, 3T, \dots$  Perioden von  $f$ .
4. Eine konstante Funktion  $f(t) \equiv c$  hat **jedes**  $T \in \mathbb{R}$  als Periode.

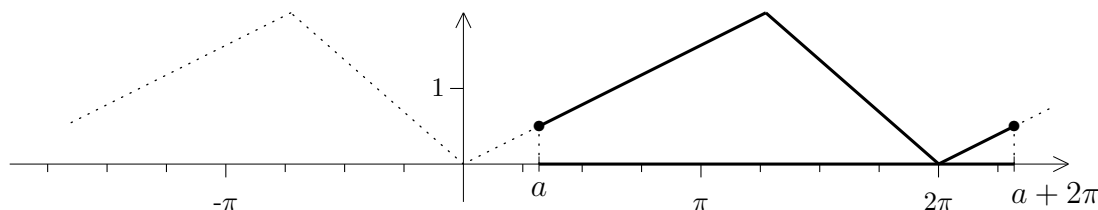
Wie das letzte Beispiel zeigt, kann die Menge  $\text{Per}(f)$  aller Perioden der Funktion  $f$  aus ganz  $\mathbb{R}$  bestehen. Ist  $f$  allerdings stückweise stetig und nicht konstant, so gibt es in  $\text{Per}(f)$  ein kleinstes positives Element, also eine *kleinste Periode*. Das ist z.B. die Zahl  $2\pi$  beim Sinus.

Hat  $f$  die Periode  $T$ , so hat  $F(t) := f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot t\right)$  die Periode  $2\pi$ , denn es ist

$$\begin{aligned} F(t + 2\pi) &= f\left(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\right) \\ &= f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot t + T\right) \\ &= f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot t\right) = F(t). \end{aligned}$$

Deshalb ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nur Funktionen mit der Periode  $2\pi$  betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, bedeutet hier künftig „**periodisch**“ stets „**periodisch mit Periode  $2\pi$** “. Das muß allerdings nicht in jedem Fall die kleinste Periode sein.

Ist nun  $I = [a, a + 2\pi]$  und  $f$  eine stückweise stetige Funktion auf  $I$  mit  $f(a + 2\pi) = f(a)$ , so kann man  $f$  periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen:



Dabei spielt es keine Rolle, mit welchem Intervall (der Länge  $2\pi$ ) man begonnen hat, es kommt immer die gleiche Funktion heraus. Wir verwenden hier meistens das Intervall

$$I = [-\pi, +\pi],$$

manchmal aber auch das Intervall  $[0, 2\pi]$ .

Es sei  $\mathcal{S}^0(I)$  die Menge der stückweise stetigen Funktionen auf  $I$ . Bei diesen Funktionen existiert in jedem  $x \in I$  der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert, allerdings brauchen die beiden Grenzwerte nicht übereinzustimmen. Es sind endlich viele solcher Sprungstellen erlaubt, aber keine schlimmeren Unstetigkeiten.

Mit  $\mathcal{P}(I)$  bezeichnen wir die Menge aller Funktionen  $f \in \mathcal{S}^0(I)$ , für die gilt:

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

Das sind diejenigen stückweise stetigen Funktionen auf  $I$ , die sich periodisch auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen lassen.

$\mathcal{P}(I)$  ist ein Untervektorraum von  $\mathcal{L}^2(I)$ , und wir können die Theorie aus dem vorhergehenden Paragraphen anwenden. Insbesondere können wir die  $L^2$ -Norm und das  $L^2$ -Skalarprodukt verwenden und Orthonormalsysteme benutzen, sofern sie in  $\mathcal{P}(I)$  liegen. Auf die trigonometrischen Systeme (T) und (E) trifft das zu.

Betrachten wir zunächst (T):

$$g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \quad \text{und} \quad h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt), \quad \text{für } n \geq 1.$$

Aus historischen Gründen setzt man

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \langle f, g_0 \rangle, \\ a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \langle f, g_n \rangle \\ \text{und } b_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \langle f, h_n \rangle. \end{aligned}$$

Dann hat die formale Fourierreihe  $S_f$  die Gestalt

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \langle f, g_0 \rangle g_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, g_n \rangle g_n(x) + \langle f, h_n \rangle h_n(x)) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (\sqrt{\pi} a_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + (\sqrt{\pi} b_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right), \end{aligned}$$

es ist also

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Man beachte, daß die Koeffizienten  $a_n, b_n$  hier nicht mit den zuvor definierten formalen Fourierkoeffizienten übereinstimmen. Aus historischen Gründen nennt man  $a_0, a_n$  und  $b_n$  dennoch die *Fourierkoeffizienten von  $f$  (bzgl. (T))*.

Wir kommen jetzt zum System (E):

Setzt man  $c_n := \frac{1}{2}(a_n - \mathbf{j}b_n)$  und  $c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + \mathbf{j}b_n) = \bar{c}_n$ , für  $n \geq 1$ , sowie  $c_0 := \frac{a_0}{2}$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{j}nt} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{\mathbf{j}nt} + c_{-n} e^{-\mathbf{j}nt}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((c_n + c_{-n}) \cos(nt) + \mathbf{j}(c_n - c_{-n}) \sin(nt)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)). \end{aligned}$$

Damit haben wir die komplexe Form der Fourierreihe von  $f$  gefunden. Die Summation von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ist so zu verstehen, wie es oben schon angedeutet wurde:

$$\text{Term}(0) + (\text{Term}(1) + \text{Term}(-1)) + (\text{Term}(2) + \text{Term}(-2)) + \dots$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten  $c_n$  kann man übrigens auch direkt berechnen, ohne den Umweg über die  $a_n$  und  $b_n$ . Es ist nämlich

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ \text{und } c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathbf{j}nt} dt \quad (\text{für } n \geq 1). \end{aligned}$$

Da (T) (und damit auch (E)) vollständig ist, konvergiert die formale Fourierreihe  $S(f)$  im quadratischen Mittel gegen  $f$ , und es gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$|\langle f, g_0 \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|\langle f, g_n \rangle|^2 + |\langle f, h_n \rangle|^2) = \|f\|^2,$$

also

$$|\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|\sqrt{\pi} a_n|^2 + |\sqrt{\pi} b_n|^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Das heißt:

$$\boxed{\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}$$

und

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.}$$

Bei der harmonischen Analyse versucht man, eine periodische Bewegung in ihre harmonischen Bestandteile zu zerlegen. Ein guter Kandidat ist die Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten wir ja schon bestimmen können. Wir müssen jetzt allerdings wissen, wann eine Funktion tatsächlich durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, wann die Reihe also zumindest punktweise gegen die Funktion konvergiert. Man nennt das auch das *Konvergenzproblem*.

Dazu brauchen wir weitere Hilfsmittel:

### Hilfssatz

Für  $x \neq 2k\pi$  ist  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ .

BEWEIS: Sei  $D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{jn x}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (e^{jx} - 1)D_N(x) &= \sum_{n=-N}^N e^{j(n+1)x} - \sum_{n=-N}^N e^{jn x} \\ &= e^{j(N+1)x} - e^{-jNx}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $e^{-j\frac{x}{2}}$  ergibt:

$$(e^{j\frac{x}{2}} - e^{-j\frac{x}{2}}) \cdot D_N(x) = e^{j(N+\frac{1}{2})x} - e^{-j(N+\frac{1}{2})x},$$

also

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{für } x \neq 2k\pi.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) &= \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \sum_{n=1}^N 2 \cos(nx) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \sum_{n=1}^N (e^{jn x} + e^{-jn x}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-N}^N e^{jn x} \\ &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Die Funktion

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{jn x} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

heißt ( $N$ -ter) *Dirichlet-Kern*.

Ist die Funktion  $f$  (auf einem beschränkten Intervall) stückweise stetig, so ist sie bis auf endlich viele Stellen stetig, und als Unstetigkeiten kommen höchstens Sprungstellen vor. Ist  $a$  eine solche Sprungstelle, so existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} f(a-) &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \\ \text{und } f(a+) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$M_f(a) := \frac{1}{2}(f(a-) + f(a+)).$$

Ist  $f$  in  $a$  stetig, so ist  $M_f(a) = f(a)$ . An den Sprungstellen ist  $M_f$  gerade der Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte.

Um die Konvergenz der Fourierreihe gegen die Funktion beweisen zu können, müssen wir stärkere Bedingungen an die Glattheit der Funktion stellen. Dazu noch eine Bemerkung über Differenzierbarkeit in Unstetigkeitsstellen:

Ist eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwar nicht in  $x$  stetig, existiert aber der rechtsseitige Grenzwert  $f(x+)$ , so heißt  $f$  in  $x$  *rechtsseitig differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(x+) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}$$

existiert. Analog definiert man die linksseitige Differenzierbarkeit und die linksseitige Ableitung  $f'(x-)$ .

### Definition:

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stückweise glatt*, wenn sie bis auf endlich viele Ausnahmen stetig differenzierbar ist, und wenn in den Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte  $f(x-)$  und  $f(x+)$  und die einseitigen Ableitungen  $f'(x-)$  und  $f'(x+)$  existieren.

Ist  $f$  stückweise glatt, so ist  $f'$  stückweise stetig, also insbesondere integrierbar.  $f$  ist unbestimmtes Integral von  $f'$ , und es gilt:

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = (f(t)g(t)) \Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

### Riemannsches Lemma

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion und

$$F(y) := \int_a^b f(t) \sin(yt) dt.$$

Dann ist  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 0$ .

BEWEIS: 1) Sei zunächst  $f = T$  eine Treppenfunktion,  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  und  $T|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b T(t) \sin(yt) dt \right| &= \left| \sum_{i=1}^n c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(yt) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |c_i| \cdot \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(yt) dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n |c_i| \cdot \left| \frac{\cos(yx_i) - \cos(yx_{i-1})}{y} \right| \\
&\leq \frac{2}{|y|} \cdot \sum_{i=1}^n |c_i| \\
&\rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

2) Ist  $f$  eine beliebige Regelfunktion und  $\varepsilon > 0$ , so gibt es eine Treppenfunktion  $T$  mit  $|T(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  für  $t \in [a, b]$ . Und aus (1) folgt, daß es ein  $M > 0$  gibt, so daß gilt:

$$\left| \int_a^b T(t) \sin(yt) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } y \geq M.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t) \sin(yt) dt \right| &\leq \left| \int_a^b (f(t) - T(t)) \cdot \sin(yt) dt \right| + \left| \int_a^b T(t) \sin(yt) dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f(t) - T(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

für  $y \geq M$ . □

### Folgerung

Sei  $a > 0$  beliebig. Dann ist

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(yx)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Für  $0 < a < 2\pi$  ist außerdem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^a D_N(x) dx = \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \pi.$$

BEWEIS: Wir setzen  $x(t) = \frac{t}{y}$ . Dann ist

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin(yx)}{x} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{ay} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Aus Kapitel IV, §2, S. 16, wissen wir, daß das uneigentliche Integral auf der rechten Seite konvergiert.

Es bleibt der Wert auszurechnen. Wir haben gerade gesehen, daß der Limes auf der linken Seite gar nicht von  $a$  abhängt. Für  $0 < a < 2\pi$  folgt aus dem Riemannschem Lemma:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^a \sin(yx) \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right) dx = 0. \quad (*)$$

Die Funktion  $\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$  ist stückweise stetig und damit erst recht eine Regelfunktion. Dazu ist nur zu zeigen, daß sie bei 0 einen rechtsseitigen Limes besitzt. Man sieht das durch zweimalige Anwendung der l'Hospital'schen Regel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} - x}{2x \sin \frac{x}{2}} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und } f(0) = g(0) = 0, \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{2 \sin \frac{x}{2} + x \cos \frac{x}{2}}, \quad \text{also auch } f'(x) = g'(x) = 0 \\ \text{und } \frac{f''(x)}{g''(x)} &= \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck strebt für  $x \rightarrow 0$  gegen Null.

Unabhängig von der speziellen Wahl von  $a \in (0, 2\pi)$  ist also wegen (\*)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin(yx)}{2 \sin(\frac{x}{2})} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin(yx)}{x} dx.$$

Da wir die Konvergenz (auf der rechten Seite) schon bewiesen haben, reicht es, wenn wir zur Berechnung des Grenzwertes auf der linken Seite der Gleichung in  $y$  eine spezielle (unbeschränkte) Folge einsetzen, etwa  $y_N := N + \frac{1}{2}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Außerdem können wir z.B.  $a = \pi$  setzen.

Es ist aber

$$\int_0^\pi \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) dx = \frac{\pi}{2},$$

unabhängig von  $N$ , denn es ist ja

$$\int_0^\pi \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^\pi = 0 \quad \text{für jedes } n \geq 1.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir können jetzt den entscheidenden Schritt in Richtung auf einen allgemeinen Konvergenzbeweis hin tun:

### Dirichletsche Integralformel

*Es sei  $f$  stückweise stetig und periodisch, und*

$$T_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

*das  $N$ -te Fourierpolynom von  $f$ . Dann ist*

$$T_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt.$$



BEWEIS: Setzt man die Integraldarstellungen der Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$  in die Definition von  $T_N(x)$  ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} T_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (\cos(nt) \cos(nx) + \sin(nt) \sin(nx)) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(t-x)) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(t-x))}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde die Substitution  $t(\tau) = x + \tau$  (mit  $t'(\tau) = 1$ ) vorgenommen. Die Integrationsgrenzen mußten wegen der Periodizität des Integranden nicht verändert werden!  $\square$

### Hauptsatz der harmonischen Analyse

*Die Funktion  $f$  sei stückweise glatt und periodisch. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  **punktwise** gegen  $M_f$ .*

BEWEIS: Wir halten einen Punkt  $x \in (-\pi, +\pi)$  fest. (Zur Betrachtung der Randpunkte verschiebt man am besten das Integrationsintervall ein wenig und geht dann genauso vor!)

1) Für  $t \in [0, \pi]$  setzen wir

$$s_+(t) := \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Offensichtlich ist  $s_+$  auf  $(0, \pi]$  stückweise stetig. Da die Funktion

$$g(t) := \frac{2 \sin \frac{t}{2}}{t}$$

bei  $t = 0$  stetig ist und den Wert 1 annimmt, verhalten sich  $s_+(t)$  und  $s_+(t)g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$  bei Annäherung an 0 von rechts gleich. Und da  $f$  stückweise glatt ist, existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ . Also ist  $s_+$  sogar auf  $[0, \pi]$  stückweise stetig.

2) Aus dem Riemanschen Lemma folgt nun:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} s_+(t) \sin(yt) dt = 0.$$

Wir wissen außerdem aus dem Beweis der Folgerung aus dem Riemanschen Lemma, daß folgender Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+) \frac{\sin(yt)}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= f(x+) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= f(x+) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} f(x+). \end{aligned}$$

Weil schließlich

$$\frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = s_+(t) + \frac{f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

ist, ist

$$\int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin(yt)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_0^\pi s_+(t) \sin(yt) dt + \int_0^\pi f(x+) \frac{\sin(yt)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f(x+) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin(yt)}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Völlig analog beweist man:

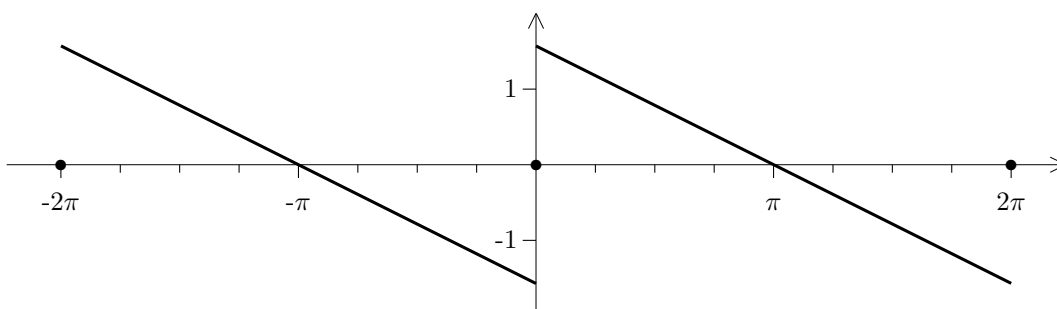
$$\frac{1}{2} f(x-) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

Die Addition beider Formeln ergibt (mit der Dirichletschen Integralformel):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(x) = \frac{1}{2} (f(x-) + f(x+)).$$

Das war zu zeigen. □

Wir betrachten nun ein besonders wichtiges **Beispiel**:



$$\text{Sei } f(x) := \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{für } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = 2\pi. \end{cases}$$

Wir wollen die Fourierkoeffizienten von  $f$  berechnen. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{2\pi}{n} - \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n}.$$

Also ergibt sich:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} (\pi x - \frac{1}{2} x^2) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = 0$$

$$\text{und } b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{n}.$$

Die Fourierreihe von  $f$  hat also die Gestalt

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Aus dem Hauptsatz der harmonischen Analyse können wir schließen, daß  $S_f(x)$  punktweise gegen  $f(x)$  konvergiert, denn  $f$  ist stückweise glatt und es ist  $M_f = f$ .

Da  $f$  Sprungstellen aufweist, kann die Fourierreihe nicht gleichmäßig konvergieren. Wir werden aber zeigen, daß sie es auf jedem Intervall  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  tut:

Es sei

$$R_N(x) := T_N(x) - f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{1}{2}(\pi - x)$$

für  $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$  und kleines  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \sum_{n=1}^N \int_{\pi}^x \cos(nt) dt + \frac{1}{2} \int_{\pi}^x dt \\ &= \int_{\pi}^x \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^x D_N(t) dt = \int_{\pi}^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Dieses Integral werten wir mit Hilfe von partieller Integration aus. Dabei benutzen wir noch den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Mit einem geeigneten  $c$  zwischen  $\pi$  und  $x$  ist

$$\begin{aligned} &\int_{\pi}^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{-\cos(N + \frac{1}{2})t}{(2N + 1) \sin \frac{t}{2}} \Big|_{\pi}^x + \int_{\pi}^x \frac{\cos(N + \frac{1}{2})t}{2N + 1} \left( \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right)' dt \\ &= \frac{-\cos(N + \frac{1}{2})t}{(2N + 1) \sin \frac{t}{2}} \Big|_{\pi}^x + \frac{\cos(N + \frac{1}{2})c}{2N + 1} \int_{\pi}^x \left( \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right)' dt \\ &= \frac{-\cos(N + \frac{1}{2})t}{(2N + 1) \sin \frac{t}{2}} \Big|_{\pi}^x + \frac{\cos(N + \frac{1}{2})c}{2N + 1} \cdot \left( \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{(2N + 1) \sin \frac{x}{2}} \cdot \left( -\cos((N + \frac{1}{2})x) + \cos((N + \frac{1}{2})c)(1 - \sin \frac{x}{2}) \right). \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$  ist  $\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{\varepsilon}{2}$ , also

$$0 < \sin \frac{\varepsilon}{2} \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$$

und damit

$$1 \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Außerdem ist  $0 \leq 1 - \sin \frac{x}{2} < 1$ . Daraus folgt:

$$|R_N(x)| \leq \frac{2}{(2N+1) \sin \frac{x}{2}} \leq \frac{2}{(2N+1) \sin \frac{\varepsilon}{2}} \text{ für } \varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, daß  $(R_N)$  gleichmäßig gegen Null konvergiert, und damit  $(T_N)$  gleichmäßig gegen  $f$ .

Wie macht es sich nun bemerkbar, daß die Konvergenz in der Nähe von  $x = 0$  *nicht* mehr *gleichmäßig* ist?

Wir müssen die Werte der Partialsummen  $T_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n}$  in der Nähe von  $x = 0$  abschätzen. Um etwaige Maxima zu ermitteln, berechnen wir die erste Ableitung:

$$T'_N(x) = \sum_{n=1}^N \cos(nx) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$T'_N(x) = 0 \iff \sin(N + \frac{1}{2})x = \sin \frac{x}{2}.$$

Auch bei großem (aber festem)  $N$  kann  $x$  so klein gewählt werden, daß

$$0 < \frac{x}{2} < (N + \frac{1}{2})x < \pi$$

ist. Da der Sinus zwischen 0 und  $\pi$  jeden Wert (zwischen 0 und 1) genau zweimal annimmt, und zwar symmetrisch zu  $x = \frac{\pi}{2}$ , tritt die erste positive Nullstelle von  $T'_N$  genau dort auf, wo

$$\frac{x}{2} + (N + \frac{1}{2})x = \pi \text{ ist, also bei } x = x_N := \frac{\pi}{N+1}.$$

Da  $T_N(0) = 0$  und  $T_N(x_N) > 0$  ist und dazwischen kein Extremwert liegt, muß  $T_N$  in  $x_N$  ein Maximum besitzen. Wir wollen den Wert von  $T_N$  in diesem Maximum berechnen:

$$\begin{aligned} T_N(x_N) &= T_N(x_N) - T_N(0) = \int_0^{x_N} T'_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{x_N} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \frac{x_N}{2}. \end{aligned}$$

Für großes  $N$  und  $0 \leq t \leq x_N$  ist  $\sin(\frac{t}{2}) < \frac{t}{2}$ , also

$$T_N(x_N) > \int_0^{x_N} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt - \frac{x_N}{2}.$$

Mit der Substitution  $u = u(t) = (N + \frac{1}{2})t$  ist

$$\int_0^{x_N} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt = \int_0^{\pi(1-\varepsilon_N)} \frac{\sin(u)}{u} du$$

mit  $\varepsilon_N := \frac{1}{2N+2}$ .

