
Kapitel VI

Funktionentheorie

§1 Holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt sollen komplexwertige Funktionen auf Gebieten $G \subset \mathbb{C}$ untersucht werden.

Beispiele:

1. Die *Konjugation* $c : z \mapsto \bar{z}$ stellt eine Spiegelung an der reellen Achse dar:

$$c(x + \mathbf{j}y) := x - \mathbf{j}y.$$

Sie ist natürlich auf ganz \mathbb{C} definiert und bijektiv, mit $c \circ c(z) = z$.

2. Sei $a = \alpha + \mathbf{j}\beta$ eine feste komplexe Zahl $\neq 0$. Die Abbildung $H_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $H_a(z) := a \cdot z$ ist \mathbb{C} -linear, und damit erst recht \mathbb{R} -linear.

Die komplexen Zahlen 1 und \mathbf{j} bilden eine Basis A von \mathbb{C} über \mathbb{R} . Wir wollen H_a bezüglich dieser Basis beschreiben. Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} H_a(1) &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \mathbf{j}, \\ H_a(\mathbf{j}) &= (-\beta) \cdot 1 + \alpha \cdot \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Für $z = x + \mathbf{j}y \in \mathbb{C}$ sei $[z]_A = (x, y)^\top$ die Koordinatendarstellung von z bezüglich A . Dann ist $[H_a(z)]_A = M_A(H_a) \circ [z]_A$, mit

$$M_A(H_a) = ([H_a(1)]_A, [H_a(\mathbf{j})]_A) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir haben das schon einmal in Kapitel III, §2 (Seite 105) gesehen.

Man kann auch sagen: eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear, wenn ihre Matrix die gerade beschriebene spezielle Gestalt besitzt.

Schreibt man a in der Form $a = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$, mit $r > 0$ und $0 \leq t < 2\pi$, so setzt sich H_a aus der Drehung um den Winkel t und der Streckung um den Faktor r zusammen, ist also eine „Drehstreckung“. Weil wir $a \neq 0$ vorausgesetzt haben, ist H_a bijektiv, mit $(H_a)^{-1} = H_{1/a}$.

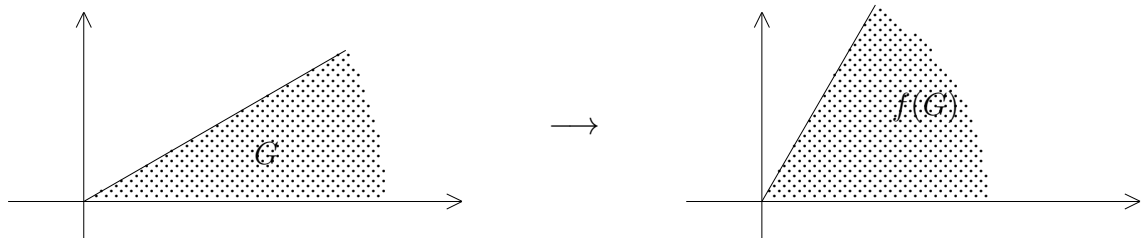
3. Sei $f(z) := z^2$. Diese Funktion kann man am besten verstehen, wenn man z in Polarkoordinaten schreibt: $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$. Dann ist nämlich

$$f(z) = r^2 \cdot e^{2\mathbf{j}t} = r^2 \cdot (\cos(2t) + \mathbf{j} \sin(2t)).$$

Der Abstand vom Nullpunkt wird quadriert und der Winkel verdoppelt. Dadurch wird z.B. der Sektor $G := \{z = r \cdot e^{jt} : r > 0 \text{ und } 0 < t < \theta\}$ auf den verdoppelten Sektor

$$f(G) = \{w = \varrho \cdot e^{js} : \varrho > 0 \text{ und } 0 < s < 2\theta\}$$

abgebildet.



Wie sieht es mit der Umkehrabbildung aus? Ist $w = r \cdot e^{jt}$, so wollen wir natürlich $\sqrt{w} := \sqrt{r} \cdot e^{j\frac{t}{2}}$ setzen. Aber es ist auch $w = r \cdot e^{j(t+2\pi)}$, also könnten wir auch $\sqrt{w} = \sqrt{r} \cdot e^{j\frac{t}{2}+jt} = -\sqrt{r} \cdot e^{j\frac{t}{2}}$ setzen. Die Wurzel ist nicht eindeutig bestimmt, und wir haben keine Möglichkeit, eine der beiden Wurzeln auszuzeichnen. (Im Reellen können wir die **positive** Wurzel wählen, aber im Komplexen gibt es keine positiven Zahlen.)

4. *Komplexe Polynome:* $p(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.

$p(z)$ ist auf der gesamten komplexen Ebene definiert und stetig, und aus dem *Fundamentalsatz der Algebra* folgt:

$p(z)$ besitzt n Nullstellen z_1, \dots, z_n , und man kann dann schreiben:

$$p(z) = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

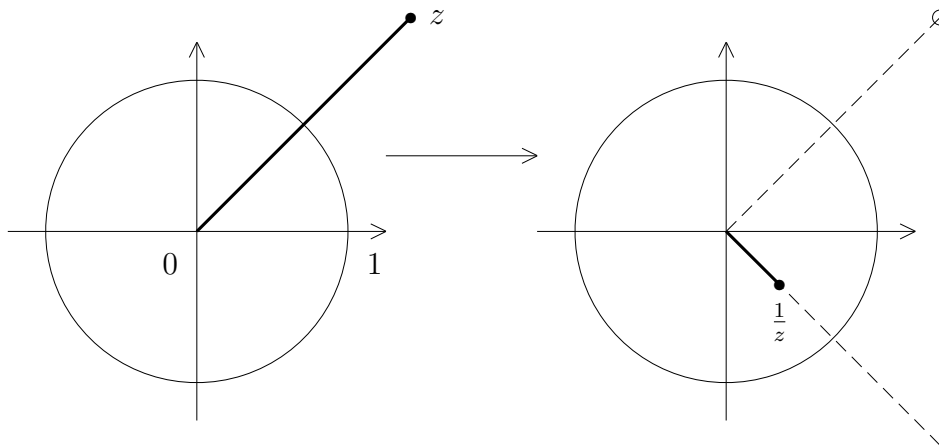
5. *Rationale Funktionen:* $R(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$, mit Polynomen p und q .

Da $p(z)$ und $q(z)$ beide in Linearfaktoren zerfallen, kann man so lange kürzen, bis Zähler und Nenner keine gemeinsame Nullstelle mehr haben. Wir nehmen an, daß p und q schon selbst diese Eigenschaft besitzen. Dann nennt man jede Nullstelle des Nenners $q(z)$ eine *Polstelle* der rationalen Funktion R . Offensichtlich ist $R(z)$ außer in den endlich vielen Polstellen überall auf \mathbb{C} definiert und stetig.

Die einfachste rationale Funktion mit einer Polstelle ist die *Inversion*

$$I(z) := \frac{1}{z}.$$

In Polarkoordinaten sieht das so aus: $r \cdot e^{jt} \mapsto \frac{1}{r} \cdot e^{-jt}$. Man kann diese Abbildung zusammensetzen aus der *Spiegelung am Einheitskreis* $s : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ und der Konjugation $c : z \mapsto \bar{z}$.



6. Eine spezielle Klasse von rationalen Funktionen bilden die (*gebrochen*) *linearen Transformationen*:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{mit } ad - bc \neq 0.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $c = 0$.

Setzt man $A := \frac{a}{d}$ und $B := \frac{b}{d}$, so erhält man die *affin-lineare* Funktion

$$T(z) = A \cdot z + B,$$

die sich aus einer Drehstreckung und einer Translation zusammensetzt.

2. Fall: $c \neq 0$.

Setzt man diesmal $A := \frac{bc - ad}{c}$ und $B := \frac{a}{c}$, so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz + d} + B &= \frac{(a(cz + d) + (bc - ad))}{c(cz + d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &= \frac{az + b}{cz + d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

Behauptung:

Eine lineare Transformation $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ac - bd \neq 0$ bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.

BEWEISIDEE: Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Bei affin-linearen Funktionen ergibt sich die Behauptung aus der Elementargeometrie.

2) Nun sei $w = I(z) = \frac{1}{z}$ die Inversion. Man kann zeigen, daß jede Gerade und jeder Kreis eine Menge M der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}z + \delta\}$$

ist, mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$. Eine Gerade liegt genau dann vor, wenn $\alpha = 0$ ist.

Da $z = \frac{1}{w}$ ist, gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muß, können wir mit $w\bar{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Das Bild von M ist wieder eine Menge vom gewünschten Typ. □

7. *Komplexe Potenzreihen:* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Zu einer solchen Potenzreihe gehört der *Konvergenzradius* R . Im Innern der Kreisscheibe $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ konvergiert $f(z)$ absolut und gleichmäßig (gegen eine stetige Funktion), außerhalb von $D_R(a)$ divergiert die Reihe. Mit der Redeweise „im Innern“ ist gemeint: auf jeder kompakten Menge $K \subset D_R(a)$.

Ein wichtiges Beispiel ist die komplexe *Exponentialfunktion*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Für reelles x ist $\exp(x) = e^x$ die bekannte Exponentialfunktion, und für rein imaginäres $z = \mathbf{j}y$ gilt die Eulersche Formel:

$$\exp(\mathbf{j}y) = \cos y + \mathbf{j} \sin y.$$

Wir wollen jetzt die komplexe Exponentialfunktion für beliebige Argumente berechnen.

Behauptung: Für $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(x+z) = \exp(x) \cdot \exp(z)$.

BEWEIS: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Weil die Exponentialreihe auf ganz \mathbb{C} absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, sind

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= \exp(x+z) \\ \text{und } f_2(z) &:= \exp(x) \cdot \exp(z) \end{aligned}$$

zwei Potenzreihen, die ebenfalls auf ganz \mathbb{C} gegen stetige Funktionen konvergieren. (beliebige Umordnungen sind erlaubt!)

Sei $f(z) := f_1(z) - f_2(z)$. Dann ist $f(y) \equiv 0$ für $y \in \mathbb{R}$. Und nach Konstruktion ist $f(z)$ wieder eine konvergente Potenzreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Weil $f(0) = 0$ ist, muß $c_0 = 0$ sein. Wir nehmen an, es sei $f(z) \not\equiv 0$. Dann muß es ein $k > 0$ geben, so daß gilt:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0 \quad \text{und} \quad c_k \neq 0.$$

Dann ist

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots = z^k \cdot (c_k + h(z)),$$

wobei $h(z) = c_{k+1} z + c_{k+2} z^2 + \dots$ wieder eine konvergente Potenzreihe mit $h(0) = 0$ ist.

Also ist $c_k + h(0) \neq 0$, und aus Stetigkeitsgründen muß es ein $\varepsilon > 0$ geben, so daß $c_k + h(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < \varepsilon$ ist. Das bedeutet, daß $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < \varepsilon$ nur bei $x = 0$ eine Nullstelle besitzt. Aber das ist ein Widerspruch zur Annahme! \square

Nun folgt sofort:

- (a) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$
- (b) $\exp(x + \mathbf{j}y) = \exp(x) \cdot \exp(\mathbf{j}y) = e^x \cdot (\cos(y) + \mathbf{j} \sin(y))$.
- (c) \exp ist periodisch, mit der Periode $2\pi\mathbf{j}$.

BEWEIS: Zu (a): Hält man z fest, so stimmen die Funktionen $g_1(w) := \exp(z + w)$ und $g_2(w) := \exp(z) \cdot \exp(w)$ auf \mathbb{R} überein, wie wir oben gesehen haben. Und mit der gleichen Argumentation wie oben kann man daraus folgern, daß g_1 und g_2 sogar auf ganz \mathbb{C} übereinstimmen.

Die Folgerungen (b) und (c) sind nun trivial. \square

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, falls es eine Funktion $\Delta : U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß gilt:

1. Δ ist in z_0 stetig.
2. Für $z \in U$ ist $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$.

Den Wert $f'(z_0) := \Delta(z_0)$ nennt man die (*komplexe*) *Ableitung* von f in z_0 .

Differenzierbarkeits-Kriterien

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ ein Punkt und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 komplex differenzierbar.
2. f ist (als Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2) reell differenzierbar, und die reelle Ableitung $Df(z_0)$ ist \mathbb{C} -linear.
3. $f = g + \mathbf{j}h$ ist in z_0 reell differenzierbar, und es gelten die

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z_0).}$$

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_x(z_0) = -\mathbf{j}f_y(z_0).$$

BEWEIS:

(1) \implies (2) :

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ .

Setzen wir $L(w) := \Delta(z_0) \cdot w$ und $r(w) := (\Delta(z_0 + w) - \Delta(z_0)) \cdot w$, so ist L eine \mathbb{C} -lineare (und damit erst recht \mathbb{R} -lineare) Abbildung, und es gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$.
2. $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{r(w)}{|w|} = \lim_{w \rightarrow 0} (\Delta(z_0 + w) - \Delta(z_0)) \cdot \frac{w}{|w|} = 0$.

Also ist f in z_0 reell differenzierbar, und $Df(z_0) = L$ ist \mathbb{C} -linear.

