
Kapitel V

Mehrfache Integration

§1 Parameterintegrale

Ziel dieses Paragraphen ist die Untersuchung von parameterabhängigen Integralen der Form

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_a^b f(x_1, \dots, x_n, t) dt$$

mit stetigem f . Gefragt wird nach stetiger und differenzierbarer Abhängigkeit von den Parametern x_1, \dots, x_n . Außerdem werden „Doppelintegrale“ der Form

$$\int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds$$

untersucht.

Bis auf weiteres soll stets folgende Situation betrachtet werden:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : B \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Hilfssatz

Ist (\mathbf{x}_k) eine in B gegen ein \mathbf{x}_0 konvergente Punktfolge und $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(t) := f(\mathbf{x}_k, t)$, so konvergiert die Funktionenfolge f_k auf I gleichmäßig gegen f_0 , mit $f_0(t) := f(\mathbf{x}_0, t)$.

Die punktweise Konvergenz ist trivial. Auf den BEWEIS der gleichmäßigen Konvergenz verzichten wir hier!

Stetigkeit von Parameter-Integralen

Unter den obigen Voraussetzungen ist $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ stetig.

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in B$ und (\mathbf{x}_k) eine gegen \mathbf{x}_0 konvergente Folge. Laut Hilfssatz konvergiert $f_k(t) := f(\mathbf{x}_k, t)$ gleichmäßig gegen $f_0(t) := f(\mathbf{x}_0, t)$.

Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und gleichmäßiger Konvergenz (Kapitel II, §5) konvergiert dann

$$F(\mathbf{x}_k) = \int_a^b f_k(t) dt \quad \text{gegen} \quad \int_a^b f_0(t) dt = F(\mathbf{x}_0).$$

Das bedeutet, daß F in \mathbf{x}_0 stetig ist. □

Differenzierbarkeit von Parameter-Integralen

Ist f für jedes feste \mathbf{x} stetig in t und auf $B \times I$ stetig partiell differenzierbar nach x_1, \dots, x_n , so ist $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ stetig partiell differenzierbar auf B , und es gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt.$$

BEWEIS: O.B.d.A. können wir uns auf den Fall $n = 1$ beschränken. Für die Existenz des Integrals reicht die schwache Stetigkeitsvoraussetzung. Sei $x_0 \in B$ und (x_k) eine in B gegen x_0 konvergente Folge. Es sei $x_k \neq x_0$ für alle k .

Für festes t konvergiert $g_k(t) := \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{x_k - x_0}$ gegen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$. Auch hier kann man (analog zum Hilfssatz) sogar die gleichmäßige Konvergenz auf I beweisen. Es geht die Stetigkeit der partiellen Ableitungen und der Mittelwertsatz in einer Veränderlichen ein, die recht technischen Details lassen wir lieber weg. Der Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und gleichmäßiger Konvergenz liefert nun:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0} &= \frac{1}{x_k - x_0} \cdot \left(\int_a^b f(x_k, t) dt - \int_a^b f(x_0, t) dt \right) \\ &= \int_a^b \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{x_k - x_0} dt \\ &= \int_a^b g_k(t) dt \\ &\rightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Höhere Ableitungen von Parameter-Integralen

Ist f r -mal stetig differenzierbar, so ist auch F r -mal stetig differenzierbar, und man kann Differentiationen bis zur Ordnung r mit dem Integral vertauschen.

BEWEIS: Induktion nach r . □

Eine erste Anwendung ist die Lösung folgenden Problems:

Sei $B = B_r(\mathbf{0})$ eine offene Kugel um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n und

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B .

Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{F}$?

Damit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$ sein kann, muß auf jeden Fall gelten:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Ist diese notwendige „Integrabilitätsbedingung“

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \text{ und } \mathbf{x} \in B$$

erfüllt, so kann man tatsächlich die gesuchte Funktion f konstruieren:

$$\text{Wir setzen } f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i.$$

Um zeigen zu können, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist, muß man beachten:

$$\frac{d}{dt}(tF_j(t\mathbf{x})) = F_j(t\mathbf{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x})x_i = F_j(t\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \delta_{ij} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \int_0^1 F_j(t\mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^1 \left(t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_j(t\mathbf{x})) dt \\ &= tF_j(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 = F_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In Kapitel IV, §5, wurde im Falle des \mathbb{R}^3 die Rotation eines Vektorfeldes eingeführt:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) := \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Gerade haben wir gezeigt:

Integrabilitätsbedingung für Gradientenfelder

Sei \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Kugel um $\mathbf{0}$ im \mathbb{R}^3 . \mathbf{F} ist genau dann der Gradient einer differenzierbaren Funktion, wenn $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist.

BEWEIS: Die Integrabilitätsbedingung bedeutet gerade, daß $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist. □

Beispiele :

1. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, y, z)$ auf einer Kugelumgebung von $\mathbf{0}$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Also muß \mathbf{F} Gradient einer Funktion f sein. Wir berechnen f nach der obigen Formel:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \int_0^1 F_1(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 F_2(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 F_3(tx, ty, tz) dt \\ &= x \cdot \int_0^1 tx dt + y \cdot \int_0^1 ty dt + z \cdot \int_0^1 tz dt \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Die Probe zeigt sofort, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist, wie es ja auch sein muß.

2. Sei $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$. Dann ist auf U das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) &= 0, \\ \text{und } \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Aber wir werden sehen, daß \mathbf{F} dennoch kein Gradientenfeld sein kann. Eine bequeme Methode, das festzustellen, lernen wir leider erst im nächsten Paragraphen kennen, deshalb müssen wir hier etwas improvisieren:

Wenn man nicht so genau auf die Definitionsbereiche achtet, findet man rasch eine Funktion g , deren Gradient das Vektorfeld \mathbf{F} ist. Man braucht z.B. nur eine Stammfunktion von F_2 bezüglich der Variablen y zu suchen:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{t}{x})^2} dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} dt \quad (\text{mit } \varphi(t) = \frac{t}{x}) \\ &= \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} \frac{1}{1 + s^2} ds \\ &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Konstante könnte noch von x und z abhängen, aber die Probe zeigt, daß wir sie nicht brauchen. Tatsächlich hat schon

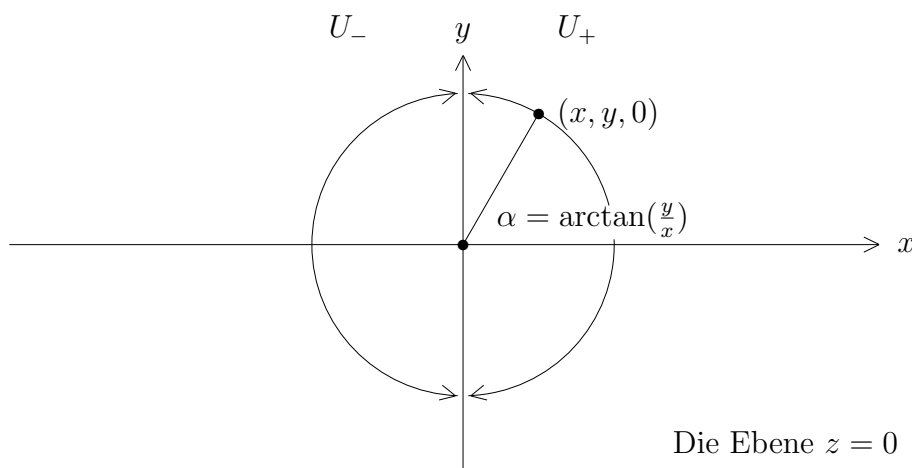
$$g(x, y, z) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

die gewünschte Eigenschaft: $\nabla g = \mathbf{F}$. Leider ist g nicht auf ganz U definiert!

Sei $U_+ := \{(x, y, z) \mid x > 0\}$ und $U_- := \{(x, y, z) \mid x < 0\}$. Diese beiden offenen Mengen werden durch die Hyperebene $\{(x, y, z) \mid x = 0\}$ voneinander getrennt, und g ist auf ihnen beiden jeweils definiert und stetig differenzierbar. In Kapitel IV, §7, haben wir aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gefolgert, daß eine differenzierbare Funktion auf einer zusammenhängenden Menge, deren Gradient verschwindet, konstant sein muß. Wenn es also auf U eine stetig differenzierbare Funktion f mit $\nabla f = \mathbf{F}$ gäbe, dann müßte es Konstanten c_1, c_2 geben, so daß

$$f|_{U_+} = g + c_1 \quad \text{und} \quad f|_{U_-} = g + c_2$$

ist. Daß das aber nicht sein kann, sehen wir, wenn wir Punkte $(x, y, 0)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ und $x \neq 0$ betrachten. Für solche Punkte liefert g nämlich den Winkel, den die Gerade durch $(x, y, 0)$ und $(0, 0, 0)$ mit der x -Achse in der Ebene $\{z = 0\}$ einschließt. Innerhalb U_+ bekommen wir dabei für $y > 0$ positive Winkel (zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$), und für $y < 0$ negative Winkel (zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$). Innerhalb U_- ist es gerade umgekehrt, das kann man sofort am Verlauf des Arcustangens ablesen.



Das bedeutet, daß g bei $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ nicht stetig ergänzt werden kann. Von U_+ her erhält man den Wert $\frac{\pi}{2}$, von U_- her den Wert $-\frac{\pi}{2}$. Das ließe sich freilich mit Hilfe der Konstanten c_1 und c_2 ausbügeln, über die wir noch verfügen können. Wir würden daher

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c & \text{auf } U_+ \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c + \pi & \text{auf } U_- \end{cases}$$

setzen, mit einer evtl. noch zu wählenden Konstanten c . Dann läßt sich f stetig differenzierbar in den Punkt $(0, 1, 0)$ fortsetzen. Aber jetzt geht es auf jeden Fall im Punkt $(0, -1, 0)$ schief. Nähert man sich nämlich diesem Punkt von U_+ her, so

strebt f gegen den Wert $-\frac{\pi}{2} + c$, nähert man sich ihm von U_- her, so erhält man den Wert $\frac{3\pi}{2} + c$. Egal, wie man c auch wählt, die Unstetigkeit läßt sich nicht beheben.

Ob also ein Vektorfeld \mathbf{F} mit $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ein Gradientenfeld ist, hängt von der Geometrie des Definitionsbereiches ab. Auf Kugeln um den Nullpunkt geht alles gut. Man kann auch noch eine erheblich allgemeinere Klasse von Gebieten angeben, auf denen der Satz gilt. Sobald es aber im Definitionsbereich U von \mathbf{F} Löcher gibt, die sich nicht innerhalb von U umgehen lassen, ist Vorsicht geboten.

Wir betrachten nun eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Rechteck,

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann sind die Funktionen

$$F_1(s) := \int_c^d f(s, t) dt \quad \text{bzw.} \quad F_2(t) := \int_a^b f(s, t) ds$$

stetig und daher noch einmal integrierbar. Überraschenderweise gilt:

Satz von Fubini für stetige Funktionen auf Rechtecken

$$\int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds = \int_c^d \int_a^b f(s, t) ds dt.$$

BEWEIS: Für $c \leq \tau \leq d$ sei $g(s, \tau) := \int_c^\tau f(s, t) dt$. Diese Funktion ist nach dem Satz über die Stetigkeit von Parameterintegralen für jedes feste τ eine stetige Funktion von s , und für festes $s \in [a, b]$ und $\tau_0 \in [c, d]$ ist $\tau \mapsto g(s, \tau)$ in τ_0 differenzierbar, mit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(s, \tau_0) = f(s, \tau_0).$$

Also ist g nach τ stetig partiell differenzierbar, und wir können den Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen anwenden:

$$\varphi(\tau) := \int_a^b g(s, \tau) ds = \int_a^b \left(\int_c^\tau f(s, t) dt \right) ds$$

ist stetig differenzierbar, mit

$$\varphi'(\tau) = \int_a^b f(s, \tau) ds.$$

Nun ist

$$\varphi(c) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(d) = \int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds,$$

also

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(s, t) ds dt &= \int_c^d \varphi'(t) dt \\ &= \varphi(d) - \varphi(c) \\ &= \int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds. \end{aligned}$$

□

Beispiele :

1. Wir betrachten $f(x, y) := x^y$ auf $[0, 1] \times [a, b]$, mit $0 < a < b$. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind erfüllt. Die rechte Seite ist leicht ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy &= \int_a^b \left(\frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \\ &= \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right). \end{aligned}$$

Die linke Seite führt auf ein komplizierteres Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \cdot \ln x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} e^{y \cdot \ln x} \Big|_{y=a}^{y=b} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx. \end{aligned}$$

Das ist ein uneigentliches Integral, bei dem nicht sofort klar ist, wie man es ausrechnen sollte. Mit Hilfe des Satzes von Fubini haben wir jedoch schon den Wert!

Will man das Integral direkt berechnen, so kann man es z.B. auf ein sogenanntes „Frullanisches Integral“ zurückführen:¹

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(\infty)] \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Voraussetzung ist dabei, daß f für $x \geq 0$ definiert und stetig ist und daß der Grenzwert $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert und endlich ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx &= \int_0^1 x \cdot \frac{e^{(b-1)\varphi(x)} - e^{(a-1)\varphi(x)}}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx \\ &\quad (\text{mit } \varphi(x) := \ln(x)) \\ &= \int_0^1 \frac{e^{b\varphi(x)} - e^{a\varphi(x)}}{\varphi(x)} \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-(-at)} - e^{-(-bt)}}{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \\ &= [1 - 0] \cdot \ln \frac{b}{a} \quad (\text{nach Frullani}). \end{aligned}$$

Man sieht, daß einem der Satz von Fubini gelegentlich viel Arbeit ersparen kann.

¹vgl. Fichtenholz: Differential- u. Integralrechnung II, Kap. XIII, §4, Nr. 495

2. Die Funktion

$$f(x, y) := \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist auf $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ definiert, aber im Nullpunkt nicht mehr stetig. Der Satz von Fubini kann nicht angewandt werden, aber dennoch existieren die iterierten Integrale:

Für $y > 0$ ist (wie wir weiter oben schon gezeigt haben)

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2},$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \arctan(y) \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{-1}{1 + x^2} dx \\ &= -\arctan(x) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Es ist also gefährlich, bei mehrfachen Integralen einfach so drauf los zu integrieren!! Wir werden später lernen, wann eine Funktion von mehreren Veränderlichen „integrierbar“ ist, und wir werden sehen, unter welchen allgemeineren Voraussetzungen der Satz von Fubini noch gültig bleibt.

Statt eines Doppelintegrals kann man auch mehrfache Integrale betrachten:

Ist $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert das iterierte Integral

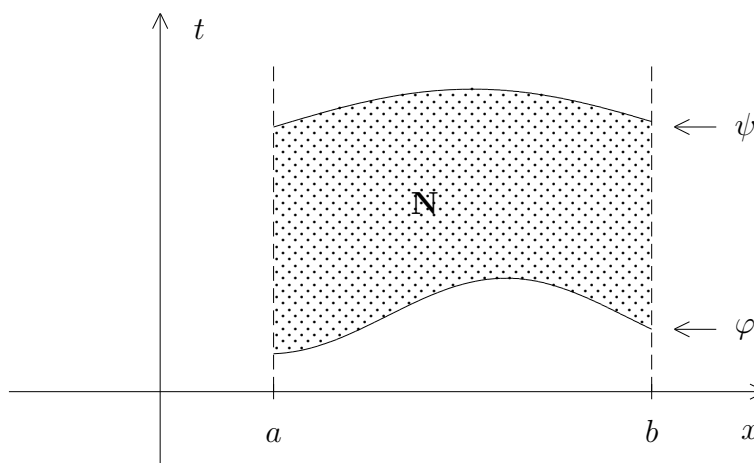
$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$

Mit dem Satz von Fubini und einem Induktionsbeweis kann man zeigen, daß der Wert des Integrals nicht von der Reihenfolge der Integrationen abhängt. In der Praxis werden bei uns allerdings meist nur die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ vorkommen.

Zum Schluß wollen wir noch eine etwas allgemeinere Situation betrachten:

Es seien $\varphi, \psi : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und f eine stetige Funktion auf

$$N := \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}.$$



Stetigkeit von Parameterintegralen mit variablen Grenzen

Unter den obigen Voraussetzungen ist $F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ stetig auf I .

BEWEIS: Sei $x_0 \in I$. Dann zerlegen wir

$$F(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x, t) dt + \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x, t) dt - \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x, t) dt.$$

Das erste Integral ist stetig, nach dem Satz über die Stetigkeit von Parameterintegralen, strebt also für $x \rightarrow x_0$ gegen $F(x_0)$. Andererseits ist f als stetige Funktion auf der kompakten Menge N durch eine Konstante c beschränkt, und daher gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right| &\leq c \cdot |\psi(x) - \psi(x_0)| \\ &\text{und} \\ \left| \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x, t) dt \right| &\leq c \cdot |\varphi(x) - \varphi(x_0)|. \end{aligned}$$

In beiden Fällen strebt die rechte Seite mit $x \rightarrow x_0$ gegen 0. Zusammengefaßt ergibt das:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Da x_0 beliebig war, ist F stetig auf I . □

Leibnizsche Formel

Sei f auf $[a, b] \times [c, d]$ stetig und nach x stetig differenzierbar. Die Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar, mit Werten in $[c, d]$.

Dann ist $F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

BEWEIS: Die Funktion $g(x, \tau) := \int_c^\tau f(x, t) dt$ ist nach τ stetig differenzierbar, wie wir im Beweis zum Satz von Fubini schon gesehen haben. Nach dem Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen ist g auch stetig differenzierbar nach x . Also ist

$$\tilde{F}(x, u, v) := \int_u^v f(x, t) dt = g(x, v) - g(x, u)$$

nach allen drei Variablen stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$F(x) = \tilde{F}(x, \varphi(x), \psi(x)).$$

Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) \\ &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) - \frac{\partial g}{\partial u}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(x, \psi(x))\psi'(x) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x). \end{aligned}$$

□

Beispiel :

$$\text{Sei } F(x) := \int_x^{1+x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt.$$

Die Funktion $f(x, t) := \frac{\sin(tx)}{t}$ ist überall stetig und nach x stetig differenzierbar. Also ist F differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_x^{1+x^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, 1+x^2) \cdot 2x - f(x, x) \cdot 1 \\ &= \int_x^{1+x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(tx)}{t} dt + \frac{\sin(x(1+x^2))}{1+x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(x^2)}{x} \\ &= \int_x^{1+x^2} \cos(tx) dt + \frac{2x \cdot \sin(x+x^3)}{1+x^2} - \frac{\sin(x^2)}{x}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \int_x^{1+x^2} \cos(tx) dt &= \left. \frac{\sin(tx)}{x} \right|_{t=x}^{t=1+x^2} \\ &= \frac{\sin(x+x^3)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x}. \end{aligned}$$

Also ist

$$F'(x) = \frac{1+3x^2}{x+x^3} \sin(x+x^3) - \frac{2}{x} \sin(x^2).$$

Wir wollen nun noch uneigentliche Parameter-Integrale betrachten:

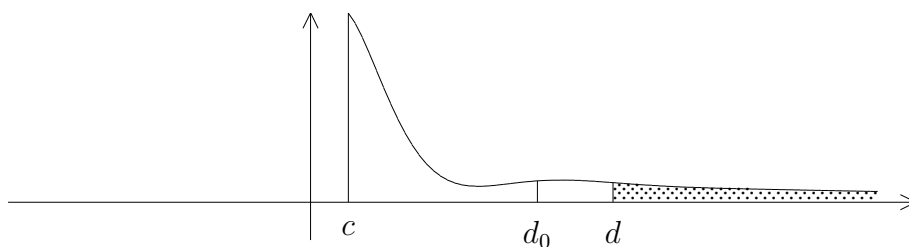
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I := [c, \infty)$ und $f : B \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $\mathbf{x} \in B$ und jedes abgeschlossene Intervall $J \subset I$ sei $t \mapsto f(\mathbf{x}, t)$ eine Regelfunktion auf J , und das Integral $\int_c^\infty f(\mathbf{x}, t) dt$ möge jeweils konvergieren.