Läßt man  $N$  gegen Unendlich gehen, so strebt  $\varepsilon_N$  gegen Null und  $\frac{\pi}{2N+2}$  gegen Null. Also nähert sich  $T_N(x_N)$  für großes  $N$  einem Wert, der über der festen Zahl

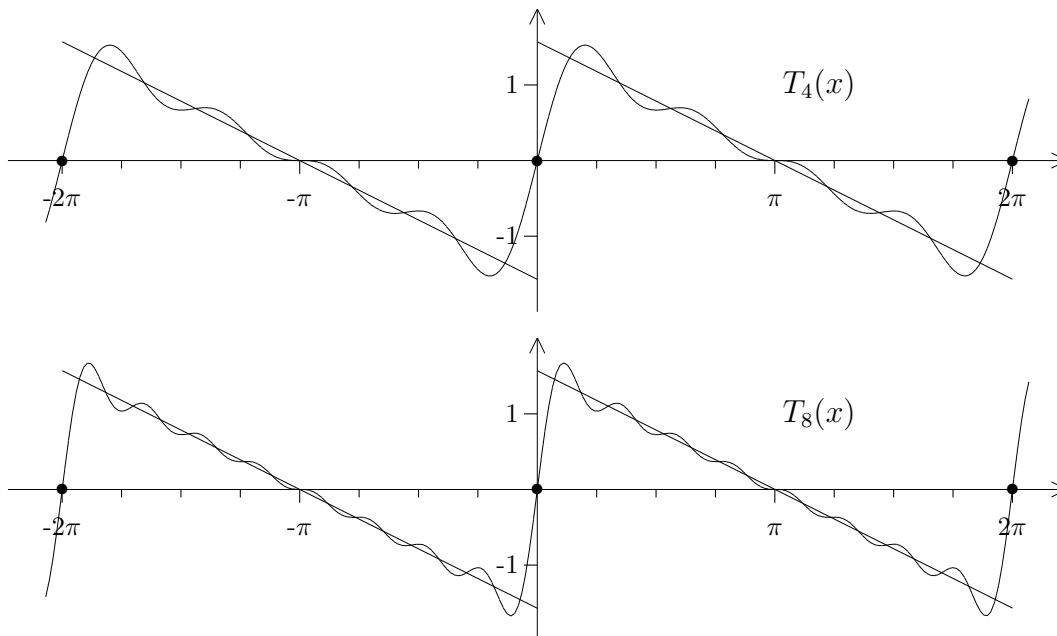
$$\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du = 1.85193705\dots$$

liegt, während

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = 1.570\dots$$

ist. Die Partialsummen der Fourierreihe schießen in der Nähe der Unstetigkeitsstelle um einen unangenehm hohen Betrag über das Ziel hinaus, und die Approximation wird um so schlechter, je größer das  $N$  ist. Dieses Verhalten wird das *Gibbs'sche Phänomen* genannt, und es ist bei allen unstetigen stückweise glatten periodischen Funktionen zu beobachten.

Betrachten wir noch zwei Partialsummen im Bild:



Das eben betrachtete Beispiel ist so typisch, daß wir noch einiges daraus lernen können.

So fällt z.B. auf, daß nur Sinus-Terme in der Reihe auftreten. Das hat damit zu tun, daß die Funktion  $f(x)$  auf  $[-\pi, +\pi]$  ungerade ist, also symmetrisch zum Nullpunkt. Allgemein gilt:

### Fourierkoeffizienten gerader und ungerader Funktionen

$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  sei die (formale) Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion  $f(x)$ . Dann gilt:

1. Ist  $f$  gerade (also  $f(-x) = f(x)$ ), so ist  $b_n = 0$  für  $n \geq 1$ .
2. Ist  $f$  ungerade (also  $f(-x) = -f(x)$ ), so ist  $a_n = 0$  für  $n \geq 1$ .

BEWEIS: Ist  $f$  gerade, so ist  $f(x) \sin(nx)$  für jedes  $n \geq 1$  ungerade, und dann ist

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0,$$

weil sich die positiven und die negativen Teile gerade wegheben.

Ist  $f$  ungerade, so ist  $f(x) \cos(nx)$  ungerade und  $a_n = 0$ . □

Auch die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz können wir jetzt umfassender beantworten. Dazu ist folgendes zu beachten:

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  stückweise glatt und stetig, so ist  $f'$  als stückweise stetige Funktion sicherlich integrierbar und

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

Zum BEWEIS der Formel:

$F(x) := \int_a^x f'(t) dt$  ist nach dem verallgemeinerten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig, und außerhalb der endlich vielen Unstetigkeitsstellen von  $f'$  ist  $F$  sogar differenzierbar, mit  $F' = f'$ . Also muß  $F - f$  eine Treppenfunktion sein, und als stetige Funktion dann sogar konstant  $= F(a) - f(a) = -f(a)$ , d.h.  $F(x) = f(x) - f(a)$ .

Wendet man dieses Ergebnis auf das Produkt  $f \cdot g$  zweier stückweise glatten und stetigen Funktionen an, so erhält man auch in diesem Falle die Gültigkeit der Regel der partiellen Integration.

### Satz über gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

*Ist die Funktion  $f$  stückweise glatt, periodisch und zusätzlich stetig, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .*

BEWEIS:

Sei  $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ .

Die Funktion  $g := f'$  ist stückweise stetig, also kann man formal auch ihre Fourierreihe bilden:

$$S_g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)).$$

Weil  $f$  stetig und stückweise glatt ist, kann man partielle Integration anwenden:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} (f(t) \cos(nt)) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) n \sin(nt) dt \\ &= n \cdot b_n \end{aligned}$$

und

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} (f(t) \sin(nt)) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) n \cos(nt) dt \\
&= -n \cdot a_n.
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{\pi} f(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Nun erinnern wir uns an die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + d_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt.$$

Daraus folgt, daß die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + d_n^2)$  konvergent ist. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left( |c_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = c_n^2 - \frac{2|c_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \\
\text{und } 0 &\leq \left( |d_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = d_n^2 - \frac{2|d_n|}{n} + \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$|a_n| + |b_n| = \frac{|c_n|}{n} + \frac{|d_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left( c_n^2 + d_n^2 + \frac{2}{n^2} \right).$$

Damit besitzt  $S_f(x)$  eine konvergente Majorante, und nach dem Weierstraß-Kriterium ist  $S_f(x)$  gleichmäßig konvergent.  $\square$

Im Beispiel der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  hatten wir etwas mehr herausbekommen, nämlich die gleichmäßige Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Unstetigkeitsstelle enthält. Auch das ist ganz allgemein richtig:

### Konvergenzverhalten außerhalb der Sprungstellen

*Ist  $f$  stückweise glatt und periodisch und  $[a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall, das keine der Unstetigkeitsstellen von  $f$  enthält, so konvergiert die Fourierreihe  $S_f(x)$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$ .*

BEWEIS: Sei  $\psi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$  die Funktion aus dem Beispiel. Dann hat  $\psi$  in  $[-\pi, +\pi]$  genau eine Sprungstelle der Höhe  $\pi$ , nämlich bei  $x = 0$ .

Sei  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  ein Punkt,  $h$  eine reelle Zahl. Dann hat die Funktion  $\frac{h}{\pi} \psi(x - x_0)$  nur jeweils in den Punkten  $x_0 + 2k\pi$  eine Sprungstelle (von der Höhe  $h$ ), und von diesen Stellen liegt nur  $x_0$  selbst in  $[-\pi, \pi]$ .

Hat jetzt  $f(x)$  in  $[-\pi, \pi]$  die Sprungstellen  $x_1, x_2, \dots, x_k$  mit den Höhen  $h_1, h_2, \dots, h_k$ , so hat

$$F(x) := f(x) - \sum_{i=1}^k \frac{h_i}{\pi} \psi(x - x_i)$$

überhaupt keine Sprungstellen mehr. Die Fourierreihe  $S_F$  konvergiert überall gleichmäßig, und die Fourierreihe des Korrekturterms konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig, das keine der Sprungstellen  $x_1, x_2, \dots, x_k$  enthält. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### Beispiele :

- Wir beginnen mit einer Fourierreihe, zu der wir die passende Funktion suchen:

Sei  $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ . Da die konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  eine Majorante ist, konvergiert  $F(x)$  überall gleichmäßig, stellt also eine stetige Funktion dar.

Die gliedweise differenzierte Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(nx)}{n} = \frac{x - \pi}{2}$  konvergiert auf jedem Intervall  $I_\varepsilon = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$  gleichmäßig. Auf solchen Intervallen ist also  $F'(x) = \frac{x - \pi}{2}$ , d.h.

$$F(x) = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 + C,$$

mit einer geeigneten Konstante  $C$ .

Die Gleichung gilt zunächst nur außerhalb der Punkte  $2n\pi$ , aber da  $F(x)$  als gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen selbst wieder stetig ist, gilt sie sogar überall. Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 dx + 2\pi C \\ &= \frac{(x - \pi)^3}{12} \Big|_0^{2\pi} + 2\pi C \\ &= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi C \end{aligned}$$

und andererseits wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $F(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $C = -\frac{\pi^2}{12}$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

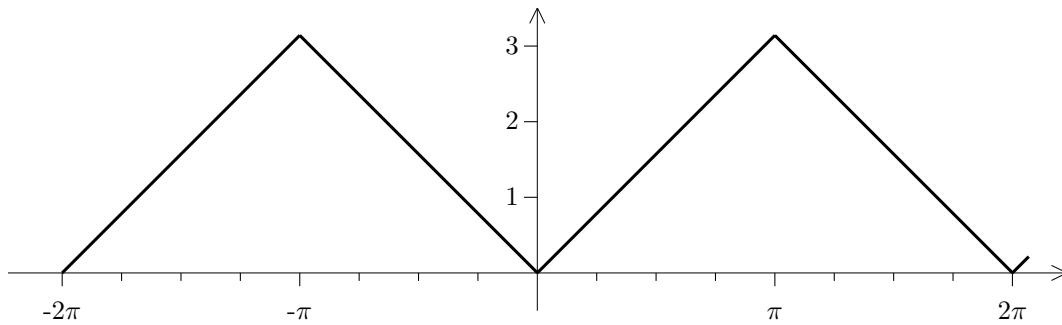
Der Fall  $x = 0$  ergibt insbesondere die Formel

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

So liefert uns die Fouriertheorie den Grenzwert einer Reihe, deren Konvergenz uns schon lange bekannt ist.



2. Als nächstes betrachten wir die Fourierreihe einer stetigen Funktion:



Wir definieren  $f(x) := |x|$  auf  $[-\pi, \pi]$  und setzen wie üblich periodisch fort.

Dann erhalten wir folgende Fourierkoeffizienten:

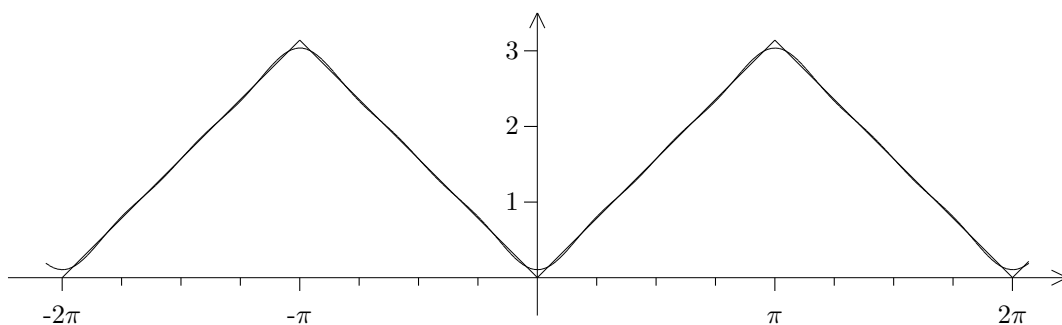
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot t^2 \Big|_0^{\pi} = \pi, \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \left( t \cdot \frac{\sin(nt)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(nt)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

und  $b_n = 0$ , weil  $f$  eine gerade Funktion ist.

Also erhalten wir die Fourierreihe

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right).$$

Hier ist schon  $T_5(x)$  eine gute Approximation:



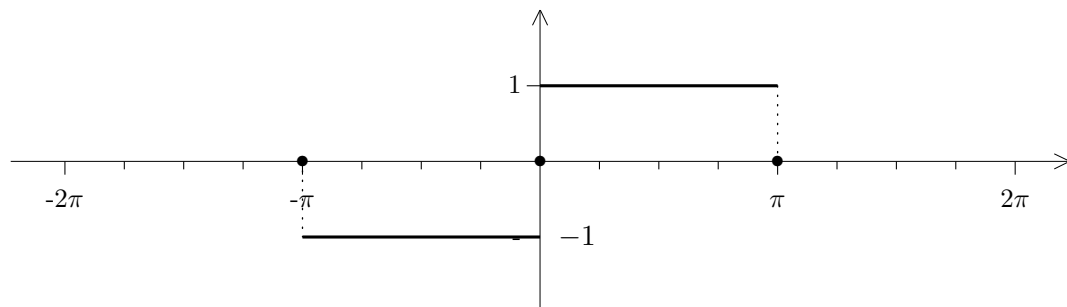
Insbesondere ergibt sich für  $x = 0$ :

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

3. Schließlich betrachten wir noch einen typischen „Rechteckimpuls“:

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{falls } 0 < x < \pi. \end{cases}$$



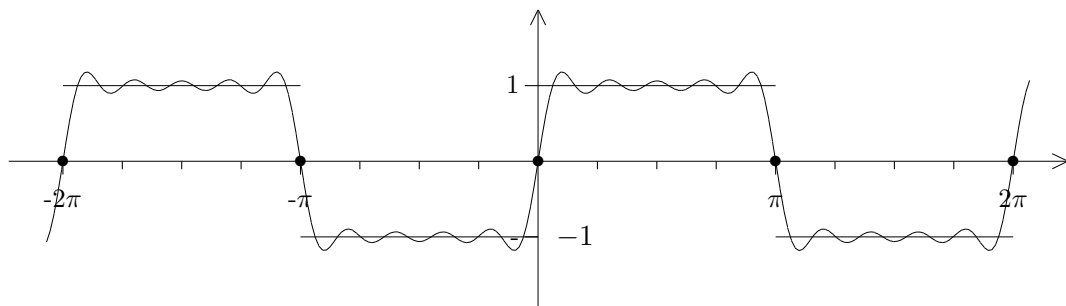
Da  $f$  eine ungerade Funktion ist, ist  $a_n = 0$  für alle  $n$ . Weiter gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe hat also die Gestalt

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Wegen der Unstetigkeitsstellen tritt natürlich wieder das Gibbs'sche Phänomen auf! Wir skizzieren das Polynom  $T_9(x)$ :



### §3 Die Fouriertransformation

Wir müssen einige Sätze über Lebesguesche Parameterintegrale nachtragen. Auf die Beweise verzichten wir allerdings (vgl. Königsberger, Analysis 2).

#### Satz 1

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und stetig. Dann ist auch  $f \cdot g$  über  $\mathbb{R}$  integrierbar.

Sei etwa  $f$  eine ( $\mathbb{C}$ -wertige) Regelfunktion auf  $\mathbb{R}$ , und über  $\mathbb{R}$  absolut uneigentlich integrierbar. Dann existiert

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$ .

#### Satz 2

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $t \mapsto f(t, \mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x} \in B$  integrierbar und  $\mathbf{x} \mapsto f(t, \mathbf{x})$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  stetig auf  $B$ . Außerdem gebe es eine nicht-negative integrierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:

$$|f(t, \mathbf{x})| \leq \varphi(t) \quad \text{für } (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B.$$

Dann ist

$$F(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}} f(t, \mathbf{x}) dt$$

stetig auf  $B$ .

#### Satz 3

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $t \mapsto f(t, \mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x} \in B$  integrierbar und  $\mathbf{x} \mapsto f(t, \mathbf{x})$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar. Außerdem gebe es eine nicht-negative integrierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{für } (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times B \quad \text{und } i = 1, \dots, n.$$

Dann ist  $F(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}} f(t, \mathbf{x}) dt$  auf  $B$  stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) dt.$$

Sei wieder  $f$  eine ( $\mathbb{C}$ -wertige) Regelfunktion auf  $\mathbb{R}$ , so daß das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

konvergiert.

Dann ist  $F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$ .

Ist sogar  $|t \cdot f(t)|$  über  $\mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar, so ist  $F$  stetig differenzierbar und  $F'(\omega) = -j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-j\omega t} dt$ .

### Definition:

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

heißt die *Fourier-Transformierte* von  $f$ .

Man schreibt auch  $F(\omega) = \hat{f}(\omega)$  oder  $F = \mathcal{F}[f]$ .

$f$  heißt *Originalfunktion* oder *Urbildfunktion*,  $F$  heißt *Spektralfunktion* oder *Bildfunktion*. Den Zusammenhang zwischen Originalfunktion und Bildfunktion macht man auch mit folgender Symbolik deutlich:

$$f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(\omega)$$

**Bemerkung:** Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  ist stets beschränkt:

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

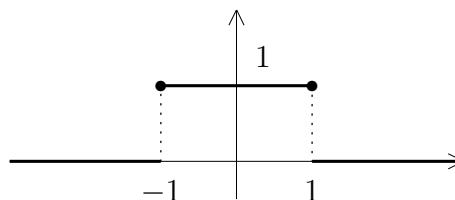
und letzteres ist eine Konstante.

Die Funktionen  $f = f(t)$  sind im sogenannten *Original- oder Zeitbereich* angesiedelt. Man kann sich darunter irgendwelche eingehenden elektromagnetischen Signale vorstellen. Mit Hilfe der Fourier-Transformation wird das Signal wie beim Empfang durch eine Antenne als kontinuierliche Überlagerung von harmonischen Schwingungen dargestellt. Die im *Bild- oder Frequenzbereich* angesiedelte Fourier-Transformierte  $F = F(\omega)$  beschreibt, welchen Beitrag die verschiedenen Frequenzen leisten.

### Beispiele:

1. Wir beginnen mit dem „Rechteck-Impuls“

$$\pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$



Die Fourier-Transformierte  $F = \mathcal{F}[\pi]$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{j}{\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{j}{\omega} \cdot (e^{-j\omega} - e^{j\omega}) \\ &= \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega). \end{aligned}$$

Führen wir die Schreibweise

$$\text{si}(x) := \frac{\sin x}{x}$$

ein, so erhalten wir:

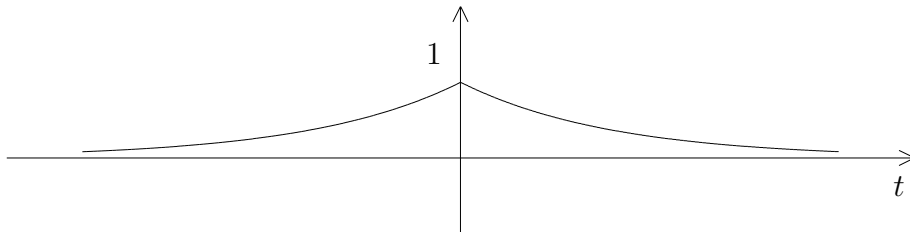
$$\pi(t) \circ \longrightarrow \bullet 2\text{si}(\omega).$$

2. Als nächstes betrachten wir den symmetrisch abfallenden Impuls

$$f(t) := e^{-a|t|}.$$

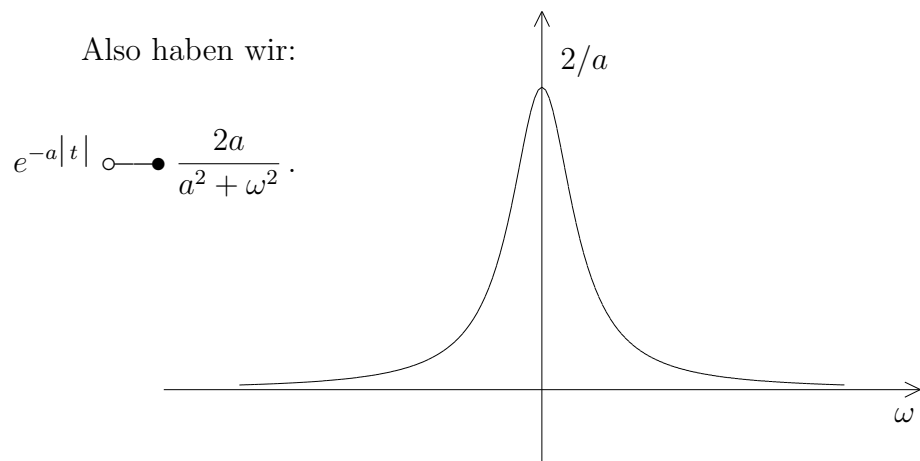
$f$  ist stetig und absolut integrierbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} dt = 2 \cdot \frac{e^{-at}}{-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{a}.$$



Die Fourier-Transformierte ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{-(-a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-a+j\omega} e^{-(-a+j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{-a+j\omega} \\ &= \frac{-2a}{-\omega^2 - a^2} \\ &= \frac{2a}{\omega^2 + a^2}. \end{aligned}$$



Man beachte, daß man zu vielen Standard-Funktionen nicht die Fourier-Transformierte bilden kann (z.B. Konstante, sin, cos usw.) !

### Eigenschaften der Fourier-Transformation

1.  $\mathcal{F}[f_1 + f_2] = \mathcal{F}[f_1] + \mathcal{F}[f_2]$ .
2. Ist  $\alpha \in \mathbb{C}$ , so ist  $\mathcal{F}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathcal{F}[f]$ .
3.  $f(t - c) \circ \bullet \hat{f}(\omega)e^{-j\omega c}$ .
4.  $f(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \cdot \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ .

BEWEIS: (1) und (2) sind trivial.

Zu (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - c)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega(s+c)} ds = e^{-j\omega c} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega s} ds.$$

Zu (4):

Sei  $\varphi(t) := at$ . Im Endlichen gilt :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(at) dt &= \frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{a\alpha}^{a\beta} g(s) ds \\ &= \frac{1}{|a|} \cdot \int_{|a|\alpha}^{|a|\beta} g(s) ds. \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega \frac{s}{a}} ds = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

□

### Die Fouriertransformierte der Ableitung

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und stückweise stetig differenzierbar. Außerdem seien  $f$  und  $f'$  über  $\mathbb{R}$  integrierbar. Dann gilt:

$$f'(t) \circ \longrightarrow \bullet \mathbf{j}\omega \cdot \hat{f}(\omega).$$

BEWEIS: Auf Grund der Voraussetzungen muß  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  sein. Außerdem kann man partielle Integration anwenden:

$$\int_{-N}^M f'(t) e^{-\mathbf{j}\omega t} dt = f(t) e^{-\mathbf{j}\omega t} \Big|_{-N}^M - \int_{-N}^M f(t) (-\mathbf{j}\omega) e^{-\mathbf{j}\omega t} dt.$$

Für  $N, M \rightarrow \infty$  strebt der erste Summand auf der rechten Seite gegen 0 und der zweite gegen  $\mathbf{j}\omega \cdot \hat{f}(\omega)$ . □

**Bemerkung:** Bei höherer Differenzierbarkeit erhält man die Formel

$$f^{(n)}(t) \circ \longrightarrow \bullet (\mathbf{j}\omega)^n \cdot \hat{f}(\omega).$$

Auf die Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

### Die Ableitung der Fouriertransformierten

Sei  $f$  und auch die Funktion  $t \mapsto t \cdot f(t)$  über  $\mathbb{R}$  integrierbar.