(2) \implies (3) :

Wir schreiben

$$f(z) = g(z) + \mathbf{j}h(z),$$

mit reellwertigen Funktionen g und h . Ist f in z_0 total (reell) differenzierbar und $Df(z_0)$ \mathbb{C} -linear, so gibt es eine komplexe Zahl $c = \alpha + \mathbf{j}\beta$ mit $Df(z_0)(w) = c \cdot w$. Die reelle Funktionalmatrix von f in z_0 stimmt demnach mit der Matrix $M = M(H_c)$ überein, d.h. es ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

Also muß gelten:

$$h_x(z_0) = -g_y(z_0) \quad \text{und} \quad h_y(z_0) = g_x(z_0).$$

(3) \implies (1) :

Ist $f = g + \mathbf{j}h$ in z_0 reell differenzierbar, mit $h_x(z_0) = -g_y(z_0)$ und $h_y(z_0) = g_x(z_0)$, so folgt:

$$\begin{aligned} L(a + \mathbf{j}b) &:= Df(z_0)(a + \mathbf{j}b) = a \cdot Df(z_0)(1) + b \cdot Df(z_0)(\mathbf{j}) \\ &= a \cdot (g_x(z_0) + \mathbf{j}h_x(z_0)) + b \cdot (g_y(z_0) + \mathbf{j}h_y(z_0)) \\ &= a \cdot (g_x(z_0) + \mathbf{j}h_x(z_0)) + b \cdot (-h_x(z_0) + \mathbf{j}g_x(z_0)) \\ &= a \cdot f_x(z_0) + b \cdot \mathbf{j} \cdot (f_x(z_0)) \\ &= (a + \mathbf{j}b) \cdot f_x(z_0). \end{aligned}$$

Also ist L eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Wir setzen

$$\Delta(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0, \\ f_x(z_0) & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Aus der Darstellung $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ folgt für $z \neq z_0$:

$$\Delta(z) = \frac{1}{z - z_0} \cdot L(z - z_0) + \frac{r(z - z_0)}{z - z_0} \rightarrow L(1) = f_x(z_0), \quad \text{für } z \rightarrow z_0.$$

Also ist Δ in z_0 stetig und $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$ für alle z . Damit ist f in z_0 komplex differenzierbar.

Offensichtlich ist dann $f'(z_0) = \Delta(z_0) = Df(z_0)(1) = f_x(z_0)$ und $f_y(z_0) = \mathbf{j}f_x(z_0)$. \square

Rechenregeln für die komplexe Differenzierbarkeit

$f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, $a, b \in \mathbb{C}$ seien Konstanten. Dann gilt:

1. $a \cdot f + b \cdot g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, mit

$$\begin{aligned} (a \cdot f + b \cdot g)'(z_0) &= a \cdot f'(z_0) + b \cdot g'(z_0) \\ \text{und} \quad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \end{aligned}$$

2. Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0 , $\frac{f}{g}$ in z_0 komplex differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. Ist f in $w_0 := g(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $f \circ g$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(w_0) \cdot g'(z_0).$$

Der BEWEIS geht genauso wie im Reellen.

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und f eine auf M definierte komplexwertige Funktion. Ist f in jedem Punkt von M komplex differenzierbar, so heißt f auf M komplex differenzierbar.

Beispiele:

1. Sei $f(z) := z^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist

$$f(z) - f(z_0) = z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Also existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} = n \cdot z_0^{n-1},$$

f ist in z_0 komplex differenzierbar, mit $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

Da z_0 beliebig war, ist $f(z) = z^n$ auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar und $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$.

2. Die Polynome $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ sind auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar.
3. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich (also außerhalb ihrer Polstellen) komplex differenzierbar.
4. $\exp(z)$ ist gegeben durch $\exp(x + \mathbf{j}y) = e^x (\cos y + \mathbf{j} \sin y)$. Also ist $\exp = g + \mathbf{j}h$, mit

$$\begin{aligned} g(x + \mathbf{j}y) &= e^x \cos y \\ \text{und } h(x + \mathbf{j}y) &= e^x \sin y. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dann $g_x(x + \mathbf{j}y) = e^x \cos y = h_y(x + \mathbf{j}y)$ und $g_y(x + \mathbf{j}y) = -e^x \sin y = -h_x(x + \mathbf{j}y)$. Da die Cauchy-Riemannschen DGLn erfüllt sind, ist \exp komplex differenzierbar und

$$\exp'(z) = \exp_x(z) = \exp(z).$$

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und f eine auf M definierte komplexwertige Funktion. f heißt auf M holomorph, wenn es zu jedem Punkt $z \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{C}$ und eine auf ganz W komplex differenzierbare Funktion F gibt, so daß $F|_{M \cap W} = f|_{M \cap W}$ ist.

Ist also f auf einer offenen Menge komplex differenzierbar, so ist f dort auch holomorph.

Eine reellwertige Funktion auf \mathbb{C} kann – wenn sie nicht konstant ist – niemals holomorph sein. Um das einzusehen, müssen wir etwas ausholen:

Charakterisierung konstanter Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist konstant.
2. f ist auf G holomorph, und es ist $f'(z) \equiv 0$.

BEWEIS: (1) \implies (2) ist trivial.

(2) \implies (1): Wegen $f'(z) = g_x(z) + \mathbf{j}h_x(z)$ und wegen der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschesen DGLn ist $Df(z) = 0$ für alle $z \in G$. Aus der reellen Analysis folgt dann, daß f auf G konstant ist. (Kapitel IV, §7, Seite 88) \square

Nun folgt:

Funktionen mit reellen oder imaginären Werten

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Nimmt eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist sie konstant.

BEWEIS: Nimmt etwa $f = g + \mathbf{j}h$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$, also $g_x = h_y = 0$ und $g_y = -h_x = 0$. Dann ist $f'(z) \equiv 0$ und f konstant.

Ist $g(z) \equiv 0$, so schließt man analog. \square

Folgerung

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ konstant, so ist auch f selbst konstant.

BEWEIS: Sei $f\bar{f} = |f|^2$ konstant. Ist $f(z_0) = 0$ für ein z_0 , so ist $f(z) \equiv 0$. Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so ist $\bar{f}(z) = \frac{1}{f(z)} \cdot |f(z)|^2$ holomorph. Aber dann müssen auch die Funktionen $\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ und $\mathbf{j}\operatorname{Im}(f) = \frac{1}{2}(f - \bar{f})$ holomorph sein. Das geht nur, wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ konstant sind, also auch f selbst. \square

Beispiel:

Sei $f(z) := |z|^2 = z\bar{z}$. Dann ist $f(z) = f(0) + \Delta(z) \cdot (z - 0)$, wobei $\Delta(z) := \bar{z}$ stetig in 0 ist. Also ist f in $z = 0$ komplex differenzierbar.

Aber weil f nur reelle Werte annimmt, kann f in $z = 0$ nicht holomorph sein.

Das formale Rechnen im Komplexen ist meist viel einfacher als der Umweg über's Reelle! Dennoch liefern reelle Betrachtungen manchmal zusätzliche Informationen:

Holomorphe Funktionen sind orientierungstreu

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f als reelle Abbildung orientierungserhaltend.

BEWEIS: Wir müssen die Funktionaldeterminante ausrechnen:

$$\begin{aligned} J_f(z) &= \det \begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z) \\ h_x(z) & h_y(z) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z) \\ -g_y(z) & g_x(z) \end{pmatrix} \\ &= g_x(z)^2 + g_y(z)^2 = |f'(z)|^2 > 0. \end{aligned}$$

□

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch komplexe Differentialformen betrachten.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Auf U gibt es 1-Formen $\omega = a dx + b dy$ und 2-Formen $\Omega = c dx \wedge dy$, mit reellwertigen differenzierbaren Koeffizienten a , b und c .

Sind ω_1, ω_2 zwei 1-Formen auf U , so wird die *komplexwertige 1-Form* $\omega := \omega_1 + \mathbf{j}\omega_2$ auf U definiert durch

$$\omega(z, \mathbf{v}) := \omega_1(z, \mathbf{v}) + \mathbf{j} \cdot \omega_2(z, \mathbf{v}),$$

für Tangentialvektoren (z, \mathbf{v}) . *komplexwertige 2-Formen* $\Omega = \Omega_1 + \mathbf{j}\Omega_2$ werden analog definiert.

Dann kann man komplexwertige Differentialformen auf naheliegende Weise addieren und mit komplexwertigen Funktionen multiplizieren. Ist $f = g + \mathbf{j}h$ und $\omega = \omega_1 + \mathbf{j}\omega_2$, so ist

$$f \cdot \omega = (g\omega_1 - h\omega_2) + \mathbf{j}(g\omega_2 + h\omega_1).$$

Jede komplexwertige 1-Form besitzt eine Darstellung $\omega = f_1 dx + f_2 dy$, mit komplexwertigen Funktionen f_1, f_2 als Koeffizienten. Man rechnet sofort nach, daß diese Darstellung eindeutig ist. Analog kann jede komplexwertige 2-Form in der Gestalt $\Omega = f dx \wedge dy$ geschrieben werden, mit einer eindeutig bestimmten komplexwertigen Funktion f . Schließlich ist

$$(f_1 dx + f_2 dy) \wedge (g_1 dx + g_2 dy) = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx \wedge dy.$$

Ist $f = g + \mathbf{j}h$ eine komplexwertige reell differenzierbare Funktion, so setzt man $df := dg + \mathbf{j}dh$. Z.B. ist $dz = dx + \mathbf{j}dy$ und $d\bar{z} = dx - \mathbf{j}dy$.

Ist $\omega = \omega_1 + \mathbf{j}\omega_2$ eine komplexwertige 1-Form, so setzt man $d\omega := d\omega_1 + \mathbf{j}d\omega_2$. Offensichtlich ist dann $ddf = 0$.

Hilfssatz

Komplexwertige 1-Formen und 2-Formen besitzen eindeutige Darstellungen

$$\begin{aligned}\omega &= u dz + v d\bar{z} \\ \text{und } \Omega &= w dz \wedge d\bar{z},\end{aligned}$$

mit komplexwertigen Funktionen u , v und w als Koeffizienten.

BEWEIS:

1) Es ist

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad \text{und} \quad dy = \frac{1}{2j}(dz - d\bar{z}).$$

Also kann man jede 1-Form als Linearkombination von dz und $d\bar{z}$ schreiben.

Ist $0 = u dz + v d\bar{z} = (u + v) dx + j(u - v) dy$, so muß $u + v = 0$ und $u - v = 0$ sein, also $u = v = 0$. Das liefert die Eindeutigkeit.

2) Sei $\Omega = f dx \wedge dy$ eine 2-Form. Dann ist

$$\Omega = f \cdot \frac{1}{4j}(dz + d\bar{z}) \wedge (dz - d\bar{z}) = \frac{1}{2}fj dz \wedge d\bar{z},$$

denn es ist $dz \wedge dz = (dx + jdy) \wedge (dx + jdy) = j(dx \wedge dy + dy \wedge dx) = 0$ und analog $d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$.

Die Eindeutigkeit ist in diesem Fall trivial. □

Definition:

Sei f eine komplexwertige (reell) differenzierbare Funktion. Dann werden die sogenannten *Wirtinger-Ableitungen* f_z und $f_{\bar{z}}$ definiert durch

$$df = f_x dx + f_y dy = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Formel für die Wirtinger-Ableitungen

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - jf_y) \quad \text{und} \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + jf_y).$$

BEWEIS: Es ist

$$df = f_z(dx + jdy) + f_{\bar{z}}(dx - jdy),$$

also

$$f_x = f_z + f_{\bar{z}} \quad \text{und} \quad f_y = j(f_z - f_{\bar{z}}).$$

Löst man diese Gleichungen nach f_z und $f_{\bar{z}}$ auf, so erhält man das gewünschte Ergebnis.

□

Kurzform der CR-DGLn

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar.

f ist genau dann holomorph, wenn $f_{\bar{z}}(z) \equiv 0$ auf U ist.

BEWEIS: Es ist

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + \mathbf{j}f_y) = \frac{1}{2}[(g_x - h_y) + \mathbf{j}(h_x + g_y)],$$

also $f_{\bar{z}} \equiv 0 \iff g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. □

Folgerung

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist $df = f' dz$ und $d(f dz) = 0$.

BEWEIS: Ist f holomorph, so ist $f_{\bar{z}} = 0$ und $f_z = \frac{1}{2}(f_x - \mathbf{j}f_y) = \frac{1}{2} \cdot 2f' = f'$.

Also ist $df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} = f' dz$ und $d(f dz) = df \wedge dz = f' dz \wedge dz = 0$. □

§2 Integration im Komplexen

Definition:

Sei $f = g + \mathbf{j}h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b g(t) dt + \mathbf{j} \int_a^b h(t) dt.$$

Es gelten die bekannten Regeln:

Rechenregeln für komplexe Integrale

1. Das Integral ist linear, d.h. für Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$\int_a^b (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t) dt + c_2 \cdot \int_a^b f_2(t) dt.$$

2. Es ist

$$\int_a^b \overline{f(t)} dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}.$$

3. Ist F differenzierbar und $F' = f$, so ist $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

4. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig, stückweise stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds.$$

5. Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

BEWEIS: Die meisten Aussagen sind trivial. Durch Zerlegung in Realteil und Imaginärteil lassen sie sich sofort auf die entsprechenden Sätze aus der reellen Integrations-
theorie zurückführen.