Definition:

Sei $K \subset B$ kompakt.

$F(\mathbf{x}) := \int_c^\infty f(\mathbf{x}, t) dt$ heißt *gleichmäßig konvergent auf K* , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists d_0 = d_0(\varepsilon) > c, \text{ s.d. } \left| \int_d^\infty f(\mathbf{x}, t) dt \right| < \varepsilon \text{ für } \mathbf{x} \in K \text{ und } d > d_0.$$



Ein praktisches Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz liefert der folgende Satz.

Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen sei f stetig auf $B \times [c, \infty)$, und es gebe eine Regelfunktion $\varphi : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\int_c^\infty \varphi(t) dt \text{ ist konvergent, und es ist } |f(\mathbf{x}, t)| \leq \varphi(t) \text{ für } \mathbf{x} \in K, t \in [c, \infty).$$

Dann ist $\int_c^\infty f(\mathbf{x}, t) dt$ auf K gleichmäßig konvergent.

Der BEWEIS ist nicht schwer, wird aber trotzdem weggelassen.

Stetigkeit von uneigentlichen Parameterintegralen

Sei $K \subset B$ kompakt, $f : K \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\int_c^\infty f(\mathbf{x}, t) dt$ gleichmäßig konvergent auf K .

Dann ist $F(\mathbf{x})$ stetig auf K .

Ist $n = 1$ und K ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so erhält man außerdem:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

Diesen und den nächsten Satz werden wir nicht beweisen!

Differenzierbarkeit von uneigentlichen Parameterintegralen

Sei f auf $[a, b] \times [c, \infty)$ stetig und stetig nach x partiell differenzierbar. Das Integral $\int_c^\infty f(x, t) dt$ konvergiere für jedes x , und das Integral $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ sei auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent.

Dann ist $F(x) := \int_c^\infty f(x, t) dt$ auf $[a, b]$ differenzierbar, mit

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Bemerkung: Die vorangegangenen Sätze gelten sinngemäß auch für alle anderen Typen von uneigentlichen Integralen.

Beispiel:

Wir wollen die gewonnenen Aussagen über uneigentliche Parameterintegrale benutzen, um weitere Eigenschaften der Gamma-Funktion herzuleiten:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ für } x > 0.$$

Hier ist $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t - t}$ stetig auf $(0, \infty) \times (0, \infty)$

Hilfssatz:

1. Ist $\alpha > 0$, so gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß $|\ln t \cdot t^\alpha| \leq M$ für $0 < t \leq 1$ ist.
2. Das Integral $\int_0^1 t^{a-1} dt$ konvergiert für jedes $a > 0$.
3. Sei $a < b$. Dann konvergiert das Integral $\int_1^\infty e^{-t} t^{a+k} dt$ für jedes reelle k auf $[a, b]$ gleichmäßig.

BEWEIS: 1) Nach l'Hospital gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^\alpha |\ln t|) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln s}{s^\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Da $\ln t \cdot t^\alpha$ auf $(0, 1]$ stetig ist, folgt die Behauptung.

2) Ist $a \geq 1$, so ist t^{a-1} stetig auf $[0, 1]$, und alles ist klar. Ist $0 < a < 1$, so ist auch $0 < 1 - a < 1$, und das Integral über $t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$ konvergiert bei 0.

3) Da die Exponentialfunktion stärker als jede Potenz wächst, ist $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{\alpha+2} = 0$ für jedes reelle α . Es gibt also eine Konstante $C > 0$, so daß gilt:

$$|e^{-t} t^\alpha| = |e^{-t} t^{\alpha+2} t^{-2}| \leq C \cdot \frac{1}{t^2} \text{ für } t \geq 1.$$

Wir wenden das auf $\alpha := b + k$ an. Weil $t \geq 1$ ist, ist $0 < e^{-t} < 1$ und $t^{x+k} \leq t^\alpha$ für $x \in [a, b]$, also $|e^{-t}t^{x+k}| \leq C \cdot \frac{1}{t^2}$ für $x \in [a, b]$. Damit sind die Voraussetzungen des Kriteriums für gleichmäßige Konvergenz erfüllt. \square

Jetzt können wir zur Γ -Funktion zurückkehren. Wir müssen die Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis ∞ getrennt behandeln.

Sei $0 < a < b$, $I := [a, b]$. Ist $0 < t \leq 1$ und $x \in I$, so ist $|e^{-t}t^{x-1}| \leq t^{a-1}$. Mit der Aussage (2) des Hilfssatzes und dem Kriterium für gleichmäßige Konvergenz folgt, daß

$$J_1(x) := \int_0^1 e^{-t}t^{x-1} dt$$

auf I gleichmäßig konvergiert, dort also stetig von x abhängt.

Nach Aussage (3) des Hilfssatzes konvergiert

$$J_2(x) := \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1} dt$$

auf I gleichmäßig. Also ist $\Gamma(x) := J_1(x) + J_2(x)$ stetig.

Der Integrand $f(x, t)$ ist stetig nach x partiell differenzierbar, mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln t \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1}.$$

Wieder liege x im Intervall $I = [a, b]$, mit $0 < a < b$. Ist $0 < t \leq 1$, so ist $x - \frac{a}{2} \geq a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ und daher $t^{x-a/2} \leq t^{a/2}$. Gemäß Aussage (1) des Hilfssatzes wählen wir eine Konstante $M > 0$, so daß $|\ln t \cdot t^{a/2}| \leq M$ ist. Da $e^{-t} < 1$ ist, ist dann

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln t \cdot t^{a/2} \cdot t^{x-1-a/2}| \leq M \cdot t^{a/2-1}.$$

Mit Aussage (2) des Hilfssatzes und dem bekannten Kriterium folgt die gleichmäßige Konvergenz des Integrals über $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ für $t \rightarrow 0+$ auf I .

Ist $t \geq 1$, so ist $\ln(t) \leq t$, und daher $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} \cdot t^x$. Das Integral hierüber konvergiert aber für $t \rightarrow \infty$ auf jedem Intervall gleichmäßig, nach Aussage (3) des Hilfssatzes.

Also ist $\Gamma(x)$ differenzierbar (für $x > 0$), mit $\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln(t)e^{-1}t^{x-1} dt$. Auf ähnliche Weise kann man sogar zeigen, daß Γ beliebig oft differenzierbar ist.

Wir wissen schon, daß $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \geq 2$ ist. Jetzt wollen wir noch einen weiteren Wert der Gammafunktion ausrechnen:

Behauptung: Es ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$.

BEWEIS: Wir benutzen folgende Aussage: Ist $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ surjektiv und differenzierbar, mit $\varphi'(x) > 0$ für $x > 0$, so ist

$$\int_0^\infty f(t) dt = \int_0^\infty f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Das soll heißen: Konvergiert eines dieser beiden Integrale, so auch das andere, und die Grenzwerte sind gleich. Zum Beweis benutzt man die Substitutionsregel innerhalb endlicher Grenzen und geht dann auf beiden Seiten der Gleichung zu den uneigentlichen Integralen über.

Mit $\varphi(x) := x^2$ folgt dann:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot (x^2)^{-1/2} \cdot 2x dx \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

□

Den genauen Wert (nämlich $\sqrt{\pi}$) werden wir später berechnen.

§2 Kurvenintegrale und Differentialformen

In diesem Paragraphen werden Tangentialvektoren und Differentialformen eingeführt und 1-Formen über Kurven integriert.

Eine (skalar- oder vektorwertige) Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so daß f auf jedem der offenen Intervalle (t_{i-1}, t_i) stetig ist und in den Punkten t_i einseitige Grenzwerte besitzt. f heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn f auf $[a, b]$ stetig und auf den Intervallen (t_{i-1}, t_i) differenzierbar ist und außerdem f' in den Punkten t_i einseitige Grenzwerte besitzt.²

Einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir einen *Integrationsweg*. α heißt *glatt*, falls α auf ganz $I := [a, b]$ stetig differenzierbar und $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ ist. $\alpha(a)$ heißt *Anfangspunkt* und $\alpha(b)$ *Endpunkt* des Weges. Ist $\alpha(a) = \alpha(b)$, so nennt man den Weg geschlossen. Die Bildmenge $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als *Spur* von α . Manchmal schreiben wir dafür auch $|\alpha|$.

Beispiele:

1. Sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor $\neq \mathbf{0}$. Dann ist die *Gerade*

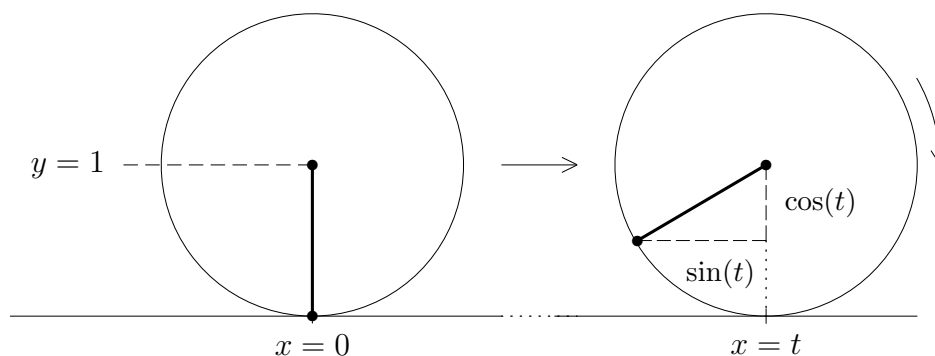
$$\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}, \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

eine glatte Kurve, und ebenso für $r > 0$ der *Kreis*

$$\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + (r \cos t, r \sin t), \text{ für } t \in [0, 2\pi].$$

2. Viele interessante Kurven kommen aus der Anwendung. Wir betrachten hier eine *Zykloide*:

Eine Kreisscheibe vom Radius 1 rolle entlang der x-Achse. Beim Start habe der Mittelpunkt die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$. Der Punkt mit den Anfangskordinaten $(0, 0)$ bewegt sich auf der Peripherie der Scheibe. Wie sehen seine Koordinaten $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ aus, nachdem die Scheibe um eine Strecke der Länge t weitergerollt ist?



²Es folgt dann automatisch, daß f auch auf den abgeschlossenen Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ differenzierbar ist.

Das Rad berührt nun die x-Achse bei $(t, 0)$, und der beobachtete Punkt hat einen Kreisbogen der Länge t zurückgelegt. Da der Radius des Kreises = 1 sein soll, entspricht der Bogenlänge auch ein Winkel vom (Bogen-)Maß t . Offensichtlich gilt dann für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$x(t) = t - \sin t \text{ und } y(t) = 1 - \cos(t).$$

Man überlegt sich leicht, daß diese Beziehungen auch für $t \geq \frac{\pi}{2}$ richtig bleiben. Für $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ gilt z.B.:

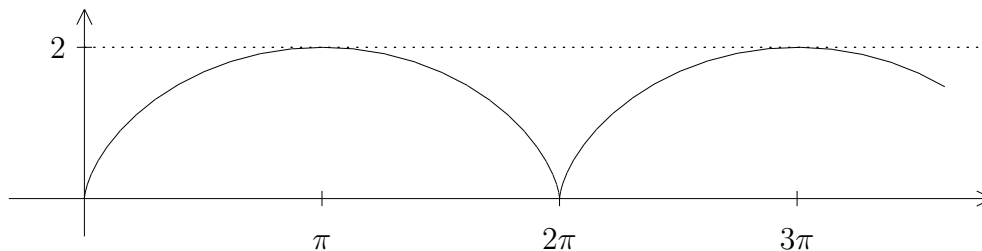
$$x(t) = t - \sin(\pi - t) = t - \sin t \text{ und } y(t) = 1 + \cos(\pi - t) = 1 - \cos(t).$$

Also beschreibt ein Punkt auf der Peripherie des Kreises die Kurve

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \text{ mit } \alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Dann ist $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$, und das wird genau dann Null, wenn $\cos(t) = 1$ ist, also bei $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, daß α an diesen Stellen nicht glatt ist. Bei den Punkten $(2k\pi, 0)$ treten Ecken auf.

Ansonsten ist α glatt. $y(t)$ nimmt seine Maxima $y = 2$ jeweils bei $t = (2k + 1)\pi$ an und bewegt sich sonst zwischen 0 und 2.



Definition:

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg. Dann definiert man die *Länge* von α durch

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Beispiele :

1. Bei der Verbindungsstrecke $\alpha(t) := (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$ von \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 ist $\alpha'(t) \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, also

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| dt = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

Das ist genau das, was man erwartet. Approximiert man einen beliebigen Integrationsweg durch Streckenzüge, so konvergieren die Längen dieser Streckenzüge gegen die Länge des Weges. Das motiviert nachträglich die gegebene Definition.

2. Bei der Kreislinie $\alpha(t) := (r \cos t, r \sin t)$ ist $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ und $\|\alpha'(t)\| = r$, also

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

3. Bei der Zykloide $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ist $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, also $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 - 2 \cos(t)}$. Nun ist

$$\cos t = \cos\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

also

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 - (2 - 4 \sin^2(\frac{t}{2}))} = 2 \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|.$$

Daher ergibt sich für einen Zykloidenbogen (von $t = 0$ bis $t = 2\pi$):

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} |\sin x(t)| x'(t) dt \quad (\text{mit } x(t) := \frac{t}{2}) \\ &= 4 \int_0^{\pi} |\sin x| dx \\ &= 4 \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, daß man als Ergebnis eine rationale Zahl erhält!

4. Sei $\alpha(t) := (a \cos t, b \sin t)$ die Ellipse mit den Halbachsen a und b , und $a > b$. Dann ist $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ und $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Also erhält man als Länge des Ellipsenbogens das Integral

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} \, dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} \, dt, \end{aligned}$$

mit $k := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Ein Integral dieses Typs nennt man ein *Elliptisches Integral*. Es ist nicht elementar lösbar, man muß es numerisch auswerten. Wie das geht, haben wir am Ende von §3 in Kapitel IV angegeben.

5. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $\alpha(t) := (t, f(t))$ eine Kurve, deren Spur der Graph von f ist. Es ist $\alpha'(t) = (1, f'(t))$, also

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

Damit ist

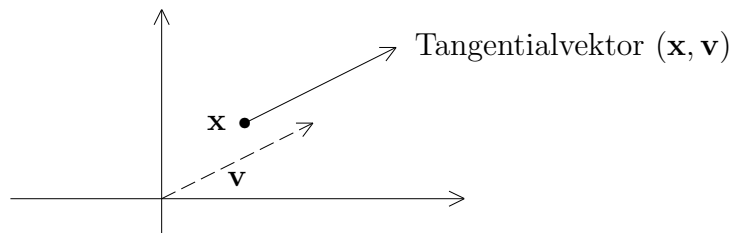
$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt.$$

Wir haben schon mehrfach von Tangentialvektoren gesprochen, wollen jetzt aber eine genauere Definition dafür geben:

Definition:

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ein *Tangentialvektor in \mathbf{x}* (oder kürzer: ein *Vektor in \mathbf{x}*) ist ein Paar (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , mit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. \mathbf{x} heißt dann Ortskomponente und \mathbf{v} Richtungskomponente.

Es handelt sich hierbei um den bei den Physikern so beliebten Begriff des „freien Vektors“. Dazu gehört ein Angriffspunkt, eine Richtung und eine Länge. Veranschaulicht wird der Tangentialvektor (\mathbf{x}, \mathbf{v}) durch einen Pfeil von \mathbf{x} nach $\mathbf{x} + \mathbf{v}$.



Statt (\mathbf{x}, \mathbf{v}) schreiben wir manchmal auch $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$.

Tangentialvektoren mit gleicher Ortskomponente kann man addieren und mit Skalaren multiplizieren:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\mathbf{x}, \mathbf{w}) &:= (\mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ \text{und} \quad \lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= (\mathbf{x}, \lambda \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Mit dieser Struktur bilden die Tangentialvektoren in \mathbf{x} einen n -dimensionalen Vektorraum, den *Tangentialraum* $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ des \mathbb{R}^n in \mathbf{x} .

Man kann auch andere Begriffe vom \mathbb{R}^n auf den Tangentialraum übertragen, z.B.

$$\begin{aligned} \text{das Skalarprodukt} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{w}) &:= \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}, \\ \text{die Norm} \quad \|\mathbf{x}, \mathbf{v}\| &:= \|\mathbf{v}\| \\ \text{und das Vektorprodukt} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \times (\mathbf{x}, \mathbf{w}) &:= (\mathbf{x}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Ein Tangentialvektor in \mathbf{x} ist nicht nur ein geometrisches Objekt, er tritt vielmehr auch in einer anderen Erscheinungsform auf, nämlich als Operator auf dem Raum der nahe \mathbf{x} beliebig oft differenzierbaren Funktionen:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f] := D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Das ist die Richtungsableitung von f im Punkte \mathbf{x} in Richtung des Vektors \mathbf{v} .

Als Operator besitzt ein Tangentialvektor die beiden folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[a \cdot f + b \cdot g] = a \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f] + b \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}}[g]$. (Linearität)
2. $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f \cdot g] = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}}[g] + g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]$. (Derivations-Eigenschaft)

Ist umgekehrt ein Tangentialvektor \mathbf{v}_x in Gestalt eines linearen Operators mit Derivations-eigenschaft gegeben, so kann man daraus den geometrischen Vektor rekonstruieren, denn offensichtlich gilt:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{v}_x[x_1], \dots, \mathbf{v}_x[x_n])).$$

Ist $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n , so ist

$$(\mathbf{e}_i)_x[f] = D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{die } i\text{-te partielle Ableitung von } f \text{ in } \mathbf{x}.$$

Deshalb bezeichnet man den Tangentialvektor $(\mathbf{e}_i)_x$ auch gerne mit dem Symbol $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$.

Ist (\mathbf{x}, \mathbf{v}) ein beliebiger Tangentialvektor und $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, so kann man schreiben: $\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \cdot \mathbf{e}_n$. Daraus folgt:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_x \right\} \text{ ist eine Basis von } T_x(\mathbb{R}^n).$$

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\mathfrak{F} : B \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ heißt ein (*tangentiales*) Vektorfeld über B , falls dadurch jedem $\mathbf{x} \in B$ ein Tangentialvektor $\mathfrak{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ zugeordnet wird.

Man kann auch schreiben:

$$\mathfrak{F} = (\text{id}_B, \mathbf{F}).$$

Auch hier wird \mathbf{x} die *Ortskomponente* und $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ die *Richtungskomponente* von $\mathfrak{F}(\mathbf{x})$ genannt.

\mathfrak{F} heißt stetig bzw. differenzierbar, wenn die Richtungskomponente $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ es ist. Natürlich ist dann auch $\mathfrak{F} : B \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ eine stetige bzw. differenzierbare Abbildung.

Bemerkung: Die Richtungskomponente \mathbf{F} eines Vektorfeldes $\mathfrak{F} = (\text{id}_B, \mathbf{F})$ ist das, was wir bisher als Vektorfeld bezeichnet haben. Wenn wir uns etwas an die neuen Bezeichnungen gewöhnt haben, werden wir meist die Ortskomponente wieder weglassen und nur mit der Richtungskomponente arbeiten.

Vektorfelder können addiert und mit stetigen oder differenzierbaren Funktionen multipliziert werden. Ist $\mathfrak{F}_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{F}_1(\mathbf{x}))$ und $\mathfrak{F}_2(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{F}_2(\mathbf{x}))$, so setzt man:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)(\mathbf{x}) &:= (\mathbf{x}, \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x})) \\ \text{und } (f \cdot \mathfrak{F}_1)(\mathbf{x}) &:= (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Man beachte: Dies ist keine Vektorraumstruktur, denn die Funktionen bilden keinen Körper.