Dann ist  $\hat{f}$  stetig differenzierbar, und es gilt:

$$t \cdot f(t) \circ \longrightarrow \bullet \mathbf{j} \cdot \hat{f}'(\omega).$$

BEWEIS: Wir haben schon weiter oben gesehen, daß  $\hat{f}$  auf Grund der Voraussetzungen existiert und stetig differenzierbar ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-\mathbf{j}t) e^{-\mathbf{j}\omega t} dt \\ &= -\mathbf{j} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) e^{-\mathbf{j}\omega t} dt \\ &= -\mathbf{j} \cdot \mathcal{F}[t \cdot f(t)]. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

#### Beispiele:

- Wir betrachten einen etwas modifizierten Rechteck-Impuls:

$$\pi_{A,T} := A \cdot \pi\left(\frac{2}{T}t\right) = \begin{cases} A & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\pi_{A,T} \circ \longrightarrow \bullet A \cdot T \cdot \text{si}\left(\frac{T}{2}\omega\right).$$

2. Als nächstes untersuchen wir einen modifizierten und verschobenen Rechteck-Impuls:

$$f(t) := \pi\left(\frac{t-a}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t-a| \leq T \\ 0 & \text{für } |t-a| > T. \end{cases}$$

Wir gehen aus von der Beziehung  $\pi(t) \circ \bullet 2\text{si}(\omega)$ .

Sei  $f_1(t) := \pi\left(t - \frac{a}{T}\right)$ . Dann ist  $f(t) = \pi\left(\frac{1}{T}t - \frac{a}{T}\right) = f_1\left(\frac{1}{T}t\right)$ . Damit folgt:

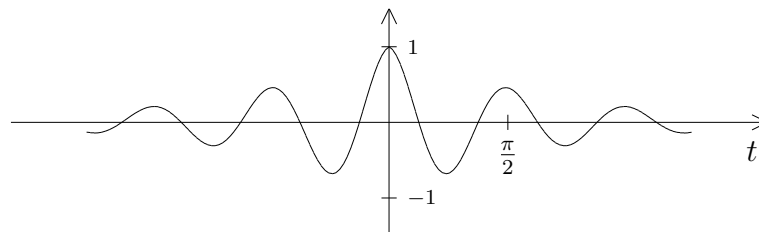
$$f_1(t) \circ \bullet \hat{\pi}(\omega)e^{-j\omega\frac{a}{T}} = 2\text{si}(\omega)e^{-j\omega\frac{a}{T}}$$

und

$$f(t) \circ \bullet T \cdot \widehat{f_1}(T\omega) = 2T \cdot \text{si}(T\omega)e^{-j\omega a}.$$

3. Schließlich betrachten wir noch die Fourier-Transformation einer amplitudenmodulierten Cosinus-Schwingung:

$$f(t) := e^{-a|t|} \cdot \cos(\Omega t), \quad \Omega, a \in \mathbb{R}, a > 0.$$



Wir erinnern uns an die Formeln

$$\begin{aligned} e^{jz} &= \cos z + j \sin z \\ \text{und } e^{-jz} &= \cos z - j \sin z. \end{aligned}$$

Also ist  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$  und

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|}(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}).$$

Zur Berechnung der Transformierten benötigen wir noch eine weitere Formel:

**Behauptung:**

$$\begin{aligned} \text{Wenn } f(t) &\circ \bullet F(\omega), \\ \text{dann } e^{j\omega_0 t} f(t) &\circ \bullet F(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

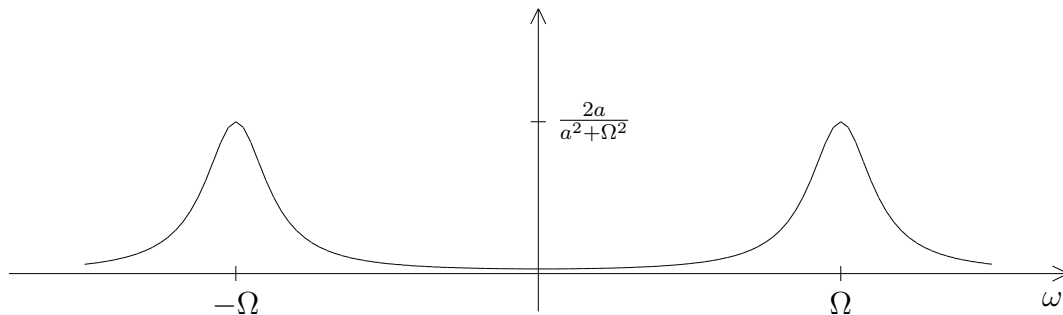
BEWEIS dafür: Es ist

$$\begin{aligned} F(\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt. \quad \square \end{aligned}$$



Nun haben wir:

$$\begin{aligned}
 e^{-a|t|} &\circ\text{---}\bullet F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \\
 \text{also } e^{-a|t|}e^{j\Omega t} &\circ\text{---}\bullet F(\omega - \Omega) = \frac{2a}{a^2 + (\omega - \Omega)^2} \\
 \text{und } e^{-a|t|}e^{-j\Omega t} &\circ\text{---}\bullet F(\omega + \Omega) = \frac{2a}{a^2 + (\omega + \Omega)^2}, \\
 \text{und damit } e^{-a|t|} \cos(\Omega t) &\circ\text{---}\bullet \frac{a}{a^2 + (\omega - \Omega)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega + \Omega)^2}.
 \end{aligned}$$



### Existenz der Faltung

*f* und *g* seien über  $\mathbb{R}$  integrierbar, und wenigstens eine der beiden Funktionen sei beschränkt. Dann ist die Faltung (das Konvolutionsprodukt)

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

eine beschränkte und integrierbare Funktion auf  $\mathbb{R}$ , mit  $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .

Außerdem ist  $f \star g = g \star f$ , und wenn eine der beiden Funktionen stetig ist, so ist auch  $f \star g$  stetig.

**BEWEIS:** Wir zeigen zunächst die Existenz des Faltungsintegrals:

Mit *f* und *g* ist auch  $\varphi(t, \tau) := f(t - \tau)g(\tau)$  meßbar. Ist *f* durch eine Konstante  $M > 0$  beschränkt, so ist  $|\varphi(t, \tau)| \leq M \cdot |g(\tau)|$  und daher existiert  $(f \star g)(t)$  für jedes feste *t*. Außerdem erhält man die Abschätzung:

$$|(f \star g)(t)| \leq M \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau,$$

d.h.,  $f \star g$  ist eine beschränkte Funktion.

Ist *g* durch *M* beschränkt, so ist  $|\varphi(t, \tau)| \leq M \cdot |\tilde{f}(\tau)|$ , mit der integrierbaren Funktion  $\tilde{f}(\tau) := f(t - \tau)$ .

Die Gleichung  $(f \star g)(t) = (g \star f)(t)$  ergibt sich aus der Substitutionsregel.

Ist sogar eine der beiden Funktionen stetig, so folgt aus Satz 2 vom Anfang des Paragraphen, daß auch  $f \star g$  stetig ist.

Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f \star g(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) dt \right) d\tau \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right). \end{aligned}$$

Weil  $|f \star g| \leq |f| \star |g|$  ist, folgt:

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

□

Auch wenn keine der beiden Funktionen stetig ist, folgt schon die Stetigkeit der Faltung, allerdings ist das etwas mühsamer zu beweisen (vgl. T.W. Körner: Fourier Analysis, Appendix C). Die Moral: durch Faltung werden die Funktionen glatter!

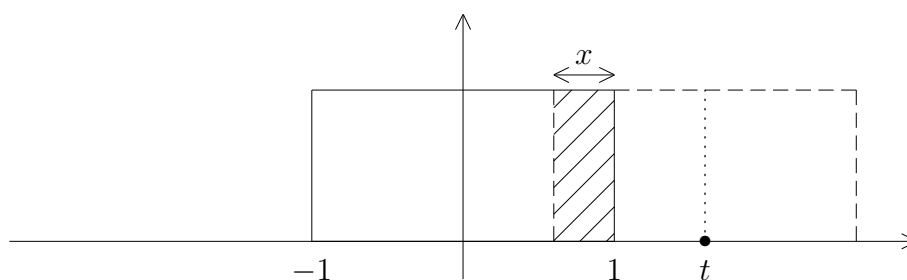
### Beispiel:

Wir wollen sehen, was herauskommt, wenn man den Rechteckimpuls  $\pi$  mit sich selbst faltet:

Es ist

$$(\pi \star \pi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\tau)\pi(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^1 \pi(t-\tau) d\tau.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist = 1, wenn  $|\tau| \leq 1$  und  $|t-\tau| \leq 1$  ist, sonst ist er = 0. Nur wenn  $|t| \leq 2$  ist, überlappen sich die beiden Bereiche:



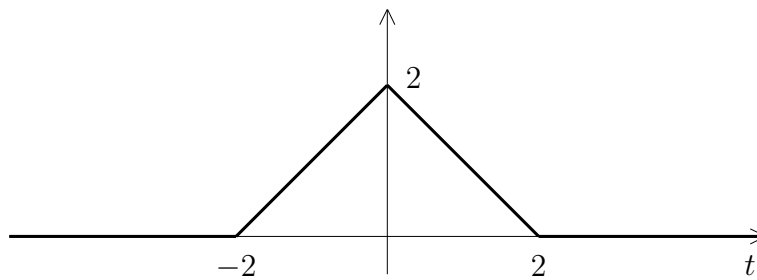
Ist  $x$  die Länge des Überlappungsbereiches, so ist

$$x + (|t| - 1) = 1, \quad \text{also } x = 2 - |t|.$$

Daraus folgt:

$$(\pi \star \pi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |t| \geq 2 \\ 2 - |t| & \text{falls } |t| < 2. \end{cases}$$

Das ist ein Dreiecks-Impuls der Breite 4 und der Höhe 2.



### Fouriertransformation der Faltung

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien stückweise stetig, beschränkt und über  $\mathbb{R}$  integrierbar. Dann gilt:

$$(f \star g)(t) \circ \bullet \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

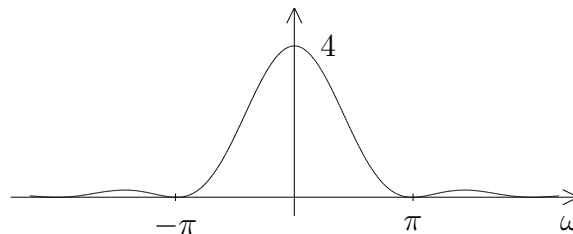
BEWEIS: Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} g(\tau) d\tau \right) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(t+\tau)} g(\tau) f(t) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega u} g(\tau) f(u - \tau) d\tau du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega u} (g \star f)(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(u) e^{-j\omega u} du. \end{aligned}$$

□

Beispiel:

Es ist  $(\pi \star \pi)(t) \circ \bullet \hat{\pi}(\omega) \cdot \hat{\pi}(\omega) = 4\text{si}^2(\omega).$



### Fourier-Integral-Theorem

Sei  $f$  stückweise glatt und absolut integrierbar. Dann ist

$$\frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] = \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \quad (\text{Cauchyscher Hauptwert})$$

Wir verzichten hier auf den BEWEIS. Eine Beweis-Skizze findet sich bei Meyberg-Vachnauer (Höhere Mathematik 2, Kap. 11, Satz 6.3.), detailliertere Beweise in der einschlägigen mathematischen Fachliteratur.

Sind  $f$  und  $\hat{f}$  beide integrierbar (im Sinne von Lebesgue), so gilt der sogenannte „Umkehrsatz“: fast überall ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega x} d\omega.$$

### Folgerung

*Erfüllen  $f$  und  $g$  die Voraussetzungen des Fourier-Integral-Theorems, und ist außerdem*

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}[g(x-) + g(x+)]$$

*für alle  $x$ , so gilt:*

$$\hat{f} = \hat{g} \implies f = g.$$

*Auf den stetigen Funktionen ist die Fourier-Transformation also injektiv.*

Wir wollen jetzt ein wichtiges Beispiel behandeln:

Sei  $f(t) := e^{-t^2}$ . Die Funktion ist stetig,  $\geq 0$  und über  $\mathbb{R}$  integrierbar. Also existiert die Fourier-Transformierte

$$f(t) \circ \bullet F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$f$  ist sogar stetig differenzierbar, und  $f'(t) = -2t \cdot e^{-t^2} = -2t \cdot f(t)$  ist ebenfalls absolut integrierbar. Wir haben deshalb zwei Darstellungsmöglichkeiten für die Fourier-Transformierte von  $f'(t)$ :

$$\begin{aligned} f'(t) &\circ \bullet -2jF'(\omega) && \text{(Ableitung der Fouriertransformierten)} \\ \text{und } f'(t) &\circ \bullet j\omega F(\omega) && \text{(Fouriertransformierte der Ableitung)} \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= -\frac{\omega}{2} F(\omega) \\ \text{und } F(0) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Das ist eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit Anfangsbedingung. Die Lösung ist einfach:

$$(\ln F)'(\omega) = \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{\omega}{2},$$

also

$$\ln F(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + \text{const.}, \quad \text{d.h. } F(\omega) = C \cdot e^{-(\omega^2/4)},$$

und wegen der Anfangsbedingung ist  $C = \sqrt{\pi}$ . Also haben wir:

$$f(t) = e^{-t^2} \circ \bullet F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-(\omega^2/4)}.$$

Daraus folgt:

**„Fixpunkt“ der Fouriertransformation**

$$e^{-(t^2/2)} \circ \bullet \sqrt{2\pi} e^{-(\omega^2/2)}.$$

BEWEIS: Wir verwenden die Formel

$$f(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \cdot \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Daraus ergibt sich (mit  $F(\omega) := \sqrt{\pi} e^{-(\omega^2/4)}$ ):

$$e^{-(t^2/2)} = e^{-(t/\sqrt{2})^2} \circ \bullet \sqrt{2} \cdot F(\sqrt{2}\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(\omega^2/2)}.$$

□

Tatsächlich ist  $e^{-(t^2/2)}$  nicht wirklich ein Fixpunkt der Fouriertransformation. Setzen wir aber

$$\tilde{\mathcal{F}}[f(t)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

so ergibt sich:

$$\tilde{\mathcal{F}}[e^{-(t^2/2)}] = e^{-(\omega^2/2)}.$$

Deshalb findet sich in der Literatur häufig auch  $\tilde{\mathcal{F}}$  als Fourier-Transformation.

Wir wollen nun eine Methode kennenlernen, wie man die Rücktransformation praktisch ausführen kann:

Ist  $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  und  $f$  stetig, so ist bekanntlich

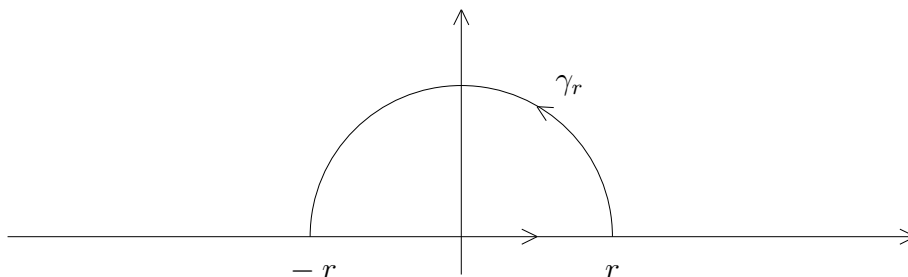
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, daß  $\hat{f}$  Einschränkung einer meromorphen Funktion  $F$  auf  $\mathbb{C}$  ist.

**ACHTUNG!!**  $F$  ist hier nicht die Fourier-Transformierte, sondern deren Fortsetzung ins Komplexe.

Wir nehmen außerdem an, daß  $F$  nur endlich viele Polstellen hat und daß  $z \cdot F(z)$  für großes  $z$  beschränkt bleibt, und wir betrachten zunächst nur den Fall  $t > 0$ .

Dann benutzen wir folgenden Integrationsweg:



Nach dem Residuensatz ist

$$\int_{\gamma_r} F(z)e^{jzt} dz + \int_{-r}^r \widehat{f}(\omega)e^{j\omega t} d\omega = 2\pi \mathbf{j} \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z(F(z)e^{jzt}).$$

Ist  $|z \cdot F(z)| \leq M$  für  $|z| \geq R$ , so gilt für  $r \geq R$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} F(z)e^{jzt} dz \right| &= \left| \int_0^\pi F(re^{js}) \mathbf{j} r e^{js} \cdot e^{j\gamma_r(s)t} ds \right| \\ &\leq \int_0^\pi r |F(re^{js})| e^{-rt \sin s} ds \\ &\leq M \cdot \int_0^\pi e^{-rt \sin s} ds \\ &= 2M \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-rt \sin s} ds. \end{aligned}$$

Um das verbliebene Integral auszuwerten, müssen wir die Sinusfunktion näher untersuchen:

Ist  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ , so ist  $\sin s \geq \frac{2}{\pi}s$ , also

$$e^{-rt \sin s} \leq e^{-rt \frac{2}{\pi}s}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-rt \sin s} ds &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-rt \frac{2}{\pi}s} ds \\ &= \left( \frac{-\pi}{2rt} \right) e^{-rt \frac{2}{\pi}s} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2rt} (1 - e^{-rt}), \end{aligned}$$

und es folgt:

$$\left| \int_{\gamma_r} F(z)e^{jzt} dz \right| \leq \frac{M\pi}{rt} (1 - e^{-rt}) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \widehat{f}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \mathbf{j} \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z(F(z)e^{jzt}). \end{aligned}$$

Die Formel gilt nur für  $t > 0$ . Ist  $t < 0$ , so muß man durch die untere Halbebene laufen und erhält:

$$f(t) = -\mathbf{j} \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z)<0} \operatorname{res}_z(F(z)e^{jzt}).$$

Wir wollen das Ergebnis auf rationale Funktionen  $F(z)$  anwenden:

Ist  $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  mit  $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$ , so ist  $|z \cdot F(z)|$  im Unendlichen beschränkt.

Für unsere Zwecke reicht diese Bedingung, denn für die Rücktransformation brauchen wir

nur den Cauchyschen Hauptwert, nicht die Existenz des uneigentlichen Integrals von  $-\infty$  bis  $+\infty$ .

**Beispiel :**

Gegeben sei die Funktion  $\hat{f}(\omega) := \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$ , mit einer Konstanten  $a > 0$ . Dann ist  $\hat{f}$  Einschränkung einer meromorphen Funktion

$$F(z) := \frac{2a}{(z - \mathbf{j}a)(z + \mathbf{j}a)},$$

die zwei einfache Polstellen aufweist. Sie erfüllt alle Bedingungen, die wir brauchen, um die Rücktransformation vornehmen zu können.

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) &= \frac{2a}{2\mathbf{j}a}e^{-at} = \frac{1}{\mathbf{j}}e^{-at} \\ \text{und } \operatorname{res}_{-\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) &= \frac{2a}{-2\mathbf{j}a}e^{at} = \frac{1}{-\mathbf{j}}e^{at}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Für  $t > 0$  ist  $f(t) = \mathbf{j} \cdot \operatorname{res}_{\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) = e^{-at}$ ,  
und für  $t < 0$  ist  $f(t) = -\mathbf{j} \cdot \operatorname{res}_{-\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) = e^{at}$ .

Zusammen ergibt das:

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

Das ist genau das, was wir erwartet haben.

## §4 Die Laplacetransformation

Die Arbeit mit der Fourier-Transformation bereitet gewisse Probleme. Viele wichtige Funktionen lassen sich nicht transformieren, und außerdem hat man es in der Praxis selten mit Funktionen zu tun, die für alle Zeiten existieren. Einschaltvorgänge werden zu wenig berücksichtigt.

Wir wenden uns nun Funktionen  $f$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  zu. Normalerweise existiert auch deren Fourier-Transformierte nicht. Wir erzwingen daher die Konvergenz des Fourier-Integrals, indem wir einen „konvergenzerzeugenden Faktor“ einführen, d.h. wir ersetzen  $f(t)$  durch  $f(t)e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ . Dann ist

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\alpha+j\omega)t} dt.$$

Dieses Integral existiert z.B., wenn  $f(t)$  stückweise stetig und  $f(t)e^{-\alpha t}$  absolut integrierbar ist.

### Definition:

Eine Regelfunktion  $f : \mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  wächst höchstens exponentiell von der Ordnung  $\gamma$ , wenn es Konstanten  $M > 0$  und  $T > 0$  gibt, so daß

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$$

für  $t \geq T$  ist.

### Existenz der Laplacetransformation

Wenn die Regelfunktion  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$  höchstens exponentiell von der Ordnung  $\gamma$  wächst, dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$F(z) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > \gamma$ .

BEWEIS: Wir schreiben  $z$  in der Form  $z = x + jy$ , mit  $x > \gamma$ . Dann gilt für  $t \geq T$ :

$$|f(t)e^{-zt}| = |f(t)| \cdot e^{-xt} \leq M \cdot e^{(\gamma-x)t} = M \cdot e^{-|\gamma-x|t}.$$

Diese Funktion ist absolut integrierbar, denn es ist

$$\int_T^{T_1} e^{-|\gamma-x|t} dt = \left( -\frac{1}{|\gamma-x|} \cdot e^{-|\gamma-x|t} \right) \Big|_T^{T_1} = \frac{1}{|\gamma-x|} \cdot (e^{-|\gamma-x|T} - e^{-|\gamma-x|T_1}),$$

und dieser Ausdruck bleibt beschränkt für  $T_1 \rightarrow \infty$ . □



**Definition:**

Sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig. Das uneigentliche Integral

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt$$

heißt *Laplace-Transformierte* von  $f$ , sofern es für ein  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergiert.