Wir beschränken uns hier auf einen Beweis der letzten Aussage, die im Komplexen nicht ganz so selbstverständlich ist:

Sei $z := \int_a^b f(t) dt = r \cdot e^{j\lambda}$, mit $r > 0$. (Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen)

Dann ist $e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot z = r = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$, also

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left(e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot f(t)) dt.$$

Da für eine komplexe Zahl $w = u + \mathbf{j}v$ stets $\operatorname{Re}(w) = u \leq \sqrt{u^2 + v^2}$ ist und die gewünschte Ungleichung für reellwertige Funktionen bekannt ist, folgt:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot f(t)) dt \leq \int_a^b |e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

Weil die komplexe Differenzierbarkeit formal genauso wie die reelle Differenzierbarkeit in einer Veränderlichen definiert worden ist, ließen sich viele Rechenregeln ganz einfach ins Komplexe übertragen.

Wir wollen nun auch nach dem Muster der reellen Analysis einer Veränderlichen komplexe Integrale $\int_z^w f(z) dz$ einführen. Dabei stoßen wir auf gewisse Schwierigkeiten. Der Definitionsbereich der zu integrierenden Funktion ist meist ein Gebiet. Die Integralgrenzen z und w sind also nicht die Endpunkte eines Intervalls, und i.a. auch nicht die Endpunkte einer in G verlaufenden Strecke. Es bietet sich an, stattdessen über einen Weg zu integrieren, und das ist genau das, was wir tun werden. Als *Integrationswege* benutzen wir wie üblich stückweise stetig differenzierbare Wege $\alpha : [a, b] \rightarrow G$.

Wir können auf den Kalkül der Integration von 1-Formen zurückgreifen. Allerdings müssen wir uns vergewissern, daß die komplexen Differentialformen nicht zu neuen Komplikationen führen.

Sei $\omega = \omega_1 + \mathbf{j}\omega_2$ eine komplexwertige 1-Form auf dem Gebiet G . Dann soll $\alpha^*(\omega)$ eine komplexwertige 1-Form auf $[a, b]$ sein, mit

$$\alpha^*(\omega)(t, 1) = \omega(\alpha(t), D\alpha(t)(1)) = \omega(\alpha(t), \alpha'(t)).$$

Damit wird sofort klar:

1. $\alpha^*(\omega_1 + \mathbf{j}\omega_2) = \alpha^*\omega_1 + \mathbf{j}\alpha^*\omega_2$.
2. Ist $\omega = f dz$, mit einer stetigen Funktion f , so ist $\alpha^*(f dz) = (f \circ \alpha) \cdot \alpha' dt$.

$$\begin{aligned} \text{Zum BEWEIS: } \quad \alpha^*(\omega_1 + \mathbf{j}\omega_2)(t, 1) &= (\omega_1 + \mathbf{j}\omega_2)(\alpha(t), \alpha'(t)) \\ &= \omega_1(\alpha(t), \alpha'(t)) + \mathbf{j}\omega_2(\alpha(t), \alpha'(t)) \\ &= \alpha^*\omega_1(t, 1) + \mathbf{j}\alpha^*\omega_2(t, 1) \\ \text{und } \quad \alpha^*(f dz) &= (f \circ \alpha) d\alpha = (f \circ \alpha) \alpha' dt. \end{aligned}$$

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und α ein Integrationsweg in G . Dann wird das *komplexe Kurvenintegral* von f über α definiert durch

$$\int_{\alpha} f(z) dz := \int_{[a,b]} \alpha^*(f dz) = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Beispiele :

1. Ein fundamentaler Baustein der Funktionentheorie ist folgende Formel:

$$\int_{\partial D_r(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi\mathbf{j} & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum BEWEIS benutzt man die Parametrisierung $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathbf{j}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Dann ist

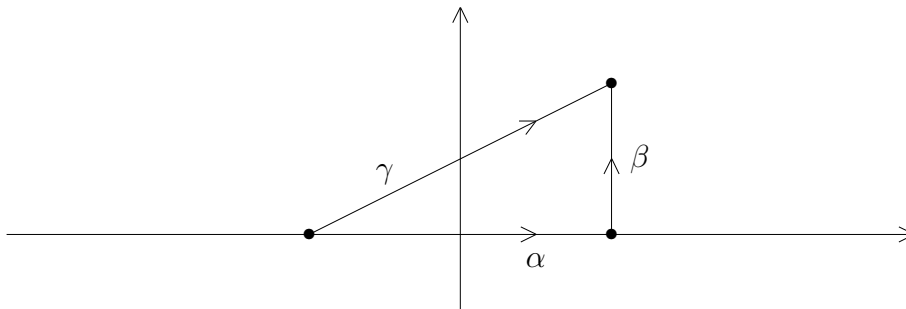
$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathbf{j}t} \cdot r \mathbf{j} e^{\mathbf{j}t} dt \\ &= \mathbf{j} \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathbf{j}, \end{aligned}$$

und für $n \neq -1$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (r e^{\mathbf{j}t})^n \cdot r \mathbf{j} e^{\mathbf{j}t} dt \\ &= r^{n+1} \mathbf{j} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\mathbf{j}(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \mathbf{j} \cdot \left(\frac{1}{\mathbf{j}(n+1)} e^{\mathbf{j}(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathbf{j}t \quad \text{und} \quad \gamma(t) := (-1 + 2t) + \mathbf{j}t.$$



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} \bar{z} dz &= \int_0^1 (-1 + 2t) \cdot 2 dt + \int_0^1 (1 - \mathbf{j}t) \cdot \mathbf{j} dt \\ &= 2 \cdot (-t + t^2) \Big|_0^1 + \mathbf{j} \cdot \left(t - \frac{\mathbf{j}}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \cdot (-1 + 1) + \mathbf{j} \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{j}}{2} \right) \\ &= \mathbf{j} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^1 (-1 + 2t - \mathbf{j}t)(2 + \mathbf{j}) dt \\
 &= (2 + \mathbf{j}) \cdot \left(-t + \frac{2 - \mathbf{j}}{2} t^2\right) \Big|_0^1 \\
 &= (2 + \mathbf{j}) \cdot \left(-1 + 1 - \frac{\mathbf{j}}{2}\right) \\
 &= -\mathbf{j} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \bar{z}$ hängt vom Integrationsweg ab! Wir werden bald sehen, daß das damit zusammenhängt, daß $z \mapsto \bar{z}$ nicht holomorph ist.

Da es sich bei dem komplexen Kurvenintegral um eine Variante des schon bekannten Integrals über 1-Formen handelt, gelten dafür auch die gleichen Rechenregeln. Nur die *Standard-Abschätzung* beweisen wir besser neu:

Ist α ein Integrationsweg und f eine stetige Funktion auf $|\alpha|$, so gilt:

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| \leq L(\alpha) \cdot \sup_{|\alpha|} |f|.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \right| \\
 &\leq \int_a^b |f(\alpha(t))| \cdot |\alpha'(t)| dt \\
 &\leq L(\alpha) \cdot \sup_{|\alpha|} |f|.
 \end{aligned}$$

Nun können wir den Satz über die Vertauschung von Limes und Integral (Kapitel II, §5) auf Kurvenintegrale ausdehnen:

Vertauschung von Grenzwerten bei Kurvenintegralen

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $|\alpha|$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf $|\alpha|$ konvergiert. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha} f_n(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz.$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\alpha} f_n(z) dz - \int_{\alpha} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \\
 &\leq L(\alpha) \cdot \sup_{|\alpha|} |f_n - f|.
 \end{aligned}$$

Da die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L(\alpha)}$ ist, für $n \geq n_0$ und alle $z \in |\alpha|$. Wegen der obigen Abschätzung liefert das die gewünschte Konvergenz der Integrale. \square

Folgerung

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$ wieder ein Integrationsweg und (F_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $|\alpha|$. Weiter sei (a_n) eine Folge von nicht negativen reellen Zahlen, so daß gilt:

1. $|F_n(z)| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in |\alpha|$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Dann ist $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ eine stetige Funktion auf $|\alpha|$, und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha} F_n(z) dz = \int_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(z) \right) dz.$$

BEWEIS: Aus dem Weierstraß-Kriterium (Kapitel IV, §1) folgt, daß die Folge der (stetigen) Funktionen $f_N(z) := \sum_{n=1}^N F_n(z)$ gleichmäßig auf $|\alpha|$ gegen f konvergiert und daß f insbesondere stetig ist. Jetzt kann man den vorhergehenden Satz auf (f_N) anwenden. \square

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Der Hauptsatz für komplexe Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion.

2. $\int_{\alpha} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G .

BEWEIS:

1) Sei F holomorph und $F' = f$. Dann ist $dF = f dz$, also $\int_{\alpha} f dz = 0$ für jeden geschlos-

senen Weg α .

2) Verschwindet das Integral über $f dz$ für jeden geschlossenen Weg α , so gibt es eine Funktion F mit $dF = f dz$. Dann ist aber – wegen der Eindeutigkeit der Darstellung – $F_z = f$ und $F_{\bar{z}} = 0$, also F holomorph und $F' = f$. \square

Satz von Goursat

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion und $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: Es gibt einen sehr schönen trickreichen Beweis für den Satz von Goursat, der in den meisten Büchern über Funktionentheorie nachgelesen werden kann. (vgl. z.B. W.Fischer / I.Lieb: Funktionentheorie). Aus Zeitgründen benutzen wir hier stattdessen einen einfacheren Beweis, der allerdings eine **Zusatzbedingung** erfordert: Wir nehmen an, daß f sogar *stetig differenzierbar* ist! Es wird sich später zeigen, daß diese Zusatzbedingung automatisch erfüllt ist.

Δ ist ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, $\omega := f dz$ eine stetig differenzierbare 1-Form. Da f sogar holomorph ist, ist $d(f dz) = 0$, und aus dem allgemeinen Stokeschen Satz folgt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta} d(f dz) = 0.$$

\square

Satz von Goursat in verschärfter Form

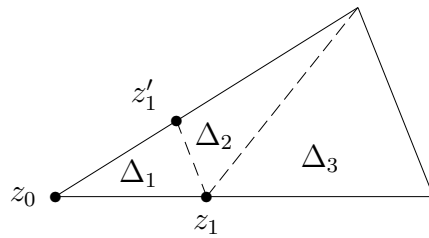
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: Wir können annehmen, daß f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von Δ .

Dann zerlegen wir Δ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt, daß $\int_{\partial\Delta_2} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz = 0$ ist, also

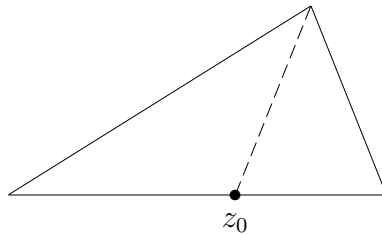
$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z'_1 gewählt werden. Dann ist

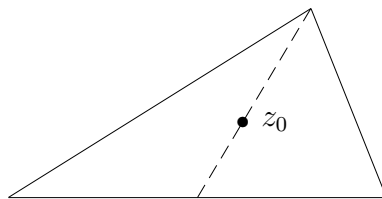
$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \sup_{\Delta} |f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z'_1 gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von Δ , ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man Δ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von Δ . Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb Δ , so ist überhaupt nichts zu zeigen. □

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $z_0 \in M$ ein fester Punkt. M heißt *sternförmig bezüglich* z_0 , falls für jeden weiteren Punkt $z \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen z und z_0 ganz zu M gehört.

M heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in M$ gibt, so daß M sternförmig bezüglich z_0 ist.

Eine konvexe Menge ist natürlich sternförmig. Die Umkehrung ist i.a. falsch.

Existenzsatz für Stammfunktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

BEWEIS: Es gibt einen Punkt $a \in G$, so daß mit jedem anderen Punkt $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\sigma_{a,z}$ von a mit z zu G gehört. Wir definieren dann

$$F(z) := \int_{\sigma_{a,z}} f(\zeta) d\zeta.$$

Wir müssen zeigen, daß F holomorph und $F' = f$ ist. Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so gewählt, daß $D_r(z_0) \subset G$ ist. Für $z \in G$ sei γ_z die Verbindungsstrecke von z_0 mit z , parametrisiert durch $\gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0, 1]$.

Ist Δ das von $\sigma_{a,z}$, $-\gamma_z$ und $-\sigma_{a,z_0}$ berandete Dreieck, so liegt dieses ganz in G , und nach dem Satz von Goursat ist

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\sigma_{a,z}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\sigma_{a,z_0}} f(\zeta) d\zeta \\ &= F(z) - F(z_0) - \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0) dt \\ &= F(z) - F(z_0) - (z - z_0) \cdot \Delta(z), \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt$$

stetig ist (Parameter-Integral!). Also ist F in z_0 komplex differenzierbar, und

$$F'(z_0) = \Delta(z_0) = \int_0^1 f(z_0) dt = f(z_0).$$

□

HINWEIS: Wir haben im Beweis nicht die Holomorphie von f benutzt, sondern nur die Tatsache, daß das Integral über f und den Rand eines abgeschlossenen Dreiecks in G verschwindet!