Auch ein Vektorfeld \mathfrak{F} kommt in zweierlei Gestalt daher. Es ist nicht nur eine stetige oder differenzierbare Schar von geometrischen Tangentialvektoren, es wirkt auch als Operator auf C^∞ -Funktionen:

Ist f eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion, so definiert man eine neue Funktion $\mathfrak{F}[f]$ durch

$$\mathfrak{F}[f](\mathbf{x}) := \mathfrak{F}(\mathbf{x})[f] = (\mathbf{F}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}}[f].$$

Es gilt:

1. Ist \mathfrak{F} beliebig oft differenzierbar, so ist $\mathfrak{F}[f]$ für jede \mathcal{C}^∞ -Funktion wieder eine \mathcal{C}^∞ -Funktion.
2. Es ist $\mathfrak{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a \cdot \mathfrak{F}[f] + b \cdot \mathfrak{F}[g]$.
3. Es ist $\mathfrak{F}[f \cdot g] = f \cdot \mathfrak{F}[g] + g \cdot \mathfrak{F}[f]$.

Die Eigenschaften (2) und (3) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Tangentialvektoren. Zu (1) stelle man fest:

$$\mathfrak{F}[f](\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Offensichtlich steht auf der rechten Seite eine beliebig oft differenzierbare Funktion von \mathbf{x} .

Insbesondere wirkt das konstante Vektorfeld $\mathfrak{E}_i : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ wie die i -te partielle Ableitung und wird deshalb auch mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bezeichnet.

Basisdarstellung von Vektorfeldern

Ist \mathfrak{F} ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, so gibt es eindeutig bestimmte differenzierbare Funktionen F_1, \dots, F_n auf B , so daß gilt:

$$\mathfrak{F} = F_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + F_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

BEWEIS: Es sei $\mathfrak{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$, mit $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$. Dann ist $\mathfrak{F}(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{e}_1)_{\mathbf{x}} + \dots + F_n(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{e}_n)_{\mathbf{x}}$, und das ergibt die geforderte Gleichung. Da die Komponenten F_i eindeutig bestimmt sind, kann es auch nur diese eine Darstellung geben. \square

Als nächstes betrachten wir zum Tangentialraum in \mathbf{x} den Dualraum, den sogenannten

$$\text{Cotangentialraum} \quad T_{\mathbf{x}}^*(\mathbb{R}^n) := (T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n))^* = L_1(T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}) \quad \text{in } \mathbf{x}.$$

Seine Elemente sind die Linearformen auf dem Vektorraum $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel:

Sei $\mathbf{x} \in B$, $U = U(\mathbf{x}) \subset B$ eine offene Umgebung und f eine differenzierbare Funktion auf U . Dann wird die Linearform $(df)_{\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(df)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_{\mathbf{x}}) := \mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f] = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}.$$

Man nennt $(df)_{\mathbf{x}}$ das (*totale*) *Differential von f in \mathbf{x}* . Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Ableitung $Df(\mathbf{x})$, von der wir ja schon wissen, daß sie eine Linearform auf dem \mathbb{R}^n ist.

Spezielle differenzierbare Funktionen sind die Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n . Deren totale Differentiale $(dx_1)_\mathbf{x}, \dots, (dx_n)_\mathbf{x}$ liegen natürlich auch alle im Cotangentialraum $T_\mathbf{x}^*(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$(dx_i)_\mathbf{x}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla x_i(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v} = v_i$$

die Projektion auf die i -te Richtungskomponente, also speziell

$$(dx_i)_\mathbf{x}((\mathbf{e}_j)_\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt:

Die Standardbasis des Cotangentialraumes

Die Differentiale $(dx_1)_\mathbf{x}, \dots, (dx_n)_\mathbf{x}$ bilden die zur Standardbasis $\{(\mathbf{e}_1)_\mathbf{x}, \dots, (\mathbf{e}_n)_\mathbf{x}\}$ von $T_\mathbf{x}(\mathbb{R}^n)$ duale Basis des Cotangentialraumes $T_\mathbf{x}^(\mathbb{R}^n)$.*

Da $\dim T_\mathbf{x}(\mathbb{R}^n) = \dim T_\mathbf{x}^*(\mathbb{R}^n) = n$ ist, folgt der Satz aus der eben bewiesenen Relation $(dx_i)_\mathbf{x}((\mathbf{e}_j)_\mathbf{x}) = \delta_{ij}$.

Ein beliebiges Element $\lambda \in T_\mathbf{x}^*(\mathbb{R}^n)$ hat also die Gestalt

$$\lambda = \lambda_1 \cdot (dx_1)_\mathbf{x} + \dots + \lambda_n \cdot (dx_n)_\mathbf{x}.$$

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Differentialform vom Grad 1 auf B* ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\omega : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die im zweiten Argument linear ist.

Durch $\omega_\mathbf{x}(\mathbf{v}_\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ definiert eine Differentialform ω auf B in jedem Punkt $\mathbf{x} \in B$ ein Element des Cotangentialraumes. Wir nennen die Elemente von $T_\mathbf{x}^*(\mathbb{R}^n)$ daher auch *Differentialformen vom Grad 1 in \mathbf{x}* .

Auch Differentialformen können addiert und mit (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= \omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \\ (f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= f(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, so wird die Differentialform $df : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := (df)_\mathbf{x}(\mathbf{v}_\mathbf{x}).$$

Wir müssen allerdings noch zeigen, daß df beliebig oft differenzierbar ist. Das ist aber leicht, denn es gilt ja:

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}.$$

Die rechte Seite ist offensichtlich beliebig oft differenzierbar in \mathbf{x} und \mathbf{v} .³

Offensichtlich gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Sei nun $\mathfrak{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ ein differenzierbares Vektorfeld auf B und $\omega : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Differentialform vom Grad 1. Dann wird durch

$$\omega(\mathfrak{F}) := \omega \circ \mathfrak{F} : B \rightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion $\omega(\mathfrak{F})$ auf B erklärt. Speziell ist $df(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}[f]$.

BEWEIS: $df(\mathfrak{F})(\mathbf{x}) = df(\mathfrak{F}(\mathbf{x})) = df(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\mathbf{x})_{\mathbf{x}}[f] = \mathfrak{F}[f](\mathbf{x})$. □

Insbesondere folgt: $dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}[x_i] = \delta_{ij}$.

Basisdarstellung von Differentialformen vom Grad 1

Sei ω eine Differentialform auf B . Dann gibt es eindeutig bestimmte beliebig oft differenzierbare Funktionen $\omega_1, \dots, \omega_n$ auf B , so daß gilt:

$$\omega = \omega_1 \cdot dx_1 + \cdots + \omega_n \cdot dx_n.$$

BEWEIS: Für jeden Punkt $\mathbf{x} \in B$ bilden die Linearformen $(dx_i)_{\mathbf{x}}$ eine Basis des Cotangentialraumes $T_{\mathbf{x}}^*(\mathbb{R}^n)$. Also sind die Koeffizienten ω_i eindeutig bestimmt. Es muß noch deren Differenzierbarkeit nachgewiesen werden. Aber die Funktion $g_i(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ ist sicher beliebig oft differenzierbar, und es gilt:

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \omega_j(\mathbf{x}) \cdot (dx_j)_{\mathbf{x}}((\mathbf{e}_i)_{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^n \omega_j(\mathbf{x}) \delta_{ij} = \omega_i(\mathbf{x}).$$

□

Folgerung

Ist $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$ eine Differentialform und $\mathfrak{F} = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ein differenzierbares Vektorfeld, so ist

$$\omega(\mathfrak{F}) = \omega_1 \cdot F_1 + \cdots + \omega_n \cdot F_n.$$

Wir haben schon gesehen, daß eine große Ähnlichkeit zwischen Vektorfeldern und Differentialformen vom Grad 1 besteht. Das wollen wir noch etwas weiter formalisieren:

³Hätte man f nur als $1 \times$ differenzierbar vorausgesetzt, so wäre ∇f und damit df überhaupt nicht mehr differenzierbar!

Die Differentialform zu einem Vektorfeld

Sei $\mathfrak{A} = (\text{id}_B, \mathbf{A})$ ein beliebig oft differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine Differentialform $\omega_{\mathbf{A}}$ auf B , so daß für jedes andere Vektorfeld \mathfrak{F} gilt:

$$\omega_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{A} \bullet \mathfrak{F}.$$

BEWEIS: Wir setzen $\omega_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \mathbf{A}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$. Das ist offensichtlich eine Differentialform, und es gilt:

$$\omega_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F})(\mathbf{x}) = \omega_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathfrak{A} \bullet \mathfrak{F})(\mathbf{x}).$$

Die Eindeutigkeit ist auch klar, denn die Bedingungsgleichung legt fest, daß die Koeffizienten von $\omega_{\mathbf{A}}$ genau die Richtungskomponenten A_i des Vektorfeldes \mathfrak{A} sind. \square

Ist also $\mathfrak{A} = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, so ist $\omega_{\mathbf{A}} = A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n$.

Bemerkungen:

1. Faßt man die n Differentiale dx_i formal zu einem Vektor zusammen,

$$ds := (dx_1, \dots, dx_n),$$

so kann man – ebenfalls rein formal – schreiben: $\omega_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \bullet ds$.

2. Ist f eine differenzierbare Funktion, so kann man dazu das Gradientenfeld ∇f betrachten. Dann ist $\omega_{\nabla f} = df$.
3. Ein physikalisches Feld besteht aus drei oder (relativistisch) vier Komponenten. Ein Experimentator wird im allgemeinen nur diese Komponenten messen. Wie soll man nun unterscheiden, ob es sich um ein Vektorfeld

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{x}), A_4(\mathbf{x}))$$

oder eine Differentialform

$$\omega_{\mathbf{A}} = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4$$

handelt? Ein Unterschied wird erst dann sichtbar, wenn man die Komponenten in verschiedenen Koordinatensystemen mißt und dabei beobachtet, wie sie sich transformieren. Felder, die sich durch Vektorfelder beschreiben lassen, nennt man *kontravariant*, während Felder, die sich durch Differentialformen beschreiben lassen, als *kovariante Felder* bezeichnet werden. Das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit ist z.B. kontravariant, Kraftfelder oder elektrische Felder sind dagegen von ihrem Wesen her kovariant.

Definition:

Sei $\alpha : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg. Ein *Vektorfeld längs α* ist eine differenzierbare Abbildung

$$\mathfrak{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{der Gestalt } \mathfrak{F}(t) = (\alpha(t), \mathbf{F}(t)).$$

Wieder nennt man $\alpha(t)$ die *Ortskomponente* und $\mathbf{F}(t)$ die *Richtungskomponente* von $\mathfrak{F}(t)$.

Beispiele :

1. Ist α ein mindestens zweimal differenzierbarer Weg, so wird durch

$$\dot{\alpha}(t) := (\alpha(t), \alpha'(t))$$

ein Vektorfeld längs α definiert, das *Tangentenvektorfeld* von α .

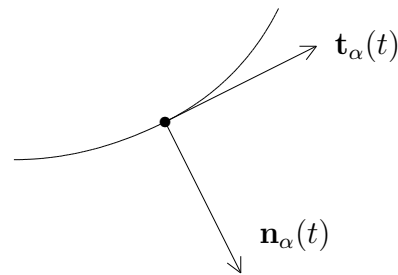
Ist α zusätzlich glatt, so nennt man

$$\mathbf{t}_\alpha(t) := (\alpha(t), \mathbf{t}_\alpha(t)) \quad \text{mit } \mathbf{t}_\alpha(t) := \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \alpha'(t)$$

das *Tangenteneinheitsvektorfeld* von α .

2. Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein glatter Weg in der Ebene. Dann nennt man

$$\mathbf{n}_\alpha(t) := \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot (\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))$$



den (*äußeren*) *Normaleneinheitsvektor* an α in t .

$\mathbf{n}_\alpha(t) := (\alpha(t), \mathbf{n}_\alpha(t))$ ist dann ein Vektorfeld längs α , das sogenannte *Normaleneinheitsvektorfeld*.

Ist ein gewöhnliches Vektorfeld \mathfrak{F} auf einer Umgebung von $|\alpha|$ gegeben, so wird durch $t \mapsto (\alpha(t), \mathbf{F}(\alpha(t)))$ ein Vektorfeld längs α definiert. Umgekehrt kann man zu einem Vektorfeld \mathfrak{W} längs α ein in der Nähe von $|\alpha|$ definiertes Vektorfeld \mathbf{F} konstruieren, so daß $\mathbf{W}(t) = \mathbf{F}(\alpha(t))$ für $t \in I$ ist. Wir können diese Konstruktion aber hier nicht durchführen.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : I := [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Weg. Ist \mathfrak{F} ein stetiges Vektorfeld längs α und ω eine Differentialform auf B , so ist $\omega(\mathfrak{F})$ mit

$$\omega(\mathfrak{F})(t) := \omega(\alpha(t), \mathbf{F}(t))$$

eine stetige (und damit insbesondere integrierbare) Funktion auf I .

Definition:

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Weg und ω eine Differentialform auf B . Dann definiert man das Integral von ω über α durch

$$\int_{\alpha} \omega := \int_a^b \omega(\dot{\alpha}(t)) dt.$$

Ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$, für ein differenzierbares Vektorfeld $\mathfrak{F} = (\text{id}_B, \mathbf{F})$, so ist

$$\begin{aligned} \omega(\dot{\alpha}(t)) &= \omega(\alpha(t), \alpha'(t)) \\ &= (F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n)(\alpha(t), \alpha'(t)) \\ &= F_1(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) + \cdots + F_n(\alpha(t)) \cdot \alpha'_n(t) \\ &= \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t), \end{aligned}$$

also

$$\int_{\alpha} \omega_{\mathbf{F}} = \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet ds = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt.$$

In der älteren Literatur nennt man so ein Integral auch ein *Kurvenintegral 2. Art*, im Gegensatz zu dem bei der Bogenlänge auftretenden *Kurvenintegral 1. Art*. Das Kurvenintegral 1. Art ist „orientierungsunabhängig“, d.h., sein Wert ist unabhängig von der Durchlaufungsrichtung des Weges. Ganz anders liegen die Dinge beim Kurvenintegral 2. Art:

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg, so wird der umgekehrt durchlaufene Weg $-\alpha$ gegeben durch

$$(-\alpha)(t) := \alpha(a + b - t), \quad \text{für } a \leq t \leq b.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt:

Orientierungsabhängigkeit des Kurvenintegrals (2. Art)

$$\text{Es ist } \int_{-\alpha} \omega = - \int_{\alpha} \omega.$$

BEWEIS: Wir können annehmen, daß $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha} \omega &= \int_a^b \mathbf{F}((-\alpha)(t)) \bullet (-\alpha)'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(a + b - t) \bullet ((-1) \cdot \alpha'(a + b - t)) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \bullet \alpha'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (\text{mit } \varphi(t) := a + b - t) \\ &= \int_b^a \mathbf{F}(s) \bullet \alpha'(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b \mathbf{F}(s) \bullet \alpha'(s) ds \\
&= - \int_{\alpha} \omega.
\end{aligned}$$

□

Eigenschaften des Kurvenintegrals

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg.

$$1. \int_{\alpha} (c_1 \cdot \omega_1 + c_2 \cdot \omega_2) = c_1 \cdot \int_{\alpha} \omega_1 + c_2 \cdot \int_{\alpha} \omega_2,$$

für Differentialformen ω_1, ω_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation (also differenzierbar und bijektiv) und $\varphi'(x) > 0$ für alle $x \in [c, d]$, so ist

$$\int_{\alpha \circ \varphi} \omega = \int_{\alpha} \omega.$$

3. Ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$, so gilt die folgende „Standard-Abschätzung“:

$$\left| \int_{\alpha} \omega \right| \leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha).$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2): Es ist $(\alpha \circ \varphi)^{\bullet}(t) = (\alpha(\varphi(t)), \alpha'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) = \varphi'(t) \cdot \dot{\alpha}(\varphi(t))$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha \circ \varphi} \omega &= \int_c^d \omega((\alpha \circ \varphi)^{\bullet}(t)) dt \\
&= \int_c^d \omega(\varphi'(t) \cdot \dot{\alpha}(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt \\
&= \int_a^b \omega(\dot{\alpha}(s)) ds \\
&= \int_{\alpha} \omega.
\end{aligned}$$

4) Zur Abschätzung benötigt man die Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\alpha} \omega \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \right| \\
&\leq \int_a^b |\mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)| dt \\
&\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\alpha(t))\| \cdot \|\alpha'(t)\| dt \\
&\leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt
\end{aligned}$$

$$= \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha).$$

□

Beispiele :

1. Wir haben oben gesehen: Ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}} = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n$, so ist

$$\omega(\dot{\alpha}(t)) = \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$$

die orthogonale Projektion von $\mathbf{F}(\alpha(t))$ auf die Tangente des Weges α . Beschreibt ω bzw. das zugehörige Vektorfeld $\mathfrak{F} = (\text{id}, \mathbf{F})$ ein Kraftfeld, so wird die Komponente des Kraftfeldes in Richtung des Weges ermittelt, und das Integral liefert die Gesamtarbeit, die bei einer Bewegung längs α verrichtet werden muß.

Sei etwa $n = 2$, $\omega := cy \, dx$, mit einer Konstanten $c > 0$, und $\alpha(t) := (\cos t, 1 + \sin t)$, für $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dann ist $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ und

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega &= \int_0^{2\pi} \omega(\dot{\alpha}(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (c \cdot \alpha_2(t) \alpha_1'(t) + 0 \cdot \alpha_2'(t)) \, dt \\ &= -c \cdot \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t) \, dt \\ &= -c \cdot \left(-\cos t + \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -c\pi. \end{aligned}$$

Dabei ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$, mit $F(x, y) = (cy, 0)$. Wir werden später sehen, daß dieses Kurvenintegral die „Zirkulation“ des Feldes um den Punkt $(0, 1)$ mißt.

2. Sei $n = 3$, $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) und

$$\omega := \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad \text{für } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Das Vektorfeld ist uns schon im ersten Paragraphen begegnet, als eines, das kein Gradientenfeld ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega &= \int_0^{2\pi} \omega(\dot{\alpha}(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \bullet (-\sin t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Setzen wir dagegen $\beta(t) := (2 + \cos t, \sin t, 0)$, so ist

$$\int_{\beta} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{5 + 4 \cos t}, \frac{2 + \cos t}{5 + 4 \cos t}, 0 \right) \bullet (-\sin t, \cos t, 0) \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 4 \cos t} dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{5 + 4 \cos t} \right] dt \\
&= \pi - \frac{3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}.
\end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{1}{5 + 4 \cos t}$ ist auf $[0, 2\pi]$ positiv und symmetrisch zur Geraden $t = \pi$. Daher gilt (mit der Substitution $\varphi(x) = 2 \arctan(x)$):

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} \\
&= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{5 + 4 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx \\
&= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{4}{9} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + (x/3)^2} \\
&= \frac{12}{9} \cdot (\arctan \frac{x}{3}) \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{12}{9} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \pi.
\end{aligned}$$

Also ist $\int_{\beta} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0$.

Daß wir hier Null als Ergebnis bekommen, ist kein Zufall, wie wir gleich sehen werden.

Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine offene zusammenhängende Menge), und ω eine Differentialform auf G . Dann sind die folgenden Aussagen über ω äquivalent:

1. ω ist ein Differential, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion f auf G , so daß $\omega = df$ ist.
2. Sind \mathbf{p} und \mathbf{q} Punkte in G , so hat das Kurvenintegral $\int_{\alpha} \omega$ für alle Integrationswege $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ mit $\alpha(a) = \mathbf{p}$ und $\alpha(b) = \mathbf{q}$ den gleichen Wert. (Das Integral ist wegunabhängig).
3. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein **geschlossener** Integrationsweg, so ist

$$\int_{\alpha} \omega = 0.$$

Insbesondere ist

$$\int_{\alpha} df = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Vor dem Beweis müssen wir noch eine neue Notation einführen:

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ Wege in G , so können wir formal die Summe $\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ bilden. Ist ω eine Differentialform auf G , so setzt man

$$\int_{\alpha} \omega := \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_j} \omega.$$

Wenn jeweils der Endpunkt von α_j mit dem Anfangspunkt von α_{j+1} übereinstimmt, so hat α anschaulich die Bedeutung, daß die Wege α_j nacheinander durchlaufen werden. Für die Bildung des Integrals ist diese Deutung aber nicht notwendig. Wichtig ist: Taucht ein Weg zweimal auf, mit entgegengesetzter Durchlaufrichtung, so heben sich die entsprechenden Integrale weg. Man bezeichnet solche formalen Summen von Wegen als *Ketten*.

BEWEIS:

1 \implies 2: Ist $\omega = df$, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega &= \int_a^b \omega(\dot{\alpha}(t)) \\ &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \alpha)'(t) dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\ &= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

und das hängt nicht mehr von α ab.

Den Zusatz haben wir damit auch gleich bewiesen!

2 \implies 3: Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg und $\mathbf{p} := \alpha(a) = \alpha(b)$, so haben α und $-\alpha$ den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Also ist

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{-\alpha} \omega = - \int_{\alpha} \omega,$$

und daher $\int_{\alpha} \omega = 0$.

3 \implies 1: Sei $\mathbf{p} \in G$ ein fest gewählter Punkt. Ist $\mathbf{x} \in G$, so gibt es einen stetigen Weg α , der \mathbf{p} innerhalb von G mit \mathbf{x} verbindet. Man kann diesen Weg sogar als Integrationsweg (also stückweise stetig differenzierbar) wählen. (z.B. kann man die Spur des ursprünglichen Weges durch endlich viele Kugeln überdecken, die alle noch ganz in G liegen, und dann kann man innerhalb jeder Kugel den Weg durch eine Strecke „abkürzen“)

Wir setzen $f(\mathbf{x}) := \int_{\alpha} \omega$.

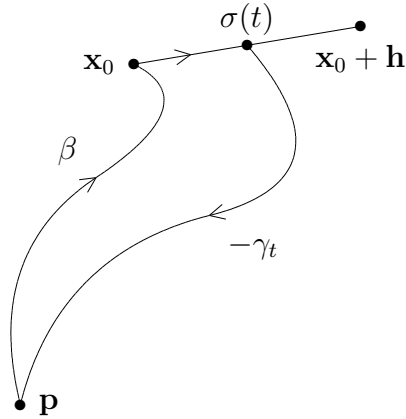
Ist β ein weiterer Weg von \mathbf{p} nach \mathbf{x} , so stellt die Kette $C := \alpha - \beta$ einen geschlossenen Integrationsweg dar, der bei \mathbf{p} beginnt und endet. Nach Voraussetzung ist

$$\int_C \omega = 0, \text{ also } \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega.$$

Damit ist die Funktion f auf G „wohldefiniert“, d.h. unabhängig vom benutzten Weg α . Es bleibt zu zeigen, daß $df = \omega$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ beliebig und \mathbf{h} irgend ein Richtungsvektor. Weiter sei $\sigma(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}$ (für $s \in [0, 1]$) die Verbindungsstrecke von \mathbf{x}_0 nach $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, $\sigma_t := \sigma|_{[0,t]}$ die Verbindungsstrecke von \mathbf{x}_0 und $\sigma(t)$, β ein Weg von \mathbf{p} nach \mathbf{x}_0 und γ_t ein Weg von \mathbf{p} nach $\sigma(t)$. Dann ist die Kette $\beta + \sigma_t - \gamma_t$ für jedes $t \in [0, 1]$ geschlossen, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\gamma_t} \omega - \int_{\beta} \omega \\ &= \int_{\sigma_t} \omega \\ &= \int_0^t \omega(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}, \mathbf{h}) ds. \end{aligned}$$



Setzen wir $g(s) := \omega(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}, \mathbf{h})$, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s) ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $c = c(t) \in [0, t]$, so daß gilt:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = \omega(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{h}, \mathbf{h}) \cdot t,$$

also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \omega(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h}) = \omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Damit existieren in \mathbf{x}_0 alle Richtungsableitungen von f . Setzt man speziell $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_i), \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Aber das bedeutet, daß $df = \omega$ ist. □

Definition:

Ist $\nabla f = \mathbf{F}$, so nennt man f ein *Potential* für \mathbf{F} .

Ein Vektorfeld \mathbf{F} besitzt also genau dann ein Potential, wenn die zugehörige Differentialform $\omega_{\mathbf{F}}$ ein totales Differential ist.

Jetzt können wir das Beispiel

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

aus §1 interpretieren. Auf den Mengen $U_+ = \{x > 0\}$ und $U_- = \{x < 0\}$ besitzt \mathbf{F} jeweils ein Potential, und deshalb muß dort das Integral über $\omega_{\mathbf{F}}$ und jeden geschlossenen Weg verschwinden.

Besäße \mathbf{F} sogar auf seinem ganzen Definitionsbereich ein Potential, so müßte auch dort jedes Integral über einen geschlossenen Weg verschwinden. Wir haben aber bereits einen Weg gefunden, auf den das nicht zutrifft. Also kann \mathbf{F} kein globales Gradientenfeld sein. Das hatten wir schon auf ziemlich mühsame Weise festgestellt, hier folgt es noch einmal aus dem Hauptsatz über Kurvenintegrale.

Zum Schluß wollen wir eine physikalische Anwendung betrachten:

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in einem Kraftfeld entlang eines Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Sei F_i die Kraft, die auf das Teilchen in x_i -Richtung wirkt. Bei einer infinitesimalen Verschiebung um $\mathbf{v} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ muß dann die Arbeit $F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3$ geleistet werden. Die Wirkung des Kraftfeldes wird also durch die Differentialform $\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ beschrieben, und $\int_{\alpha} \omega$ ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn man das Teilchen entlang α bewegt.

Das Newtonsche Gesetz der Bewegung besagt:

$$F_i(\alpha(t)) = m \cdot \alpha_i''(t), \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega &= \int_a^b m \cdot \alpha''(t) \bullet \alpha'(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} [\alpha'(t) \bullet \alpha'(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \|\alpha'(t)\|^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{m}{2} \cdot [\|\alpha'(b)\|^2 - \|\alpha'(a)\|^2]. \end{aligned}$$

$T(t) := \frac{m}{2} \cdot \|\alpha'(t)\|^2$ ist die *kinetische Energie* des Teilchens zur Zeit t . Die geleistete Arbeit ist also gerade die Änderung der kinetischen Energie.

Man nennt das Kraftfeld ω *konservativ*, wenn es ein Potential besitzt, wenn es also eine Funktion u mit $\omega = -dU$ gibt. Den Wert $U(\alpha(t))$ nennt man die *potentielle Energie* des Teilchens zur Zeit t .

In diesem Fall ist

$$\int_{\alpha} \omega = -[U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))],$$

also $T(a) + U(\alpha(a)) = T(b) + U(\alpha(b))$. Das bedeutet, daß die *Gesamtenergie* $E(\alpha(t)) := U(\alpha(t)) + T(t)$ bei der Bewegung des Teilchens konstant bleibt. Das ist der Satz von der Erhaltung der Energie!

§3 Maß und Integral

In diesem Paragraphen wird der Begriff der Borelmenge, das Lebesguesche Maß und das Lebesguesche Integral auf dem \mathbb{R}^n eingeführt.

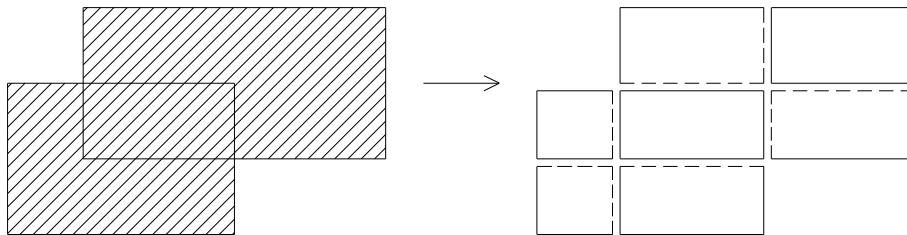
Unter einem *Quader* im \mathbb{R}^n versteht man eine Menge der Gestalt

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n,$$

wobei die I_ν endliche Intervalle sind, die offen, halboffen oder abgeschlossen sein können. Wie üblich bezeichnen wir die Länge eines Intervalls I mit $l(I)$. Dann heißt

$$v_n(Q) := l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_n) \text{ das } (n\text{-dimensionale}) \text{ Volumen von } Q.$$

Unter einer *Quadersumme* verstehen wir eine endliche Vereinigung von Quadern. Jede Quadersumme kann in eine disjunkte Vereinigung von Teilquadern zerlegt werden.



Ist eine Quadersumme S in dieser Art in Teilquader zerlegt, so definiert man das Volumen $v_n(S)$ als Summe der Volumina aller Teilquader. Da man von zwei verschiedenen Zerlegungen stets zu einer „gemeinsamen Verfeinerung“ übergehen kann, spielt die Wahl der Zerlegung keine Rolle, und es ist auch egal, welchem Teilquader jeweils eine Trennwand zugeordnet wird.

Dieser sehr simple Volumenbegriff soll nun erweitert werden. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

Definition:

Sei X eine beliebige Grundmenge. Eine σ -Algebra in X ist ein System \mathcal{M} von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$.
2. Ist $A \in \mathcal{M}$, so ist auch das Komplement $X \setminus A \in \mathcal{M}$.
3. Ist $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in \mathcal{M} , so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Indem man bei (1) und (3) jeweils zu den Komplementen übergeht, erhält man:

Folgerung

Ist \mathcal{M} eine σ -Algebra in X , so gilt:

4. $X \in \mathcal{M}$.

5. Liegen die A_i in \mathcal{M} , so liegt auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ in \mathcal{M} .

Beispiele :

1. Die Potenzmenge $P(X)$ ist eine σ -Algebra in X .
2. Das System $\mathcal{M} := \{\emptyset, X\}$ bildet eine σ -Algebra in X .
3. Sei $\mathcal{A} \subset P(X)$ ein **beliebiges** Mengensystem. Dann ist der Durchschnitt $E(\mathcal{A})$ aller σ -Algebren \mathcal{M} mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset P(X)$ wieder eine σ -Algebra, und zwar die kleinste in X , die \mathcal{A} enthält (der Beweis erfordert ein bißchen mengentheoretisches Herumrechnen). Man nennt $E(\mathcal{A})$ *die von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra*.

Ist $X = \mathbb{R}^n$ und \mathcal{A} das System der Quadersummen, so nennt man $\mathcal{B}_n := E(\mathcal{A})$ die *Borel-Algebra* des \mathbb{R}^n , und ihre Elemente *Borelmengen*. Da jede offene Menge eine abzählbare Vereinigung von Quadern ist, enthält \mathcal{B}_n sämtliche offenen und abgeschlossenen Mengen des \mathbb{R}^n , und natürlich auch Differenzen solcher Mengen. Es ist sehr schwer, eine Teilmenge des \mathbb{R}^n zu konstruieren, die keine Borelmenge ist. Trotzdem gibt es sehr viele davon.

Bei der Konstruktion der Borel-Algebra kann man übrigens statt von Quadersummen auch einfach von Quadern ausgehen.

Definition:

Sei M eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann nennt man

$$\mu_n^*(M) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) \mid \text{die } Q_i \text{ sind Quader oder leer, mit } M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\}$$

das *äußere Maß* von M im \mathbb{R}^n .

Bemerkungen :

1. Da der \mathbb{R}^n Vereinigung von Quadern ist, besitzt jede Teilmenge des \mathbb{R}^n ein äußeres Maß. Offensichtlich ist $\mu_n^*(\mathbb{R}^n) = \infty$ und $\mu_n^*(\emptyset) = 0$. Bei einer beliebigen Menge kann man zunächst nur sagen, daß $0 \leq \mu_n^*(M) \leq \infty$ ist.
2. Es sind auch Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ zugelassen, bei denen eins oder mehrere der Intervalle I_λ nur aus einem Punkt bestehen. Dann ist natürlich $v_n(Q) = 0$.

3. Ist M beschränkt, so liegt M bereits in einem einzigen Quader Q . Deshalb ist in diesem Fall $\mu_n^*(M) < \infty$.

Eigenschaften des äußeren Maßes

1. Ist $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\mu_n^*(M) \leq \mu_n^*(N)$.
2. Es ist stets $\mu_n^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n^*(M_i)$.
3. Das äußere Maß ist translationsinvariant, d.h. es ist

$$\mu_n^*(\mathbf{x} + M) = \mu_n^*(M)$$

für jede Menge M und jeden Vektor \mathbf{x} .

Die BEWEISE sind alle sehr leicht.

Definition:

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *Nullmenge* (im \mathbb{R}^n), falls $\mu_n^*(M) = 0$ ist.

M ist also genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern Q_i gibt, so daß gilt:

1. $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon$.

Eine Nullmenge dieser Art nennt man auch eine Lebesgue-Nullmenge. Kommt man sogar stets mit endlich vielen Quadern aus, so spricht man von einer Jordan-Nullmenge. Das ist ein Begriff, der in die Riemannsche Integrationstheorie gehört.

Beispiele :

1. Jede 1-punktige Menge ist eine Nullmenge, denn sie ist selbst ein entarteter Quader vom Volumen 0.
2. $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^n .

BEWEIS: Man kann H mit Quadern

$$Q_i := [-i, i] \times \dots \times [-i, i] \times \{0\}$$

überdecken, die alle das Volumen 0 haben. □

3. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

BEWEIS: Sei (M_ν) ein System von Nullmengen, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu den Mengen M_ν gibt es jeweils Folgen von Quadern $Q_{\nu,i}$ mit

$$M_\nu \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{\nu,i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_{\nu,i}) < \varepsilon \cdot 2^{-\nu}.$$

Dann ist $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \subset \bigcup_{\nu,i} Q_{\nu,i}$ und $\sum_{\nu,i} v_n(Q_{\nu,i}) < \varepsilon \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = \varepsilon$. \square

Es folgt z.B.: Die Vereinigung aller achsenparallelen Hyperebenen, die einen Punkt mit rationalen Koordinaten enthalten, bildet eine Nullmenge im \mathbb{R}^n . Nullmengen sind also nicht so „klein“, wie man erst vermuten würde.

4. Ist N eine Nullmenge und $M \subset N$, so ist auch M eine Nullmenge.
5. Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann ist auch $N \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+m} .

BEWEIS: Sei $k \in \mathbb{N}$ fest und $Q_k'' := [-k, k]^m \subset \mathbb{R}^m$.
Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es Quader $Q_1', Q_2', \dots \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i' \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i') < \frac{\varepsilon}{(2k)^m}.$$

Dann ist

$$N \times Q_k'' \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i' \times Q_k'', \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_{n+m}(Q_i' \times Q_k'') < \varepsilon.$$

Also ist $N \times Q_k''$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+m} , und damit auch $N \times \mathbb{R}^m = \bigcup_{k=1}^{\infty} N \times Q_k''$. \square

Definition:

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *meßbar (im Sinne von Lebesgue)*, falls es eine Borelmenge B und eine Nullmenge N gibt, so daß gilt:

$$M = B \cup N.$$

Die Zahl $\mu_n(M) := \mu_n^*(B)$ nennt man das (*n-dimensionale Lebesgue-)*Maß der Menge M .

Offensichtlich ist jede Borelmenge und jede Nullmenge meßbar.

Ist $M = B \cup N$ mit einer Borelmenge B und einer Nullmenge N , so ist $B \subset M$ und $\mu_n^*(N) = 0$, also

$$\mu_n^*(B) \leq \mu_n^*(M) = \mu_n^*(B \cup N) \leq \mu_n^*(B) + \mu_n^*(N) = \mu_n^*(B),$$

und damit $\mu_n^*(B) = \mu_n^*(M)$. Das zeigt, daß die Definition des Lebesgue-Maßes unabhängig von der Zerlegung $M = B \cup N$ ist. Insbesondere ist $\mu_n(M) = 0$ für jede Nullmenge des \mathbb{R}^n . Man beachte aber, daß sich Maß und Meßbarkeit immer auf den umgebenden Raum beziehen!

Das System \mathcal{M} der meßbaren Mengen bildet eine σ -Algebra

BEWEIS: 1) Offensichtlich liegt die leere Menge in \mathcal{M} .

2) Sei $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von meßbaren Mengen, $M_i = B_i \cup N_i$ jeweils die Zerlegung in Borel- und Nullmenge. Dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \right)$$

wieder eine meßbare Menge.

3) Sei $M = B \cup N$ meßbar. Wir wollen zeigen, daß dann auch

$$M' := \mathbb{R}^n \setminus M = (\mathbb{R}^n \setminus B) \cap (\mathbb{R}^n \setminus N) =: B' \cap N'$$

meßbar ist. Offensichtlich ist B' eine Borelmenge. Wenn wir zeigen können, daß $N' = C \cup L$ mit einer Borelmenge C und einer Nullmenge L ist, dann ist $M' = B' \cap (C \cup L) = (B' \cap C) \cup (B' \cap L)$ Vereinigung einer Borel- und einer Nullmenge, und damit in der Tat meßbar.

Behauptung: Ist N eine Nullmenge, so ist $N' = C \cup L$, mit einer Borelmenge C und einer Nullmenge L .

Beweis dazu: Da N eine Nullmenge ist, gibt es Borelmengen P_i (z.B. abzählbare Vereinigungen von Quadern) mit $N \subset P_i$ und $\mu_n^*(P_i) < \frac{1}{i}$. Dann sind auch die Komplemente $B_i := P_i^c$ Borelmengen.

Weiter ist $N' \setminus B_i \subset \mathbb{R}^n \setminus B_i$, also

$$\mu_n^*(N' \setminus B_i) \leq \mu_n^*(\mathbb{R}^n \setminus B_i) = \mu_n^*(P_i) < \frac{1}{i}.$$

Wegen $N \subset P_i$ ist $B_i = P_i^c \subset N'$. Das bedeutet für die Borelmenge

$$C := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i :$$

Jede der Mengen B_j liegt in C , und C liegt in N' . Wir setzen $L := N' \setminus C$. Dann ist $N' = C \cup L$, und wir müssen nur noch zeigen, daß L eine Nullmenge ist.

Wegen $B_j \subset C \subset N'$ ist $L = N' \setminus C \subset N' \setminus B_j$, also

$$\mu_n^*(L) \leq \mu_n^*(N' \setminus B_j) < \frac{1}{j} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Da die linke Seite nicht von j abhängt, muß $\mu_n^*(L) = 0$ sein. Damit ist alles gezeigt. \square

Bemerkung: In der Literatur werden meßbare Mengen anders definiert. Man nennt dann eine Menge M meßbar, wenn für jede beliebige Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu_n^*(Z) = \mu_n^*(Z \cap M) + \mu_n^*(Z \setminus M).$$

Als Maß von M wird das äußere Maß genommen. Mit dieser recht abstrakten Begriffsbildung kann man zeigen:

1. Borelmengen und Nullmengen sind meßbar.

2. Die meßbaren Mengen bilden eine σ -Algebra.
3. Zu jeder meßbaren Menge M gibt es Borelmengen F und G mit $F \subset M \subset G$ und $\mu_n(G \setminus M) = \mu_n(M \setminus F) = 0$.