Man schreibt auch

$$F(z) = \mathcal{L}[f(t)],$$

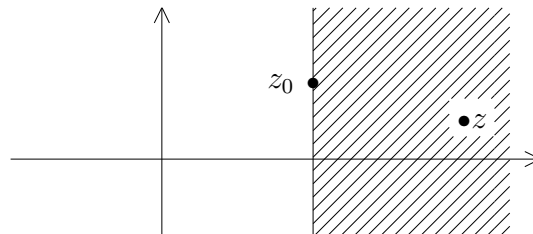
oder – wenn keine Verwechslungsgefahr besteht – wie bei der Fourier-Transformation

$$f(t) \circ \bullet F(z).$$

$f(t)$  heißt *Urbildfunktion*,  $F(z)$  *Bildfunktion*.

**Bereiche absoluter Konvergenz**

Wenn die Laplace-Transformierte  $F(z)$  von  $f(z)$  für ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  absolut konvergiert, dann tut sie das auch für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0)$ .



BEWEIS: Sei  $z_0 := u + \mathbf{j}v$  und  $z = x + \mathbf{j}y$ , mit  $x \geq u$ . Dann ist

$$|e^{-zt}| = e^{-xt} \leq e^{-ut} = |e^{-z_0 t}|.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Das Infimum  $\alpha$  aller reeller Zahlen  $x \geq 0$ , so daß

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt$$

für  $\operatorname{Re}(z) > x$  absolut konvergiert, heißt die *Abszisse absoluter Konvergenz* für  $\mathcal{L}[f(t)]$ . Die Halbebene, die links von der vertikalen Geraden  $\{z \mid \operatorname{Re}(z) = \alpha\}$  begrenzt wird, ist das genaue Konvergenzgebiet des Laplace-Integrals. Der Rand gehört entweder ganz dazu oder überhaupt nicht. Da  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  ist, kann auch die ganze Ebene als Konvergenzgebiet vorkommen.

**Beispiele:**

1. Sei  $f(t) \equiv 1$ . Da wir nur Funktionen betrachten, die  $= 0$  für  $t < 0$  sind, lassen wir diese zusätzliche Bedingung meistens weg.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^R 1 \cdot e^{-zt} dt &= \left( -\frac{1}{z} e^{-zt} \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{1}{z} (1 - e^{-zR}),\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  gegen  $\frac{1}{z}$ . Also haben wir:

$$1 \circ \bullet \frac{1}{z} \quad (\text{für } \operatorname{Re}(z) > 0)$$

2. Die Funktion  $f(t) := e^{at}$  wächst höchstens exponentiell von der Ordnung  $a$ . Also können wir die Laplace-Transformierte bilden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at} e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(a-z)t} dt \\ &= \left( \frac{1}{a-z} e^{(a-z)t} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{a-z} (0 - 1) = \frac{1}{z-a},\end{aligned}$$

falls  $\operatorname{Re}(a-z) < 0$  ist, also  $\operatorname{Re}(z) > a$ .

3. Sei  $f(t) := \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty e^{(j\omega-z)t} dt + \int_0^\infty e^{-(j\omega+z)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{j\omega-z} e^{(j\omega-z)t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{-(j\omega+z)} e^{-(j\omega+z)t} \Big|_0^\infty \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{j\omega-z} + \frac{1}{j\omega+z} \right] \\ &= \frac{z}{z^2 + \omega^2},\end{aligned}$$

für  $\operatorname{Re}(j\omega - z) < 0$  und  $\operatorname{Re}(j\omega + z) > 0$ , also  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

Analog erhält man:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

**Bemerkung :** Die Laplace-Transformierte

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

ist als Parameterintegral im Bereich der absoluten Konvergenz eine holomorphe Funktion von  $z$ . (Zum genauen Beweis vgl. G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, 3.

Kap., §2, Satz 1.). Es kann allerdings vorkommen – wie die vorangegangenen Beispiele zeigen –, daß  $F(z)$  auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann. Man wird dann auch die fortgesetzte Funktion als Laplace-Transformierte von  $f$  bezeichnen.

Beschränkt man sich auf reelle Parameter  $s$ , so endet der Existenzbereich von  $F(s)$  stets bei der Abszisse der absoluten Konvergenz.

### Eigenschaften der Laplace-Transformation

Sei  $f(t) \circ \bullet F(z)$  und  $g(t) \circ \bullet G(z)$ . Dann gilt:

1. *Linearität:*  $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \circ \bullet a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$ .

2. *Ähnlichkeitssatz:*

$$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{1}{a}z\right). \quad (\text{für } a \in \mathbb{R}, a > 0)$$

3. *Verschiebungssatz (Verschiebung im Zeitbereich):*

$$f(t - T) \circ \bullet e^{-zT} \cdot F(z). \quad (\text{für } T \in \mathbb{R})$$

(Man beachte, daß  $f(t - T)$  links vom Nullpunkt abgeschnitten werden muß!)

4. *Dämpfungssatz (Verschiebung im Bildbereich):*

$$e^{-ct} \cdot f(t) \circ \bullet F(s + c). \quad (\text{für } c \in \mathbb{C})$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) Ist  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(at)e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(at)e^{-\frac{z}{a}at} \cdot a dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{z}{a}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right). \end{aligned}$$

3) Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - T)] &= \int_0^\infty f(t - T)e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-z(\tau+T)} d\tau \\ &= e^{-zT} \cdot \int_0^\infty f(\tau)e^{-z\tau} d\tau \\ &= e^{-zT} \cdot F(z). \end{aligned}$$

4) Es ist

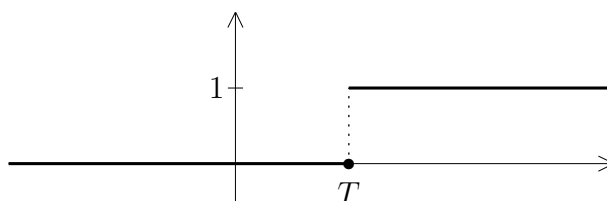
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-ct}f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(z+c)t} dt \\ &= F(z+c).\end{aligned}$$

□

**Beispiele:**

1. Als erstes betrachten wir die Sprungfunktion

$$\sigma_T(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq T \\ 1 & \text{für } t > T. \end{cases}$$



Ist  $H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$  die sogenannte *Heaviside-Funktion*, so kann man schreiben:

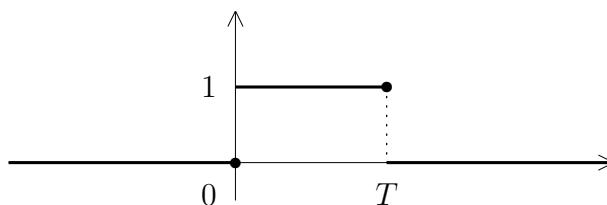
$$\sigma_T(t) = H(t - T).$$

Für die Laplace-Transformation besteht kein Unterschied zwischen  $H$  und der Funktion 1. Also gilt:

$$\mathcal{L}[\sigma_T(t)] = \mathcal{L}[H(t - T)] = e^{-zT} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{1}{z} \cdot e^{-zT}.$$

2. Als nächstes betrachten wir den Rechteck-Impuls

$$\pi_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

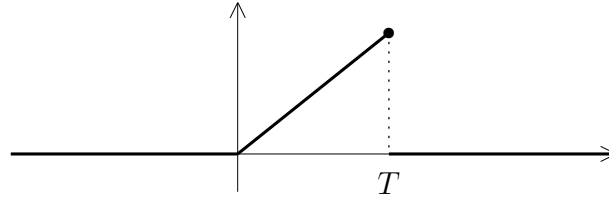


Es ist  $\pi_T(t) = \sigma_0(t) - \sigma_T(t)$ , also

$$\mathcal{L}[\pi_T(t)] = \frac{1}{z}(1 - e^{-zT}).$$

3. Nun untersuchen wir die folgende Zackenfunktion:

$$z_{a,T}(t) := \begin{cases} at & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \text{ mit } T > 0.$$



Ist  $g(t) = at$ , so ist

$$(g \cdot H)(t) - (g \cdot H)(t - T) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ at & \text{für } 0 < t \leq T \\ aT & \text{für } t > T. \end{cases}$$

Also folgt:

$$z_{a,T}(t) = (g \cdot H)(t) - (g \cdot H)(t - T) - aT \cdot \sigma_T(t).$$

Wir können jetzt die Laplace-Transformierte von  $z_{a,T}$  bestimmen, wenn wir  $\mathcal{L}[t]$  kennen. Es ist aber

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t e^{-zt} dt \\ &= \left( t \cdot \left( -\frac{1}{z} e^{-zt} \right) \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \\ &= -\frac{1}{z^2} e^{-zt} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{z^2}, \end{aligned}$$

für  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[z_{a,T}(t)] &= \mathcal{L}[g(t)] - \mathcal{L}[g(t - T)] - aT \cdot \mathcal{L}[\sigma_T(t)] \\ &= a \cdot \mathcal{L}[t] - a \cdot \mathcal{L}[t - T] - aT \mathcal{L}[\sigma_T(t)] \\ &= \frac{a}{z^2} - a \cdot e^{-zT} \cdot \frac{1}{z^2} - aT \cdot e^{-zT} \cdot \frac{1}{z} \\ &= \frac{a}{z^2} (1 - e^{-zT} - zT e^{-zT}). \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt, wie sich *Differentiation und Integration im Zeitbereich* auswirkt. Dabei wollen wir die Klasse derjenigen Funktionen, die wir Laplace-transformieren können, geringfügig erweitern:

**Definition:**

Unter einer *L-Funktion* verstehen wir eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .
2.  $f$  ist stückweise stetig für  $t > 0$ .
3.  $f$  ist bei 0 uneigentlich integrierbar.
4. Das Laplace-Integral

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

existiert für wenigstens ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$  (und dann natürlich für alle  $\zeta$  mit  $\operatorname{Re}(\zeta) > \operatorname{Re}(z)$ ).

Selbstverständlich ist jede stückweise stetige Funktion mit höchstens exponentiellem Wachstum eine L-Funktion.

**Die Laplace-Transformierte der Ableitung**

$f(t)$  sei  $= 0$  für  $t < 0$  und differenzierbar für  $t > 0$ , und  $f'$  sei eine L-Funktion.

Dann ist  $f$  eine stückweise stetige Funktion von höchstens exponentiellem Wachstum, und mit  $F(z) := \mathcal{L}[f(t)]$  gilt:

$$f'(t) \circ \bullet z \cdot F(z) - f(0+).$$

**BEWEIS:** Da  $f'$  eine L-Funktion ist, existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^t f'(\tau) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^t f'(\tau) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(t) - f(\varepsilon)),$$

und damit existiert auch

$$f(0+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon),$$

und es ist

$$\int_0^t f'(\tau) d\tau = f(t) - f(0+).$$

Weiterhin existiert nach Voraussetzung für ein  $z_0 = x_0 + \mathbf{j}y_0$  mit  $x_0 > 0$  das Integral

$$\int_0^{\infty} f'(s)e^{-z_0 s} ds.$$

Also ist  $M(t) := \int_0^t |f'(s)| e^{-x_0 s} ds$  durch eine Konstante  $M > 0$  beschränkt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-x_0 t}| &= \left| \left( \int_0^t f'(s) ds \right) \cdot e^{-x_0 t} \right| \\ &\leq \int_0^t |f'(s)| e^{-x_0 s} ds \quad (\text{weil } e^{-x_0 t} \leq e^{-x_0 s} \text{ für } s \leq t) \\ &= M(t) \leq M, \end{aligned}$$

also  $|f(t)| \leq M \cdot e^{x_0 t}$ . Damit wächst  $f$  höchstens exponentiell von der Ordnung  $x_0$ .

Ist  $x := \operatorname{Re}(z) > x_0$ , so ist  $|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|e^{-x_0 t} \cdot e^{-(x-x_0)t} \leq M \cdot e^{-(x-x_0)t}$ , und dieser Ausdruck strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null. Mit partieller Integration folgt nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-zt} dt \\ &= f(t)e^{-zt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-ze^{-zt}) dt \\ &= -f(0+) + z \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt \\ &= -f(0+) + z \cdot F(z). \end{aligned}$$

□

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht:

### Folgerung

Sei  $f(t)$  für  $t > 0$   $n$ -mal differenzierbar, und  $f^{(n)}$  eine  $L$ -Funktion. Dann ist auch  $f$  eine  $L$ -Funktion, und für die Laplace-Transformierte  $F(z)$  von  $f$  gilt:

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet z^n \cdot F(z) - z^{n-1} \cdot f(0+) - z^{n-2} \cdot f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

### Die Laplace-Transformierte des Integrals

Sei  $f(t)$  stetig für  $t > 0$  und von höchstens exponentiellem Wachstum. Es existiere  $f(0+)$  und damit die Laplace-Transformierte  $F(z)$  von  $f(t)$ . Dann existiert auch die Laplace-Transformierte von

$$h(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

und es gilt:

$$h(t) \circ \bullet \frac{1}{z} F(z).$$

BEWEIS: Da  $h'(t) = f(t)$  für  $t > 0$  ist, folgt aus den vorangegangenen Sätzen, daß die Laplace-Transformierte von  $h$  existiert. Außerdem ist  $h$  in  $t = 0$  stetig, mit  $h(0) = 0$ .

Also ist  $F(z) = z \cdot \mathcal{L}[h(t)]$  und  $h(t) \circ \bullet \frac{1}{z} F(z)$ . □

### Beispiele :

1. Die Funktion  $f(t) = t^n$  erfüllt alle nötigen Voraussetzungen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{n-1}] &= \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{n}t^n\right)'\right] \\ &= \frac{1}{n}(z \cdot \mathcal{L}[t^n] - 0) \\ &= \frac{z}{n} \cdot \mathcal{L}[t^n]. \end{aligned}$$

Nachdem  $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{z^2}$  ist, folgt aus der obigen Reduktionsformel:

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

2. Es ist  $(\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$ .

Also ist

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{z} \cdot \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{z(z^2 + 4)}.$$

Schließlich betrachten wir noch die Laplace-Transformation von periodischen Funktionen:

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  periodisch mit Periode  $T$ . Dann gilt für die Laplace-Transformierte:

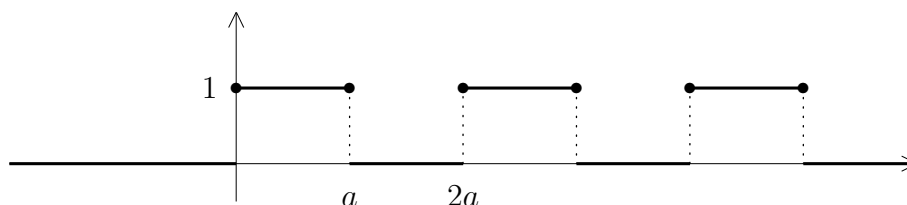
$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-zt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(t+nT)e^{-z(t+nT)} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(t)e^{-zt} e^{-znT} dt \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-znT} \right) \cdot \int_0^T f(t)e^{-zt} dt. \end{aligned}$$

Der Vorfaktor ist eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-znT} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{e^{zT}} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-zT}}.$$

**Beispiel:**

Sei  $a > 0$  und  $f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2na \leq t \leq (2n+1)a \\ 0 & \text{für } (2n+1)a < t < (2n+2)a. \end{cases}$



Dann ist

$$\int_0^T f(t)e^{-zt} dt = \int_0^a e^{-zt} dt = \left( \frac{1}{-z} \cdot e^{-zt} \right) \Big|_0^a = -\frac{1}{z}(e^{-az} - 1),$$

also

$$F(z) = \frac{1 - e^{-az}}{z(1 - e^{-2az})}.$$



Ich erinnere nun an die Faltung

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Wir wollen stückweise stetige Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  als *kausale Funktionen* bezeichnen. Dann gilt:

### Die Faltung kausaler Funktionen

*Sind  $f$  und  $g$  kausale Funktionen, so existiert das Faltungsintegral*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau,$$

*und es gilt:*

1.  $f * g = g * f$ .
2.  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .

**BEWEIS:** Die Existenz ist klar, es wird ja nur über ein endliches Intervall integriert.

Das Kommutativgesetz haben wir schon für absolut integrierbare Funktionen auf  $\mathbb{R}$  nachgewiesen.

Zum Beweis des Assoziativgesetzes berechnen wir beide Seiten:

$$\begin{aligned} (f * g) * h(t) &= \int_0^t f * g(t - \tau)h(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(t - \tau - s)g(s)h(\tau) ds d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\tau}^t f(t - u)g(u - \tau)h(\tau) du d\tau, \end{aligned}$$

wobei die Substitution  $u(s) = \tau + s$  gemacht wurde.

Andererseits ist

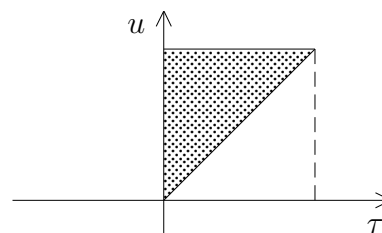
$$\begin{aligned} f * (g * h)(t) &= \int_0^t f(t - u)g * h(u) du \\ &= \int_0^t \int_0^u f(t - u)g(u - \tau)h(\tau) d\tau du. \end{aligned}$$

In beiden Fällen wird die Funktion  $F_t(\tau, u) := f(t - u)g(u - \tau)h(\tau)$  über

$$\begin{aligned} A &:= \{(\tau, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \tau \leq t, \tau \leq u \leq t\} \\ &= \{(\tau, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \tau \leq u, 0 \leq u \leq t\} \end{aligned}$$

integriert.

$A$  ist sowohl ein Normalbereich bzgl. der  $\tau$ -Achse, als auch ein Normalbereich bzgl. der  $u$ -Achse.



Daher ist

$$\begin{aligned}
 (f * g) * h(t) &= \int_0^t \int_\tau^t F_t(\tau, u) du d\tau \\
 &= \int_A F_t(\tau, u) dv_2 \\
 &= \int_0^t \int_0^u F_t(\tau, u) d\tau du \\
 &= f * (g * h)(t).
 \end{aligned}$$

□

Die Faltung verhält sich weitgehend wie ein normales Produkt, es gilt auch das Distributivgesetz. Allerdings ist  $1 * f \neq f$ :

$$1 * f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

### Die Laplace-Transformation der Faltung

*Sind  $f$  und  $g$  stückweise stetig und von höchstens exponentiellem Wachstum, so ist  $f * g$  stetig und ebenfalls höchstens von exponentiellem Wachstum. Außerdem gilt:*

*Wenn  $f(t) \circ\text{---}\bullet F(z)$  und  $g(t) \circ\text{---}\bullet G(z)$ , dann*

$$(f * g)(t) \circ\text{---}\bullet F(z) \cdot G(z).$$

**BEWEIS:** Daß  $f * g$  höchstens von exponentiellem Wachstum ist, kann man leicht nachrechnen. Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned}
 F(z) \cdot G(z) &= \int_0^\infty f(u)e^{-zu} du \cdot \int_0^\infty g(v)e^{-zv} dv \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-z(u+v)} du dv \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-v)g(v)e^{-zt} dt dv \\
 &= \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t f(t-v)g(v) dv dt \\
 &= \int_0^\infty (f * g)(t)e^{-zt} dt \\
 &= \mathcal{L}[f * g(t)].
 \end{aligned}$$

□

### Beispiele :

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{z-a} \bullet\text{---}\circ e^{at} \\
 \text{und} &\frac{1}{z-b} \bullet\text{---}\circ e^{bt},
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(z-a)(z-b)} &\bullet\text{---}\circ e^{at} * e^{bt} \\
 &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} e^{b\tau} d\tau \\
 &= e^{at} \cdot \int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau \\
 &= e^{at} \cdot \left( \frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a} \right) \Big|_0^t \\
 &= e^{at} \cdot \frac{1}{b-a} (e^{(b-a)t} - 1) \\
 &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}.
 \end{aligned}$$

2. Wir wollen noch ein etwas schwierigeres Beispiel durchrechnen:

Es ist

$$\begin{aligned}
 \sqrt{t} * \sqrt{t} &= \int_0^t \sqrt{(t-\tau)\tau} d\tau \\
 &= \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{(t-\tau(s))\tau(s)\tau'(s)} ds \quad (\tau(s) := s + \frac{t}{2}) \\
 &= \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{ts + \frac{t^2}{2} - (s^2 + \frac{t^2}{4} + st)} ds \\
 &= \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{\frac{t^2}{4} - s^2} ds \\
 &= \frac{t}{2} \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{1 - (\frac{2s}{t})^2} ds \\
 &= \frac{t^2}{4} \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{1 - \varphi(s)^2} \varphi'(s) ds \quad (\varphi(s) := \frac{2s}{t}) \\
 &= \frac{t^2}{4} \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \frac{t^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} t^2.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] \cdot \mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\pi}{8} \cdot \mathcal{L}[t^2] = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{z^3} = \frac{\pi}{4z^3}$$

und

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2z\sqrt{z}}.$$

3. Das vorige Beispiel ist ein Spezialfall der Transformation der Funktion  $t^\alpha$ , mit positivem reellen  $\alpha$ .

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$  hat höchstens exponentielles Wachstum, ist also Laplace-transformierbar. Mit der Substitution  $u(t) = zt$  erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^\alpha] &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^\infty \left(\frac{u(t)}{z}\right)^\alpha e^{-u(t)} u'(t) dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^\infty \left(\frac{u}{z}\right)^\alpha e^{-u} du \\ &= \frac{1}{z^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du \\ &= \frac{1}{z^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(\alpha + 1),\end{aligned}$$

denn es ist ja  $\Gamma(x) := \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ .

Das Ergebnis aus dem vorigen Beispiel ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) erhält man über die Beziehungen

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Wir wollen uns nun mit der Rücktransformation befassen:

Sei  $f$  stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t},$$

für große  $t$ . Außerdem sei natürlich  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Sei  $x > \gamma$  fest, aber beliebig gewählt. Dann ist auch  $f_x(t) := e^{-xt} f(t)$  stückweise glatt und  $= 0$  für  $t < 0$ . Daher erfüllt  $f_x$  die Voraussetzungen des Fourier-Integral-Theorems. Es ist

$$\begin{aligned}\widehat{f_x}(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty f_x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{-(x+j\omega)t} dt \\ &= F(x + j\omega),\end{aligned}$$

wenn wir mit  $F(z)$  die Laplace-Transformierte von  $f$  bezeichnen. Und dann ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f_x(t-) + f_x(t+)) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \widehat{f_x}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x + j\omega) e^{j\omega t} d\omega,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) &= \frac{e^{xt}}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x + j\omega) e^{(x+j\omega)t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-jA}^{x+jA} F(z) e^{zt} dz,\end{aligned}$$

wobei über den Weg  $\omega \mapsto x + \mathbf{j}\omega$  integriert wird. Damit haben wir bewiesen:

### Komplexe Umkehrformel

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum,  $F(z)$  die Laplace-Transformierte von  $f(t)$ , mit  $\gamma$  als Abszisse der absoluten Konvergenz. Dann ist

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \cdot \text{C.H.} \int_{x-\mathbf{j}\infty}^{x+\mathbf{j}\infty} F(z)e^{zt} dz.$$

Die Integration ist über die Gerade  $\{z \mid \text{Re}(z) = x\}$  zu erstrecken, wobei  $x > \gamma$  beliebig gewählt werden kann. Ist  $f$  in  $t$  stetig, so steht auf der linken Seite der Gleichung einfach nur der Wert  $f(t)$ .

Die komplexe Umkehrformel kann nur auf solche holomorphen Funktionen angewandt werden, die Laplace-Transformierte sind. Wir hatten mehrfach eine gewisse Analogie zur Theorie der Potenzreihen festgestellt. Man kann sich nun fragen, ob jede holomorphe Funktion, die auf einer rechten Halbebene holomorph ist, schon automatisch die Laplace-Transformierte einer geeigneten Urbildfunktion ist. Leider gilt das nicht, es lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben.

Das Problem, ein vollständiges Kriterium dafür anzugeben, wann eine holomorphe Funktion eine Laplace-Transformierte ist, ist ungelöst. Es gibt bis jetzt nur hinreichende Kriterien. So reicht es z.B., wenn  $F(x + \mathbf{j}y)$  auf jeder vertikalen Geraden absolut integrierbar ist und lokal gleichmäßig in  $x$  für  $|y| \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Etwas konkreter ist folgender Satz:

### Darstellbarkeitskriterium

Sei  $F(z)$  in der Halbebene  $\{z \mid \text{Re}(z) > x_1 \geq 0\}$  holomorph und von der Gestalt

$$F(z) = \frac{c}{z^\alpha} + \frac{g(z)}{z^{1+\varepsilon}},$$

mit  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$  und einer für  $\text{Re}(z) \geq x_1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ , beschränkten Funktion  $g$ .

Dann ist  $F(z)$  die Laplace-Transformierte einer Funktion  $f(t)$ .

Zum BEWEIS vgl. Doetsch, 7. Kap., §2, Satz 4.

Wir kommen nun zu den verschiedenen Methoden, die Rück-Transformation praktisch durchzuführen.

### Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen:

Die folgende Tabelle kann benutzt werden:

$F(z)$		$f(t)$	$F(z)$		$f(t)$
$\frac{1}{z}$	●—○	1	$\frac{1}{z}e^{-zT}$	●—○	$\sigma_T(t)$
$\frac{1}{z-a}$	●—○	$e^{at}$	$\frac{1}{z}(1-e^{-zT})$	●—○	$\pi_T(t)$
$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$	●—○	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$	$\frac{2}{z(z^2+4)}$	●—○	$\sin^2 t$
$\frac{1}{z^2}$	●—○	$t$	$\arctan\left(\frac{\omega}{z}\right)$	●—○	$\frac{\sin(\omega t)}{t}$
$\frac{1}{z^n}$	●—○	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$	$\frac{z}{z^2-\omega^2}$	●—○	$\cosh(\omega t)$
$\frac{z}{z^2+\omega^2}$	●—○	$\cos(\omega t)$	$\frac{\omega}{z^2-\omega^2}$	●—○	$\sinh(\omega t)$
$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$	●—○	$\sin(\omega t)$	$\frac{1}{z\sqrt{z}}$	●—○	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

Die Formel  $\frac{\sin(\omega t)}{t} \circ \bullet \arctan\left(\frac{\omega}{z}\right)$  haben wir nicht nachgewiesen, dafür sind weitere Sätze erforderlich. Außerdem muß man dazu wissen:

$$\arctan(z) = \frac{1}{2j} \cdot \log \frac{1+jz}{1-jz}$$

auf der Halbebene  $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

### Rücktransformation durch Partialbruch-Zerlegung

Diese Methode ist anwendbar, wenn die gegebene Bildfunktion eine rationale Funktion der Gestalt

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomen  $P$  und  $Q$  mit  $\deg(P) < \deg(Q)$  ist. Wir werden etwas später untersuchen, wann man der Funktion  $F$  ansehen kann, daß sie eine Laplace-Transformierte ist.

Sind  $a_1, \dots, a_k$  die (komplexen) Nullstellen des Nenner-Polynoms  $Q(z)$ , mit Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_k$ , so gilt:

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \sum_{\nu=1}^{m_i} \frac{A_{i\nu}}{(z-a_i)^\nu},$$

mit geeigneten komplexen Koeffizienten  $A_{i\nu}$ . Das ist die komplexe Version des reellen Satzes von der Partialbruchzerlegung, der in Kap. II, §5, angegeben wurde.

Man braucht nun lediglich die Formel

$$\frac{1}{(z-a)^n} \bullet \circ e^{at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

**Beispiel :**

$$\text{Sei } F(z) := \frac{2z^2 - 9z + 19}{(z+3)(z-1)^2}.$$

Die Partialbruchzerlegung führen wir mit Hilfe eines Ansatzes durch:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} \\ &= \frac{(z-1)^2 A + (z+3)(z-1)B + (z+3)C}{(z+3)(z-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)z^2 + (-2A+2B+C)z + (A-3B+3C)}{(z+3)(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Das ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ -2A + 2B + C &= -9, \\ A - 3B + 3C &= 19. \end{aligned}$$

Wir lösen es nach dem Gaußschen Verfahren:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & -3 & 3 & 19 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 3 & 17 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}$$

Also ist  $C = 3$ ,  $B = -2$  und  $A = 4$ , d.h.:

$$F(z) = \frac{4}{z+3} - \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

Daraus folgt:

$$F(z) \bullet \circ 4e^{-3t} - 2e^t + 3te^t.$$

### Rücktransformation mit Residuenkalkül

Sei  $F(z)$  eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ , so daß  $z \cdot F(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. Dann ist  $F$  außerhalb einer genügend großen Kreisscheibe holomorph, und es gibt dort eine Laurententwicklung

$$z \cdot F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}.$$

Also ist

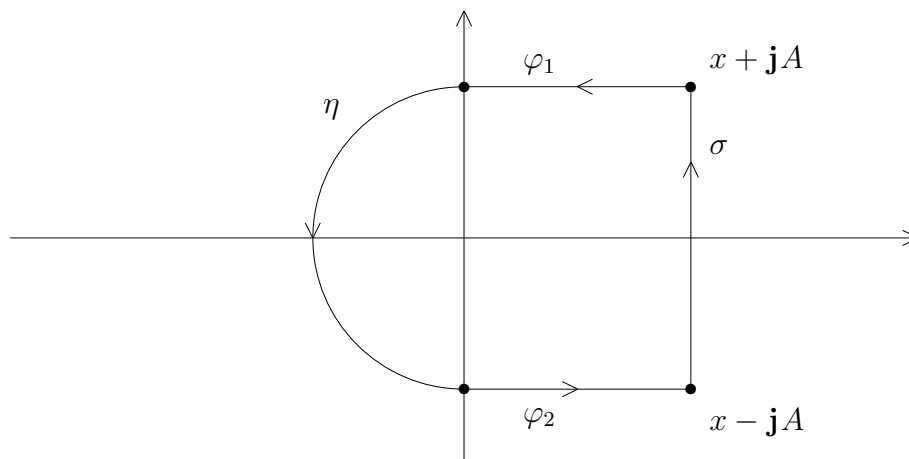
$$F(z) = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} z^{-n},$$

und das bedeutet, daß  $F(z)$  eine Laplace-Transformierte ist. (Darstellbarkeitskriterium)

Ist  $F(z)$  holomorph in der Halbebene  $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > x_1 \geq 0\}$ , so erhält man die Urbildfunktion  $f(t)$  durch die komplexe Umkehrformel:

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-\mathbf{j}A}^{x+\mathbf{j}A} F(z)e^{zt} dz.$$

Wir betrachten nun folgende Figur:



Dabei sei

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &:= x + \mathbf{j}\tau, & (-A \leq \tau \leq A) \\ \varphi_1(\tau) &:= (x - \tau) + \mathbf{j}A, & (0 \leq \tau \leq x) \\ \varphi_2(\tau) &:= \tau - \mathbf{j}A, & (0 \leq \tau \leq x) \\ \text{und } \eta(\tau) &:= Ae^{\mathbf{j}\tau}, & \left(\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

$C := \sigma + \varphi_1 + \eta + \varphi_2$  ist ein geschlossener Weg, der bei genügend großem  $A$  alle Singularitäten von  $F(z)$  in seinem Inneren enthält. Nach dem Residuensatz ist also

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_C F(z)e^{zt} dz = \sum_{\operatorname{Re}(z) \leq x_1} \operatorname{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Wir können die Werte von  $f$  aus den Residuen von  $F(z)e^{zt}$  berechnen, wenn wir zeigen können, daß die Integrale über  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\eta$  für  $A \rightarrow \infty$  verschwinden.

Wir halten  $t$  fest. Bei den Wegen  $\varphi_i$  kommt es nicht auf den Durchlaufungssinn an. Daher gilt – wenn  $|z \cdot F(z)| \leq C$  ist –:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi_i} F(z)e^{zt} dz \right| &= \left| \int_0^x F(\tau \pm \mathbf{j}A)e^{(\tau \pm \mathbf{j}A)t} d\tau \right| \\ &\leq \frac{C}{A} \int_0^x e^{\tau t} d\tau \\ &= \frac{C}{A} \cdot \left. \left(\frac{1}{t}e^{\tau t}\right) \right|_0^x \\ &= \frac{C}{At}(e^{xt} - 1) \rightarrow 0 \quad (\text{für } A \rightarrow \infty) \end{aligned}$$



Es ist  $\eta(\tau) = A \cos \tau + \mathbf{j}A \sin \tau$ . Wir benutzen, daß der Cosinus symmetrisch zur Achse  $\tau = \pi$  ist, und daß gilt:

$$\cos \tau \leq 1 - \frac{2}{\pi} \tau \quad \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi.$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta} F(z) e^{zt} dz \right| &\leq \frac{C}{A} \cdot \int_{\pi/2}^{(3\pi)/2} A \cdot |e^{\eta(\tau)t}| d\tau \\ &= C \cdot \int_{\pi/2}^{(3\pi)/2} e^{At \cos \tau} d\tau \\ &= 2C \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} e^{At \cos \tau} d\tau \\ &\leq 2C \cdot e^{At} \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\frac{2At}{\pi} \tau} d\tau \\ &= 2C e^{At} \cdot \left( -\frac{\pi}{2At} e^{-\frac{2At}{\pi} \tau} \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2C e^{At} \cdot \left( -\frac{\pi}{2At} (e^{-2At} - e^{-At}) \right) \\ &= \frac{C\pi}{At} (1 - e^{-At}) \rightarrow 0 \quad (\text{für } A \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen:

### Umkehrformel mit Residuen

*Ist  $F(z)$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  und holomorph für  $\operatorname{Re}(z) > \gamma$  und  $z \cdot F(z)$  beschränkt für  $z \rightarrow \infty$ , so ist  $F(z)$  die Laplace-Transformierte einer Funktion  $f(t)$ , und es gilt:*

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \sum_{\operatorname{Re}(z) \leq \gamma} \operatorname{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt, wenn  $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  ist, mit Polynomen  $P$  und  $Q$ , so daß

$$\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$$

ist.

Der vorangegangene Satz läßt sich auf die Situation verallgemeinern, daß  $F(z)$  unendlich viele Singularitäten besitzt. Voraussetzung ist dann aber ein einigermaßen kontrolliertes Wachstum von  $F$ .

Eine beliebte **Anwendung** der Laplace-Transformation stellt die Lösung linearer DGLn mit konstanten Koeffizienten dar.

Man kann zeigen, daß die Lösungen einer solchen DGL Funktionen von höchstens exponentiellem Wachstum sind (vorausgesetzt, das trifft auf die Inhomogenität zu!). Auf einen Beweis wollen wir hier nicht eingehen, weil das für die praktische Anwendung keine große Rolle spielt.

Wir beginnen mit einer DGL 1. Ordnung:

$$y' + ay = g(t), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(0) = A.$$

Man kann nun schrittweise vorgehen:

### 1. Laplace-Transformation

Sei  $y(t)$  eine Lösung,  $Y(z) := \mathcal{L}[y(t)]$  und  $G(z) := \mathcal{L}[g(t)]$ . Wendet man auf beide Seiten der DGL die Laplace-Transformation an, so erhält man:

$$(z \cdot Y(z) - y(0)) + a \cdot Y(z) = G(z),$$

also

$$(z + a) \cdot Y(z) - A = G(z).$$

### 2. Lösung im Bildbereich

Wir lösen die gewonnene Gleichung nach  $Y(z)$  auf:

$$Y(z) = \frac{G(z) + A}{z + a}.$$

### 3. Rücktransformation

Wir suchen nun die Urbildfunktion  $y(t)$  zu  $Y(z)$ :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(z) + A}{z + a}\right].$$

Dabei können alle drei vorgestellten Methoden der Rück-Transformation zum Einsatz kommen. In der Praxis wird man es meist mit Tabellen versuchen.

**Bemerkung:** Wir haben in Kapitel II, §7, gelernt, daß sich die allgemeine Lösung der DGL aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzt. Das Verfahren mit der Laplace-Transformation liefert gleich die allgemeine Lösung, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

### Beispiel:

Wir betrachten die DGL

$$y' + 2y = 2t - 4,$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ .

#### 1. Schritt: Laplace-Transformation!

$$z \cdot Y(z) - 1 + 2 \cdot Y(z) = \mathcal{L}[2t - 4] = \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}.$$

**2. Schritt:** Lösung im Bildbereich!

$$(z+2) \cdot Y(z) - 1 = \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z},$$

$$\text{also } Y(z) = \frac{2}{z^2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2}.$$

**3. Schritt:** Rück-Transformation:

Die Funktionen, die als Summanden auf der rechten Seite auftreten, finden sich nicht alle in der Mini-Tabelle, die wir aufgestellt haben. Es ist

$$\frac{1}{z(z+2)} \bullet \text{---} \circ \frac{1 - e^{-2t}}{2}$$

$$\text{und } \frac{1}{z+2} \bullet \text{---} \circ e^{-2t}.$$

Wir müssen noch die Urbildfunktion zu  $\frac{1}{z^2(z+2)}$  finden. Wir tun dies mit Hilfe der Partialbruch-Zerlegung.

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z+2} &= \frac{az(z+2) + b(z+2) + cz^2}{z^2(z+2)} \\ &= \frac{(a+c)z^2 + (2a+b)z + 2b}{z^2(z+2)}. \end{aligned}$$

Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ 2a + b &= 0, \\ 2b &= 1. \end{aligned}$$

Also ist  $b = \frac{1}{2}$ ,  $a = -\frac{1}{4}$  und  $c = \frac{1}{4}$ , und damit

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} \right) - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{3}{2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} \\ &\bullet \text{---} \circ t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2(1 - e^{-2t}) \\ &= t - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir eine DGL 2. Ordnung:

$$y'' + ay' + by = g(t), \quad \text{mit Anfangswerten } y(0) = A \text{ und } y'(0) = B.$$

Auch hier gibt es die drei Schritte:

**1. Laplace-Transformation**

$$(z^2 \cdot Y(z) - z \cdot A - B) + a \cdot (z \cdot Y(z) - A) + b \cdot Y(z) = G(z),$$

also

$$(z^2 + az + b) \cdot Y(z) - (z + a)A - B = G(z).$$

**2. Lösung im Bildbereich**

$$Y(z) = \frac{G(z) + (z + a)A + B}{z^2 + az + b}.$$

**3. Rücktransformation** Hier kann man auf die bekannten Methoden zurückgreifen.**Beispiel:**

$$y'' + 4y = \sin(\omega t).$$

**1. Schritt:**

$$z^2 Y(z) - zA - B + 4Y(z) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2},$$

also

$$(z^2 + 4)Y(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} + zA + B.$$

**2. Schritt:**

$$Y(z) = \frac{\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + 4)} + A \cdot \frac{z}{z^2 + 4} + B \cdot \frac{1}{z^2 + 4},$$

für  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . **3. Schritt:** Die gesuchte Lösung ist

$$y(t) = \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + 4)}\right] + A \cos(2t) + \frac{B}{2} \sin(2t).$$

Zur Berechnung des ersten Termes müssen wir Fälle unterscheiden:

**a) der Fall  $\omega^2 \neq 4$ :**

In diesem Falle hat

$$F(z) := \frac{1}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + 4)}$$

4 verschiedene einfache Polstellen, nämlich  $z = \pm \mathbf{j}\omega$  und  $z = \pm 2\mathbf{j}$ . Es bietet sich die Residuen-Methode an:

$$\begin{aligned} f(t) &:= \mathcal{L}^{-1}[F(z)] \\ &= \operatorname{res}_{\mathbf{j}\omega}(F(z)e^{zt}) + \operatorname{res}_{-\mathbf{j}\omega}(F(z)e^{zt}) + \operatorname{res}_{2\mathbf{j}}(F(z)e^{zt}) + \operatorname{res}_{-2\mathbf{j}}(F(z)e^{zt}) \\ &= \frac{1}{2\mathbf{j}\omega(\omega^2 - 4)} \cdot (-e^{\mathbf{j}\omega t} + e^{-\mathbf{j}\omega t}) + \frac{1}{4\mathbf{j}(\omega^2 - 4)} \cdot (e^{2\mathbf{j}t} - e^{-2\mathbf{j}t}) \\ &= -\frac{1}{\omega(\omega^2 - 4)} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{2(\omega^2 - 4)} \sin(2t) \\ &= \frac{\omega \sin(2t) - 2 \sin(\omega t)}{2\omega(\omega^2 - 4)}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(t) = \frac{\omega \sin(2t) - 2 \sin(\omega t)}{2(\omega^2 - 4)} + A \cos(2t) + \frac{B}{2} \sin(2t).$$

**b) der Fall**  $\omega^2 = 4$  (Resonanzfall):

Ist  $\omega^2 = 4$ , so ist

$$Y(z) = \frac{\pm 2}{(z^2 + 4)^2} + A \cdot \frac{z}{z^2 + 4} + B \cdot \frac{1}{z^2 + 4},$$

also

$$y(t) = \pm 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2 + 4)^2} + A \cos(2t) + \frac{B}{2} \sin(2t)\right].$$

Wir kennen die Beziehung

$$\frac{1}{z^2 + 4} \bullet \circ \frac{1}{2} \sin(2t),$$

und verwenden den Faltungssatz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + 4)^2} &= \frac{1}{4} \cdot (\mathcal{L}[\sin(2t)])^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \mathcal{L}[\sin(2t) * \sin(2t)], \text{ also} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2 + 4)^2}\right] &= \frac{1}{4} \int_0^t \sin(2(t - \tau)) \sin(2\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \sin(2t) \int_0^t \cos(2\tau) \sin(2\tau) d\tau - \cos(2t) \int_0^t \sin^2(2\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \sin(2t) \cdot \frac{1}{4} \sin^2(2t) - \cos(2t) \left( \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \cos(2t) \right) \right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (\sin(2t) - 2t \cos(2t)). \end{aligned}$$

Also ist in diesem Falle

$$y(t) = \pm \frac{1}{8} \cdot (\sin(2t) - 2t \cos(2t)) + A \cos(2t) + \frac{B}{2} \sin(2t).$$

Die Amplitude von  $y(t)$  nimmt im Resonanzfall beliebig hohe Werte an.

## §5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion  $y = y(x)$  und ihre Ableitungen  $y'$ ,  $y'' \dots$  vorkommen.

Hat die Gleichung die Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

so spricht man von einer *impliziten Differentialgleichung*.

Hat sie die Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung*.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung.

**Beispiele :**

1.  $y'' = -\omega^2 y$  ist eine explizite DGL 2. Ordnung.
2.  $(yy^{(5)})^2 + xy'' + \ln y = 0$  ist eine implizite DGL 5. Ordnung.

Wir werden hier im Wesentlichen mit expliziten DGLn arbeiten, die auch in der Form

$$cy^{(n)} + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

vorkommen können, mit einer Konstanten  $c$ .

### Definition:

Sei  $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.

Unter einer *Lösung* der DGL  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  versteht man eine n-mal stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\{(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \mid t \in I\} \subset B$ .
2. Für alle  $t \in I$  ist  $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ .

Für implizite DGLn definiert man Lösungen analog.

Die Kurve  $\Phi : I \rightarrow B$  mit  $\Phi(t) := (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$  heißt *Lösungskurve*.

**Definition:**

Ein Punkt  $\mathbf{A}_0 = (t_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in (I \times \mathbb{R}^n) \cap B$  wird auch als ein *Satz von Anfangsbedingungen* zu der DGL bezeichnet. Unter dem zugehörigen *Anfangswertproblem* versteht man die Suche nach einer Lösung  $\varphi$  der DGL, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi(t_0) = a_0, \varphi'(t_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

Man nennt ein Anfangswertproblem *sachgemäß gestellt*, wenn es zu jedem Satz von Anfangsbedingungen eine eindeutig bestimmte lokale Lösung gibt, und wenn diese Lösung stetig von den Anfangsbedingungen abhängt (so daß das System bei kleinen Störungen stabil bleibt).

**Beispiele :**

- Wir betrachten die DGL  $y' = ky$  mit einer Konstanten  $k \neq 0$ . Als Anfangsbedingung sei  $y(0) = 1$  gefordert.

Das ist eine (homogene) lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wie wir sie in Kapitel II, §7, schon behandelt haben. Wir wissen, daß der Lösungsraum ein 1-dimensionaler Vektorraum ist.  $\varphi_0(t) := 0$  ist eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung, und alle anderen Lösungen dürfen wegen des entsprechenden Eindeutigkeitsatzes keine Nullstellen haben.