Nun folgt:

Cauchyscher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen und dem vorhergehenden Satz folgt, daß f auf G eine Stammfunktion F besitzt. Aus dem Hauptsatz für komplexe Kurvenintegrale ergibt sich nun der Cauchysche Integralsatz. \square

Holomorphie von Potenzreihen

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$.

Dann ist f auf $D_R(z_0)$ holomorph, und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}.$$

BEWEIS: Sei $q(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}$ und R' der Konvergenzradius von $q(z)$. Wir wissen bereits (Kapitel IV, §3, ganz am Anfang), daß $q(z)$ ebenfalls auf $D_R(z_0)$ konvergiert. Also ist $R' \geq R$. Sei nun $\alpha : I \rightarrow D_R(z_0)$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{\alpha} (z - z_0)^k dz = 0 \text{ für } k \geq 0.$$

Da $q(z)$ auf $|\alpha|$ gleichmäßig konvergiert und daher dort eine stetige Funktion darstellt, ist

$$\int_{\alpha} q(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha} (n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}) dz = 0.$$

Nach dem Hauptsatz über komplexe Kurvenintegrale besitzt q also auf $D_R(z_0)$ eine Stammfunktion Q . Q ist holomorph, und es gilt:

$$\begin{aligned} Q(z) &= \int_{z_0}^z q(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_0}^z (n \cdot c_n(\zeta - z_0)^{n-1}) d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \int_{z_0}^z (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \frac{1}{n} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= f(z) - c_0. \end{aligned}$$

Also ist $f(z) = Q(z) + c_0$ holomorph (auf $D_R(z_0)$) und $f'(z) = q(z)$. \square

Der vorliegende Satz liefert einen neuen Beweis für die Holomorphie von $\exp(z)$, aber er zeigt z.B. auch, daß $\sin(z)$ und $\cos(z)$ auf \mathbb{C} holomorph sind. Wie im Reellen ist $\sin'(z) = \cos(z)$ und $\cos'(z) = -\sin(z)$.

$G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht sternförmig. Tatsächlich ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, es ist z.B.

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi \mathbf{j} \neq 0.$$

Setzen wir aber $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, so ist die „geschlitzte Ebene“ $G' := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$). Also gibt es auf G' z.B. für $f(z) := \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion:

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in G' verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, daß das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Die Funktion $F(z)$ ist holomorph, es ist $F(1) = 0$ und $F'(z) = \frac{1}{z}$. Diese Eigenschaften kennen wir schon (im Reellen) vom natürlichen Logarithmus. Also stellt sich die Frage, ob wir hier auch im Komplexen die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gefunden haben. Leider ist das nur bedingt richtig. Zunächst gilt:

Behauptung: $\exp(F(z)) = z$.

BEWEIS: Mit einem kleinen Trick geht es ganz einfach:

Sei $g(z) := z \cdot \exp(-F(z))$. Dann ist g holomorph und

$$g'(z) = \exp(-F(z)) + z \cdot (-F'(z)) \cdot \exp(-F(z)) = \exp(-F(z)) - \exp(-F(z)) = 0.$$

Also ist g lokal-konstant, und da der Definitionsbereich G' ein Gebiet ist, ist g sogar konstant: $g(z) \equiv c$. Es folgt:

$$c \cdot \exp(F(z)) \equiv z.$$

Setzen wir speziell $z = 1$ ein, so erhalten wir $1 = c \cdot \exp(F(1)) = c \cdot \exp(0) = c$. Also ist $\exp(F(z)) = z$. \square

Das rechtfertigt schon einmal die

Definition:

$$\log(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{heißt } \textit{Logarithmusfunktion}.$$

Damit $\log(z)$ die Umkehrabbildung zu $\exp(z)$ sein kann, muß \exp zunächst einmal bijektiv sein. Wir wissen aber, daß \exp periodisch ist (mit Periode $2\pi \mathbf{j}$) und daher gar nicht bijektiv sein kann! Also untersuchen wir die Exponentialfunktion etwas genauer:

Injektivitätsbereiche der Exponentialfunktion

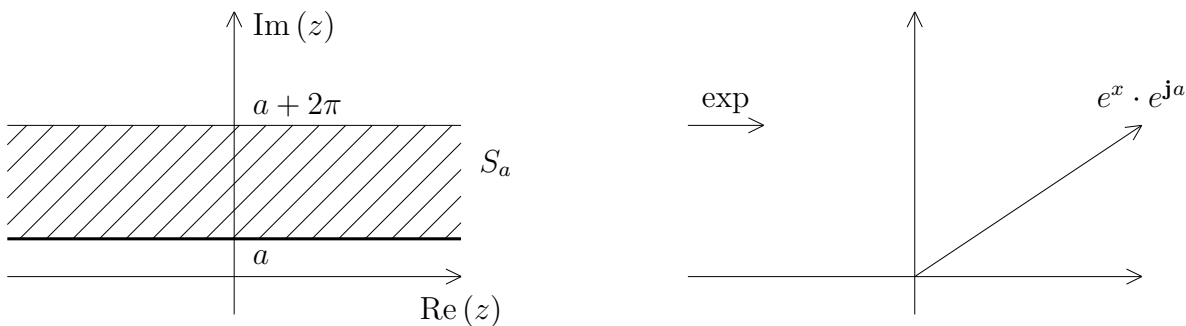
Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

bijektiv.

BEWEIS: Sei S_a der Streifen

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\}.$$



1) Injektivität:

Es ist $\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi jn, n \in \mathbb{Z}$.

Also gilt:

$$\begin{aligned} \exp(z) = \exp(w) &\implies \exp(z - w) = 1 \\ &\implies z = w + 2\pi jn \\ &\implies z \text{ und } w \text{ nicht beide im gleichen Streifen } S_a. \end{aligned}$$

2) Surjektivität:

Sei $w = re^{jt} \in \mathbb{C}^*$, also $r > 0, 0 \leq t < 2\pi$.

Wir setzen $z := \ln(r) + jt$. Dann ist $\exp(z) = e^{\ln(r)+jt} = r \cdot e^{jt} = w$.

Liegt z nicht im Streifen S_a , so kann man ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so daß $z^* := z + 2\pi jk$ in S_a liegt. Dann ist $\exp(z^*) = \exp(z) = w$. \square

Definition:

$$\log_{(a)} := (\exp \Big|_{\mathring{S}_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{ja} \rightarrow \mathring{S}_a$$

heißt der durch a bestimmte Logarithmuszweig.

Berechnung des Logarithmus

Ist $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$, mit $a < t < a + 2\pi$, so ist

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathbf{j}t.$$

Insbesondere ist $\log_{(-\pi)}(z) = \log(z)$, falls $-\pi < t < \pi$ ist.

BEWEIS: Durch $re^{\mathbf{j}t} \mapsto \ln(r) + \mathbf{j}t$ wird eine Umkehrfunktion zu $\exp \Big|_{S_a}$ gegeben, wenn das Argument t zwischen a und $a + 2\pi$ läuft.

Ist $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t_0}$ mit $r > 0$ und $-\pi < t_0 < \pi$, so ist $\log(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, wobei es egal ist, über welchen Weg man integriert. Ist etwa $t_0 > 0$, so können wir den Weg $\gamma := \alpha + \beta$ wählen, mit

$$\alpha(s) := s \text{ für } s \text{ zwischen } 1 \text{ und } r \quad \text{und} \quad \beta(t) := re^{\mathbf{j}t} \text{ für } t \text{ zwischen } 0 \text{ und } t_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \log(z) &= \int_{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\beta} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \int_1^r \frac{ds}{s} + \int_0^{t_0} \mathbf{j} dt \\ &= \ln(r) + \mathbf{j}t_0 = \log_{(-\pi)}(z). \end{aligned}$$

□

Man nennt $\log(z)$ auch den *Hauptzweig des Logarithmus*.

Die verschiedenen Zweige des Logarithmus führen oft zu Verwirrung. Der obige Satz liefert aber ein Kochrezept zur Berechnung des Logarithmus:

Ist eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$ gegeben, die in der rechten Halbebene oder zumindest nicht in der Nähe der negativen reellen Achse liegt, so kann man durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π zu t erreichen, daß $-\pi < t < \pi$ ist, und man setzt $a := -\pi$. Liegt z dagegen in der linken Halbebene und in der Nähe der negativen reellen Achse, so kann man erreichen, daß $0 < t < 2\pi$ ist. Dann empfiehlt sich $a := 0$. In beiden Fällen ist $\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathbf{j}t$, aber die unendlich vielen Werte $\ln(r) + \mathbf{j}t + k \cdot 2\pi\mathbf{j}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind ebenfalls Logarithmen von z .

Beispiele:

1. Sei $z = 2\mathbf{j}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathbf{j}\frac{\pi}{2}$.
2. Sei $z = -2\mathbf{j}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Dieses t liegt nicht zwischen $-\pi$ und π , wohl aber $t - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Dann ist } \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathbf{j}\frac{\pi}{2}.$$

Da $\pi < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ oder $a = \pi$ wählen können. Es ist

$$\log_{(0)}(z) = \log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathbf{j} \frac{3\pi}{2} = \log_{(-\pi)}(z) + 2\pi \mathbf{j}.$$

Wir können übrigens noch eine weitere Beschreibung des Logarithmus geben: In Kapitel IV, §3, wurde gezeigt, daß gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $= 1$, also wird durch

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

eine auf $D_1(1)$ definierte und holomorphe Funktion gegeben.

Behauptung: Für $|z-1| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

BEWEIS: Im Konvergenzkreis ist

$$\begin{aligned} L'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\ &= \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Also ist $L(z) = \log(z) + c$, mit einer Konstanten c . Setzen wir $z = 1$ ein, so erhalten wir $c = 0$. □

Wir kommen zu zwei Anwendungen des Logarithmus:

Zunächst können wir jetzt auch beliebige Potenzen in \mathbb{C} definieren.

Definition:

Für komplexe Zahlen z und w setzt man $z^w := \exp(w \cdot \log(z))$.

Dabei kann der Exponent w beliebig gewählt werden. z muß im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Normalerweise benutzt man den Hauptzweig, dann darf z nicht in \mathbb{R}_- liegen.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist $\mathbf{j}^{\mathbf{j}}$? Benutzen wir die Beziehung $\mathbf{j} = e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathbf{j}^{\mathbf{j}} = \exp(\mathbf{j} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879 \dots$$

Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich $e^{-\pi/2}e^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathbf{j}t}$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\mathbf{j}k]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + \mathbf{j}t + 2\pi\mathbf{j}k]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(r)\right) \cdot \exp\left(\mathbf{j}\left(\frac{t}{2} + \pi k\right)\right) \\ &= \pm\sqrt{r} \cdot e^{\mathbf{j}\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathbf{j}\frac{t}{n} + \mathbf{j}\frac{2k}{n}\pi} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathbf{j}\frac{t}{n}} \cdot (\zeta_n)^k, \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

Nun zu einer anderen Anwendung:

Durch $\gamma_k(t) := z_0 + re^{2\pi\mathbf{j}\cdot kt}$, $t \in [0, 1]$, wird der Kreis um z_0 mit Radius r parametrisiert, und zwar so, daß er k -mal durchlaufen wird. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_0^1 \frac{1}{re^{2\pi\mathbf{j}\cdot kt}} r \cdot 2\pi\mathbf{j}k \cdot e^{2\pi\mathbf{j}\cdot kt} dt = k \int_0^1 dt = k.$$

Das Integral mißt, wie oft der Punkt z_0 von γ umlaufen wird. Das verallgemeinern wir jetzt auf beliebige Wege:

Definition:

Sei γ ein beliebiger geschlossener Integrationsweg in \mathbb{C} und z ein Punkt, der nicht auf $|\gamma|$ liegt. Dann heißt

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die *Umlaufszahl* von γ um z .

Wie kann man die Umlaufszahl im allgemeinen berechnen?

Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß $0 \notin |\gamma|$ ist, und versuchen,

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

zu berechnen. Bei einem beliebigen Punkt geht's analog.

Wenn es möglich ist, berechnet man ein Integral mit Hilfe einer Stammfunktion. Die Stammfunktion von $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ ist der Logarithmus, aber welcher? Um eine vernünftige Logarithmusfunktion einsetzen zu können, müssen wir aus der Ebene einen Halbstrahl herausnehmen. Das ist aber nicht so ohne weiteres möglich, denn wir müssen damit rechnen, daß jeder von 0 ausgehende Halbstrahl die Spur von γ trifft. Was tun?