Jetzt ist klar, daß dieser Meßbarkeitsbegriff mit unserem übereinstimmt. Wenn wir also im folgenden Beweise weglassen, so kann man diese problemlos in der Literatur nachschlagen. Ein bißchen suchen muß man allerdings schon, denn es gibt noch viele andere Zugänge zum Lebesgue-Integral.

σ -Additivität des Lebesgue-Maßes

Ist $(M_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ein abzählbares System von paarweise disjunkten meßbaren Mengen, so ist

$$\mu_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(M_j).$$

Auf den Beweis verzichten wir hier. Ein Spezialfall kann wie folgt formuliert werden:

Sind M und N meßbar und disjunkt, so ist auch $M \cup N$ meßbar und

$$\mu_n(M \cup N) = \mu_n(M) + \mu_n(N).$$

Wir kommen nun zum Integralbegriff.

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $c \in \mathbb{R}$, so setzt man

$$f^{-1}(c) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = c\}.$$

Diese Menge heißt das *Urbild von c unter f* , oder auch die *Faser von f über c* .⁴

Definition:

Unter einer *verallgemeinerten Treppenfunktion* auf dem \mathbb{R}^n verstehen wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. f nimmt nur endlich viele Werte an.
2. Ist $c \neq 0$, so ist $f^{-1}(c)$ meßbar und von endlichem Maß.

Es gibt also endlich viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen $M_1, \dots, M_k \subset \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen c_1, \dots, c_k , so daß $f = c_1 \cdot \chi_{M_1} + \dots + c_k \cdot \chi_{M_k}$ ist. Handelt es sich bei den Mengen sogar um Quader, so spricht man von einer (gewöhnlichen) Treppenfunktion. Im Falle $n = 1$ erhält man dann im wesentlichen die schon bekannten Treppenfunktionen.

⁴Hier kann es zu Mißverständnissen kommen: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv, so gibt es ja auch die Umkehrabbildung f^{-1} , und $f^{-1}(c)$ kann sowohl den Wert von c unter der Umkehrfunktion f^{-1} bedeuten, als auch die Urbildmenge. Meistens ergibt sich aber aus dem Zusammenhang, was gemeint ist.

Die Menge $\mathcal{T}(\mu_n)$ aller verallgemeinerten Treppenfunktionen auf dem \mathbb{R}^n bildet einen \mathbb{R} -Vektorraum.

Definition:

Ist $f = c_1 \cdot \chi_{M_1} + \dots + c_k \cdot \chi_{M_k}$ eine verallgemeinerte Treppenfunktion auf dem \mathbb{R}^n , so definiert man das (*Lebesguesche*) *Integral* über f durch

$$\int f \, d\mu_n := \sum_{i=1}^k c_i \cdot \mu_n(M_i).$$

Die Zahl $\|f\|_1 := \int |f| \, d\mu_n$ nennt man die *Lebesgue-Norm* von f .

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Integralbegriff wohldefiniert ist. Außerdem gilt:

1. $f \mapsto \int f \, d\mu_n$ ist linear.
2. Ist $Q_0 = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ der „Einheitsquader“, so ist $\int \chi_{Q_0} \, d\mu_n = 1$.
3. Ist $f \leq g$, so ist $\int f \, d\mu_n \leq \int g \, d\mu_n$.
4. Ist Q ein Quader und $f(\mathbf{x}) = 0$ außerhalb von Q , so ist

$$\left| \int f \, d\mu_n \right| \leq v_n(Q) \cdot \sup\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in Q\}.$$

Das sind die gleichen Eigenschaften, wie wir sie in Kapitel II für das Integral von Treppenfunktionen auf \mathbb{R} festgestellt haben.

Beim Integral von Regelfunktionen in einer Veränderlichen haben wir Folgen von Treppenfunktionen betrachtet, die gleichmäßig gegen die Funktion konvergieren. Hier benutzen wir nun einen sehr viel schwächeren Konvergenzbegriff.

Definition:

Man sagt, eine (von Punkten des \mathbb{R}^n abhängende) Bedingung gilt *fast überall*, wenn sie außerhalb einer Nullmenge gilt.

Beispiele :

1. Sei $f(x) := \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Die Menge $N := \mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge in \mathbb{R} . Auf $\mathbb{R} \setminus N$ ist $f(x) \equiv 0$. Also kann man sagen, daß f fast überall mit der Nullfunktion übereinstimmt.

Warnung: Obwohl die Nullfunktion stetig ist, stimmt es nicht, daß f fast überall stetig ist, denn f ist ja in den Punkten von $\mathbb{R} \setminus N$ gar nicht stetig.

2. Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^n$. Wir wissen, daß die Funktionenfolge (f_n) für $0 \leq x < 1$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, in $x = 1$ aber gegen 1. Also kann man sagen, daß (f_n) fast überall gegen $f(x) = 0$ konvergiert. Diese Konvergenz ist weit davon entfernt, gleichmäßig zu sein, wie wir ja auch schon wissen.

Betrachten wir $I_n := \int_0^1 f_n(x) dx$.

Offensichtlich konvergiert $I_n = \frac{1}{n+1}$ gegen $0 = \int_0^1 f(x) dx$.

Um also die Konvergenz der Integrale zu erzwingen, braucht man anscheinend nur, daß die Funktionenfolge fast überall konvergiert.

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *(Lebesgue-)integrierbar*, falls es eine Folge von verallgemeinerten Treppenfunktionen φ_ν gibt, so daß gilt:

1. (φ_ν) konvergiert fast überall punktweise gegen f .
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_0$, so daß $\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_1 < \varepsilon$ für $\nu, \mu \geq \nu_0$.

Die Zahl

$$\int f d\mu_n := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int \varphi_\nu d\mu_n$$

heißt das *(Lebesguesche) Integral von f* .

Bemerkungen :

1. Statt $\int f d\mu_n$ verwendet man auch die klassische Schreibweise $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) dx$.
2. Ist φ eine verallgemeinerte Treppenfunktion, so ist $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$, also

$$-\int |\varphi| d\mu_n \leq \int \varphi d\mu_n \leq \int |\varphi| d\mu_n, \text{ und damit } \left| \int \varphi d\mu_n \right| \leq \int |\varphi| d\mu_n = \|\varphi\|_1.$$

Ist nun (φ_ν) eine Folge von verallgemeinerten Treppenfunktionen, die die Bedingungen der Definition erfüllt, so folgt für $\nu, \mu \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int \varphi_\nu d\mu_n - \int \varphi_\mu d\mu_n \right| = \left| \int (\varphi_\nu - \varphi_\mu) d\mu_n \right| \leq \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_1.$$

Das bedeutet, daß die Zahlen $I_n := \int \varphi_\nu d\mu_n$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} bilden, und die muß gegen eine reelle Zahl I konvergieren. Das ist unser Integral über f .

Man kann natürlich zeigen, daß diese Konstruktion nicht von der Auswahl der φ_ν abhängt. Das Integral ist also wohldefiniert.

Aus der Definition ergibt sich sofort:

Funktionen mit gleichem Integral

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seien fast überall gleich. Ist f integrierbar, so ist auch g integrierbar, und ihre Integrale sind gleich.

Weiter gilt:

Eigenschaften des Integrals

f, g seien integrierbar. Dann gilt:

1. Linearität: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ integrierbar, und es ist

$$\int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\mu_n = \alpha \cdot \int f d\mu_n + \beta \cdot \int g d\mu_n.$$

2. Monotonie: Ist $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ fast überall, so ist auch $\int f d\mu_n \leq \int g d\mu_n$.

3. Beschränktheit: Mit f ist auch $|f|$ integrierbar, und es ist

$$\left| \int f d\mu_n \right| \leq \int |f| d\mu_n =: \|f\|_1.$$

Ist Q ein Quader und $f(\mathbf{x}) = 0$ für \mathbf{x} außerhalb Q , so ist

$$\|f\|_1 \leq v_n(Q) \cdot \sup\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in Q\}.$$

Auch das sind Aussagen, die wir schon in der Theorie einer Veränderlichen bei den Relfunktionen kennengelernt haben.

Die Menge $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu_n)$ aller integrierbaren Funktionen bildet einen \mathbb{R} -Vektorraum. Die Lebesgue-Norm $\|\dots\|_1$ ist „fast“ eine Norm auf \mathcal{L}^1 , es gilt:

1. $\|f\|_1 \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{L}^1$.
2. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{L}^1$ ist $\|\alpha \cdot f\|_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_1$.
3. Für $f, g \in \mathcal{L}^1$ die Dreiecksungleichung: $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Leider kann man aus $\|f\|_1 = 0$ nicht schließen, daß f die Nullfunktion ist. Man kann dann lediglich zeigen, daß f fast überall verschwindet.

Bisher haben wir nur Funktionen über dem ganzen \mathbb{R}^n integriert. Das läßt sich leicht ändern:

Definition:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar.

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls ihre „triviale Fortsetzung“

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_M f \, d\mu_n := \int \widehat{f} \, d\mu_n.$$

Bemerkung: Sind $N \subset M$ zwei meßbare Mengen und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so ist auch $f|_N : N \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

BEWEIS: Ist (φ_ν) eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen \widehat{f} konvergiert, so sind die Funktionen $\psi_\nu := \widehat{\varphi_\nu|_N}$ ebenfalls Treppenfunktionen, und sie konvergieren fast überall gegen $\widehat{f|_N}$. Außerdem ist $\|\psi_\nu - \psi_\mu\|_1 \leq \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_1$. Das ergibt die Integrierbarkeit von $f|_N$. \square

Insbesondere erhält man: Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, so ist $f|_M$ ebenfalls integrierbar.

Additivität des Integrals

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ seien meßbar, $A \cap B$ eine Nullmenge und $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu_n = \int_A f \, d\mu_n + \int_B f \, d\mu_n.$$

Der BEWEIS ist trivial: $\widehat{f} = \widehat{f|_{A \setminus B}} + \widehat{f|_{B \setminus A}} + \widehat{f|_{A \cap B}}$.

Volumen und Integral

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Die charakteristische Funktion χ_M ist genau dann integrierbar, wenn $\mu_n(M) < \infty$ ist, und dann gilt:

$$\mu_n(M) = \int \chi_M \, d\mu_n.$$

BEWEIS: Die eine Richtung ist trivial: Ist $\mu_n(M) < \infty$, so ist χ_M eine verallgemeinerte Treppenfunktion.

Sei umgekehrt χ_M integrierbar. Wir setzen $Q_k := [-k, k]^n$. Da die meßbaren Mengen eine σ -Algebra bilden, ist $M \cap Q_k$ meßbar, und offensichtlich ist $\mu_n(M \cap Q_k) < \infty$. Also bilden die Funktionen $f_k := \chi_{M \cap Q_k}$ eine monoton wachsende Folge von verallgemeinerten Treppenfunktionen, die punktweise gegen χ_M konvergiert, und es gilt:

$$\mu_n(M \cap Q_k) = \int f_k \, d\mu_n \leq \int \chi_M \, d\mu_n.$$

Als monotone und beschränkte Folge muß $c_k := \mu_n(M \cap Q_k)$ gegen eine reelle Zahl c konvergieren. Andererseits kann man M als disjunkte Vereinigung meßbarer Mengen schreiben:

$$M = (M \cap Q_1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} ((M \cap Q_{k+1}) \setminus (M \cap Q_k)).$$

Wegen der σ -Additivität des Lebesguemaßes ist dann

$$\mu_n(M) = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+1} - c_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} c_{N+1} = c < \infty.$$

□

Ist $\mu_n(M) < \infty$, so bezeichnen wir $\mu_n(M)$ auch mit $v_n(M)$ und sprechen vom *Volumen* von M .

Die Stärke der Lebesgueschen Integrationstheorie zeigt sich vor allem in den beiden folgenden Konvergenzsätzen, die wir allerdings nicht beweisen werden.

Satz über monotone Konvergenz (Beppo Levi)

Sei (f_ν) eine fast überall monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, und die Folge der Integrale $\int f_\nu d\mu_n$ sei nach oben beschränkt. Dann konvergiert (f_ν) fast überall gegen eine integrierbare Funktion f , und es ist

$$\int f d\mu_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu d\mu_n.$$

Satz von der dominierten Konvergenz (Lebesgue)

Sei (f_ν) eine Folge von integrierbaren Funktionen, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Außerdem gebe es eine integrierbare Funktion g , so daß $|f_\nu(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ für alle ν und fast alle \mathbf{x} ist.

Dann ist auch die Grenzfunktion f integrierbar, und es gilt:

$$\int f d\mu_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu d\mu_n.$$

Jetzt können wir unsere bekannten Integralbegriffe mit dem Lebesgueschen Integral vergleichen:

Integrale über Regelfunktionen

Sei f eine Regelfunktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann ist f integrierbar, und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f d\mu_1 = \int_a^b f(t) dt.$$

BEWEIS: Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen φ_ν , die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $\Sigma(\varphi_\nu) = \int_a^b \varphi_\nu(t) dt$ gegen $\int_a^b f(t) dt$.

Die trivialen Fortsetzungen $\psi_\nu := \widehat{\varphi_\nu}$ sind verallgemeinerte Treppenfunktionen, und sie konvergieren – immer noch gleichmäßig – gegen \widehat{f} . Außerdem ist

$$\int \psi_\nu d\mu_1 = \Sigma(\varphi_\nu), \text{ für alle } \nu,$$

und es gilt:

$$\|\psi_\nu - \psi_\mu\|_1 = \int_a^b |\varphi_\nu(t) - \varphi_\mu(t)| dt \leq \sup_{[a,b]} |\varphi_\nu - \varphi_\mu| \cdot (b - a).$$

Der rechte Ausdruck strebt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (φ_ν) mit wachsendem ν, μ gegen Null. □

Uneigentliche Integrale

Es sei f eine Regelfunktion auf dem Intervall $[a, \infty)$, und es konvergiere das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(t)| dt$. Dann ist f integrierbar, und es gilt:

$$\int_{[a,\infty)} f d\mu_1 = \int_a^\infty f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt.$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für alle anderen Typen von uneigentlichen Integralen.

BEWEIS: Sei $f_n := |f|_{|[a,n]}$. Dann konvergiert f_n monoton wachsend gegen $|f|$. Da $|f|$ und alle f_n Regelfunktionen sind, gilt:

$$\left| \int_{[a,n]} f_n d\mu_1 \right| = \int_a^n |f(t)| dt \leq \int_a^\infty |f(t)| dt < \infty.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist dann $|f|$ integrierbar.

Die Folge $g_n := f|_{[a,n]}$ konvergiert punktweise gegen f und besteht aus integrierbaren Funktionen. Wegen $|g_n| \leq |f|$ folgt nun mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, daß f integrierbar ist, und

$$\int_{[a,\infty)} f d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(t) dt = \int_a^\infty f(t) dt.$$

□

Wir brauchen also zumindest im Falle einer Veränderlichen keine neuen Integrationsregeln zu lernen! Die **Berechnung** von Integralen wird wie bisher durchgeführt.

Integrierbarkeitskriterium

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und fast überall stetig. Dann ist f integrierbar.

BEWEIS: (Andeutung)

Wir setzen zunächst $Q_1^{(1)} := Q$. Das ist ein kartesisches Produkt von n Intervallen. Wenn wir alle diese Intervalle halbieren, können wir daraus 2^n Teilquader $Q_2^{(1)}, \dots, Q_2^{(2^n)}$ kombinieren. Wiederholen wir diese Prozedur mit jedem der einzelnen Teilquader, so gewinnen wir $2^n \cdot 2^n = 4^n$ Teilquader $Q_3^{(i)}, i = 1, \dots, 4^n$. So fährt man fort, nach dem k -ten Schritt erhält man $(2^k)^n$ Teilquader.

$m_{k,i} := \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in Q_k^{(i)}\}$ ist eine reelle Zahl, und durch

$$\varphi_k|_{Q_k^{(i)}} := m_{k,i}, \text{ für } i = 1, \dots, (2^k)^n,$$

wird fast überall auf Q eine (gewöhnliche) Treppenfunktion φ_k definiert.

Nach Konstruktion wächst die Folge der φ_k fast überall monoton, denn die Wände der Teilquader bilden eine Nullmenge. In den Punkten, wo f stetig ist, kommen die φ_k der Funktion f beliebig nahe. Also konvergiert (φ_k) fast überall gegen f . Weil f beschränkt ist, bleiben die Integrale $\int \varphi_k d\mu$ nach oben beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist f dann integrierbar. \square

Bemerkung: Eine beschränkte und fast überall stetige Funktion f auf einem Quader nennt man auch *Riemann-integrierbar*. In der älteren Literatur wird noch viel mit dem Riemann-Integral gearbeitet. Wie man hier sehen kann, ist das Lebesgue-Integral allgemeiner, d.h. die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist größer. Der Vorteil ist nicht unmittelbar einsichtig, weil die in der Praxis benötigten Funktionen meistens sogar Riemann-integrierbar sind. Aber bei den Integraltransformationen, Distributionen und Hilbertraummethode ist die flexiblere Lebesguesche Integrationstheorie auf jeden Fall vorzuziehen. Insbesondere leisten die starken Konvergenzsätze gute Dienste, z.B. in der Fourier-Analyse. Außerdem erhält man so schon einen ersten Einblick in maßtheoretische Methoden, wie sie etwa auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie zum Einsatz kommen.

In mehreren Veränderlichen ist der Satz von Fubini das wichtigste Instrument zur Integralberechnung.

Der Satz von Fubini

Die Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ sei integrierbar. Dann gilt:

Für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ integrierbar, die dadurch fast überall definierte Funktion

$$\mathbf{y} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

ist ebenfalls integrierbar, und es gilt:

$$\int f d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

In dem Satz dürfen auch die Rollen von \mathbf{x} und \mathbf{y} vertauscht werden. Der Beweis des Satzes von Fubini ist schwer und kann hier nicht vorgeführt werden.

Es mag befremdlich erscheinen, daß eine integrierbare Funktion nach den einzelnen Variablen nur fast überall integrierbar ist. Wir wollen das am Beispiel der charakteristischen

Funktionen erläutern.

Sei $M \in \mathbb{R}^{n+1}$ meßbar und $\mu_{n+1}(M) < \infty$. Dann ist χ_M eine integrierbare Funktion auf dem \mathbb{R}^n . Ist $t \in \mathbb{R}$, so verstehen wir unter dem „Schnitt“ M_t die Menge

$$M_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, t) \in M\}.$$

Offensichtlich ist $\chi_M(\mathbf{x}, t) = \chi_{M_t}(\mathbf{x})$. Nach Fubini ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$ die Funktion χ_{M_t} integrierbar.

Frage: Ist M_t für alle (oder wenigstens für fast alle) $t \in \mathbb{R}$ meßbar?

Antwort: M_t ist i.a. nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ meßbar. Sei etwa $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-meßbare Menge (die gibt es wirklich!) und $N \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, sowie $M := X \times N$. Dann ist M als Nullmenge meßbar im \mathbb{R}^{n+1} , mit $\mu_{n+1}(M) = 0 < \infty$, also χ_M integrierbar. Aber für $t \in N$ ist $M_t = X$ nicht meßbar.

Nach unserem bisherigen Kenntnisstand wissen wir nicht einmal, ob χ_{M_t} nicht doch integrierbar sein kann, selbst wenn M_t nicht meßbar ist. Und wenn χ_{M_t} für ein t integrierbar ist, dann wissen wir nicht, ob M_t meßbar ist.

Wir müssen uns dem Problem auf andere Weise nähern:

Die Borel-Meßbarkeit der Schnitte

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Borelmenge. Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt M_t eine Borelmenge im \mathbb{R}^n .

BEWEIS: Sei $\mathcal{E} := \{M \subset \mathbb{R}^{n+1} : M_t \text{ ist für jedes } t \in \mathbb{R} \text{ eine Borelmenge}\}$. Dann gilt: \mathcal{E} ist eine σ -Algebra, die auf jeden Fall alle Quader $Q = Q' \times Q'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ enthält.