Sei also  $\varphi \neq 0$  irgend eine Lösung. Dann gilt:

$$(\ln |\varphi|)'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = k.$$

Jetzt kann man integrieren:

$$\ln |\varphi(t)| = kt + c,$$

mit einer geeigneten Konstanten  $c$ . Das führt auf die Gleichung

$$|\varphi(t)| = C \cdot e^{kt}, \quad \text{mit } C := e^c > 0.$$

Läßt man für die Integrationskonstante  $C$  beliebige reelle (also auch negative) Zahlen zu, so kann man sogar schreiben:

$$\varphi(t) = C \cdot e^{kt}, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

So erhält man eine ganze Schar von Lösungen  $\varphi_C(t) = C \cdot e^{kt}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Die Lösungskurven

$$\Phi_C(t) := (t, C \cdot e^{kt})$$

sind alle disjunkt!

Zu jeder Anfangsbedingung  $(0, a_0)$  gibt es genau eine Lösung mit  $\varphi_C(0) = a_0$ , nämlich die mit  $C = a_0$ . Insbesondere ist die gesuchte Lösung  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = 1$  gegeben durch  $\varphi(t) = e^{kt}$ . Da die Lösungen vom Parameter  $C$  (und damit von der Anfangsbedingung) stetig abhängen, ist das Problem sachgemäß gestellt.

2. Die DGL  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$  verhält sich nicht so angenehm. Offensichtlich ist die Nullfunktion  $\varphi_0(t) \equiv 0$  eine Lösung, aber auch jede Funktion  $\varphi_c(t) := (t - c)^3$  löst die DGL. Also gehen durch jeden Punkt der x-Achse mindestens zwei Lösungskurven. Ein schlecht gestelltes Problem!
3. Die DGL  $|y'| + |y| = 0$  besitzt nur die Nullfunktion als Lösung. Allgemeine Anfangswertprobleme sind dann überhaupt nicht mehr lösbar.

Unter einem *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung* versteht man ein System von  $n$  Gleichungen, in dem  $n$  unbekannte Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  und ihre ersten Ableitungen vorkommen. In der expliziten Version sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Eine *Lösung* ist dann ein System von Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  mit

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Wir schreiben ein solches System auch kurz in der Form

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}).$$

Diese Schreibweise erweist sich als besonders praktisch, wenn man mit *linearen Systemen* arbeitet:

$$\vec{y}' = A(x) \circ \vec{y},$$

mit einer Matrixwertigen Funktion  $A(x) = (a_{ij}(x) \mid i, j = 1, \dots, n)$ .

### Beispiel:

Das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

kann in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Wir kennen übrigens schon die Lösung dieses Systems unter der Anfangsbedingung  $y_1(0) = 0$  und  $y_2(0) = 1$ , nämlich  $\varphi_1(t) = \sin(t)$  und  $\varphi_2(t) = \cos(t)$ .

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen einfachen DGLn n-ter Ordnung und den Systemen von DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$



gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Ist  $\varphi$  eine Lösung der DGL (\*), so ist  $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ , und wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \dots, \quad \varphi_n := \varphi^{(n-1)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \varphi_2(t), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}'(t) &= \varphi_n(t) \end{aligned}$$

und  $\varphi_n'(t) = \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ ,

d.h.,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ist eine Lösung des Systems.

Ist umgekehrt eine Lösung  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  des Systems gegeben, so setze man  $\varphi := \varphi_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_2(t), \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi_n(t) \\ \text{und schließlich} \quad \varphi^{(n)}(t) &= \varphi_n'(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)), \end{aligned}$$

also  $\varphi$  Lösung von (\*).

Man kann also die Theorie der DGLn n-ter Ordnung auf die der Systeme 1. Ordnung zurückführen.

Wir betrachten nun ein System  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$ , mit einer stetigen Abbildung  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$  eine Lösung, also

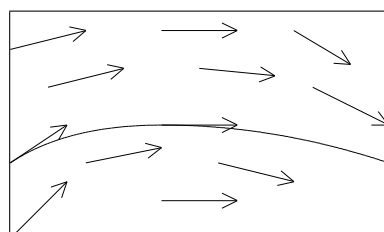
$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)),$$

so gilt für die zugehörige Lösungskurve  $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ :

$$\Phi'(t) = (1, \varphi'(t)) = (1, F(t, \varphi(t))).$$

$F(t, \varphi(t))$  ist die „Steigung“ der Lösungskurve zum Zeitpunkt  $t$ .

Die Zuordnung  $(t, \vec{y}) \mapsto F(t, \vec{y})$  liefert ein *Richtungsfeld*, das den Verlauf der Lösungskurven schon ahnen läßt. Man nennt diese Lösungskurven auch *Integralkurven*.



Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Voraussetzungen Lösungskurven existieren und eindeutig bestimmt sind.

Sei  $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

**Behauptung:** Ist  $F$  sogar nach  $y_1, \dots, y_n$  stetig differenzierbar,  $I \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall und  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Quader mit  $K := I \times Q \subset B$ , so gibt es eine Konstante  $L \geq 0$ , so daß gilt:

$$\|F(x, \mathbf{y}) - F(x, \mathbf{y}')\| \leq L \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|, \quad \text{für } (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{y}') \in K.$$

BEWEIS: Sei  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$  der aus den partiellen Ableitungen nach  $y_1, \dots, y_n$  gebildete Teil der Funktionalmatrix von  $F$ . Das ist eine  $n \times n$ -Matrix, und die Funktion  $(x, \mathbf{y}) \mapsto \left\| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \right\|$  ist stetig auf  $B$ . Da  $Q$  konvex ist, gilt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz: Zu  $x \in I$  und  $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Q$  gibt es ein  $\mathbf{z}$  auf der Verbindungsstrecke von  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{y}'$  mit

$$\|F(x, \mathbf{y}) - F(x, \mathbf{y}')\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{z}) \right\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|.$$

Wir setzen dann einfach  $L := \sup\{\left\| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{z}) \right\| : (x, \mathbf{z}) \in K\}$ . Da  $K$  kompakt ist, ist  $0 \leq L < \infty$ . Wenn  $F$  als Funktion von  $y_1, \dots, y_n$  nirgends konstant ist, dann ist sogar  $L > 0$ .  $\square$

Man nennt  $L$  eine *Lipschitz-Konstante* und sagt, daß  $F$  auf  $K$  einer *Lipschitz-Bedingung* genügt. Wenn man zu jedem Punkt  $(x, \mathbf{y}) \in B$  eine Umgebung  $U \subset B$  finden kann, auf der  $F$  einer Lipschitz-Bedingung genügt, so nennt man  $F$  *lokal Lipschitz-stetig*.

Für den Beweis des Existenzsatzes ist noch die folgende einfache Beobachtung nützlich:

$$\begin{aligned} \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist Lösung der DGL } \vec{y}' &= F(x, \vec{y}) \text{ durch } t_0 \\ \iff t_0 \in I \text{ und } \varphi'(t) &= F(t, \varphi(t)) \text{ für } t \in I \\ \iff t_0 \in I \text{ und } \varphi(t) - \varphi(t_0) &= \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s)) ds \\ \iff \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t &F(s, \varphi(s)) ds \text{ für ein } t_0 \in I. \end{aligned}$$

### Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$  genau eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $t_0 \in I$  und  $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$ .
2.  $I$  ist offen und maximal.
3. Die zugehörige Integralkurve  $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$  verläuft in  $G$  von Rand zu Rand.

Bedingung (1) bedeutet, daß  $\varphi$  das gegebene Anfangswertproblem löst, und Bedingung (2) bedeutet, daß die Lösung auf kein größeres Intervall fortgesetzt werden kann. Wir schreiben das maximale Intervall in der Form  $I = (t_-, t_+)$ . Daß  $\Phi$  in  $G$  von Rand zu Rand läuft, ist etwas schwerer zu erklären. Gemeint ist:

Entweder ist  $I$  unbeschränkt oder  $\|\varphi\|$  wächst unbeschränkt oder die Werte  $\Phi(t)$  kommen dem Rand von  $G$  beliebig nahe. Das heißt **nicht**, daß  $\lim_{t \rightarrow t_+} \Phi(t)$  existiert, wohl aber, daß  $\Phi$  jede kompakte Teilmenge von  $G$  irgendwann verläßt.

Der Beweis des Existenz- und Eindeigkeitssatzes gliedert sich in mehrere Teile. Wir beginnen mit dem „lokalen“ Teil.

### Lokaler Existenz- und Eindeigkeitssatz

Sei  $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in B$ .

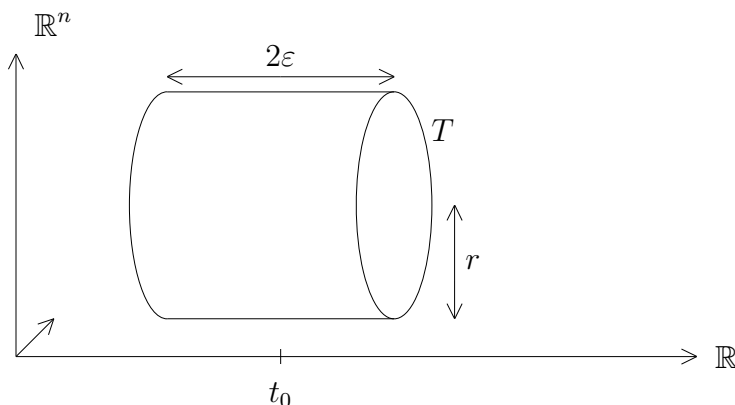
Wenn es reelle Zahlen  $r, \varepsilon > 0$  gibt, so daß

$$T := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| < \varepsilon \text{ und } \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < r\} \subset B$$

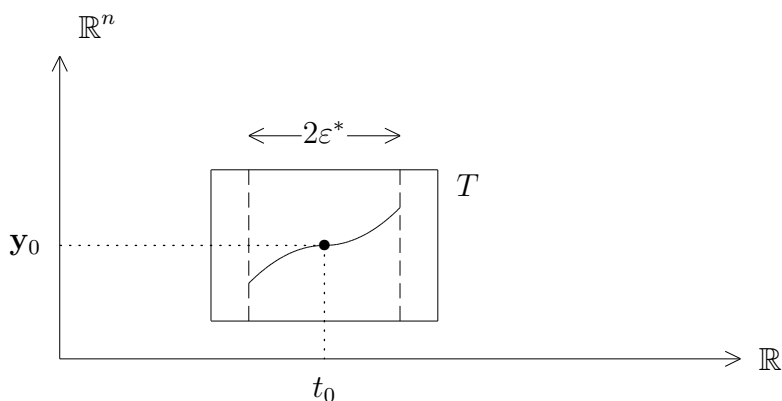
ist und  $F$  auf  $T$  einer Lipschitzbedingung (mit einer Lipschitzkonstanten  $L$ ) genügt, so gibt es ein  $\varepsilon^*$  mit  $0 < \varepsilon^* \leq \varepsilon$  und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : [t_0 - \varepsilon^*, t_0 + \varepsilon^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so daß gilt:

1.  $\|\varphi(t) - \mathbf{y}_0\| < r$  für  $|t - t_0| < \varepsilon^*$ .
2.  $\varphi$  ist Lösung der DGL  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$ .
3.  $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$ .

Wir nennen die Menge  $T$  eine „Tonne“, sie ist ein Produkt aus einem Intervall der Länge  $2\varepsilon$  und einer Kugel vom Radius  $r$ .



Die gesuchte Lösungskurve durch  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  kann nur innerhalb einer kleineren Tonne der Länge  $2\varepsilon^*$  konstruiert werden. Darin läuft sie allerdings vom Boden bis zur Decke, und sie ist eindeutig bestimmt.



BEWEIS (nach Picard-Lindelöf):

Sei  $A := \sup_T \|F\|$  und  $\varepsilon^* := \min(\varepsilon, \frac{r}{A})$ , sowie  $I_0 := [t_0 - \varepsilon^*, t_0 + \varepsilon^*]$ .

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \{\varphi : I_0 \rightarrow \overline{B_r(\mathbf{y}_0)} : \varphi \text{ stetig, und } \varphi(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Eine Folge von Funktionen aus  $\mathcal{F}$ , die gleichmäßig konvergiert, hat als Grenzwert wieder ein Element von  $\mathcal{F}$ . Und jede Cauchyfolge in  $\mathcal{F}$  ist gleichmäßig konvergent. Das heißt,  $\mathcal{F}$  wird mit der Supremumsnorm zu einem vollständigen metrischen Raum.

Nun definiert man einen Operator  $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  durch

$$(S\varphi)(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t F(u, \varphi(u)) du.$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \|S\varphi(t) - \mathbf{y}_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s)) ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \sup_T \|F\| \\ &\leq \varepsilon^* \cdot A \leq r \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|S\varphi - S\psi\| &= \sup_{I_0} \left| \int_{t_0}^t (F(s, \varphi(s)) - F(s, \psi(s))) ds \right| \\ &\leq \varepsilon^* \cdot \sup_{I_0} \|F(s, \varphi(s)) - F(s, \psi(s))\| \\ &\leq \varepsilon^* \cdot L \cdot \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Wählt man  $\varepsilon^*$  sogar so klein, daß  $q := \varepsilon^* \cdot L < 1$  ist, so ist  $S$  eine kontrahierende (und damit insbesondere stetige) Abbildung von  $\mathcal{F}$  auf sich.

Es sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt! Also besitzt der Operator  $S$  genau einen Fixpunkt  $\varphi_0$ . Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} S\varphi_0 = \varphi_0 &\iff \varphi_0(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_0(s)) ds \\ &\iff \varphi_0 \text{ ist Lösung der DGL } \vec{y}' = F(x, \vec{y}). \end{aligned}$$

$\varphi_0$  ist also die gesuchte Lösung und zudem eindeutig bestimmt. Der Satz ist bewiesen.  $\square$

Bevor wir mit dem Beweis des globalen Existenzsatzes fortfahren, wollen wir ein Beispiel für den Satz von Picard-Lindelöf betrachten. Wir wissen ja: Ist  $\varphi \in \mathcal{F}$  ein beliebiger Anfangswert, so konvergiert die Folge  $(S^k \varphi)$  gegen den Fixpunkt  $\varphi_0$ . Das liefert im Prinzip ein konstruktives Verfahren.

Wir betrachten das DGL-System  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ . Hier ist

$$F(x, y_1, y_2) := (y_2, -y_1)$$

sicherlich Lipschitz-stetig. Es muß also genau eine Lösung  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = (0, 1)$  geben.

Wir gehen aus von dem Startwert  $\varphi_0(t) := (0, 1)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &:= \varphi_0(0) + \int_0^t F(s, \varphi_0(s)) ds \\ &= (0, 1) + \int_0^t (1, 0) ds \\ &= (0, 1) + (t, 0) = (t, 1), \\ \varphi_2(t) &:= \varphi_1(0) + \int_0^t F(s, \varphi_1(s)) ds \\ &= (0, 1) + \int_0^t (1, -s) ds \\ &= (0, 1) + (t, -\frac{t^2}{2}) = (t, 1 - \frac{t^2}{2}), \\ \varphi_3(t) &= \varphi_2(0) + \int_0^t F(s, \varphi_2(s)) ds \\ &= (0, 1) + \int_0^t (1 - \frac{s^2}{2}, -s) ds \\ &= (0, 1) + (t - \frac{t^3}{6}, -\frac{t^2}{2}) = (t - \frac{t^3}{6}, 1 - \frac{t^2}{2}). \end{aligned}$$

Per Induktion zeigt man schließlich:

$$\varphi_{2k}(t) = (t - \frac{t^3}{6} \pm \dots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}, 1 - \frac{t^2}{2} \pm \dots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!})$$

und

$$\varphi_{2k+1}(t) = (t - \frac{t^3}{6} \pm \dots + (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, 1 - \frac{t^2}{2} \pm \dots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}).$$

Also ist  $\varphi(t) = (\sin(t), \cos(t))$ .

Wir betrachten wieder eine DGL  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$  mit Lipschitz-stetigem  $F$ . Dann gilt:

### Das maximale Lösungs-Intervall ist offen

Sei  $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung. Dann gibt es ein  $t_2 > t_1$  und eine Lösung  $\hat{\varphi} : [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\hat{\varphi}|_{[t_0, t_1]} = \varphi$ .

BEWEIS: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutig bestimmte Lösung  $\psi : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$ . Außerdem ist

$$\psi'(t_1) = F(t_1, \psi(t_1)) = F(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1).$$

Also ist  $\hat{\varphi} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\hat{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \psi(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

differenzierbar und damit eine Lösung über  $[t_0, t_1 + \varepsilon)$ . □

### Die globale Eindeutigkeit der Lösung

*Sind  $\varphi, \psi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Lösungen mit  $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \mathbf{y}_0$ , so ist  $\varphi = \psi$ .*

BEWEIS: Sei  $X := \{t \in [t_0, t_1] : \varphi(t) = \psi(t)\}$ . Das ist eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von  $[t_0, t_1]$ . Wenn  $X \neq [t_0, t_1]$  wäre, müßte es ein größtes  $t^* > t_0$  geben, so daß  $\varphi(t) = \psi(t)$  für  $t_0 \leq t < t^*$  ist. Weil  $X$  abgeschlossen ist, muß auch noch  $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$  sein. Wegen der Offenheit des maximalen Lösungsintervalls und wegen des lokalen Eindeutigkeitsatzes gibt es dann auch noch ein  $t^{**} > t^*$ , so daß  $\varphi(t) = \psi(t)$  für  $t_0 \leq t < t^{**}$  ist. Das ist aber ein Widerspruch. □

### Die Existenz einer maximalen Lösung

*Es gibt Zahlen  $t_- < t_0 < t_+$  und eine Lösung  $\varphi : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit folgenden Eigenschaften:*

1.  $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$ .
2.  $\varphi$  läßt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.
3. Ist  $\psi : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere Lösung mit  $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$ , so ist  $\varphi = \psi$ .

BEWEIS: Wir beschränken uns auf die Konstruktion von  $t_+$ , die von  $t_-$  kann dann analog durchgeführt werden. Es sei

$$\varepsilon_+ := \sup\{\varepsilon > 0 : \exists \text{ Lösung } \varphi_\varepsilon : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0\}$$

und

$$t_+ := t_0 + \varepsilon_+.$$

Ist nun  $t \in [t_0, t_+)$ , so gibt es ein  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \varepsilon_+$ , so daß  $t$  in  $[t_0, t_0 + \varepsilon)$  liegt, und wir setzen

$$\varphi(t) := \varphi_\varepsilon(t).$$

Diese Definition ist wegen der globalen Eindeutigkeit unabhängig vom gewählten  $\varepsilon$ , und  $\varphi$  ist deshalb auch eine Lösung der DGL. Nach Konstruktion von  $\varepsilon_+$  läßt sich  $\varphi$  nicht über  $t_+$  hinaus zu einer erweiterten Lösung fortsetzen.

Ist schließlich  $\psi$  eine weitere Lösung auf  $[t_0, t_+)$  mit  $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$ , so stimmt  $\psi$  auf jedem abgeschlossenen Teilintervall und damit auf ganz  $[t_0, t_+)$  mit  $\varphi$  überein.  $\square$

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß die Integralkurven von Rand zu Rand laufen, also nicht in einer kompakten Teilmenge steckenbleiben.

### Die (maximalen) Integralkurven enden nicht im Innern

Sei  $\varphi : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung und  $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$  die zugehörige Integralkurve. Wenn es eine kompakte Menge  $K \subset B$  mit  $\Phi([t_0, t_1)) \subset K$  gibt, so kann man  $\varphi$  auf das abgeschlossene Intervall  $[t_0, t_1]$  fortsetzen.

BEWEIS: Weil eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt bleibt, gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so daß  $\|F(x, \mathbf{y})\| \leq C$  für  $(x, \mathbf{y}) \in K$  ist.

Weil  $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$  ist, folgt, daß  $\|\varphi'(t)\| \leq C$  für  $t \in [t_0, t_1)$  ist, und daher

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq C \cdot |t - s|, \text{ für } t, s \in [t_0, t_1).$$

Sei nun  $(s_n)$  eine gegen  $t_1$  konvergente Folge. Dann ist  $(s_n, \varphi(s_n))$  eine Cauchyfolge, die gegen einen eindeutig bestimmten Punkt  $(t_1, \mathbf{y}_1) \in K$  konvergieren muß. Wir setzen

$$\widehat{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t_0 \leq t < t_1, \\ \mathbf{y}_1 & \text{für } t = t_1. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt für  $t < t_1$  :

$$\widehat{\varphi}(t) = \widehat{\varphi}(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, \widehat{\varphi}(s)) ds.$$

Weil aber  $\widehat{\varphi}$  und damit beide Seiten der Gleichung auf  $[t_0, t_1]$  stetig sind, bleibt auch die Gleichung auf ganz  $[t_0, t_1]$  gültig. Das bedeutet, daß  $\widehat{\varphi}$  dort eine Lösung ist.  $\square$

### Beispiele :

1. Die Theorie der Differentialgleichungen ist eigentlich eine Sammlung unzähliger Spezialfälle, und man braucht fast jedesmal einen neuen trickreichen Ansatz, um die Lösung zu finden.

Wir wollen zwei besonders einfache Typen von DGLn 1. Ordnung behandeln, für die es jeweils ein Kochrezept gibt.

Wir beginnen mit separablen (oder separierbaren) DGLn. Man spricht auch von DGLn mit getrennten Variablen:

$$y' = f(x)g(y),$$

wobei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind und  $g$  auf  $J$  keine Nullstellen hat.

Die Physiker haben für das Lösungsverfahren eine recht suggestive, aber mathematisch etwas ungenaue Schreibweise gefunden. Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) &\implies \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \\ &\implies G(y) = F(x) + c \\ &\implies y = G^{-1}(F(x) + c). \end{aligned}$$

Da  $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$  für alle  $y \in J$  ist, ist  $G$  eine streng monotone Funktion, insbesondere also umkehrbar. Das rechtfertigt die letzte Folgerung.

Als konkretes Beispiel nehmen wir die DGL  $y' = xy$ .

Dann ist  $f(x) = x$  auf  $\mathbb{R}$  und  $g(y) = y$  auf jedem Intervall  $J$ , das nicht die Null enthält, und wir können als Stammfunktionen

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \text{ und } G(y) := \ln |y|$$

nehmen. Dann ist

$$G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \\ &= C \cdot \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right), \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung  $y(x) \equiv 0$  mit ein. Liegt  $J$  in  $\mathbb{R}_+$ , so muß  $C > 0$  gewählt werden, sonst  $C < 0$ .