Wir wählen eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Definitionsintervalls von γ , so daß $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils ganz in einer längs eines Halbstrahls aufgeschlitzten Ebene enthalten ist. Und dort existiert jeweils ein Zweig f_i des Logarithmus, der als Stammfunktion für $\frac{1}{z}$ dienen kann. Sei $z_i := \gamma(t_i)$, für $i = 0, \dots, n$. Dann ist $z_0 = z_n$ und

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = f_i(z_i) - f_i(z_{i-1}).$$

Da $f_{i+1}(z_i) = f_i(z_i) - 2\pi\mathbf{j}k_i$ und $f_n(z_n) = f_1(z_0) + 2\pi\mathbf{j}k_n$ ist, mit gewissen ganzen Zahlen k_i bzw. k_n , folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= (f_1(z_1) - f_1(z_0)) + (f_2(z_2) - f_2(z_1)) + \dots + (f_n(z_n) - f_n(z_{n-1})) \\ &= -f_1(z_0) + (f_1(z_1) - f_2(z_1)) + \dots + (f_{n-1}(z_{n-1}) - f_n(z_{n-1})) + f_n(z_n) \\ &= (f_n(z_n) - f_1(z_0)) + 2\pi\mathbf{j} \cdot k_1 + \dots + 2\pi\mathbf{j} \cdot k_{n-1} \\ &= 2\pi\mathbf{j} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k_n \right). \end{aligned}$$

Also ist

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{i=1}^n k_i$$

eine ganze Zahl.

Diese - zugegebenermaßen etwas theoretische - Berechnung der Umlaufszahl zeigt zugleich, was man sich darunter vorstellen soll.

Ist $f_i = \log_{(a_i)}$, so kann man nach Konstruktion schreiben:

$$\gamma(t) = r(t) \cdot e^{\mathbf{j}s(t)}, \text{ mit } a_i < s(t) < a_i + 2\pi \text{ für } t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} (\ln(r(t_i)) - \ln(r(t_{i-1}))) + \frac{1}{2\pi} (s(t_i) - s(t_{i-1})).$$

Die radialen Anteile heben sich in der Summe weg, und so ergibt die Umlaufszahl die Summe aller Winkeldifferenzen $s(t_i) - s(t_{i-1})$, geteilt durch 2π . Sie mißt also tatsächlich, wie oft sich γ um den Nullpunkt herumwindet.

Das gerade beschriebene Verfahren ist kaum praktikabel. Zum Glück gibt es bei einigermaßen vernünftigen Wegen eine viel einfachere Methode zur Bestimmung der Umlaufszahl. Dazu sind einige Vorbemerkungen nötig.

Da $|\gamma|$ kompakt und somit abgeschlossen ist, ist $G := \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ offen. Allerdings ist G i.a. nicht zusammenhängend, sondern besteht aus mehreren durch $|\gamma|$ voneinander getrennten Stücken, sogenannten *Zusammenhangskomponenten*. Wir verzichten hier auf die genaue Definition des Begriffs *Zusammenhangskomponente*, da anschaulich klar ist, was damit gemeint ist. G könnte theoretisch sogar aus unendlich vielen Komponenten bestehen, aber der Fall wird in der Praxis kaum vorkommen.

Auf jeden Fall kann es unter den Komponenten nur eine unbeschränkte Menge geben, denn die kompakte Menge $|\gamma|$ liegt immer in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $K = \overline{D_R(0)}$, und alle Punkte aus $\mathbb{C} \setminus K$ gehören zu der selben unbeschränkten Komponente von G . Die restlichen - dann natürlich beschränkten - Komponenten liegen alle in K .

Das Werteverhalten der Umlaufszahl

Die Funktion $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant und auf der unbeschränkten Menge sogar $\equiv 0$.

BEWEIS: 1) $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an. Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, $z_0 \in Z$ und $c_0 := n(\gamma, z_0)$. Wegen der Stetigkeit der Umlaufszahl ist $U = \{z \in Z : n(\gamma, z) = c_0\}$ offen, denn in der Nähe eines fest gewählten Punktes dürfen sich die Werte von $n(\gamma, z)$ nur wenig ändern, und da sie nur ganzzahlige Werte annehmen, müssen sie dort schon konstant sein. Die Menge $Z \setminus U$ ist erst recht offen. Da z_0 in U liegt und Z zusammenhängend ist, folgt: $U = Z$, d.h. $n(\gamma, z)$ auf Z konstant.

2) Sei $K = \overline{D_R(0)}$ so gewählt, daß $|\gamma| \subset K$ ist, und $a \in \mathbb{C} \setminus K$. Dann ist $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ auf $D_R(0)$ holomorph und muß dort eine Stammfunktion F besitzen. Aber dann ist

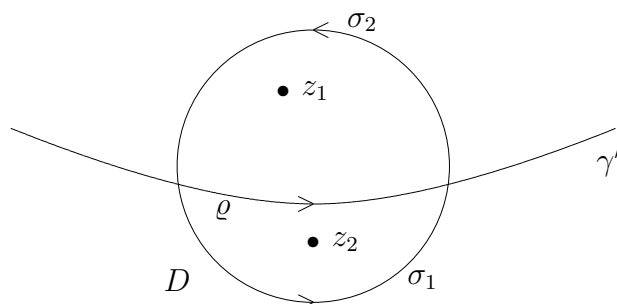
$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} dF = 0.$$

Weil die Umlaufszahl auch auf der unbeschränkten Komponente konstant ist, muß sie dort $\equiv 0$ sein. □

Wir kennen nun einen Wert der Umlaufszahl, nämlich den „weit draußen“. Wenn wir wissen, wie sich die Umlaufszahl beim Überqueren von $|\gamma|$ ändert, dann können wir alle Werte bestimmen.

Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine kleine Kreisscheibe mit $|\gamma| \cap D \neq \emptyset$. Die Peripherie des Kreises werde von γ in genau zwei Teilwege σ_1 und σ_2 zerlegt, das Innere von D in zwei Teilgebiete und $|\gamma|$ in einen Teil innerhalb von D (parametrisiert durch ϱ) und einen außerhalb von

D (parametrisiert durch γ'). In der Nähe von glatten Punkten von γ kann man diese Situation immer herstellen.

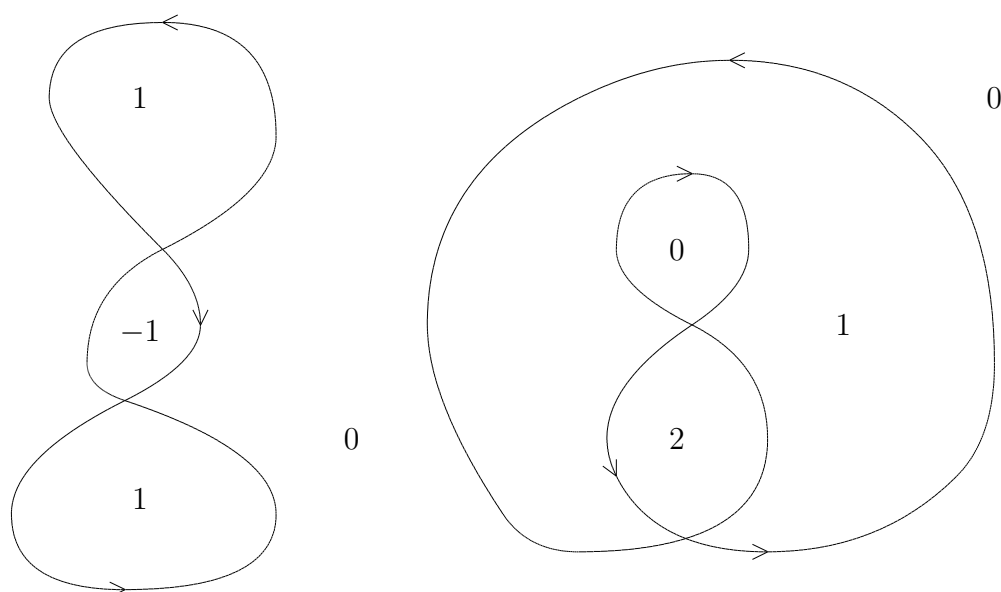


Wir betrachten nun zwei Punkte $z_1, z_2 \in D$, der eine „links von γ “ und der andere „rechts von γ “. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 n(\gamma, z_2) &= n(\gamma' + \rho, z_2) \\
 &= n((\gamma' + \sigma_1) + (\rho - \sigma_1), z_2) \\
 &= n(\gamma' + \sigma_1, z_2) + n(\rho - \sigma_1, z_2) \\
 &= n(\gamma' + \sigma_1, z_1) - 1 \\
 &= n((\gamma' + \rho) + (\sigma_1 - \rho), z_1) - 1 \\
 &= n(\gamma' + \rho, z_1) + n(\sigma_1 - \rho, z_1) - 1 \\
 &= n(\gamma, z_1) - 1.
 \end{aligned}$$

Die Moral von der Geschichte ist nun: Überquert man γ (in einem glatten Punkt) so, daß γ dabei von „links“ kommt, so erhöht sich die Umlaufzahl um 1.

Beispiel:



§3 Die Cauchysche Integralformel und ihre Folgen

Die Cauchysche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg und $z \in G \setminus |\gamma|$.

Dann gilt:

$$f(z) \cdot n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS:

$$\text{Sei } g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g überall stetig und auf $G \setminus \{z\}$ auch holomorph. Auf der sternförmigen Menge G können wir dann den Cauchyschen Integralsatz auf g anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot 2\pi\mathbf{j} \cdot n(\gamma, z). \end{aligned}$$

□

Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist. Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS: Man kann ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß die (sternförmige) Kreisscheibe $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0)$ noch in G enthalten ist. γ sei die Parametrisierung von ∂D , das ist ein geschlossener Weg in D' mit $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in D$. Nun folgt die gewünschte Aussage aus der Cauchyschen Integralformel. □

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist sehr stark die **komplexe** Differenzierbarkeit von f ausgenutzt worden. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über

das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde. Der ganze Paragraph ist diesen Konsequenzen gewidmet.

Beispiele :

1. Es soll das Integral $\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$ berechnet werden. Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z+2} \right] \cdot e^z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z} dz - \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z - (-2)} dz \\ &= 2\pi\mathbf{j} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] \\ &= \pi\mathbf{j}(1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}\mathbf{j})$. Dann liegt \mathbf{j} im Innern von C , und $-\mathbf{j}$ nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \int_C \frac{dz}{z - \mathbf{j}} - \frac{1}{2\mathbf{j}} \int_C \frac{dz}{z + \mathbf{j}} \\ &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \cdot [2\pi\mathbf{j} \cdot -0] \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Cauchysche Integralformel für Kreise

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $0 < r < R$.
Wenn das „Ringgebiet“

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

noch relativ-kompakt in G liegt, so gilt:

$$\int_{\partial K_{r,R}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 2\pi\mathbf{j} \cdot f(z) & \text{falls } z \in K_{r,R}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot [n(\partial D_R(z_0), z) - n(\partial D_r(z_0), z)].$$

Ist $z \in K_{r,R}(z_0)$, so ist $n(\partial D_R(z_0), z) = 1$ und $n(\partial D_r(z_0), z) = 0$. In den anderen Fällen sind entweder beide Umlaufszahlen = 1 oder beide = 0. \square

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel. Der „Entwicklungssatz“ wird die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen

lassen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwuchs also aus der Absicht, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte das passende Hilfsmittel:

Hilfssatz (Trick mit der geometrischen Reihe)

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Ist $z \in D_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial D_r(z_0)$, so ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Die Reihe konvergiert (bei festem ζ) für jedes $z \in D_r(z_0)$ absolut.

BEWEIS: Bekanntlich ist $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ für alle komplexen Zahlen w mit $|w| < 1$. Liegt z in $D := D_r(z_0)$ und ζ auf dem Rand von D , so ist $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, also $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$. Daher machen wir folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \end{aligned}$$

□

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

Entwicklungssatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0 , die noch in G hineinpaßt, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem ist dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

BEWEIS: Sei $0 < r < R$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel für $z \in D_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Auf den Integranden können wir den Trick mit der geometrischen Reihe anwenden:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z),$$

mit $F_n(\zeta, z) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$, und die Reihe konvergiert für alle $z \in D_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ absolut.

Für festes $z \in D_r(z_0)$ ist $F_n(\zeta, z)$ eine stetige Funktion auf $\partial D_r(z_0)$. Da $|f|$ auf der kompakten Menge $\partial D_r(z_0)$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, gilt:

$$|F_n(\zeta, z)| \leq \frac{C}{r^{n+1}} \cdot |z - z_0|^n \leq \frac{C}{r} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n.$$

Die Reihe über die Ausdrücke $\left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n$ konvergiert für jedes feste $z \in D_r(z_0)$. Nach der Folgerung aus dem Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwerten konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z)$ für festes z gleichmäßig auf $\partial D_r(z_0)$ gegen $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, und es folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\zeta, z) \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} F_n(\zeta, z) d\zeta \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Aus der Cauchyschen Integralformel für Kreisringe folgt sofort, daß a_n nicht von r abhängt, und da das obige Verfahren für jedes $r < R$ funktioniert, ist der Konvergenzradius der Reihe $\geq R$. Insbesondere konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf $D_r(z_0)$ gegen f . \square

Folgerung (Höhere Cauchysche Integralformeln)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z \in G$ und $D_r(z) \subset\subset G$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

BEWEIS: Sei $D := D_r(z) \subset\subset D_R(z) \subset G$. Dann kann f in D in der Form

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n$$

geschrieben werden. Also ist f in z beliebig oft differenzierbar, die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation der Reihe gewonnen werden und es gilt:

$$f^{(n)}(z) = n! a_n = \frac{n!}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

□

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ in eine Potenzreihe entwickelbar, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G analytisch, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, daß man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Wenn $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ ist, für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, dann ist f holomorph auf G .