Es ist nämlich $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M)_t = \mathbb{R}^n \setminus M_t$ und $(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j)_t = \bigcup_{j=1}^{\infty} (M_j)_t$.

Die kleinste σ -Algebra im \mathbb{R}^{n+1} , die alle Quader enthält, ist aber die Borel-Algebra \mathcal{B}_{n+1} . Also muß gelten: $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{E}$. □

Die Schnitte von Nullmengen

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Nullmenge. Dann ist M_t für fast alle $t \in \mathbb{R}$ eine Nullmenge.

BEWEIS: Da M eine Nullmenge ist, ist χ_M integrierbar und $\int \chi_M d\mu_{n+1} = 0$. Nach Fubini ist dann die Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto \chi_M(\mathbf{x}, t) = \chi_{M_t}(\mathbf{x})$$

für fast alle $t \in \mathbb{R}$ integrierbar, und es ist

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int \chi_{M_t} d\mu_n \right) dt = 0.$$

Also ist $\int \chi_{M_t} d\mu_n = 0$ für fast alle t . Das wiederum ist nur möglich, wenn es zu jedem solchen t eine Nullmenge N_t gibt, so daß $\chi_{M_t}(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \notin N_t$ ist, und das bedeutet, daß M_t selbst für fast alle $t \in \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist. □

Folgerung

Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ meßbar, so ist M_t für fast alle $t \in \mathbb{R}$ meßbar.

BEWEIS: Es ist $M = B \cup N$, mit einer Borelmenge B und einer Nullmenge N . Wegen

$$(B \cup N)_t = \{\mathbf{x} : (\mathbf{x}, t) \in B \text{ oder } (\mathbf{x}, t) \in N\} = B_t \cup N_t$$

folgt dann die Behauptung. □

Nun können wir eine beliebige Anwendung des Satzes von Fubini beweisen:

Prinzip von Cavalieri

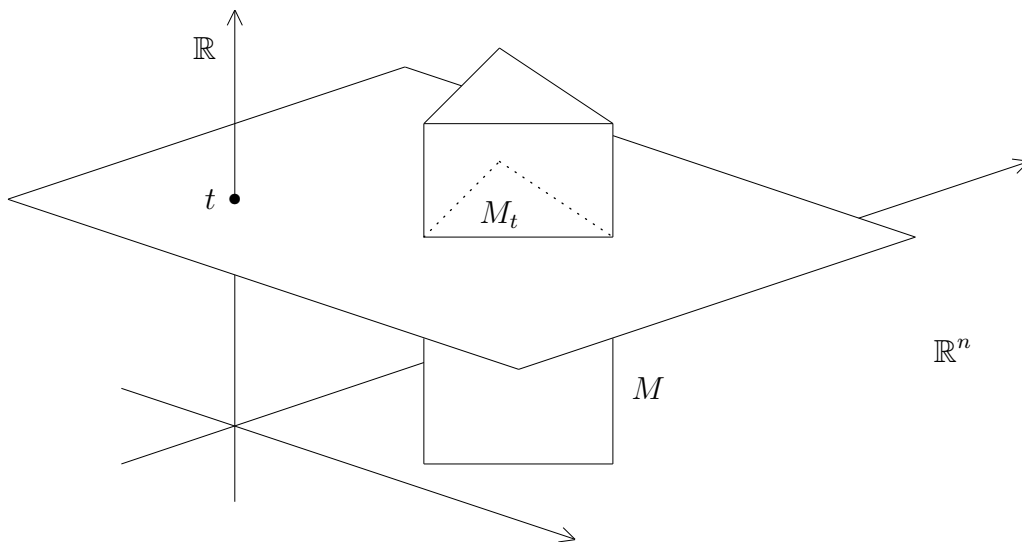
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ meßbar und $\mu_{n+1}(M) < \infty$. Dann ist für fast jedes $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt

$$M_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}, t) \in M\}$$

meßbar und $\mu_n(M_t) < \infty$.

Die durch $t \mapsto \mu_n(M_t)$ fast überall definierte Funktion ist integrierbar, und es gilt:

$$\mu_{n+1}(M) = \int_{\mathbb{R}} \mu_n(M_t) dt.$$



BEWEIS: Wir haben gerade gezeigt, daß M_t für fast alle t meßbar ist, und aus dem Satz von Fubini haben wir weiter oben schon hergeleitet, daß χ_{M_t} für fast alle t integrierbar ist, und damit $\mu_n(M_t) < \infty$.

Außerdem ist nun die fast überall definierte Funktion $t \mapsto \mu_n(M_t)$ integrierbar, und es gilt:

$$\mu_{n+1}(M) = \int \chi_M d\mu_{n+1} = \int_{\mathbb{R}} \mu_n(M_t) dt.$$

□

Ein gewisses Problem bei der Anwendung des Satzes von Fubini stellt die Forderung dar, daß f integrierbar sein soll. Wir wissen bisher nur, daß beschränkte und fast überall stetige Funktionen integrierbar sind. Was macht man, wenn man die Integrierbarkeit einer unbeschränkten Funktion feststellen will? Die bekannten Sätze über uneigentliche Integrale helfen nicht viel, weil der Satz von Fubini nur in einer Richtung funktioniert. Da erweist sich ein weiterer Begriff als nützlich:

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *meßbar*, wenn es eine Folge von verallgemeinerten Treppenfunktionen φ_ν gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Offensichtlich gilt:

Kriterien für die Meßbarkeit von Funktionen

1. Ist f integrierbar (im Sinne von Lebesgue), so ist f meßbar.
2. Ist f fast überall stetig, so ist f meßbar.
3. f meßbar $\iff \forall c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > c\}$ meßbar.
4. f, g meßbar, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies u(f, g)$ meßbar.

BEWEIS: Die erste Aussage ist trivial. Die zweite ergibt sich aus dem Beweis des Integrierbarkeitskriteriums. Der Beweis von (3) und (4) ist komplizierter. Da verallgemeinerte Treppenfunktionen das Kriterium (3) erfüllen, muß man z.B. zeigen: Erfüllen die Funktionen f_i das Kriterium und konvergiert (f_i) fast überall punktweise gegen eine Funktion f , so erfüllt auch f das Kriterium. In dieser Formulierung findet man das Ergebnis in der Literatur. \square

Folgerung

Ist χ_M meßbar, so ist auch M meßbar.

Denn $M = \{\mathbf{x} : \chi_M(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}\}$.

Mit diesem Ergebnis wäre das Prinzip von Cavalieri leichter zu beweisen gewesen, aber man hätte die obige Lücke (Kriterium (3)) in Kauf nehmen müssen.

Eine meßbare Funktion braucht nicht integrierbar zu sein. Es gilt aber:

Integrierbarkeit von meßbaren Funktionen

Sei f meßbar. Wenn es eine integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$ gibt, so ist auch f integrierbar.

Der Satz erinnert an das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale!

BEWEIS: Wir benutzen folgende einfache Tatsache:

Sind u, v integrierbare Funktionen, so sind auch

$$\max(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}|u - v| \quad \text{und} \quad \min(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}|u - v|$$

integrierbar.

Nach Voraussetzung gibt es eine Folge (φ_ν) von verallgemeinerten Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert. Die φ_ν sind natürlich integrierbar.

Nach Voraussetzung ist weiter $-g \leq f \leq g$. Setzt man nun

$$g_\nu := \max(\min(\varphi_\nu, g), -g),$$

so ist auch g_ν integrierbar, sowie $-g \leq g_\nu \leq g$. Außerdem konvergieren die g_ν fast überall gegen f . Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz ist dann auch f integrierbar.

Man beachte übrigens, daß die Integrale der φ_ν nicht notwendig gegen das Integral von f konvergieren müssen. \square

Folgerung

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt. Dann ist f integrierbar.

BEWEIS: Trivial! Über Q ist jede konstante Funktion integrierbar, und es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß $|f| \leq c$ auf Q ist. \square

Jetzt können wir den Satz formulieren, der den Satz von Fubini in gewisser Weise umkehrt:

Satz von Tonelli

Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar und überall ≥ 0 . Existiert dann eins der iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y} \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x},$$

so existiert auch das andere, sowie $\int f \, d\mu_{n+m}$, und alle drei Integrale sind gleich.

Folgerung

Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader und $M \subset Q$ eine meßbare Teilmenge, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall stetig und ≥ 0 . Dann existiert das Integral

$$\int_M f \, d\mu_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_n \dots dx_2 \, dx_1$$

genau dann, wenn das iterierte Integral auf der rechten Seite existiert. Dabei wird die Funktion f außerhalb ihres Definitionsbereiches trivial durch 0 fortgesetzt.

Das Maß von Produktmengen

$A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ seien jeweils meßbar, und es sei $\mu_n(A) < \infty$ und $\mu_m(B) < \infty$.

Dann ist auch $A \times B$ im \mathbb{R}^{n+m} meßbar, und es gilt:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

BEWEIS: Wir zeigen zunächst: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, so ist auch $A \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ meßbar.

Dazu wenden wir noch einmal einen bewährten Trick an. Es sei

$$\mathcal{E} := \{X \subset \mathbb{R}^n : X \times \mathbb{R}^m \text{ ist Borelmenge im } \mathbb{R}^{n+m}\}.$$

a) Die leere Menge gehört zu \mathcal{E} .

b) Gehört X zu \mathcal{E} , so ist $(\mathbb{R}^n \setminus X) \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m} \setminus (X \times \mathbb{R}^m)$ eine Borelmenge, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus X$ gehört auch zu \mathcal{E} .

c) Wegen $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \times \mathbb{R}^m = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i \times \mathbb{R}^m)$ gilt: Gehören alle Mengen X_i zu \mathcal{E} , so auch deren Vereinigung.

Also ist \mathcal{E} eine σ -Algebra im \mathbb{R}^n , die alle Quader enthält. Aber dann muß \mathcal{E} auch alle Borelmengen enthalten. Das bedeutet: Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge, so ist auch $C \times \mathbb{R}^m$ eine Borelmenge im \mathbb{R}^{n+m} .

Wir wissen schon: Ist N eine Nullmenge im \mathbb{R}^n , so ist $N \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+m} . Ist nun $A = C \cup N$ die Zerlegung von A in eine Borel- und eine Nullmenge, so ist

$$A \times \mathbb{R}^m = (C \cup N) \times \mathbb{R}^m = (C \times \mathbb{R}^m) \cup (N \times \mathbb{R}^m)$$

ebenfalls die Vereinigung einer Borel- und einer Nullmenge, also meßbar.

Genauso zeigt man, daß $\mathbb{R}^n \times B$ meßbar im \mathbb{R}^{n+m} ist, und dann folgt: $A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times B)$ ist meßbar.

Wir müssen noch die Gleichung für die Maße beweisen. Nach Voraussetzung sind χ_A und χ_B jeweils integrierbar. Dann ist auch $\mu_n(A) \cdot \chi_B$ integrierbar, mit

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mu_n(A) \cdot \chi_B d\mu_m = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

Weiter ist $\chi_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_A(\mathbf{x}) \cdot \chi_B(\mathbf{y})$ eine nicht-negative meßbare Funktion (als charakteristische Funktion einer meßbaren Menge). Offensichtlich existiert das iterierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \mu_n(A) \cdot \chi_B(\mathbf{y}) d\mu_m.$$

Nach Tonelli ist dann auch $\chi_{A \times B}$ integrierbar, und es folgt:

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \int_{\mathbb{R}^m} \mu_n(A) \cdot \chi_B(\mathbf{y}) d\mu_m = \mu_n(A) \cdot \mu_m(B).$$

□

§4 Integrationsmethoden

Wir wollen jetzt verschiedene Verfahren zur praktischen Berechnung von Integralen und Inhalten kennenlernen.

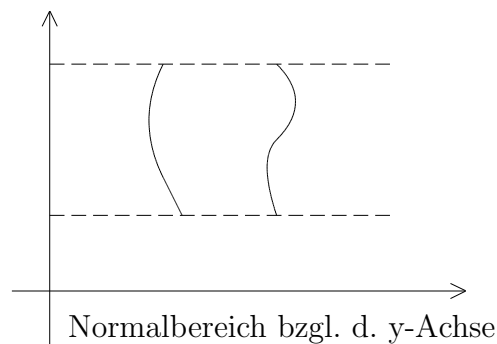
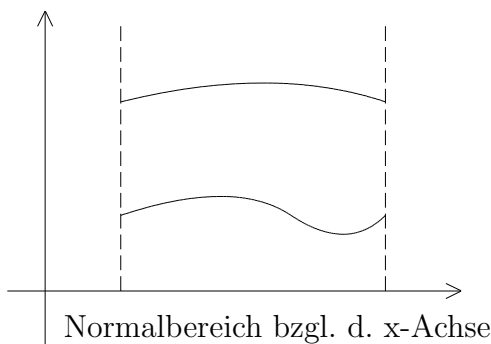
Definition:

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der x-Achse*, wenn es ein Intervall $[a, b]$ auf der x-Achse und stetige Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$) gibt, so daß gilt:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der y-Achse*, wenn es ein Intervall $[c, d]$ auf der y-Achse und stetige Funktionen $r, s : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $r(y) \leq s(y)$ für alle $y \in [c, d]$) gibt, so daß gilt:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r(y) \leq x \leq s(y) \text{ und } c \leq y \leq d\}.$$



Normalbereiche sind kompakt (also insbesondere Borelmengen), und stetige Funktionen über kompakten Mengen sind natürlich integrierbar.

Integration über Normalbereiche

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Mit den Notationen aus der vorangegangenen Definition gilt:

a) Ist B Normalbereich bezüglich der x-Achse, so ist

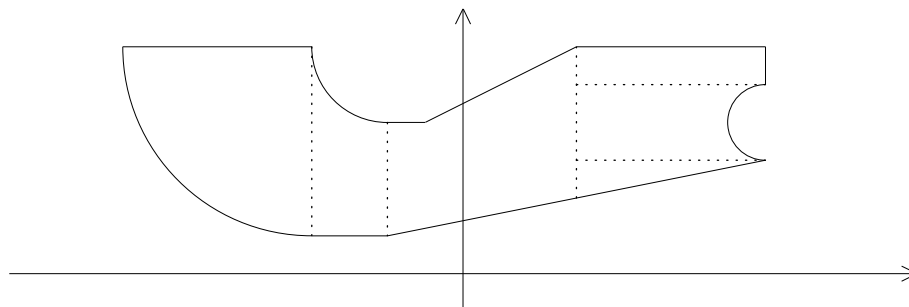
$$\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

b) Ist B Normalbereich bezüglich der y-Achse, so ist

$$\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Der BEWEIS ergibt sich einfach aus dem Satz von Fubini.

Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte Teilmenge, die man durch endlich viele achsenparallele Schnitte in Normalbereiche zerlegen kann, so kann man auch in diesem Fall jede stetige Funktion über B integrieren.



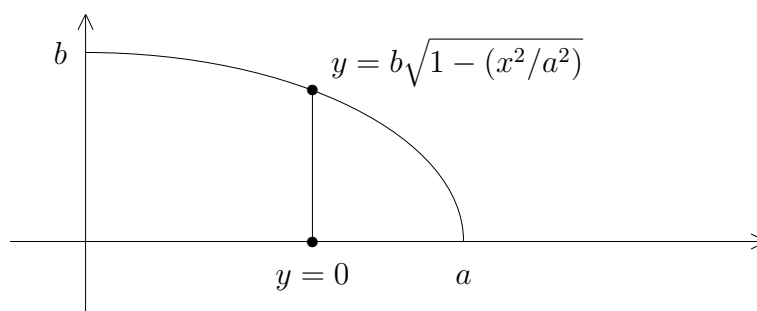
Beispiele :

1. Sei B derjenige Teil einer Ellipsenfläche um den Nullpunkt (mit den Halbachsen a und b , der im rechten oberen Quadranten liegt. Es soll das Integral $\int_B xy \, d\mu_2$ berechnet werden. Hier ist also $f(x, y) = xy$.

Der Rand von B ist durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

gegeben. Offensichtlich ist B ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_B xy \, d\mu_2 &= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \right) dx \\ &= \int_0^a \frac{x}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} \\ &= \frac{a^2 b^2}{8}. \end{aligned}$$

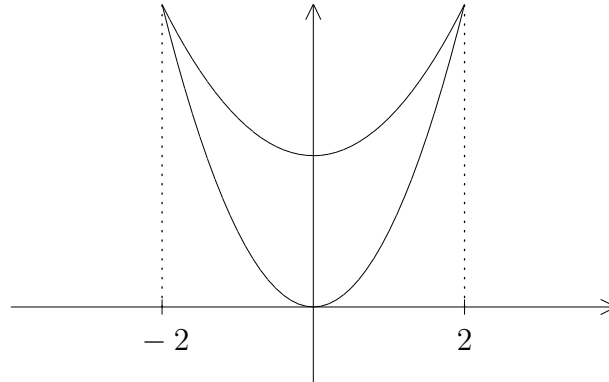
2. Sei $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := 2 + \frac{1}{2}x^2$. Dann ist

$$\varphi(-2) = \psi(-2) = 4 \quad \text{und} \quad \varphi(2) = \psi(2) = 4,$$

und für $|x| \leq 2$ ist $x^2 \leq 4$, also $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$. Daher ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

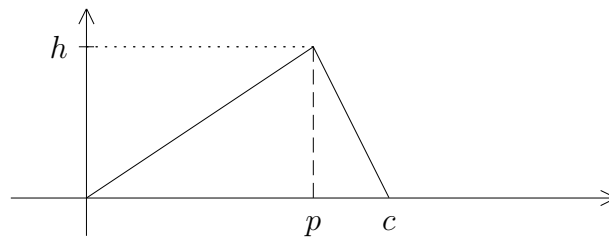
ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:



Die Fläche von B ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \int c_B(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{2+(x^2/2)} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(2x - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \left(4 - \frac{8}{6}\right) - \left(-4 + \frac{8}{6}\right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

3. Wir betrachten ein Dreieck im \mathbb{R}^2 , dessen Grundlinie auf der x-Achse liegt:



Die Strecke von $(0,0)$ nach (p,h) wird durch die lineare Funktion $\varphi(x) := \frac{h}{p}x$ für $0 \leq x \leq p$ beschrieben, die Strecke von (p,h) nach $(c,0)$ durch die affin-lineare Funktion $\psi(x) := \frac{h}{p-c}(x-c)$, für $p \leq x \leq c$. Dann ist die Fläche des Dreiecks Δ gegeben durch

$$\mu_2(\Delta) = \int \chi_{\Delta} d\mu_2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^p \varphi(x) dx + \int_p^c \psi(x) dx \\
&= \frac{h}{p} \cdot \int_0^p x dx + \frac{h}{p-c} \cdot \int_p^c (x-c) dx \\
&= \frac{h}{p} \cdot \frac{p^2}{2} + \frac{h}{p-c} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - cx \right) \Big|_p^c \\
&= \frac{hp}{2} + \frac{h}{p-c} \cdot \left(\frac{1}{2}(c-p)(c+p) - c(c-p) \right) \\
&= \frac{h}{2} \cdot (p - (c+p) + 2c) \\
&= \frac{1}{2}c \cdot h.
\end{aligned}$$

Das ist die aus der Elementargeometrie bekannte Formel.

Wir wissen zu diesem Zeitpunkt noch nicht, ob die Formel entsprechend für jedes beliebige Dreieck gilt. Dazu müssen wir noch beweisen, daß euklidische Bewegungen den Flächeninhalt nicht beeinflussen.

Man kann den Begriff des Normalbereichs auch auf höhere Dimensionen ausdehnen. Wir wollen das hier nicht im einzelnen durchführen, sondern uns auf einen Spezialfall beschränken:

Ein *Normalbereich* bezüglich der Koordinaten x_1, \dots, x_n im \mathbb{R}^{n+1} ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in Q \text{ und } \varphi(\mathbf{x}) \leq x_{n+1} \leq \psi(\mathbf{x})\},$$

wobei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader ist und $\varphi, \psi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind, mit $\varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in Q$.