Betrachten wir nun die DGL

$$y' = xy^2.$$

Hier ist  $f(x) = x$ , also  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ , wie oben, sowie  $g(y) = y^2$ , also  $G(y) = -\frac{1}{y}$ .

Nach dem obigen Verfahren erhalten wir die Lösungen

$$y_c(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\frac{2}{2c + x^2}.$$

Die Lösung  $y(x) \equiv 0$  erhalten wir **nicht** auf diesem Wege. Wir können auch etwas sorgfältiger vorgehen:

Ist  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung mit  $\varphi(t_0) = y_0$ , so gilt:

$$\varphi'(t) = t \cdot \varphi(t)^2, \text{ also } \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^2} ds = \int_{t_0}^t s ds.$$



Daraus folgt:

$$\int_{y_0}^{\varphi} (t) \frac{1}{u^2} du = \int_{t_0}^t s ds, \text{ d.h. } \frac{1}{y_0} - \frac{1}{\varphi(t)} = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2),$$

und das ergibt:

$$\varphi(t) = \frac{2y_0}{2 + y_0(t_0^2 - t^2)}.$$

Jetzt ist mit  $y_0 = 0$  auch die Lösung  $\varphi(t) \equiv 0$  enthalten.

2. Eine lineare DGL 1. Ordnung hat allgemein folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x).$$

- (a) Ist  $r(x) \equiv 0$ , so spricht man vom *homogenen* Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion  $y(x) \equiv 0$  eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, daß  $y(x) \neq 0$  für alle  $x$  ist. Dann gilt:

$$(\ln |y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$ , so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten  $c$ , die auch  $\leq 0$  sein darf.

- (b) Nun betrachten wir den *inhomogenen* Fall ( $r(x) \not\equiv 0$ ): Sind  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei Lösungen, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'(t) + a(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = r(t) - r(t) = 0,$$

also unterscheiden sich je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat also die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung“  $\varphi_p(t)$  der inhomogenen Gleichung. Die müssen wir noch finden.

Meistens findet man spezielle Lösungen über einen geeigneten Ansatz. So geht man auch hier vor. Man spricht von der *Variation der Konstanten*, wenn man ansetzt:

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL versucht man, Bedingungen für  $c(x)$  zu erhalten:

$$y_p'(x) = (c'(x) - c(x) \cdot A'(x)) \cdot e^{-A(x)} = (c'(x) - c(x)a(x)) \cdot e^{-A(x)}.$$

Da  $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = r(x)$  sein soll, erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = r(x),$$

und setzt daher

$$c(x) := \int_{x_0}^x r(t)e^{A(t)} dt.$$

Die Probe zeigt, daß  $y_p$  tatsächlich die inhomogene DGL löst.

Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = \left( \int_{x_0}^x r(t)e^{A(t)} dt + c \right) \cdot e^{-A(x)}.$$

Wir wollen nun lineare Systeme 1. Ordnung untersuchen:

$$\vec{y}' = A(x) \circ \vec{y} + \vec{b}(x).$$

Wie üblich beginnt man mit dem **homogenen** Fall  $\vec{b}(x) \equiv 0$ . Da  $F(x, \vec{y}) := A(x) \circ \vec{y}$  auf dem ganzen  $\mathbb{R}^{n+1}$  definiert und Lipschitz-stetig ist, sind die Lösungen auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, und man sieht auch sofort, daß sie einen (reellen) Vektorraum  $\mathcal{L}$  bilden.

Für ein festes  $t_0 \in \mathbb{R}$  sei  $E : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $E(\varphi) := \varphi(t_0)$ .<sup>7</sup> Dann ist  $E$  offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz folgt, daß  $E$  bijektiv, also ein Isomorphismus von  $\mathcal{L}$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist.

*Der Lösungsraum  $\mathcal{L}$  eines homogenen linearen Systems von  $n$  DGLn ist ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.*

Eine Basis  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  von  $\mathcal{L}$  bezeichnet man auch als *Fundamentalsystem* (von Lösungen) und die Matrix

$$X(t) := (\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t))$$

als *Fundamentalmatrix*.

Die Funktion  $W(t) := \det X(t)$  heißt *Wronski-Determinante*.

Wir wollen eine interessante Gleichung für die Wronski-Determinante herleiten, müssen aber zuvor einige Tatsachen aus der Determinantentheorie nachtragen.

Sei  $A = \left( a_{ij} \mid \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  und  $S_{ij}(A)$  die Streichungsmatrix, die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte aus  $A$  entsteht.

Die Zahl  $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}(A)$  haben wir als *Cofaktor*, *algebraisches Komplement* oder *Adjunkte* bezeichnet. Der Laplacesche Entwicklungssatz besagt dann:

Für beliebiges  $j$  ist  $\det(A) := \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$ , und für beliebiges  $i$  ist  $\det(A) := \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$ .

Man beachte dabei, daß der Koeffizient  $a_{ij}$  in  $A_{ij}$  nicht vorkommt.

### Definition:

$\text{ad}(A) := \left( A_{ij} \mid \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right)$  heißt *adjungierte Matrix* zu  $A$ .

<sup>7</sup>„E“ steht für *evaluate* (auswerten).

### Hilfssatz

1. Ist  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , so ist  $\det A \cdot E_n = A \circ \text{ad}(A)^\top$ .
2. Ist  $t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  differenzierbar, so ist

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

BEWEIS: 1) Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz ist  $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\text{ad}(A))_{ij}$ , also

$$\begin{aligned} (A \circ \text{ad}(A)^\top)_{ii} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \\ &= \det(A) \\ \text{und (für } k \neq i) \quad (A \circ \text{ad}(A)^\top)_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj} \\ &= \det A^*, \end{aligned}$$

wobei  $A^*$  aus  $A$  entsteht, indem man in  $A$  die  $k$ -te Zeile durch die  $i$ -te Zeile ersetzt. Dann ist nämlich  $a_{kj}^* = a_{ij}$  und  $A_{kj}^* = A_{kj}$ . Weil aber in  $A^*$  eine Zeile doppelt auftritt, ist  $\det A^* = 0$ .

2) Weil alle  $a_{kj}$  in allen  $A_{ij}$  nicht vorkommen, ist

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{kj}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{kj}} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} A_{ij} = A_{kj},$$

nach Kettenregel also

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t)) \cdot a'_{ij}(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

□

### Formel von Liouville

Ist  $W(t)$  die Wronski-Determinante der Fundamentalmatrix eines DGL-Systems  $\vec{y}' = A(x) \circ \vec{y}$ , so gilt für beliebiges (festes)  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Spur} A(s) ds \right).$$

BEWEIS: Ist  $X(t) = (x_{ij})$  die Fundamentalmatrix, so ist  $W(t) = \det X(t)$ , also

$$W'(t) = (\det \circ X)'(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} x'_{ij}(t) \cdot (\operatorname{ad}(X))_{ij}(t) \\
&= \sum_{i,j} (X'(t)_{ij} \cdot (\operatorname{ad}(X)^\top(t))_{ji}) \\
&= \sum_{i=1}^n (X'(t) \circ \operatorname{ad}(X)^\top(t))_{ii} \\
&= \operatorname{Spur}(X'(t) \circ \operatorname{ad}(X)^\top(t)).
\end{aligned}$$

Da die Spalten von  $X(t)$  Lösungen der DGL sind, ist  $X'(t) = A(t) \circ X(t)$ , also

$$\begin{aligned}
W'(t) &= \operatorname{Spur}(A(t) \circ (X(t) \circ \operatorname{ad}(X)^\top(t))) \\
&= \operatorname{Spur}(A(t) \circ (\det X(t) \cdot E_n)) \\
&= W(t) \cdot \operatorname{Spur}(A(t)).
\end{aligned}$$

Da  $X(t)$  für alle  $t$  invertierbar ist, ist  $W(t) \neq 0$  und

$$(\ln \circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \operatorname{Spur}(A(t)),$$

also

$$\ln\left(\frac{W(t)}{W(t_0)}\right) = \ln(W(t)) - \ln(W(t_0)) = \int_{t_0}^t \operatorname{Spur}(A(s)) \, ds.$$

Wendet man  $\exp$  an, so erhält man die Liouville-Formel. □

Man kann den Begriff der Wronski-Determinante verallgemeinern: Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  irgendwelche Lösungen der DGL, so nennt man

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) := \det(\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t))$$

die *Wronski-Determinante* von  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

Die Formel

$$W'(t) = W(t) \cdot \operatorname{Spur}(A(t))$$

bleibt dann immerhin gültig!  $W(t)$  erfüllt also die lineare DGL erster Ordnung

$$y' = \operatorname{Spur}(A(x)) \cdot y.$$

Ist nun  $W$  nicht die Null-Lösung, so kann  $W$  keine Nullstelle haben, wegen des Eindeutigkeitsatzes.

### Folgerung

*Die Wronski-Determinante  $W(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)$  verschwindet entweder identisch oder nirgends.*

*Ist  $W(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0$ , so bilden die  $\varphi_i$  ein Fundamentalsystem von Lösungen.*

**Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben!**

Ist  $D^k(f) := f^{(k)}$  und

$$L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

ein linearer Differentialoperator  $n$ -ter Ordnung, so kann man der homogenen DGL

$$L[f] = 0, \quad \text{also } y^{(n)} = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \dots - a_1(x)y' - a_0(x)y$$

ein System erster Ordnung zuordnen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= -a_{n-1}(x)y_n - \dots - a_1(x)y_2 - a_0(x)y_1, \end{aligned}$$

bzw. im Matrizen-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist der Lösungsraum dieser DGL ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Ist  $\{f_1, \dots, f_n\}$  eine Basis der Lösungen von  $L[f] = 0$ , so nimmt die Fundamentalmatrix folgende Gestalt an:

$$X(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Die Formel von Liouville lautet nun:

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds\right),$$

und  $W$  erfüllt die DGL 1. Ordnung:

$$y' + a_{n-1}(x)y = 0.$$

Wir kehren nun zu allgemeinen linearen Systemen 1. Ordnung zurück. Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{y}' = A(x) \circ \vec{y} + \vec{b}(x)$$

gewinnt man mit der Methode der *Variation der Konstanten*.

Ist  $X(t) = (\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t))$  eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \dots + c_n \cdot \vec{\varphi}_n(t).$$

Die Methode der Variation der Konstanten besagt nun, daß wir einen Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen sollen, bei dem wir die Konstanten durch Funktionen ersetzen:

$$\vec{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n(t) \cdot \vec{\varphi}_n(t) = X(t) \circ \vec{c}(t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}'_p(t) &= X'(t) \circ \vec{c}(t) + X(t) \circ \vec{c}'(t) \\ &= A(t) \circ X(t) \circ \vec{c}(t) + X(t) \circ \vec{c}'(t) \\ &= A(t) \circ \vec{\varphi}_p(t) + X(t) \circ \vec{c}'(t). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} &\iff X(t) \circ \vec{c}'(t) = \vec{b}(t) \\ &\iff \vec{c}'(t) = X(t)^{-1} \circ \vec{b}(t) \\ &\iff \vec{c}(t) = \int_{t_0}^t X(s)^{-1} \circ \vec{b}(s) ds + \vec{k}, \end{aligned}$$

mit einem konstanten Vektor  $\vec{k}$ , den wir gleich Null setzen können. Das bedeutet:

$$\vec{\varphi}_p(t) = X(t) \circ \left( \int_{t_0}^t X(s)^{-1} \circ \vec{b}(s) ds \right).$$

Nun wenden wir das Ergebnis auf eine (skalare) lineare DGL 2. Grades an:

$$\boxed{y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).}$$

Hier ist

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}.$$

$W(t) = \det X(t) = y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)$  ist die Wronski-Determinante, und die Matrix  $X(t)^{-1}$  kann durch die Formel

$$X(t)^{-1} = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y'_2(t) & -y_2(t) \\ -y'_1(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Also ist

$$X(s)^{-1} \circ \vec{b}(s) = \frac{1}{W(s)} \cdot \begin{pmatrix} -y_2(s)r(s) \\ y_1(s)r(s) \end{pmatrix}.$$

$X(t) \circ \left( \int_{t_0}^t X(s)^{-1} \circ \vec{b}(s) ds \right)$  ist Lösung des Systems, und die 1. Komponente davon ist Lösung der skalaren Gleichung. So erhalten wir:

$$\boxed{\varphi_p(t) = y_1(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{-y_2(s)r(s)}{W(s)} ds + y_2(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)} ds.}$$

Dabei haben wir die zweite Zeile des erhaltenen Spaltenvektors ignoriert. Man beachte, daß es sich nur um einen **Ansatz** handelt. Es ist also ratsam, hinterher die Probe zu machen. Dafür darf man meist die Integrationskonstanten weglassen.

**Beispiel:**

Wir betrachten die DGL  $y'' + y' - 2y = e^x$  mit konstanten Koeffizienten.

Das charakteristische Polynom  $p(x) = x^2 + x - 2$  hat die beiden reellen Nullstellen  $x = 1$  und  $x = -2$ . Also erhalten wir als Fundamentalsystem für die homogene DGL:

$$y_1(x) = e^x \text{ und } y_2(x) = e^{-2x}.$$

Als nächstes berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}.$$

Dann ist

$$\int \frac{-y_2(t)r(t)}{W(t)} dt = \int \frac{-e^{-t}}{-3e^{-t}} dt = \int \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}x$$

und

$$\int \frac{y_1(t)r(t)}{W(t)} dt = \int \frac{e^{2t}}{-3e^{-t}} dt = -\frac{1}{3} \int e^{3t} dt = -\frac{1}{9}e^{3x}.$$

Also erhalten wir als partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x.$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{e^x}{9}(3x - 1), \\ y_p'(x) &= \frac{e^x}{9}(3x + 2) \\ \text{und } y_p''(x) &= \frac{e^x}{9}(3x + 5), \end{aligned}$$

also

$$y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) = \frac{e^x}{9}(3x + 5 + 3x + 2 - 6x + 2) = e^x.$$

## §6 Lösungsmethoden

### A) Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir erinnern an die Matrix-Norm. Für eine Matrix

$$A = \left( a_{ij} \mid \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right) \in M_{n,m}(K), \text{ mit } K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

setzen wir

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}.$$

Die Eigenschaften einer Norm sind erfüllt (vgl. Kapitel IV, §7, S. 87, im reellen Fall), außerdem ist  $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , wenn man die Matrizen miteinander multiplizieren kann. Im Falle eines Vektors ist die Matrix-Norm genau die euklidische Norm.

#### Definition:

Sei  $A_k = \left( a_{ij}^{(k)} \mid \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right)$  eine Folge von quadratischen Matrizen mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$  heißt *konvergent*, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$  für jedes Indexpaar  $(i, j)$  konvergiert.

#### Die Exponentialfunktion für Matrizen

1. Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ .

2. Die Reihe  $e^A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  konvergiert für jede Matrix  $A$ .

BEWEIS: 1) Weil  $|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A_k\|$  ist, ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$  eine Majorante für jede der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}.$$

2) Die Zahlen-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$  konvergiert gegen  $e^{\|A\|}$ . Weil  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  ist, konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\|$ . Und das bedeutet wiederum, daß die Exponentialreihe konvergiert.  $\square$

**Achtung:** Die Komponenten von  $e^A$  sind normalerweise **nicht** die Funktionen  $\exp(a_{ij})$ .



Die Berechnung von  $e^A$  ist i.a. schwierig. Sehr nützlich sind dabei die folgenden Regeln:

### Regeln zur Berechnung von $e^A$

1. Ist  $D = \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine Diagonalmatrix, so ist  $e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ .

2. Ist  $A$  beliebig und  $P$  invertierbar, so ist

$$e^{P^{-1} \circ A \circ P} = P^{-1} \circ e^A \circ P.$$

Ist  $A$  diagonalisierbar, so ist auch  $e^A$  diagonalisierbar.

BEWEIS: 1) Es ist  $D^0 = E$  (Einheitsmatrix) und  $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{k!} \lambda_1^k, \dots, \frac{1}{k!} \lambda_n^k\right) \\ &= \Delta(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}). \end{aligned}$$

2) Es ist  $(P^{-1} \circ A \circ P)^k = P^{-1} \circ A^k \circ P$ , also

$$\begin{aligned} e^{P^{-1} \circ A \circ P} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P^{-1} \circ A \circ P)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1} \circ \left(\frac{1}{k!} A^k\right) \circ P \\ &= P^{-1} \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) \circ P \quad (\text{vgl. } ^8) \\ &= P^{-1} \circ e^A \circ P. \end{aligned}$$

Ist nun  $P^{-1} \circ A \circ P = \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , so ist  $P^{-1} \circ e^A \circ P = \Delta(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ . □

### Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei  $A \in M_{n,n}(K)$ . Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix  $X(t)$  des linearen Systems  $\vec{y}' = A \circ \vec{y}$  mit  $X(0) = E$  ist gegeben durch

$$X(t) := e^{tA}.$$

BEWEIS: Es ist  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$ . Die einzelnen Summanden sind differenzierbar, und nach dem Majorantenkriterium konvergieren alle Komponentenreihen der formal abgelei-

<sup>8</sup>Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q \circ A_n \circ P = Q \circ \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \circ P$ , wie man leicht nachrechnet.

teten Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} = A \circ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k.$$

Also ist  $X(t) = e^{tA}$  differenzierbar, mit  $X'(t) = A \circ X(t)$  und  $X(0) = E$ . Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz ist damit alles bewiesen.  $\square$

### Das Additionstheorem für die Exponentialfunktion

1. Für  $s, t \in \mathbb{R}$  ist  $e^{sA} \circ e^{tA} = e^{(s+t)A}$ .
2. Ist  $A \circ B = B \circ A$ , so ist  $e^{A+B} = e^A \circ e^B$ .
3. Die Matrix  $e^A$  ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:

$$\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)}.$$

BEWEIS: Ist  $A \circ B = B \circ A$ , so ist

$$B \circ e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B \circ (tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \circ B = e^{tA} \circ B.$$

Wir setzen  $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \circ e^{tB}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \circ e^{t(A+B)} - A \circ e^{tA} \circ e^{tB} - e^{tA} \circ B \circ e^{tB} \\ &= (A+B) \circ (e^{t(A+B)} - e^{tA} \circ e^{tB}) \\ &= (A+B) \circ F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$  ist also die eindeutig bestimmte Lösung der DGL  $\vec{y}' = (A+B) \circ \vec{y}$ , mit  $F(0) = 0$ . Daher muß  $F(t) \equiv 0$  sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \circ e^{tB}.$$

2) Für  $t = 1$  erhält man:  $e^{A+B} = e^A \circ e^B$ .

1) Die Matrizen  $sA$  und  $tA$  sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \circ e^{tA}.$$

3) Es ist  $e^A \circ e^{-A} = e^0 = E$ , also  $e^A$  invertierbar, mit  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

Aus der Liouville-Formel ergibt sich:

$$\det(e^{tA}) = \exp\left(\int_0^t \text{Spur}(A) ds\right) = e^{t \cdot \text{Spur}(A)}.$$

Mit  $t = 1$  erhält man die gewünschte Formel.  $\square$

Wir können lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten lösen, sofern wir die Matrizen  $e^{tA}$  berechnen können. Im Falle von Diagonalmatrizen ist das möglich, und auch im Falle

diagonalisierbarer Matrizen. Um beliebige Fälle behandeln zu können, muß man auf den Satz von der Jordanschen Normalform zurückgreifen.

Wir nehmen zusätzlich an, daß  $p_A(x)$  vollständig in Linearfaktoren zerfällt:

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - x)^{m_r},$$

mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Über  $\mathbb{C}$  ist diese Voraussetzung immer erfüllt. Ist  $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, r$ , so ist  $A$  diagonalisierbar und wir können  $e^{tA}$  wie oben gezeigt ausrechnen.

Ist  $g(\lambda_i) < a(\lambda_i)$  für irgendeine  $i$ , so ist  $A$  nicht diagonalisierbar, aber es gilt noch der Satz von der Jordanschen Normalform. Wir brauchen ihn nur in der folgenden vereinfachten Form:

Es gibt eine reguläre Matrix  $P$  mit

$$P^{-1} \circ A \circ P = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Dabei hat die  $m_i$ -reihige Jordan-Matrix  $J_i(\lambda_i)$  jeweils die Gestalt

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & * & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i & * \\ 0 & & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

wobei an Stelle der Sterne Einsen oder Nullen stehen können. Man schreibt  $J_i(\lambda_i)$  auch in der Form

$$J_i(\lambda_i) = \lambda_i \cdot E_{m_i} + N_i,$$

wobei  $N_i$  nur Einträge oberhalb der Diagonalen besitzt. Dann ist  $(N_i)^{m_i} = 0$  für alle  $i$ , also  $N_i$  eine nilpotente Matrix.

Nun gilt:

$$P^{-1} \circ A^k \circ P = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r(\lambda_r)^k \end{pmatrix} \quad \text{für alle } k,$$

also

$$P^{-1} \circ e^{tA} \circ P = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir  $A^* := P^{-1} \circ A \circ P$ , so ist  $X(t) := e^{tA} = P \circ e^{tA^*} \circ P^{-1}$  eine Fundamentalmatrix. Für jede konstante Matrix  $C$  ist dann auch  $X(t) \circ C$  eine Fundamentalmatrix (wie man sofort durch Differenzieren verifizieren kann), also insbesondere auch

$$e^{tA} \circ P = P \circ e^{tA^*} = P \circ \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \cdot e^{tN_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_r t} \cdot e^{tN_r} \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$e^{tN_i} = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{1}{k!} (N_i)^k t^k =: Q_i(t)$$

eine Matrix, deren Einträge Polynome in  $t$  vom Grad  $\leq m_i - 1$  sind. Es folgt:

$$e^{tA} \circ P = \left( e^{\lambda_1 t} \vec{q}_1^{(1)}(t), \dots, e^{\lambda_1 t} \vec{q}_{m_1}^{(1)}(t), \dots, e^{\lambda_r t} \vec{q}_1^{(r)}(t), \dots, e^{\lambda_r t} \vec{q}_{m_r}^{(r)}(t) \right),$$

wobei die Spaltenvektoren  $\vec{q}_j^{(i)}(t)$  als Einträge jeweils Polynome in  $t$  vom Grad  $\leq m_i$  enthalten.