BEWEIS: Aus der Voraussetzung folgt, daß f zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F besitzt. Aber weil F beliebig oft komplex differenzierbar ist, ist auch $f = F'$ holomorph. □

Fassen wir nun zusammen:

Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.
2. f ist komplex differenzierbar.
3. f ist holomorph.
4. f ist beliebig oft komplex differenzierbar.
5. f ist analytisch.
6. f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.
7. f ist stetig, und es ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in G .

Wir haben eine erstaunliche Entdeckung gemacht. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie!

Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere wundersame Eigenschaften auf.

Hilfssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt, daß f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. □

Riemannscher Hebbarkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion \hat{f} auf G , die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

BEWEIS: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei } F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G . Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. F muß dann auf ganz G holomorph sein.

Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ . Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, folgt, daß Δ sogar auf ganz G holomorph ist. Wir können $\hat{f} := \Delta$ setzen. \square

Von besonderer Bedeutung ist der folgende Satz:

Identitätssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (hier ist wichtig, daß G zusammenhängend ist!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.
2. $f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.
3. Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

BEWEIS: (1) \implies (2) ist trivial.

(2) \implies (3): Ist $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Menge $M \subset G$, so gibt es eine Folge (z_n) in M , die gegen z_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit ist

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = g(z_0).$$

Weiter ist

$$f'(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} = g'(z_0),$$

usw.

(3) \implies (1): Sei $h := f - g$ und $N := \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$. Dann liegt z_0 in N , also ist $N \neq \emptyset$. Außerdem ist N offen: Ist nämlich $w_0 \in N$, so sind in der Potenzreihenentwicklung von h in w_0 alle Koeffizienten = 0, und das bedeutet, daß h auf einer ganzen Umgebung von w_0 identisch verschwindet.

Andererseits ist auch $G \setminus N$ offen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} G \setminus N &= \{z \in G \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } h^{(k)}(z) \neq 0\} \\ &= \bigcup_k \{z \in G \mid h^{(k)}(z) \neq 0\}, \end{aligned}$$

und das ist eine Vereinigung offener Mengen. Also ist $G = N$. \square

Die Menge M , die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

Die Cauchysche Integralformel zeigt, daß der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt sind. Noch deutlicher können wir das durch die folgende Formel ausdrücken:

Mittelwerteigenschaft

Ist f holomorph auf dem Gebiet G , $z_0 \in G$ und $D_r(z_0) \subset\subset G$, dann ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{jt}) dt.$$

Zum BEWEIS braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchysche Integralformel einzusetzen.

Die höheren Cauchyschen Integralformeln führen zu einer Folge von Abschätzungen, von denen hier nur eine angegeben werden soll:

Cauchy-Ungleichung

Unter den obigen Voraussetzungen ist

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \cdot \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi j} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{jt})}{r^2 e^{2jt}} r j e^{jt} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{jt})| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi r} \cdot 2\pi \cdot \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|. \end{aligned}$$

□

Maximumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

BEWEIS: Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein Maximum besitzt, dann gibt es ein $r > 0$, so daß $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für $|z - z_0| \leq r$ ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt für $0 < \varrho < r$:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{jt})| dt \leq |f(z_0)|.$$

Dann muß natürlich überall sogar das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0 + \varrho e^{jt})| - |f(z_0)|) dt = 0.$$

Da der Integrand überall ≤ 0 und $\varrho < r$ beliebig ist, folgt:

$$|f(z)| = |f(z_0)| \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Also ist $|f|$ auf $D_r(z_0)$ konstant, und damit auch f selbst. Schließlich wenden wir den Identitätssatz an und erhalten, daß f auf ganz G konstant sein muß. \square

Man kann das Maximumprinzip auch so formulieren:

Eine nicht-konstante holomorphe Funktion nimmt nirgendwo in ihrem Definitionsbereich ein lokales Maximum an (worunter stets ein Maximum von $|f|$ zu verstehen ist).

Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf G , so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

BEWEIS: Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge muß $|f|$ irgendwo auf \overline{G} sein Maximum annehmen. Wegen des Maximumprinzips kann das nicht in G liegen. Da bleibt nur der Rand. \square

Wer das Wundern noch nicht verlernt hat, sollte an dieser Stelle einmal innehalten und sich bewußt machen, wieviele erstaunliche Eigenschaften holomorpher Funktionen wir in kurzer Zeit hergeleitet haben! Und es kommt noch besser!

Definition:

Eine *ganze Funktion* ist eine auf ganz \mathbb{C} definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Polynome, aber auch die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus.

Satz von Liouville

Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.

BEWEIS: Sei $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Cauchy-Ungleichung folgt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot C.$$

Das ist nur möglich, wenn $f'(z) \equiv 0$ ist, also f konstant. \square

Jetzt sind wir in der Lage, einen besonders einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra anzugeben:

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

BEWEIS: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q\left(\frac{1}{z}\right)},$$

mit einem Polynom

$$q(w) := a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n.$$

Da $q(0) = a_n \neq 0$ ist, ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion. Das geht nur, wenn f konstant ist, im Gegensatz zur Annahme. \square

§4 Isolierte Singularitäten und Residuenkalkül

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine *isolierte Singularität* von f .

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f . Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, daß z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, daß es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der Logarithmus hat z.B. im Nullpunkt keine isolierte Singularität, weil man einen kompletten Halbstrahl aus \mathbb{C} herausnehmen muß, um \log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U , bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f , wenn es eine holomorphe Funktion \hat{f} auf U gibt, so daß $f = \hat{f}|_{U \setminus \{z_0\}}$ ist.
2. z_0 heißt eine *Polstelle* von f , wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ ist.
3. z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f , wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt (Riemannscher Hebbarkeitssatz). Eine Polstelle liegt genau dann vor, wenn die Werte von $|f(z)|$ bei Annäherung an z_0 unbeschränkt wachsen. Und was passiert bei einer wesentlichen Singularität? Ohne Beweis geben wir den folgenden merkwürdigen Satz an:

Satz von Casorati-Weierstraß

Hat f in z_0 eine wesentliche (isolierte) Singularität, so kommt $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe.

Das bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$ ist.

Beispiele :

1. Sei $f(z) := \frac{z}{\sin z}$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \pm \dots\right) \\ &= z \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß $\left| \frac{\sin(z)}{z} \right| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

Also ist $|f(z)| = \left| \frac{z}{\sin(z)} \right| < \frac{1}{1 - \varepsilon}$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Der Wert, der in 0 ergänzt werden muß, ist gegeben durch $\frac{1}{h(0)} = 1$.

2. $f(z) := \frac{1}{z}$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.
3. Sei $f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right)$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

Setzen wir $z_n := \frac{1}{n}$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞ . Also kann die Singularität nicht hebbbar sein.

Setzen wir dagegen $z_n := -\frac{1}{2\pi n} \mathbf{j}$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathbf{j}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞ . Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht besonders praktisch. Wir werden nach besseren Methoden suchen. Zuvor müssen wir jedoch noch einen Satz über Nullstellen holomorpher Funktionen beweisen:

Lokale Beschreibung von Nullstellen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion h auf $D := D_\varepsilon(z_0)$, so daß gilt:

1. $D \subset U$.
2. $h(z) \neq 0$ für $z \in D$.
3. $f(z) = (z - z_0)^k \cdot h(z)$ für $z \in D$.

Die Zahl k und der Wert $h(z_0)$ sind eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß sich f auf $D_\delta(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da f nicht konstant ist, können nicht alle $a_n = 0$ sein. Da $f(z_0) = 0$ ist, muß $a_0 = 0$ sein.

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $k \geq 1$, so daß

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0 \quad \text{und} \quad a_k \neq 0$$

ist. Daraus folgt für $z \in D_\delta(z_0)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \\ &= (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^k \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

Offensichtlich hat $h(z)$ den gleichen Konvergenzradius wie die Entwicklung von $f(z)$ um z_0 . Da $h(z_0) = a_k \neq 0$ ist, gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$, so daß $h(z) \neq 0$ für alle $z \in D_\varepsilon(z_0)$ ist.

Die Zahl k ist dadurch charakterisiert, daß

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

ist. Und nach den Cauchyschen Integralformeln ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

□

Die Zahl k nennt man die *Ordnung der Nullstelle*. Auch hier zeigt sich ein eklatanter Unterschied zur reellen Theorie: Während eine reelle beliebig oft differenzierbare Funktion durchaus isolierte Nullstellen unendlicher Ordnung haben kann, ist das im Komplexen wegen des Identitätssatzes nicht möglich.

Folgerung

f hat in z_0 genau dann eine Polstelle, wenn es eine Umgebung $W = W(z_0)$, eine holomorphe Funktion h auf W und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $h(z_0) \neq 0$ ist, und

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt.

BEWEIS: f hat genau dann in z_0 eine Polstelle, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = 0$ ist, wenn also $\frac{1}{f}$ in z_0 eine hebbare Singularität hat, in der man den Wert 0 ergänzen kann. Das bedeutet, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion \tilde{h} in der Nähe von z_0 gibt, so daß gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot \tilde{h}(z) \quad \text{und} \quad \tilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z), \quad \text{mit } h(z) := \frac{1}{\tilde{h}(z)}.$$

□

Die Zahl k heißt hier die *Polstellenordnung* von f in z_0 .

Ist $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$, mit einer holomorphen Funktion h , so können wir h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{für } |z - z_0| < r.$$

Aber dann gilt für $z \neq z_0$ und $|z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z - z_0)^k} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1} \cdot (z - z_0) + \cdots$$

Betrachten wir dagegen die wesentliche Singularität $f(z) := \exp(1/z)$, so erhalten wir für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z . Wir werden sehen, daß es immer möglich ist, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition:

Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der *Entwicklungspunkt*.

$$H(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

heißt *Hauptteil* der Reihe,

$$N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

heißt *Nebenteil* der Reihe.

Ein Hauptteil $H(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$ ist *konvergent in z* , falls die zugehörige Potenzreihe

$$w \mapsto H(z_0 + \frac{1}{w}) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots$$

in $w = \frac{1}{z - z_0}$ konvergiert. Ist r^* der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe, so konvergiert $H(z)$ für $|z - z_0| > r := \frac{1}{r^*}$.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent*, wenn Hauptteil und Nebenteil jeweils für sich konvergent sind.

Konvergenzverhalten von Laurentreihen

Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 , $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der Konvergenzradius der zum Hauptteil gehörenden Potenzreihe $H(\frac{1}{w} + z_0) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots$, sowie $r := \frac{1}{r^*}$.

1. Ist $r \geq R$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von \mathbb{C} .
2. Ist $r < R$, so konvergiert $L(z)$ auf dem Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

absolut und im Inneren des Kreisringes gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.

BEWEIS: Klar!



Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Läßt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man \mathbb{C}^* als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

Wir wollen nun sehen, daß sich umgekehrt jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln läßt.

Satz von der „Laurent-Trennung“

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f^- : \mathbb{C} \setminus D_r(\bar{z}_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

1. $f^+ + f^- = f$ auf $K_{r,R}(z_0)$.
2. $|f^-(z)| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$.

BEWEIS: Wir beginnen mit der einfacher zu beweisenden Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Darstellungen der gewünschten Art:

$$f = f_1^+ + f_1^- = f_2^+ + f_2^-.$$

Dann definieren wir eine neue Funktion $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} f_1^+(z) - f_2^+(z) & \text{für } z \in D_R(z_0), \\ f_2^-(z) - f_1^-(z) & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus D_r(\bar{z}_0). \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz \mathbb{C} holomorph, und für $z \rightarrow \infty$ strebt sie gegen 0. Also handelt es sich um eine beschränkte ganze Funktion, die natürlich konstant sein muß (Liouville). Es ist nur $h(z) \equiv 0$ möglich.

Nun kommen wir zur Existenz von f^+ und f^- :

Für ϱ mit $r < \varrho < R$ und $|z - z_0| \neq \varrho$ setzen wir

$$F_\varrho(z) := \frac{1}{2\pi j} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Da der Integrand holomorph ist, gilt das auch für F_ϱ , nach den Sätzen über Parameterintegrale.

Nach der Cauchyschen Integralformel für Ringgebiete gilt für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$:

$$F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{falls } \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen

$$f^+(z) := \lim_{\varrho \rightarrow R^-} F_\varrho(z) \quad \text{und} \quad f^-(z) := - \lim_{\varrho \rightarrow r^+} F_\varrho(z).$$

Ist $z \in K_{r,R}(z_0)$, so kann man ϱ_1 und ϱ_2 so wählen, daß $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$ ist, und dann gilt:

$$f^+(z) + f^-(z) = F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = f(z).$$

Wir müssen nur noch $|f^-(z)|$ für $|z| \rightarrow \infty$ abschätzen:

Wir können aber voraussetzen, daß $r < \infty$ ist, und für ϱ nahe r , $\zeta \in \partial D_\varrho(z_0)$ und $|z| \rightarrow \infty$ strebt der Betrag von $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ gegen Null. Also strebt auch $|F_\varrho(z)|$ gegen Null. \square

Folgerung

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann läßt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln, d.h. die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f .