B ist wieder kompakt und daher meßbar, und für eine stetige Funktion f auf B gilt:

$$\int_B f(\mathbf{x}, x_{n+1}) d\mu_{n+1} = \int_Q \left(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, x_{n+1}) dx_{n+1} \right) d\mu_n.$$

Beispiel:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative stetige Funktion. Dann ist die sogenannte *Ordinatenmenge*

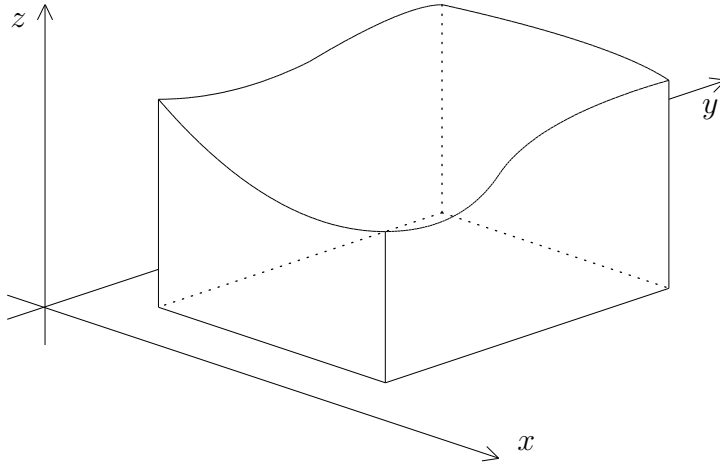
$$B := \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in Q \text{ und } 0 \leq x_{n+1} \leq f(\mathbf{x})\}$$

ein Normalbereich bezüglich der Koordinaten x_1, \dots, x_n , und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}(B) &= \int \chi_B d\mu_{n+1} \\
&= \int_Q \left(\int_0^{f(\mathbf{x})} dx_{n+1} \right) d\mathbf{x} \\
&= \int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß das Integral über f mit dem Volumen der Ordinatenmenge übereinstimmt.

Hier ist ein Bild im \mathbb{R}^3 :



Wir wollen jetzt eine verallgemeinerte Substitutionsregel beweisen:

$$\begin{aligned} \text{Sei } P &:= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ \text{und } Q &:= [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n]. \end{aligned}$$

Außerdem seien $\varphi_i : [c_i, d_i] \rightarrow [a_i, b_i]$ Koordinatentransformationen, also bijektive differenzierbare Funktionen, für $i = 1, \dots, n$.

Ist φ_i streng monoton wachsend, so ist $\varphi_i'(x) > 0$, $\varphi_i(c_i) = a_i$ und $\varphi_i(d_i) = b_i$, andernfalls ist $\varphi_i'(x) < 0$, $\varphi_i(c_i) = b_i$ und $\varphi_i(d_i) = a_i$. Setzen wir

$$F(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)),$$

so ist $F(Q) = P$, und für eine stetige Funktion f auf P folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{F(Q)} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, \dots, y_n) \, dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{c_n}^{d_n} \dots \int_{c_1}^{d_1} f(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)) \cdot |\varphi_1'(x_1)| \cdot \dots \cdot |\varphi_n'(x_n)| \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_Q f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det F'(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

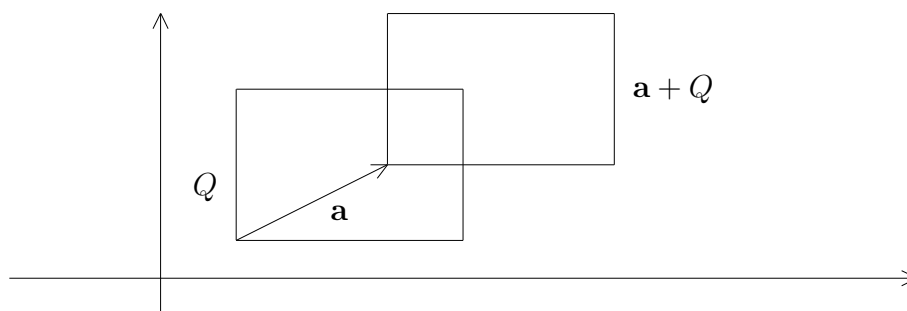
Durch Einführung der Betragsstriche wird vermieden, daß die Integrationsrichtung umgekehrt werden muß!

Beispiele :

1. Ist $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor, so wird durch

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a} = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

die Translation $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Offensichtlich ist $\det T'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 1$. Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so bezeichnen wir mit $\mathbf{a} + Q$ den um den Vektor \mathbf{a} verschobenen Quader.



Offensichtlich gilt nun für eine stetige Funktion f auf $\mathbf{a}+Q$: $f \circ T_{\mathbf{a}}$ ist auf Q definiert, und es ist

$$\int_{\mathbf{a}+Q} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \, d\mathbf{x}.$$

Man spricht von der *Translationsinvarianz des Integrals*. Da beliebige meßbare Mengen durch Quader approximiert werden können, überträgt sich die Translationsinvarianz auch auf beliebige Integrale:

$$\int f \, d\mu_n = \int f \circ T_{\mathbf{a}} \, d\mu_n.$$

2. Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $r > 0$ eine feste reelle Zahl, so ist auch die Menge $r \cdot Q := \{r \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in Q\}$ ein Quader, und es ist

$$v_n(r \cdot Q) = r^n \cdot v_n(Q).$$

Ist f stetig auf $r \cdot Q$, so gilt:

$$\int_{r \cdot Q} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_Q r^n \cdot f(r \cdot \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Gerne wird das Prinzip von Cavalieri zur Volumenberechnung herangezogen. Dafür brauchen wir allerdings noch einen Hilfssatz:

Stetige Bilder meßbarer Mengen

Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist $F(Q)$ für jeden Quader Q eine Borelmenge.

Sei nun F bijektiv und F^{-1} ebenfalls stetig. Außerdem gebe es eine Konstante $c > 0$, so daß für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu_n(F(Q)) = c \cdot \mu_n(Q) \quad \text{und} \quad \mu_n(F^{-1}(Q)) = \frac{1}{c} \cdot \mu_n(Q).$$

Dann folgt:

1. Für jede Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $F(N)$ eine Nullmenge.
2. Für jede meßbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu_n(M) < \infty$ ist auch $F(M)$ meßbar und $\mu_n(F(M)) = c \cdot \mu_n(M)$.

BEWEIS: 1) Ist Q ein kompakter Quader, so ist $F(Q)$ kompakt und damit eine Borelmenge. Ein beliebiger Quader ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Quadern, und sein Bild unter F damit wieder eine Borelmenge.

1) Sei N eine Nullmenge, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es eine Folge von Quadern Q_j mit

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) < \frac{1}{c} \cdot \varepsilon.$$

Dann ist $F(N) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F(Q_j)$, und daher

$$\mu_n^*(F(N)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(F(Q_j)) = c \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) < \varepsilon.$$

Also ist auch $F(N)$ eine Nullmenge.

2) Sei $\mathcal{C} := \{B \subset \mathbb{R}^n : F(B) \text{ ist eine Borelmenge}\}$. Dann folgt sehr leicht, daß \mathcal{C} eine σ -Algebra ist, die alle Quader enthält. Also muß \mathcal{C} sogar die gesamte Borel-Algebra umfassen. Mit anderen Worten: Ist B eine Borelmenge, so ist auch $F(B)$ eine Borelmenge.

Da jede meßbare Menge in eine Borelmenge und eine Nullmenge zerlegt werden kann und F bijektiv ist, muß auch das Bild jeder meßbaren Menge unter F wieder meßbar sein. Das gleiche gilt für F^{-1} .

Sei nun M eine beliebige meßbare Menge mit $\mu_n(M) < \infty$, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt Quader Q_j , so daß gilt:

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) < \mu_n(M) + \frac{1}{c} \cdot \varepsilon.$$

Dann liegt $F(M)$ in der Vereinigung aller Mengen $F(Q_j)$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \mu_n(F(M)) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(F(Q_j)) \\ &= c \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) \\ &< c \cdot \left(\mu_n(M) + \frac{1}{c} \cdot \varepsilon \right) \\ &= c \cdot \mu_n(M) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, ist $\mu_n(F(M)) \leq c \cdot \mu_n(M)$. Aber analog ist $\mu_n(M) = \mu_n(F^{-1}(F(M))) \leq \frac{1}{c} \cdot \mu_n(F(M))$. Also ist tatsächlich $\mu_n(F(M)) = c \cdot \mu_n(M)$. \square

Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $\mu_n(M) < \infty$, sowie $r > 0$ eine feste Zahl. Dann ist auch $r \cdot M$ meßbar und $\mu_n(r \cdot M) = r^n \cdot \mu_n(M)$.

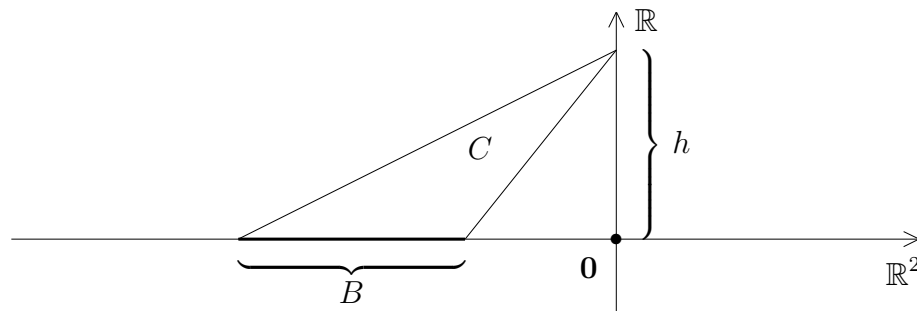
Jetzt können wir das Prinzip von Cavalieri zur Volumenmessung benutzen.

Beispiele :

1. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge und $h > 0$. Dann nennt man die Menge

$$C := \{((1 - \lambda)\mathbf{x}, \lambda h) \mid \mathbf{x} \in B \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

den *Kegel über der Grundfläche B mit der Spitze in $(0, h)$* .



C ist abgeschlossen und beschränkt, also ebenfalls kompakt, und für $t \in [0, h]$ ist

$$\begin{aligned} C_t &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{x}, t) \in C\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ mit } \frac{1}{1 - \lambda}\mathbf{x} \in B, \lambda h = t\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \mathbf{y} \in B \text{ mit } \mathbf{x} = (1 - \frac{t}{h})\mathbf{y}\} \\ &= (1 - \frac{t}{h}) \cdot B. \end{aligned}$$

Nach Cavalieri ist dann

$$\begin{aligned} \mu_3(C) &= \int_0^h \mu_2(C_t) dt \\ &= \int_0^h \mu_2((1 - \frac{t}{h}) \cdot B) dt \\ &= \mu_2(B) \cdot \int_0^h (1 - \frac{t}{h})^2 dt \\ &= \mu_2(B) \cdot (-h) \cdot \int_0^h \varphi(t)^2 \varphi'(t) dt \quad (\varphi(t) := 1 - \frac{t}{h}) \\ &= \mu_2(B) \cdot (-h) \cdot \int_1^0 x^2 dx \\ &= \mu_2(B) \cdot h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \mu_2(B) \cdot h. \end{aligned}$$

2. Wir können jetzt auch das Volumen einer Kugel ausrechnen:

Allgemein ist $\mu_3(B_r(\mathbf{0})) = r^3 \cdot \mu_3(B_1(\mathbf{0}))$. Wir müssen also nur das Volumen der Einheitskugel bestimmen:

Es ist

$$(B_1(\mathbf{0}))_t = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } |t| > 1 \\ B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2 & \text{falls } |t| \leq 1, \end{cases}$$

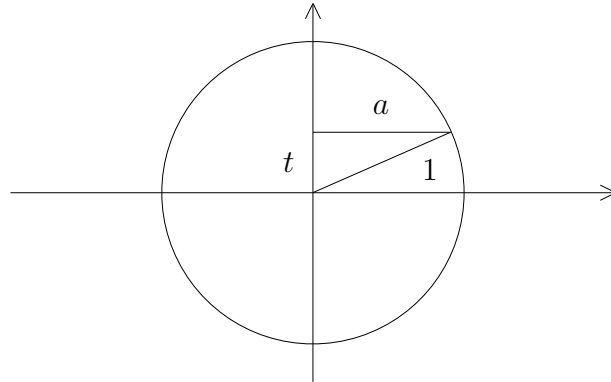
wobei

$$a^2 + t^2 = 1,$$

also

$$a = \sqrt{1 - t^2}$$

ist.



$$\begin{aligned} \text{Also ist } \mu_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{-1}^1 \mu_2(B_{\sqrt{1-t^2}}(\mathbf{0})) dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2) \cdot \mu_2(B_1(\mathbf{0})) dt \\ &= \pi \cdot \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \\ &= \pi \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt einer halben Kreisscheibe ergibt sich durch Integration von $\sqrt{1-x^2}$, und so erhält man, daß $\mu_2(B_1(\mathbf{0})) = \pi$ ist.

3. Leicht läßt sich nun auch das Volumen von Rotationskörpern bestimmen: Es seien zwei stetige Funktionen f, g auf $[a, b]$ gegeben, mit $0 \leq g \leq f$. Dann ist

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(z) \leq x^2 + y^2 \leq f(z), z \in [a, b]\}$$

der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den durch g und f bestimmten Normalbereich um die z -Achse rotieren läßt.

Behauptung: $\mu_3(R) = \pi \cdot \int_a^b (f(z)^2 - g(z)^2) dz$.

Zum BEWEIS genügt es, den Fall $g(z) \equiv 0$ zu betrachten. Dann ist aber

$$\begin{aligned} \mu_3(R) &= \int_a^b \mu_2(R_t) dt \\ &= \int_a^b \mu_2(B_{f(t)}(\mathbf{0})) dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 \pi dt. \end{aligned}$$

Integration rotationssymmetrischer Funktionen

Sei $0 \leq a < b$ und $K_{a,b} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < \|\mathbf{x}\| < b\}$. Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und existiert $\int_a^b |f(r)| r^{n-1} dr$, so ist $\tilde{f}(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$ über $K_{a,b}$ integrierbar und

$$\int_{K_{a,b}} f(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = n \cdot V_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} dr.$$

Dabei bezeichnet V_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel.

BEWEIS: (Andeutung) Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

1) Der Rand der n -dimensionalen Einheitskugel ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^n . Das sieht man z.B. dadurch, daß man ihn stückweise als stetiges Bild einer Nullmenge auffaßt.

2) Zunächst sei $f(r) \equiv c$ eine konstante Funktion. Dann ist auch \tilde{f} konstant und natürlich über $K_{a,b}$ integrierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{K_{a,b}} \tilde{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int c \cdot \chi_{K_{a,b}} d\mu_n \\ &= c \cdot \mu_n(K_{a,b}) \\ &= c \cdot (\mu_n(B_b(\mathbf{0})) - \mu_n(B_a(\mathbf{0}))) \\ &= c \cdot V_n \cdot (b^n - a^n) \\ &= c \cdot V_n \cdot n \cdot \int_a^b r^{n-1} dr \\ &= n \cdot V_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

3) Nun sei sogar $0 < a < b$. Ist f eine Treppenfunktion auf $[a, b]$, so folgt die Behauptung für f ganz leicht aus (2).

Ist f eine Regelfunktion auf $[a, b]$, so gibt es eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die dort gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert auch $(\tilde{\varphi}_k)$ auf $\overline{K_{a,b}}$ gleichmäßig gegen \tilde{f} , und \tilde{f} ist bis auf eine abzählbare Vereinigung von Kugelrändern (also fast überall) stetig und damit integrierbar. Mit Hilfe des Konvergenzsatzes von Lebesgue kann man daraus schließen, daß die Integrale über $\tilde{\varphi}_k$ gegen das Integral über \tilde{f} konvergieren. Das ergibt auch in diesem Falle die Behauptung.

4) Ist f nur über (a, b) stückweise stetig, so schreibt man (a, b) als aufsteigende Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, über denen f ja eine Regelfunktion ist. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz kommt man dann zum Ziel. \square

Beispiel:

Sei $f(r) := \frac{1}{r}$ auf $(0, 1)$. Das Integral $\int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr$ existiert genau dann, wenn $-n + 1 + \alpha < 1$ ist, also $\alpha < n$. Daraus folgt:

$\int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} d\mathbf{x}$ existiert genau dann, wenn $\alpha < n$ ist.

Im \mathbb{R}^2 ist also $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ bei $\mathbf{0}$ integrierbar, nicht jedoch $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}$.

Im \mathbb{R}^3 sind beide Funktionen bei $\mathbf{0}$ integrierbar.

Wir wollen jetzt die Substitutionsregel weiter verallgemeinern und beginnen dabei mit linearen Transformationen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Das Volumen eines transformierten Quaders

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $F = F_A$ die zugehörige (bijektive) lineare Transformation.

Dann ist $F(Q)$ meßbar und $\mu_n(F(Q)) = |\det A| \cdot \mu_n(Q)$.

BEWEIS: Da Q kompakt und F stetig ist, ist auch $F(Q)$ kompakt und damit meßbar.

1) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation und F definiert durch

$$F(x_1, \dots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

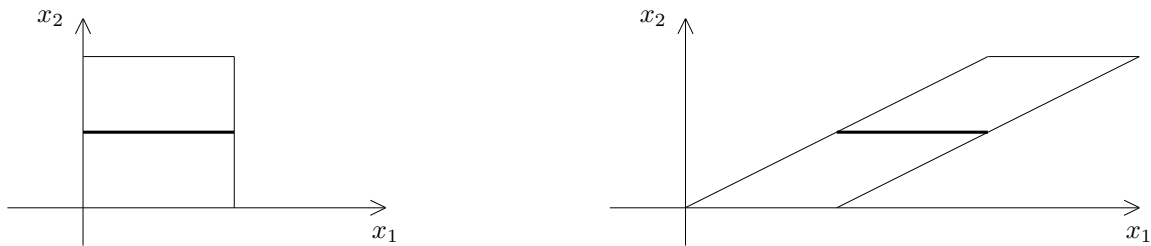
Die Determinante der zugehörigen Matrix ist dann $= \pm 1$, ihr Betrag also $= 1$. Und andererseits ist

$$F([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = [a_{\sigma(1)}, b_{\sigma(1)}] \times \dots \times [a_{\sigma(n)}, b_{\sigma(n)}],$$

also $\mu_n(F(Q)) = \mu_n(Q)$. In diesem Fall stimmt die Formel.

2) Sei $F(x_1, \dots, x_n) := (x_1 + \lambda x_i, x_2, \dots, x_n)$, mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ und einem $i \neq 1$. Dann sieht man sofort, daß $\det A = 1$ ist. Wir nennen F eine *Scherung*.

Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall $n = 2$, den allgemeinen muß man dann mit Induktion erledigen.