Diese Tatsache ermöglicht es, die Lösung über einen Ansatz zu finden.

**Beispiel:**

Sei  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Wir wollen die DGL  $\vec{y}' = A \circ \vec{y}$  lösen.

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von  $A$ . Es ist

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(A - tE) &= (-t)[(3-t)(1-t) + 1] - [2(t-1) - 1] - [-2 + (3-t)] \\ &= (-t)(t^2 - 4t + 4) - (2t - 3) - (1 - t) \\ &= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 \\ &= -(t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Der Eigenwert  $\lambda = 2$  hat die Vielfachheit 1. Man findet sofort einen Eigenvektor dazu, nämlich  $\mathbf{y}_1 := (0, 1, 1)$ . Das ergibt die erste Lösung

$$\varphi_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Der Eigenwert  $\lambda = 1$  hat die (algebraische) Vielfachheit 2 und man findet dazu nur den Eigenvektor  $\mathbf{y}_2 := (1, 1, 0)$ . Also ist  $A$  nicht diagonalisierbar und wir machen den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} q_1 + p_1 t \\ q_2 + p_2 t \\ q_3 + p_3 t \end{pmatrix} e^t.$$

Setzt man  $\vec{y}(t)$  in die DGL ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (q_1 + p_1) + p_1 t \\ (q_2 + p_2) + p_2 t \\ (q_3 + p_3) + p_3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t \\ (-2q_1 + 3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t \\ (-q_1 + q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t \end{pmatrix}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten bei  $t$  liefert:

$$p_1 = p_2 \quad \text{und daher} \quad p_3 = 0.$$

Setzen wir  $\alpha := p_1 = p_2$ , so ergibt sich ferner:

$$q_1 - q_2 + q_3 = -\alpha, \quad 2(q_1 - q_2) - q_3 = -\alpha \quad \text{und} \quad q_1 = q_2,$$

also  $q_3 = -\alpha$ . Setzen wir noch  $\beta := q_1 = q_2$ , so erhalten wir:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \beta + \alpha t \\ \beta + \alpha t \\ -\alpha \end{pmatrix} e^t.$$

Das setzt sich linear zusammen aus den Lösungen

$$\varphi_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \quad \text{und} \quad \varphi_3(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

## B) Potenzreihenansatz

Wenn z.B. eine DGL der Form

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = r(t)$$

vorliegt, mit analytischen Funktionen  $a$ ,  $b$  und  $r$ , so kann man versuchen, auch die Lösung  $\varphi(t)$  als Potenzreihe anzusetzen und diesen Ansatz in die DGL einzusetzen. Wenn man Glück hat, liefert dann ein Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der gesuchten Potenzreihe oder womöglich gar die komplette Lösung.

Das Verfahren soll hier nur am Beispiel der *Legendreschen DGL* demonstriert werden:

$$[L] \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Wir machen für die Lösung den Ansatz

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu}.$$

Setzen wir  $\varphi$  in die DGL ein, so erhalten wir:

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu} \cdot \nu(\nu-1)t^{\nu-2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu} \cdot \nu(\nu-1)t^{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cdot 2\nu t^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cdot n(n+1)t^{\nu} = 0,$$

also

$$2a_2 = -n(n+1)a_0, \quad 6a_3 = (2 - n(n+1))a_1$$

und

$$a_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1) = a_{\nu}(\nu(\nu+1) - n(n+1)) \quad \text{für } \nu \geq 2.$$

Das ergibt

$$a_2 = a_0 \cdot \frac{(-n)(n+1)}{1 \cdot 2}, \quad a_3 = a_1 \cdot \frac{(1-n)(1+n+1)}{2 \cdot 3}$$

und

$$a_{\nu+2} = a_{\nu} \cdot \frac{(\nu - n)(\nu + n + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \quad \text{für } \nu \geq 2.$$

Die letzte Formel gilt also sogar für  $\nu \geq 0$ . Induktiv erhält man daraus:

$$a_{2\mu} = a_0 \cdot \frac{1}{(2\mu)!} \cdot \prod_{k=0}^{\mu-1} (2k - n)(2k + n + 1)$$

und

$$a_{2\mu+1} = a_1 \cdot \frac{1}{(2\mu + 1)!} \cdot \prod_{k=0}^{\mu-1} (2k + 1 - n)(2k + n + 2).$$

Das bedeutet: Ist  $n$  gerade, so ist  $a_{2\mu} = 0$  für  $2\mu > n$ . Ist  $n$  ungerade, so ist  $a_{2\mu+1} = 0$  für  $2\mu + 1 > n$ .

### Polynomlösungen der Legendreschen DGL

Ist  $n = 2m$ , so ist

$$\varphi_{1,m}(t) := \sum_{\mu=0}^m \frac{a_0}{(2\mu)!} \left( \prod_{k=0}^{\mu-1} (2k - n)(2k + n + 1) \right) t^{2\mu}$$

eine Lösung von  $[L]$  mit  $\varphi_{1,m}(0) = a_0$  und  $(\varphi_{1,m})'(0) = 0$ .

Ist  $n = 2m + 1$ , so ist

$$\varphi_{2,m}(t) := \sum_{\mu=0}^m \frac{a_1}{(2\mu + 1)!} \left( \prod_{k=0}^{\mu-1} (2k - n + 1)(2k + n + 2) \right) t^{2\mu+1}$$

eine Lösung von  $[L]$  mit  $\varphi_{2,m}(0) = 0$  und  $(\varphi_{2,m})'(0) = a_1$ .

Es gibt jeweils noch eine zweite Lösung, die dann aber kein Polynom ist.

Der BEWEIS des Satzes ergibt sich aus den vorangegangenen Rechnungen. Wir wollen nun noch zeigen, daß die gefundenen Polynomlösungen gute alte Bekannte sind.

Sei  $n = 2m$  und  $a_0 = 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (-n)(-n+2) \cdot \dots \cdot (-n+2\mu-2) &= (-2)^\mu m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-\mu+1) \\ &= (-2)^\mu \cdot \frac{m!}{(m-\mu)!} \\ \text{und } (n+1)(n+3) \cdot \dots \cdot (n+2\mu-1) &= (2m+1)(2m+3) \cdot \dots \cdot (2m+2\mu-1) \\ &= \frac{(2m+1)(2m+2) \cdot \dots \cdot (2m+2\mu)}{(2m+2)(2m+4) \cdot \dots \cdot (2m+2\mu)} \\ &= \frac{(2m+2\mu)!}{2^\mu \cdot (2m)!(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (m+\mu)} \\ &= \frac{(2m+2\mu)!m!}{2^\mu \cdot (2m)!(m+\mu)!} \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 \varphi_{1,m}(t) &= \sum_{\mu=0}^m \frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} \cdot \frac{(m!)^2(2m+2\mu)!}{(2m)!(m-\mu)!(m+\mu)!} t^{2\mu} \\
 &= \frac{(m!)^2}{(2m)!} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(4m-2k)!}{k!(2m-k)!(2m-2k)!} t^{2m-2k} \\
 &= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{4m-2k}{2m} \binom{2m}{k} t^{2m-2k} \\
 &= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!} \cdot 2^{2m} \cdot P_{2m}(t),
 \end{aligned}$$

wobei  $P_{2m}(t)$  das Legendre-Polynom der Ordnung  $2m$  ist.

Analog geht es im Falle  $n = 2m + 1$  und  $a_1 = 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 (-n+1)(-n+3) \cdot \dots \cdot (-n+2\mu-1) &= (-2m)(-2m+2) \cdot \dots \cdot (-2m+2\mu-2) \\
 &= (-2)^\mu m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-\mu+1) \\
 &= (-2)^\mu \cdot \frac{m!}{(m-\mu)!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{und } (n+2)(n+4) \cdot \dots \cdot (n+2\mu) &= (2m+3)(2m+5) \cdot \dots \cdot (2m+2\mu+1) \\
 &= \frac{(2m+2)(2m+3) \cdot \dots \cdot (2m+2\mu+2)}{(2m+2)(2m+4) \cdot \dots \cdot (2m+2\mu+2)} \\
 &= \frac{(2m+2\mu+2)!}{2^{\mu+1} \cdot (2m+1)!(m+1) \cdot \dots \cdot (m+\mu+1)} \\
 &= \frac{(2m+2\mu+2)!m!}{2^{\mu+1} \cdot (2m+1)!(m+\mu+1)!}
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2,m}(t) &= \sum_{\mu=0}^m \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{(m!)^2(2m+2\mu+2)!}{2(2m+1)!(m-\mu)!(m+\mu+1)!} t^{2\mu+1} \\
 &= \frac{(m!)^2}{2(2m+1)!} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(4m-2k+2)!}{k!(2m-k+1)!(2m-2k+1)!(2\mu+1)!} t^{2m-2k+1} \\
 &= (-1)^m \frac{(m!)^2}{2(2m+1)!} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{4m-2k+2}{2m+1} \binom{2m+1}{k} t^{2m-2k+1} \\
 &= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \cdot 2^{2m} \cdot P_{2m+1}(t),
 \end{aligned}$$

wobei  $P_{2m+1}(t)$  das Legendre-Polynom der Ordnung  $2m+1$  ist.

## C) Transformationen

Sei  $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Die DGL  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$  läßt sich manchmal besser lösen, wenn man sie transformiert.

Sei  $T : B \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus auf einen Bereich  $D$ , mit  $T(t, \mathbf{y}) = (t, \tilde{T}(t, \mathbf{y}))$ .

Die Lösungskurven  $t \mapsto (t, \varphi(t))$  der ursprünglichen DGL werden auf Kurven

$$t \mapsto (t, \psi(t)) = T(t, \varphi(t)) = (t, \tilde{T}(t, \varphi(t)))$$

abgebildet, und wir versuchen, diese Kurven als Lösungen einer neuen DGL aufzufassen. Wie sieht diese DGL aus?

Hat die transformierte DGL die Gestalt  $\vec{v}' = G(t, v)$ , so muß gelten:

$$\psi'(t) = G(t, \psi(t)) \quad \text{und} \quad \psi(t) = \tilde{T}(t, \varphi(t)).$$

Wir beschränken uns hier auf skalare DGLn. Dann ist

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(t, \varphi(t))\varphi'(t) = \psi'(t) = G(t, \psi(t))$$

und

$$(t, \varphi(t)) = T^{-1}(t, \psi(t)),$$

also

$$G(t, v) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(T^{-1}(t, v)) + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(T^{-1}(t, v)) \cdot F(T^{-1}(t, v)).$$

### Beispiel:

Die DGL  $y' = F(t, y)$  wird *homogen* genannt, falls  $F(rt, ry) = F(t, y)$  für  $(t, y) \in B$  und  $r \neq 0$  ist.<sup>9</sup> Man setze dann  $T(t, y) := (t, \frac{y}{t})$ .

Ist  $\alpha(t)$  Lösung der Ausgangsgleichung, so ist  $\beta(t) := \frac{\alpha(t)}{t}$  Lösung der transformierten Gleichung, und es gilt:

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \frac{t\alpha'(t) - \alpha(t)}{t^2} \\ &= \frac{t \cdot F(t, \alpha(t)) - \alpha(t)}{t^2} \\ &= \frac{t \cdot F(t, t\beta(t)) - t\beta(t)}{t^2} \\ &= \frac{F(1, \beta(t)) - \beta(t)}{t}, \end{aligned}$$

d.h.,  $\beta$  ist Lösung der DGL  $v' = \frac{F(1, v) - v}{t}$ .  $\beta$  ist eventuell einfacher zu finden.

Sei etwa  $F(t, y) = \frac{y}{t} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{t^2}}$ . Man sieht sofort, daß das eine homogene DGL ergibt, und die obige Transformation macht daraus

$$v' = \frac{1}{t}\sqrt{1 - v^2}.$$

<sup>9</sup>Dieser Begriff sollte nicht mit dem Begriff „homogen“ bei linearen DGLn verwechselt werden!



Das ist eine DGL mit getrennten Variablen, der Gestalt  $v' = f(t)g(v)$ , mit  $f(t) = \frac{1}{t}$  und  $g(v) = \sqrt{1-v^2}$ . Offensichtlich ist die Lösung gegeben durch

$$\beta(t) = \sin\left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + \arcsin(v_0)\right),$$

wenn  $(t_0, v_0)$  die (transformierte) Anfangsbedingung ist. Dann ist

$$\alpha(t) = t\beta(t) = t \cdot \sin\left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + \arcsin\left(\frac{y_0}{t_0}\right)\right).$$

Ein anderes Anwendungsbeispiel ist die *Bernoullische DGL* :

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

wobei  $\alpha$  reell,  $\neq 0$  und  $\neq 1$  sein soll.

Wir verwenden die Transformation  $T(t, y) := (t, y^{1-\alpha})$ . Dann ist

$$T^{-1}(t, v) = (t, v^{1/(1-\alpha)}), \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(t, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(t, y) = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

Weil  $F(t, y) = a(t)y + b(t)y^\alpha$  ist, folgt: die transformierten Integralkurven genügen der DGL  $v' = G(t, v)$ , mit

$$\begin{aligned} G(t, v) &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(t, v^{1/(1-\alpha)}) + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(t, v^{1/(1-\alpha)}) \cdot F(t, v^{1/(1-\alpha)}) \\ &= (1-\alpha)v^{-\alpha/(1-\alpha)} \cdot (a(t)v^{1/(1-\alpha)} + b(t)v^{\alpha/(1-\alpha)}) \\ &= (1-\alpha) \cdot (a(t)v + b(t)). \end{aligned}$$

Die transformierte DGL ist linear und daher sicher einfacher zu behandeln als die Ausgangsgleichung.

### Beispiel :

Die *logistische Gleichung* (oder *Gleichung des beschränkten Wachstums*)

$$y' = ay - by^2, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y > 0$$

ist vom Bernoullischen Typ. Bevor wir sie transformieren, noch ein paar Anmerkungen:

Es ist  $y' = y(a - by)$ . Ist  $y(t) < \frac{a}{b}$ , so ist  $a - by > 0$ , also  $y' > 0$ . Der „Bestand“ wächst! Ist dagegen  $y(t) > \frac{a}{b}$ , so ist  $y' < 0$  und der Bestand nimmt ab.

Weiter ist  $y'' = ay' - 2byy' = (a - 2by)y'$ . Ist also  $y(t) < \frac{a}{2b}$ , so ist  $y' > 0$  und  $y'' > 0$ . Das ist der Bereich „beschleunigten Wachstums“.

Nun wenden wir unsere Transformation an. Suchen wir eine Lösung von  $y' = ay - by^2$  zum Anfangswert  $(t_0, y_0)$ , so können wir genauso gut eine Lösung von  $v' = -av + b$

suchen, zum Anfangswert  $(t_0, y_0^{-1})$ . Das ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine partikuläre Lösung ist die konstante Funktion  $v_p(t) \equiv \frac{b}{a}$ , und die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch  $v_c(t) := c \cdot e^{-at}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$y_c(t) = (v_p(t) + v_c(t))^{-1} = \frac{a}{b + ac \cdot e^{-at}}.$$

Für alle diese Lösungen gilt:

$$t \rightarrow \infty \quad \Longrightarrow \quad y_c(t) \rightarrow \frac{a}{b}.$$

## D) Numerische Lösung

Am einfachsten ist das *Eulersche Polygonzug-Verfahren*.

Wir betrachten hier nur eine explizite DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' = F(t, y), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(t_0) = y_0.$$

Wir nehmen an, daß es eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : [t_0, t_0^*] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(t_0) = y_0$  gibt (nachprüfbar mit Picard-Lindelöf).

Um nun  $\varphi$  numerisch zu approximieren, teilt man  $I := [t_0, t_0^*]$  in  $N$  Teilintervalle der Länge  $h$ . Es sei  $t_n := t_0 + n \cdot h$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Nach Voraussetzung ist  $\varphi'(t_0) = F(t_0, y_0)$ , und das ist die Steigung von  $\varphi$  bei  $t_0$ . Die affin-lineare Funktion  $L_1(t) := y_0 + (t - t_0) \cdot F(t_0, y_0)$  ist offensichtlich die Tangente an den Graphen von  $\varphi$  bei  $t_0$ . Auf dem ersten Teilintervall ersetzen wir nun  $\varphi$  durch  $L_1$ . Das ist eine (i.a. nicht besonders gute) Approximation, durch die der unbekannte Wert  $\varphi(t_1)$  durch den berechenbaren Wert

$$y_1 := L_1(t_1) = y_0 + h \cdot F(t_0, y_0)$$

ersetzt wird. Mit diesem Wert arbeitet man weiter, nach der allgemeinen Rekursionsformel

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} := y_n + h \cdot F(t_n, y_n).$$

Die so berechneten Punkte ergeben einen Polygonzug, der den Graphen von  $\varphi$  approximiert, und zwar um so besser, je kleiner man die Schrittweite  $h$  macht. Man wird aber kaum vermeiden können, daß der Fehler bei jedem Schritt größer und schließlich nicht mehr beherrschbar wird.

Die Steigung einer stetig differenzierbaren Lösung zwischen  $t_n$  und  $t_{n+1}$  wird sich zwischen  $F(t_n, \varphi(t_n))$  und  $F(t_n + h, \varphi(t_n + h))$  bewegen. Statt also die Steigung am Anfang des Intervalls heranzuziehen, wird es i.a. besser sein, als Steigung den mittleren Wert  $F(t_n + \frac{h}{2}, \varphi(t_n + \frac{h}{2}))$  zu wählen. Das Problem dabei ist, daß man  $\varphi(t_n + \frac{h}{2})$  normalerweise nicht

kennt, selbst wenn  $\varphi(t_n)$  noch bekannt ist oder zumindest gut approximiert wurde. Also ersetzt man  $\varphi(t_n + \frac{h}{2})$  durch  $y_n + \frac{h}{2} \cdot F(t_n, y_n)$ . Das liefert die Rekursion für das *verbesserte Polygonzug-Verfahren* :

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} := y_n + h \cdot F\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot F(t_n, y_n)\right).$$

Da auch das verbesserte Polygonzug-Verfahren meist nicht ausreicht, hat man verfeinerte Verfahren entwickelt. Ich stelle speziell das Verfahren von *Runge-Kutta* vor, bei dem jeweils ein gewichteter Mittelwert aus vier approximativ bestimmten Steigungen benutzt wird:

$$\begin{aligned} k_{n,1} &:= F(t_n, y_n), \\ k_{n,2} &:= F\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_{n,1}\right), \\ k_{n,3} &:= F\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_{n,2}\right), \\ k_{n,4} &:= F(t_n + h, y_n + h \cdot k_{n,3}). \end{aligned}$$

Die Rekursion nach Runge-Kutta sieht nun wie folgt aus:

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{und} \quad y_{n+1} := y_n + h \cdot \frac{1}{6}(k_{n,1} + 2 \cdot k_{n,2} + 2 \cdot k_{n,3} + k_{n,4}).$$

Mit diesem Verfahren kann man schon recht gute Ergebnisse erzielen. Man spricht übrigens von einem *Ein-Schritt-Verfahren*, weil man bei jedem neuen Approximationsschritt jeweils nur den vorher berechneten Punkt  $(t_n, y_n)$  benutzt. Es gibt auch *Mehr-Schritt-Verfahren*, bei denen nicht nur der letzte, sondern auch die vorhergehenden Schritte bei der Rekursion benutzt werden. Solche Verfahren sind genauer, aber auch wesentlich komplizierter.

Zum Schluß wollen wir uns noch die Bedeutung des Runge-Kutta-Verfahrens in einem Spezialfall ansehen.

Die Lösung der DGL  $y' = f(x)$  erhält man durch einfache Integration:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(x) dx.$$

Runge-Kutta liefert in diesem speziellen Falle:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f(t_n) + 4 \cdot f(t_n + \frac{h}{2}) + f(t_n + h)).$$

Das ist aber gerade die Simpson-Näherung des obigen Integrals, von der wir schon wissen, daß sie eine sehr gute Näherung ist. Jetzt kann man sich auch etwas besser erklären, wie es zu der komplizierten Rekursionsformel beim Runge-Kutta-Verfahren gekommen ist.

---

## Literatur

- Serge Lang.** *Analysis I.* Addison-Wesley, 1968.  
(deutsche Übersetzung: *Analysis.* Inter European Editions, 1977)
- Konrad Königsberger.** *Analysis I und II.* Springer, 1995/97.
- Tom M. Apostol.** *Calculus I und II.* John Wiley & Sons, 1968.
- Michael Spivak.** *Calculus on Manifolds.* W.A.Benjamin, 1965.
- Jerrold E. Marsden / Anthony J. Tromba.** *Vektoranalysis.* Spektrum, 1995.
- Saturnino L. Salas / Einar Hille.** *Calculus.* Spektrum, 1994.
- Howard Anton.** *Lineare Algebra.* Spektrum, 1998.
- Kurt Meyberg / Peter Vachenaer.** *Höhere Mathematik 1 und 2.* Springer, 1990/91.
- Kurt Endl / Wolfgang Luh.** *Analysis II und III.* Aula-Verlag.
- Walter Rudin.** *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1985.
- Miroslav Lovrić.** *Vector Calculus.* Addison-Wesley, 1997.
- Klaus Jänich.** *Vektoranalysis.* Springer, 1992.
- Wolfgang Fischer / Ingo Lieb.** *Funktionentheorie.* Vieweg.
- Klaus Jänich.** *Analysis für Physiker und Ingenieure.* Springer, 1990.
- Harro Heuser.** *Lehrbuch der Analysis I und II.* Teubner, 1979/80.
- Peter Furlan.** *Das Gelbe Rechenbuch 2 und 3.* Verlag Martina Furlan. **Christian B. Lang / Norbert Pucker.** *Mathematische Methoden in der Physik.* Spektrum, 1998.
- Wolfgang Walter.** *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, 1996.

Außerdem habe ich benutzt:

- Bröcker,** Analysis 1 – 3,  
**Rudin,** Real and Complex Analysis,  
**Grauert / Fischer,** Differential- und Integralrechnung II,  
**Grauert / Lieb,** Differential- und Integralrechnung III.