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

BEWEIS: Wir führen die Laurent-Trennung durch:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z),$$

wobei f^+ holomorph auf $D_R(z_0)$ ist, und f^- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$. Dann kann man f^+ in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad r < \varrho < R.$$

Dabei haben wir die höheren Cauchyschen Integralformeln benutzt (§3, S. 147).

Der Nebenteil muß etwas anders behandelt werden:

Sei $g(w) := f^-(z_0 + \frac{1}{w})$. Dann ist g holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$. Da $g(\frac{1}{z - z_0}) = f^-(z)$ ist, folgt:

$$\lim_{w \rightarrow 0} g(w) = \lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0.$$

Also können wir auf g den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Es gibt eine holomorphe Funktion \hat{g} auf $D_{1/r}(0)$, die außerhalb 0 mit g übereinstimmt. Nun entwickeln wir \hat{g} in eine Taylorreihe:

$$\hat{g}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \quad \text{für } |w| < \frac{1}{r}.$$

Da $\hat{g}(0) = 0$ ist, ist $b_0 = 0$. Also gilt für $|z - z_0| > r$:

$$f^-(z) = g\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

mit $a_{-n} := b_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

Insgesamt ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in K_{r,R}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert im Innern des Ringgebietes absolut und gleichmäßig. Sie kann also für $r < \varrho < R$ über $\partial D_\varrho(z_0)$ gliedweise integriert werden. Das gleiche gilt dann für

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N-1}.$$

Benutzt man noch, daß

$$\int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi\mathbf{j} & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist, so erhält man:

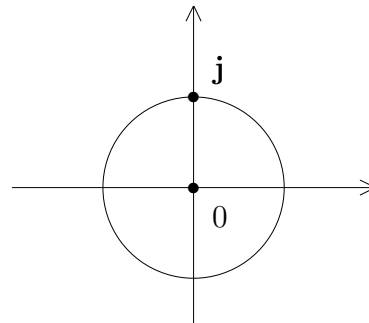
$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^{n-N-1} dz = a_N.$$

□

Beispiel :

$$\text{Sei } f(z) := \frac{1}{z(z - \mathbf{j})^2}.$$

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathbf{j}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\frac{1}{z - z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z - a| < |z_0 - a|$ ist

$$\left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right| < 1,$$

also

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z - a - (z_0 - a)}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{z_0-a}} \\
&= -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{z_0-a} \right)^n.
\end{aligned}$$

Ist $|z - a| > |z_0 - a|$, so geht man analog vor:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0-a}{z-a}} \\
&= \frac{1}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - a}{z - a} \right)^n.
\end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z - z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^{(m-1)}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\frac{1}{z - z_0}$ erhält man die Reihe für die m -ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{1}{z - \mathbf{j}} = \mathbf{j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathbf{j}} \right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z - \mathbf{j})^2} = -\left(\frac{1}{z - \mathbf{j}} \right)' = -\mathbf{j} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z}{\mathbf{j}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\mathbf{j}} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{z}{\mathbf{j}} \right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\mathbf{j}^n} z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{\mathbf{j}^{n+1}} z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist

$$\frac{1}{z - \mathbf{j}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{j}}{z} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z - \mathbf{j})^2} = -\left(\frac{1}{z - \mathbf{j}} \right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} (-n) \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \mathbf{j}^{n-3} (n-2) \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3} \mathbf{j}^{-n-1} (n+2) z^n,$$

wegen $\mathbf{j}^{-n-3} (-n-2) = \mathbf{j}^{-n-1} (n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathbf{j})$:

Hier soll nach Potenzen von $(z - \mathbf{j})$ entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathbf{j}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \mathbf{j}}{-\mathbf{j}} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{j}^{n+1})(z - \mathbf{j})^n,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z - \mathbf{j})^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{j}^{n+1})(z - \mathbf{j})^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (-\mathbf{j}^{n+3})(z - \mathbf{j})^n \\ &= \frac{-\mathbf{j}}{(z - \mathbf{j})^2} + \frac{1}{z - \mathbf{j}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{j}^{n+1}(z - \mathbf{j})^n. \end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathbf{j})$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

Charakterisierung von Singularitäten

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ hebbar} &\iff a_n = 0 \text{ für alle } n < 0, \\ z_0 \text{ Polstelle} &\iff \exists n < 0 \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ und } a_k = 0 \text{ für } k < n, \\ z_0 \text{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

BEWEIS: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\hat{f} : D_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, mit $\hat{f}|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber \hat{f} besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das läßt nur die Möglichkeit, daß $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. \square

Beispiele :

1.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \dots$$

besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2.

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathbf{j})^2}$$

hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in \mathbf{j} . Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

3.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.

$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$

ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \frac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$.

Aber dann ist auch $\frac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{mit } a_0 = 1.$$

Also ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Das bedeutet, daß f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $D \subset G$ heißt *diskret in G* , falls sie in G keinen Häufungspunkt besitzt. Sie kann dann zwar Häufungspunkte auf dem Rand von G haben, aber im Innern von G nur isolierte Punkte.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine *meromorphe Funktion* auf G besteht aus einer diskreten (oder leeren) Menge $D \subset G$ und einer holomorphen Funktion $f : G \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$, die in den Punkten von D höchstens Polstellen als isolierte Singularitäten besitzt.

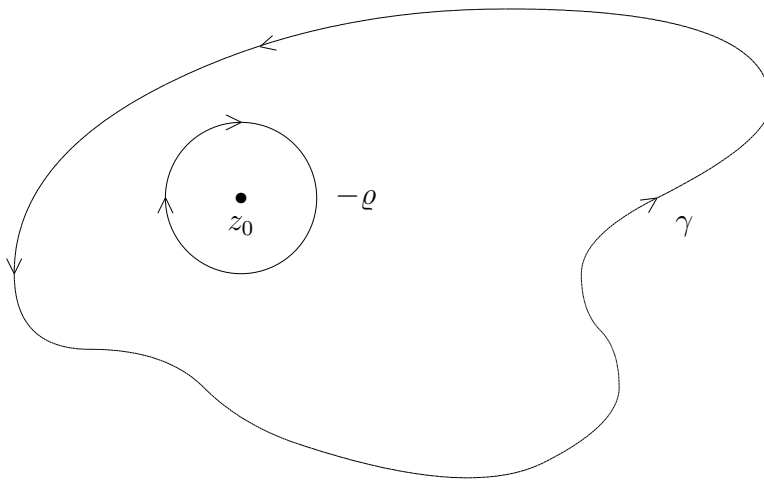
Ist G sogar beschränkt, so besitzt eine meromorphe Funktion auf G höchstens endlich viele Polstellen.

Die Funktion $\frac{1}{\sin z}$ ist Beispiel einer meromorphen Funktion, aber natürlich auch jede rationale Funktion.

Wir wollen jetzt ein möglichst allgemeines Verfahren entwickeln, wie man Kurvenintegrale über meromorphe Funktionen berechnen kann, wenn die Kurve keine der Polstellen trifft. Wir beginnen mit einer ganz einfachen Situation:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, γ der positiv orientierte Rand eines Teilgebietes $G' \subset\subset G$ und $z_0 \in G'$. Weiter sei f eine meromorphe Funktion mit einer einzigen Polstelle in z_0 .

Wie berechnet man $\int_{\gamma} f(z) dz$?



Sei ρ der positiv orientierte Rand einer kleinen Kreisscheibe um z_0 , die noch ganz in G' liegt:

$$\rho(t) := z_0 + \varepsilon \cdot e^{jt}, \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dann stellt die Kette $\gamma - \rho$ eine Parametrisierung des Randes des Gebietes $G'' := G' \setminus \overline{D_\varepsilon(z_0)}$ dar. Offensichtlich ist $G'' \subset\subset G \setminus \{z_0\}$. Also können wir den Stokesschen Satz in der folgenden Form anwenden:

$$0 = \int_{G''} d(f dz) = \int_{\partial G''} f dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\rho} f(z) dz.$$

Damit wird die Berechnung von $\int_{\gamma} f(z) dz$ auf die Berechnung des „Restintegrals“

$\int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z) dz$ zurückgeführt.

Ist das eine Erleichterung? Eventuell schon! Selbst wenn $D \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Kreisscheibe, $\gamma = \partial D$ und z_0 ein beliebiger Punkt in D ist, so erhält man ohne explizite Rechnung:

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi\mathbf{j}.$$

Allerdings bedeutet das Ergebnis, daß $n(\partial D, z_0) = 1$ ist, und das hätten wir auch so gewußt. Interessanter wird die Situation, wenn ein komplizierterer Integrand vorliegt, oder wenn γ ein beliebiger geschlossener Weg ist. Im letzteren Falle funktioniert allerdings die obige Argumentation nicht mehr, wir müssen uns etwas anderes einfallen lassen.

Wir nehmen zusätzlich an, daß G ein sternförmiges Gebiet ist. z_0 sei weiterhin die einzige Polstelle von f und liege nicht auf $|\gamma|$. Wir können f in der Nähe von z_0 in eine Laurentreihe um z_0 entwickeln:

$$f(z) = N(z) + H(z),$$

wobei der Hauptteil $H(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Dann ist

$$\hat{f}(z) := \begin{cases} N(z) & \text{nahe } z_0, \\ f(z) - H(z) & \text{in } G \setminus \{z_0\}. \end{cases}$$

eine auf ganz G holomorphe Funktion, und aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt:

$$0 = \int_{\gamma} \hat{f}(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} H(z) dz.$$

Weiter gilt:

$$H(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

wobei $\varphi(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-N}}{(z - z_0)^N}$ eine Funktion ist, die auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion besitzt. Also ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1} \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma} \varphi(z) dz = a_{-1} \cdot 2\pi\mathbf{j} \cdot n(\gamma, z_0),$$

weil ja das Integral über φ und jeden geschlossenen Weg = 0 ist. Wir müßten also nur noch die Zahl a_{-1} kennen. Und wir kennen sie tatsächlich, es ist

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z) dz,$$

und das ist wieder das „Restintegral“, das oben schon aufgetreten war.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so daß $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta) d\zeta$$

das *Residuum* von f in z_0 .

Bemerkungen :

1. $\operatorname{res}_{z_0}(f)$ ist der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f um z_0 . Daraus folgt insbesondere, daß f nicht von dem gewählten ε abhängt.
2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

3. Es ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) + b \cdot \operatorname{res}_{z_0}(g).$$

4. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

BEWEIS: Da f eine Stammfunktion besitzt, verschwindet das Integral über f und jeden geschlossenen Weg. \square

Insbesondere ist $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{1}{(z-z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

5. Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

BEWEIS: Wir schreiben

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad h \text{ holomorph in } z_0.$$

Dann folgt:

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)h(z) \rightarrow a_{-1} \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

\square

6. Man kann die vorangegangene Aussage noch verallgemeinern:

Hat f in z_0 eine m -fache Polstelle, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

BEWEIS: Es ist

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

also

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$$

Damit ist

$$[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)!a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\dots),$$

und es folgt die Behauptung. \square

7. Seien g und h holomorph nahe z_0 , $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

$$\text{Dann ist } \operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

BEWEIS: Wir können schreiben:

$$\begin{aligned} g(z) &= c_0 + (z - z_0) \cdot \tilde{g}(z), \text{ mit } c_0 \neq 0 \\ \text{und } h(z) &= (z - z_0) \cdot (b_1 + \tilde{h}(z)), \text{ mit } b_1 \neq 0 \text{ und } \tilde{h}(z_0) = 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{h(z)} &= \frac{c_0 + (z - z_0) \cdot \tilde{g}(z)}{(z - z_0) \cdot (b_1 + \tilde{h}(z))} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{c_0}{b_1 + \tilde{h}(z)} + \frac{\tilde{g}(z)}{b_1 + \tilde{h}(z)}. \end{aligned}$$

Also hat $f := \frac{g}{h}$ in z_0 eine einfache Polstelle, und es ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{c_0}{b_1 + \tilde{h}(z_0)} = \frac{c_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

Beispiele:

$$1. \text{ Sei } f(z) := \frac{e^{\mathbf{j}z}}{z^2 + 1} = \frac{e^{\mathbf{j}z}}{(z - \mathbf{j})(z + \mathbf{j})}.$$

f hat einfache Polstellen bei \mathbf{j} und $-\mathbf{j}$. Es ist

$$\operatorname{res}_{\mathbf{j}}(f) = \lim_{z \rightarrow \mathbf{j}} (z - \mathbf{j}) f(z) = \lim_{z \rightarrow \mathbf{j}} \frac{e^{\mathbf{j}z}}{z + \mathbf{j}} = -\frac{1}{2e} \mathbf{j},$$

und analog

$$\operatorname{res}_{-\mathbf{j}}(f) = \lim_{z \rightarrow -\mathbf{j}} (z + \mathbf{j}) f(z) = \lim_{z \rightarrow -\mathbf{j}} \frac{e^{\mathbf{j}z}}{z - \mathbf{j}} = \frac{e}{2} \mathbf{j}.$$

2. Es soll das Residuum von $f(z) := \exp(-\frac{1}{z})$ in $z_0 = 0$ berechnet werden. Dort liegt keine Polstelle, sondern eine wesentliche Singularität vor, aber das ist auch erlaubt. Am besten verwendet man die Laurentreihe.

$$\exp\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + (-1) \frac{1}{z} \pm \dots$$

Also ist $\operatorname{res}_0(f) = a_{-1} = -1$.

3. $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)}$ hat bei $z = -1$ eine doppelte Polstelle. Also ist

$$\operatorname{res}_{-1}(f) = \lim_{z \rightarrow -1} \left[(z + 1)^2 f(z) \right]' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z^2 + 8z - 8}{(z^2 + 4)^2} = -\frac{14}{25}.$$

4. Sei $f(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$. Weil $\cos(0) \neq 0$, $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) \neq 0$ ist, gilt:

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{\cos(z)}{\sin(z)} \right) = \frac{\cos(0)}{\sin'(0)} = 1.$$

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein geschlossener Weg in G . Wir nennen γ *nullhomolog* in G , falls $\int_{\gamma} h(z) dz = 0$ für jede holomorphe Funktion h auf G gilt.

Wir kennen zwei wichtige Beispiele, wo γ nullhomolog in G ist:

1. G beliebig, γ der positiv orientierte Rand eines Teilgebietes $G' \subset\subset G$.
2. G sternförmig, γ beliebig.

Ist z.B. $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und $\gamma = \partial D_{\varepsilon}(z_0)$, so ist γ nicht nullhomolog in G , denn es ist ja $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi j \neq 0$.

Der Residuensatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein nullhomologer geschlossener Weg in G . Weiter sei f eine meromorphe Funktion auf G mit endlich vielen Polstellen $z_1, \dots, z_N \in G \setminus |\gamma|$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^N n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname{res}_{z_k}(f).$$

BEWEIS: Sei $H_k(z) := \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k} + \varphi_k(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in z_k , so daß φ_k auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ jeweils eine Stammfunktion besitzt. Dann ist

$$f(z) - \sum_{k=1}^N \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k} - \sum_{k=1}^N \varphi_k(z)$$

holomorph auf G , und daher

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N a_{-1}^{(k)} \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k}.$$

Das ergibt die Behauptung. □

Beispiel:

Die Funktion

$$f(z) := \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

hat einen doppelten Pol bei $z = -1$ und einfache Pole bei $z = \pm 2j$.

Das Residuum bei -1 haben wir oben schon ausgerechnet, es ist $\text{res}_{-1}(f) = -\frac{14}{25}$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \text{res}_{2j}(f) &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+2j)} = \frac{-4 - 4j}{(1+2j)^2 4j} \\ &= \frac{-(1+j)}{(-3+4j)j} = \frac{1+j}{4+3j} \\ &= \frac{(1+j)(4-3j)}{(4+3j)(4-3j)} = \frac{7+j}{25}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{res}_{-2j}(f) &= \lim_{z \rightarrow -2j} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2j)} = \frac{-4+4j}{(1-2j)^2(-4j)} \\ &= \frac{1-j}{(-3-4j)j} = \frac{1-j}{4-3j} \\ &= \frac{(1-j)(4+3j)}{(4-3j)(4+3j)} = \frac{7-j}{25}. \end{aligned}$$

Von den Polstellen liegen -1 und $-2j$ in der Kreisscheibe $D_2(-j)$ (es ist $|-1 - (-j)| = |-1 + j| = \sqrt{2} < 2$). Der Punkt $2j$ liegt außerhalb. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_2(-j)} \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} dz &= 2\pi j \cdot [\text{res}_{-1}(f) + \text{res}_{-2j}(f)] \\ &= 2\pi j \cdot \left[-\frac{14}{25} + \frac{7-j}{25} \right] \\ &= \frac{2\pi j}{25} \cdot (-7-j) = \frac{2\pi}{25}(1-7j). \end{aligned}$$

Oft wendet man den Residuensatz in folgender Form an:

Das Argument-Prinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ der positiv orientierte Rand eines Gebietes $G' \subset\subset G$.

Weiter sei f auf G meromorph, n die Anzahl der Nullstellen und p die Anzahl der Polstellen von f in G' . Beides werde jeweils mit Vielfachheiten gezählt. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = n - p.$$

BEWEIS: Ist $z_0 \in G'$ ein beliebiger Punkt, so kann man f in der Nähe von z_0 schreiben als

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot h(z),$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$. Ist $m > 0$, so liegt eine Nullstelle der Ordnung m vor. Ist $m < 0$, so hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung m . Ist $m = 0$, so ist f in z_0 holomorph und $\neq 0$.

Nun ist

$$f'(z) = m \cdot (z - z_0)^{m-1} \cdot h(z) + (z - z_0)^m \cdot h'(z),$$

also

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m \cdot h(z) + (z - z_0)h'(z)}{(z - z_0)h(z)} \\ &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \end{aligned}$$

wobei der zweite Summand in z_0 holomorph ist. Daraus folgt:

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = m.$$

Nur bei den endlich vielen Nullstellen und Polstellen, die f eventuell in G' besitzt, kann ein Residuum $\neq 0$ herauskommen.

Deshalb folgt die Formel unmittelbar aus dem Residuensatz. \square

Zur Deutung des Argument-Prinzips beachten wir, daß $f \circ \gamma$ ein geschlossener Weg ist, der den Nullpunkt nicht trifft, und für den gilt:

$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= n - p. \end{aligned}$$

Sei etwa 0 eine k -fache Nullstelle einer holomorphen Funktion f und γ eine kleine Kreislinie um den Nullpunkt herum. Dann ist $n(f \circ \gamma, 0) = k$. Der Weg $f \circ \gamma$ umläuft den Nullpunkt k -mal. Das bedeutet: Ist $z = \gamma(t)$, so wird $w := f(\gamma(t))$ k -mal angenommen. Und das gilt für alle Werte in der Nähe von 0.

Beispiel:

Die Funktion $f(z) := z^2$ besitzt in $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung und ist ansonsten holomorph ohne Nullstellen. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := e^{\mathbf{j}t}$ umrundet diese Nullstelle einmal, ist also eine einfach geschlossene Kurve, auf der keine Nullstelle von f liegt. Daher ist $n(f \circ \gamma, 0) = 2$. Und tatsächlich umläuft $f \circ \gamma(t) = e^{2\mathbf{j}t}$ den Nullpunkt zweimal! Jeder Wert $w \neq 0$ wird zweimal angenommen, es gibt ja jeweils 2 Wurzeln.

Eine besonders wichtige Anwendung des Residuensatzes stellt die Berechnung gewisser reeller Integrale dar. Wir betrachten zwei Spezialfälle:

Trigonometrische Integrale

Sei $R(x, y)$ eine komplexwertige rationale Funktion. Wir wollen den Residuensatz anwenden, um Integrale vom Typ

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck suchen wir eine holomorphe oder meromorphe Funktion f , so daß wir das fragliche Integral als komplexes Kurvenintegral auffassen können:

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \text{mit } \gamma(t) := e^{jt}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathbf{j} \sin t$ und $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \text{und } \sin t &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(z - \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Da $\gamma'(t) = \mathbf{j}\gamma(t)$ ist, ist

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathbf{j}\gamma(t)} \cdot R \left(\frac{1}{2} \left(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)} \right), \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)} \right) \right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also

$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \frac{1}{\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{\mathbf{j}} \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= 2\pi \cdot \sum_{z \in D_1(0)} \text{res}_z(f). \end{aligned}$$

Beispiel:

Sei $I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $a > 1$ reell. Hier ist

$$R(x, y) = \frac{1}{a + y},$$

also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(z - \frac{1}{z} \right)} = \frac{2\mathbf{j}}{2a\mathbf{j}z + z^2 - 1} = \frac{2\mathbf{j}}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit $z_{1,2} = \mathbf{j}(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$.

f hat zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Da $a > 1$ ist, ist

$$\frac{(a-1)^2}{a^2-1} = \frac{a-1}{a+1} < 1, \text{ also } a-1 < \sqrt{a^2-1}.$$

Daraus folgt, daß $|-a + \sqrt{a^2-1}| = a - \sqrt{a^2-1} < 1$ ist.

Andererseits ist $|-a - \sqrt{a^2-1}| = a + \sqrt{a^2-1} > a > 1$. Also liegt z_1 in $D_1(0)$ und z_2 nicht. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} &= 2\pi \cdot \text{res}_{z_1}(f) \\ &= 2\pi \cdot \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2\mathbf{j}}{z - z_2} \\ &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{2\mathbf{j}\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

Uneigentliche rationale Integrale

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

betrachten, wobei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sei, und $p(x)$ und $q(x)$ Polynome ohne reelle Nullstellen.

Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

Hilfssatz

Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n -ten Grades. Dann gibt es Konstanten $c, C > 0$ und ein $R > 0$, so daß gilt:

$$c|z|^n \leq |p(z)| \leq C|z|^n \quad \text{für } |z| \geq R.$$

BEWEIS:

$$\text{Sei } p(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu, \text{ mit } a_n \neq 0.$$

Für $z \neq 0$ ist

$$q(z) := \frac{p(z)}{z^n} = a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \cdot \frac{1}{z^n} = a_n + H(z)$$

eine Laurentreihe mit konstantem Nebenteil a_n und endlichem Hauptteil $H(z)$. Also ist

$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (q(z) - a_n) = 0$, und es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß $|q(z)| \leq C$ für $|z| \geq 1$ ist.

Weiter ist $|q(z)| \geq |a_n| - |H(z)|$, und da $|H(z)|$ für $|z| \rightarrow \infty$ beliebig klein wird, gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß $|q(z)| \geq c$ für $|z| \geq R$ und genügend großes R ist. \square

Folgerung

Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) \geq \deg(p) + k$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $R > 0$, so daß

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq C \cdot \frac{1}{|z|^k}$$

für $|z| \geq R$ ist.

Außerdem folgt:

1. Ist $k = 1$, so ist $\left| z \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \right|$ im Unendlichen beschränkt.

2. Ist $k = 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

BEWEIS: Ist

$$\begin{aligned} c_1 |z|^m &\leq |p(z)| \leq C_1 |z|^m \\ \text{und } c_2 |z|^n &\leq |q(z)| \leq C_2 |z|^n \end{aligned}$$

für $|z| \geq R$, so ist

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq C \cdot |z|^{m-n},$$

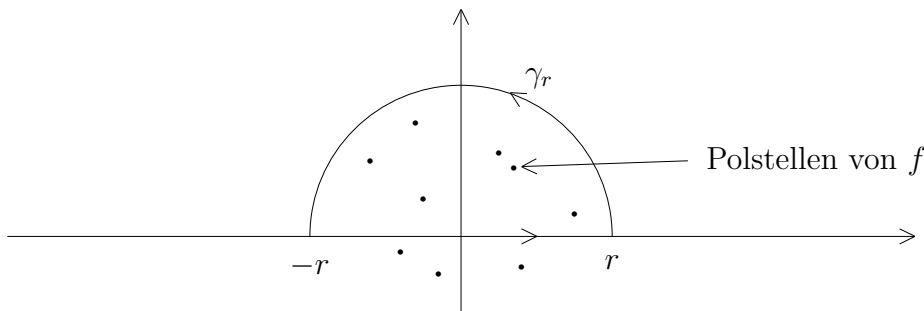
für $|z| \geq R$, und mit $C := \frac{C_1}{c_2}$ und $m - n \leq -k$.

Ist $k = 1$, so ist $\left| z \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq C$.

Ist $k = 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus dem Majoranten-Kriterium und der Tatsache, daß $q(x)$ keine Nullstelle besitzt. \square

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ erfüllt, mit $k = 2$. Insbesondere ist dann $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch höchstens endlich viele sein.

Wir betrachten nun folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{jt}$, $0 \leq t \leq \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi\mathbf{j} \cdot \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{res}_z(f).$$

Man beachte, daß das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine *endliche* Summe!

Da $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ für große z ist, folgt:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi\mathbf{j} \cdot \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{res}_z(f).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall.

Erinnerung:

$$\text{C.H. } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(t) dt$$

heißt *Cauchyscher Hauptwert* des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, daß der Cauchysche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

Beispiel:

Wir wollen $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \frac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{j\pi/4} = e^{j\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Dabei ist $\operatorname{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da alle 4 Nullstellen von $1 + z^4$ verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathbf{j}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{j}) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathbf{j}e^{\mathbf{j}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - 1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 \\ \text{und} \quad \operatorname{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1, \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\mathbf{j} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \mathbf{j}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1 - \mathbf{j}) \right) \\ &= \frac{\pi\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}(-2\mathbf{j}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$