Für die Schnitte von $F(Q)$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} F(Q)_t &= \{y \in \mathbb{R} : (y, t) \in F(Q)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_1, x_2) \in Q \text{ mit } x_1 + \lambda x_2 = y \text{ und } x_2 = t\} \\ &= \{x_1 + \lambda t : x_1 \in [a_1, b_1]\} \\ &= \lambda t + [a_1, b_1]. \end{aligned}$$

Mit Cavalieri folgt daraus:

$$\mu_2(F(Q)) = \int_{a_2}^{b_2} \mu_1(F(Q)_t) dt = \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dt = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \mu_2(Q).$$

3) Sei schließlich $F(x_1, \dots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$. Die zugehörige Matrix ist eine Diagonalmatrix D mit den Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nach der schon bewiesenen verallgemeinerten Substitutionsregel folgt:

$$\begin{aligned}\mu_n(F(Q)) &= \int_{F(Q)} 1 \, d\mathbf{y} = \int_Q |F'(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ &= |\det(D)| \cdot \int_Q 1 \, d\mathbf{x} \\ &= |\det(D)| \cdot \mu_n(Q).\end{aligned}$$

4) Alle drei Typen F_A , die wir hier betrachtet haben, sind bijektiv, und es gilt:

$$\mu_n(F_A(Q)) = |\det A| \cdot \mu_n(Q) \quad \text{und} \quad \mu_n(F_A^{-1}(Q)) = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \mu_n(Q).$$

Damit folgt, daß sogar $\mu_n(F_A(M)) = |\det(A)| \cdot \mu_n(M)$ für jede meßbare Menge M mit endlichem Maß gilt. Insbesondere gilt für zwei Abbildungen F_A, F_B vom betrachteten Typ:

$$\begin{aligned}\mu_n(F_{A \circ B}(M)) &= \mu_n(F_A(F_B(M))) = |\det A| \cdot \mu_n(F_B(M)) \\ &= |\det A| \cdot |\det B| \cdot \mu_n(M) \\ &= |\det(A \circ B)| \cdot \mu_n(M).\end{aligned}$$

Ist nun A eine beliebige invertierbare Matrix, so liefert das Gaußverfahren Matrizen S, T und D , so daß S und T aus Permutationen und Scherungen zusammengesetzt, D eine Diagonalmatrix und $A = S \circ D \circ T$ ist. Das ergibt die Behauptung (nicht nur für Quader, sondern sogar für beliebige meßbare Mengen). \square

Bemerkungen :

1. Sind $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^n , so nennt man

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

das von den Vektoren aufgespannte *Parallelotop*. Im Falle $n = 2$ ergibt sich ein Parallelogramm, im Falle $n = 3$ spricht man von einem „Spat“. Nach dem obigen Satz gilt für beliebiges n :

$$v_n(P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) = |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|.$$

Diese Aussage liefert zugleich eine geometrische Deutung für die Determinante.

2. Ist A eine orthogonale Matrix und \mathbf{x}_0 ein fester Vektor, so nennt man die Abbildung

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0 + (A \circ \mathbf{x}^\top)^\top$$

eine euklidische Bewegung. Weil $|\det A| = 1$ ist, läßt eine solche euklidische Bewegung das Volumen invariant. Insbesondere wissen wir jetzt, daß die Formel für die Dreiecksfläche universell gültig ist.

Folgerung

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $F = F_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und $f : F_A(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $f \circ F_A : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_{F_A(Q)} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_Q f(F_A(\mathbf{x})) |\det A| \, d\mathbf{x}.$$

BEWEIS: (Andeutung)

Sei $c := |\det A|$. Ist $c = 0$, so ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Sei also $c \neq 0$, d.h. F bijektiv. Ist M eine beliebige meßbare Menge, so ist auch $N := F^{-1}(M \cap F(Q))$ meßbar und außerdem von endlichem Maß, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{F(Q)} \chi_M(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \mu_n(M \cap F(Q)) = \mu_n(F(N)) \\ &= c \cdot \mu_n(N) = c \cdot \int_Q \chi_N(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_Q \chi_M(F(\mathbf{x})) \cdot c \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dann gilt die Formel aber auch für verallgemeinerte Treppenfunktionen.

Ist schließlich f eine beliebige integrierbare Funktion, so kann man f durch eine Folge (φ_ν) von verallgemeinerten Treppenfunktionen approximieren, die fast überall gegen f konvergiert und bzgl. der $\|\dots\|_1$ -Norm eine Cauchy-Folge bildet. Die Formel überträgt sich dann auch auf f . \square

Dieser Satz läßt sich auf differenzierbare Abbildungen verallgemeinern. Das ist plausibel, da sich ja jede differenzierbare Abbildung lokal durch lineare Abbildungen approximieren läßt. Der Beweis ist allerdings schwer und kann hier nicht gebracht werden.

Allgemeine Transformationsformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow V$ umkehrbar stetig differenzierbar. Dann gilt:

1. $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $(f \circ F) \cdot |\det F'|$ integrierbar ist.
2. Ist f integrierbar, so ist

$$\int_V f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_U f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det F'(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

Die Formel bleibt richtig, wenn man U durch eine kompakte Teilmenge K und V durch $F(K)$ ersetzt.

Beispiele :

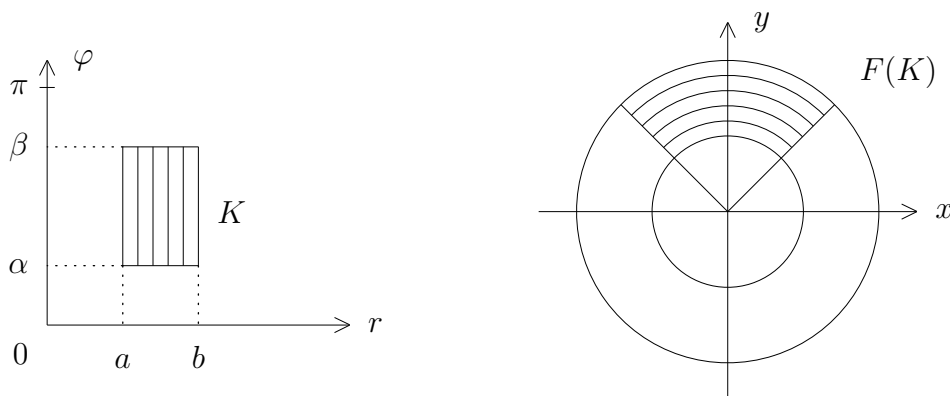
1. Ebene Polarkoordinaten

Sei $U := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < 2\pi\}$. Die Transformation auf Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$F(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi).$$

Bekanntlich ist $J_F(r, \varphi) = r$.

Ist etwa $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a \leq r \leq b \text{ und } \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$, mit $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, so ergibt sich für $F(K)$ folgendes Bild:



Nach der Transformationsformel ist

$$\int_{F(K)} f(x, y) dv_2 = \int_K f(F(r, \varphi))r dv_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r dr d\varphi.$$

Man muß nur aufpassen, daß sich φ in keinem Intervall bewegt, dessen Länge 2π übersteigt.

2. Zylinderkoordinaten

Hier ist $U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } z \text{ beliebig}\}$ und

$$F(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

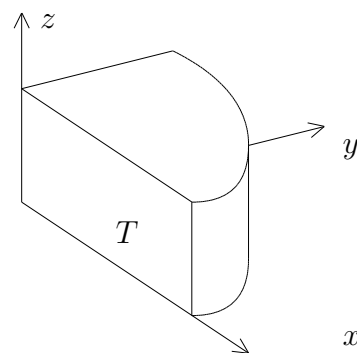
Für die Funktionaldeterminante ergibt sich wieder $J_F(r, \varphi, z) = r$.

Ist etwa $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$, so ist

$$T = F(Q), \text{ mit } Q := \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}.$$

Also ist z.B.

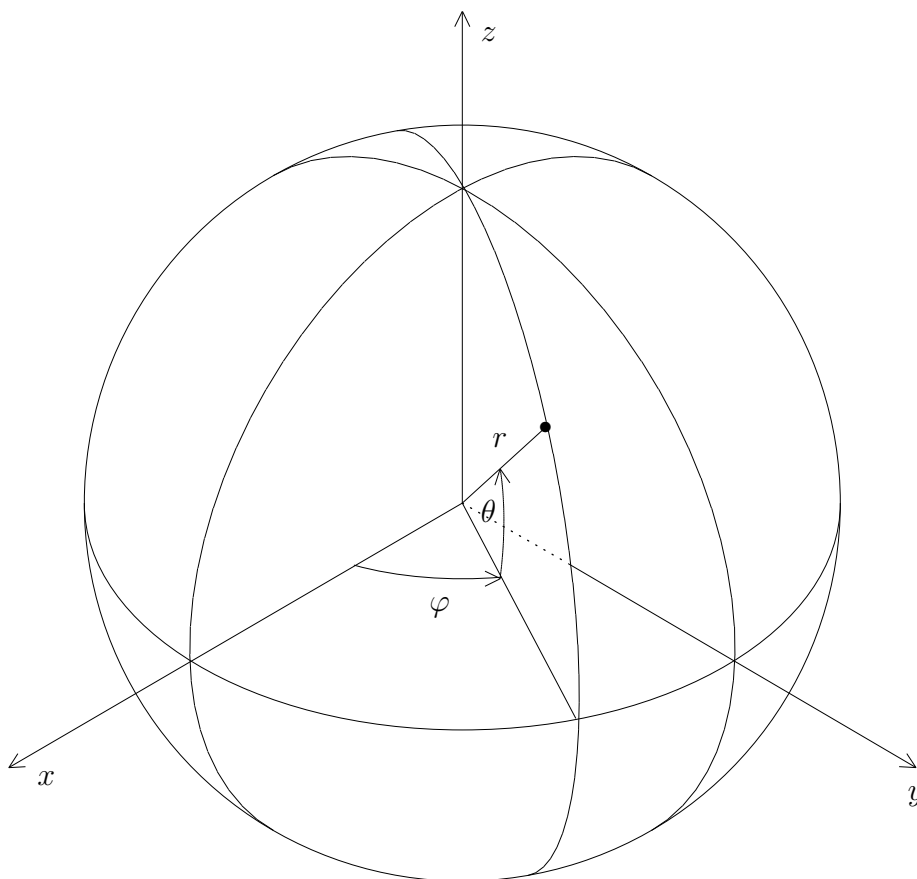
$$\begin{aligned} \int_T x^2 y dv_3 &= \int_Q (r \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \cdot r dv_3 \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dz dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dr d\varphi \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= -\frac{1}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$



3. Räumliche Polarkoordinaten

Hier ist $U = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, und

$$F(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$



Dann ist

$$\begin{aligned}
 J_F(r, \varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \sin \theta \cdot r^2 (\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) \\
 &\quad + r \cos \theta \cdot r (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\
 &= r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta \\
 &= r^2 \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $J_F(r, \varphi, \theta) > 0$ in U . Man beachte, daß die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden!

Wir können jetzt das Volumen der Einheitskugel ein zweites Mal berechnen:

$$\begin{aligned}
 v_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 \, dv_3 \\
 &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, dr \\
 &= 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

4. Jetzt können wir endlich das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$ ausrechnen:

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r d\varphi dr \\ &= \pi \cdot \int_0^{\infty} 2re^{-r^2} dr \\ &= \pi(-e^{-r^2}) \Big|_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Also ist $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

§5 Differentialformen und Satz von Stokes

Die mathematischen Objekte, die wir bisher kennen, sind Zahlen, Punkte, Vektoren oder daraus gebildete Mengen, sowie Abbildungen und Funktionen.⁵ In diesem Abschnitt soll nun eine neue Spezies aus dem mathematischen Universum vorgestellt werden: die Differentialform. Es wird sich herausstellen, daß die Differentialformen die richtigen Objekte sind, um über Kurven, Flächen und entsprechende höherdimensionale Gebilde zu integrieren. Der Satz von Stokes liefert die dazu notwendige Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Untere Untersuchungen schließen sich direkt an die Inhalte von §2 an. Allerdings wollen wir zuvor an die wichtigsten Ergebnisse der multilinearen Algebra erinnern (Kapitel III, §3). Ein paar Dinge werden wir neu formulieren, insbesondere im Zusammenhang mit dem Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 .

Eine Abbildung $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{q\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *q-fache alternierende Multilinearform* oder auch kurz eine *alternierende q-Form* auf dem \mathbb{R}^n , falls gilt:

1. $\mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_q)$ ist für jedes i linear.
2. Für jede Permutation $\sigma \in S_q$ ist $\varphi(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(p)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$.

Die Menge aller alternierenden q-Formen auf dem \mathbb{R}^n wird mit $A^q(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Es handelt sich dabei um einen Vektorraum der Dimension $\binom{n}{q}$.

Die Elemente von $A^2(\mathbb{R}^n)$ kann man besonders einfach beschreiben. Es handelt sich ja um Bilinearformen. Zu jedem $\varphi \in A^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, so daß gilt:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ B \circ \mathbf{y}^\top \quad \text{und} \quad B^\top = -B.$$

Im Falle $n = 3$ hat B dann die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ Linearformen auf dem \mathbb{R}^n , so ist die alternierende q-Form $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_q$ definiert durch

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_q(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) := \sum_{\sigma \in S_q} \text{sgn}(\sigma) \cdot \lambda_{\sigma(1)}(\mathbf{v}_1) \cdot \dots \cdot \lambda_{\sigma(q)}(\mathbf{v}_q).$$

Man nennt eine solche q-Form „zerlegbar“. Wieder ist der Fall $q = 2$ besonders einfach:

$$\lambda_1 \wedge \lambda_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda_1(\mathbf{v}_1)\lambda_2(\mathbf{v}_2) - \lambda_2(\mathbf{v}_1)\lambda_1(\mathbf{v}_2).$$

⁵Natürlich ist „Funktion“ nur ein anderes Wort für „Abbildung“, aber wir gebrauchen die Bezeichnung „Funktion“ in erster Linie dann, wenn der Wertebereich aus Zahlen besteht.

Insbesondere ist $\lambda \wedge \lambda = 0$ für jede Linearform λ .

Ist $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n und $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis des Raumes $(\mathbb{R}^n)^*$ aller Linearformen auf dem \mathbb{R}^n , so sind die α^i gegeben durch das Gleichungssystem

$$\alpha^i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{Kronecker-Symbol})$$

Die zerlegbaren q-Formen

$$\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n,$$

bilden eine Basis des Raumes $A^q(\mathbb{R}^n)$. Eine beliebige q-Form ist also Linearkombination von zerlegbaren q-Formen, braucht aber selbst nicht zerlegbar zu sein.

Die duale Basis $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ zur Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ besteht aus den Linearformen ε^i mit

$$\varepsilon^i(x_1, \dots, x_n) = x_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Im Falle $n = 3$ ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\} & \text{ ist die Basis von } A^1(\mathbb{R}^3) = (\mathbb{R}^3)^*, \\ \{\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3, \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3\} & \text{ ist die Basis von } A^2(\mathbb{R}^3) \\ \text{und } \{\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3\} & \text{ ist die Basis von } A^3(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Allgemein ist $A^n(\mathbb{R}^n)$ 1-dimensional, mit Basis $\{\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n\}$, und es gilt:

$$\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Man kann man das Dach-Produkt von Linearformen erweitern zu einem Produkt zwischen beliebigen q-Formen, und dann gilt:

1. Die Abbildung $(\omega, \varphi) \mapsto \omega \wedge \varphi$ ist bilinear.
2. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$.
3. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$, wenn ω eine p -Form und φ eine q -Form ist.

Achtung! Ist etwa ω eine 2-Form auf dem \mathbb{R}^n und $n \geq 4$, so braucht $\omega \wedge \omega$ nicht $= 0$ zu sein.

Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, so wird die dazu duale lineare Abbildung $F^* : (\mathbb{R}^m)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ definiert durch

$$F^*(\lambda) := \lambda \circ F.$$

Offensichtlich ordnet F^* einer Linearform auf dem \mathbb{R}^m eine Linearform auf dem \mathbb{R}^n zu, und man kann nachrechnen, daß diese Zuordnung linear ist. Aber was soll man sich darunter vorstellen?

Anschaulich ist eine Linearform $\lambda \neq 0$ auf dem \mathbb{R}^m eine unendliche Schar von parallelen Hyperebenen. Eine dieser Hyperebenen ist $H_0 := \text{Ker}(\lambda)$. Weil $\lambda \neq 0$ ist, muß $\text{Im}(\lambda) = \mathbb{R}$

sein, und aus der Dimensionsformel folgt dann, daß $\text{Ker}(\lambda)$ tatsächlich die Dimension $m - 1$ hat. Kennen wir neben H_0 noch die Hyperebene $H_1 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \lambda(\mathbf{y}) = 1\}$, so können wir daraus die Linearform rekonstruieren.

Der Kern der Linearform $F^*(\lambda)$ ist die Urbildmenge $F^{-1}(H_0)$, und entsprechend ist $F^{-1}(H_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F^*(\lambda)(\mathbf{x}) = 1\}$. Entweder ist $F^*(\lambda) = 0$, dann ist $F^{-1}(H_0) = \mathbb{R}^n$ und $F^{-1}(H_1) = \emptyset$, oder es ist $F^*(\lambda) \neq 0$, dann sind $F^{-1}(H_0)$ und $F^{-1}(H_1)$ beides wieder Hyperebenen. Das zeigt deutlich, wie F^* geometrisch wirkt, und auch, daß wir Linearformen zwar „zurückholen“, aber nicht „vorwärts“ transportieren können. Denn das Bild $F(H)$ einer Hyperebene ist i.a. keineswegs wieder eine Hyperebene.

Beispiel:

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $F = F_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sowie $\lambda = \varepsilon^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\varepsilon^i(\mathbf{x}) = x_i$. Dann ist $F^*(\lambda) = \varepsilon^i \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$\varepsilon^i \circ F(\mathbf{x}) = \varepsilon^i(A \circ \mathbf{x}^\top)^\top = \varepsilon^i(\mathbf{z}_1(A) \circ \mathbf{x}^\top, \dots, \mathbf{z}_n(A) \circ \mathbf{x}^\top) = \mathbf{z}_i(A) \circ \mathbf{x}^\top.$$

Die Linearform $F^*(\varepsilon^i) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z}_i(A) \circ \mathbf{x}^\top = A_{i1}x_1 + \dots + A_{in}x_n$ können wir natürlich auch als Linearkombination der Basis-Formen $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ schreiben:

$$F^*(\varepsilon^i) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \varepsilon^j.$$

Wir können diese Beziehung nutzen, um eine neue Beschreibung der Determinante einer Matrix zu geben.

Die Zahl $\delta(j_1, \dots, j_n) \in \{-1, 0, 1\}$ sei definiert durch

$$\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_n} = \delta(j_1, \dots, j_n) \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n.$$

Sind unter den Indizes j_1, \dots, j_n wenigstens zwei gleiche, so ist $\delta(j_1, \dots, j_n) = 0$. Sind alle Indizes verschieden, also $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$, so gibt es eine Permutation $\sigma \in S_n$, so daß $j_i = \sigma(i)$ ist, für $i = 1, \dots, n$. Dann ist offensichtlich $\delta(j_1, \dots, j_n) = \text{sgn}(\sigma)$.

Behauptung: $F_A^*(\varepsilon^1) \wedge \dots \wedge F_A^*(\varepsilon^n) = (\det A) \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n$.

BEWEIS:

$$\begin{aligned} F_A^*(\varepsilon^1) \wedge \dots \wedge F_A^*(\varepsilon^n) &= \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^n A_{1j_1} \varepsilon^{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^n A_{nj_n} \varepsilon^{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} A_{1j_1} \cdot \dots \cdot A_{nj_n} \cdot \varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_n} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} A_{1j_1} \cdot \dots \cdot A_{nj_n} \cdot \delta(j_1, \dots, j_n) \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot A_{n\sigma(n)} \right) \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \\ &= \det(A) \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n. \quad \square \end{aligned}$$

Wir führen jetzt das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 ein und gehen dabei etwas anders als in Kapitel III vor.

Existenz des Vektorproduktes

Sind \mathbf{v}, \mathbf{w} zwei beliebige Vektoren des \mathbb{R}^3 , so gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, so daß gilt:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{a} = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a}) \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Es ist $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$.

BEWEIS: Wenn es einen Vektor mit der gewünschten Eigenschaft gibt, so muß

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{e}_i = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_i) \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

gelten. Das legt die 3 Komponenten von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ schon eindeutig fest, und zwar so, wie es oben im Satz angegeben wurde.

Ist $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ ein beliebiger Vektor des \mathbb{R}^3 , so ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{a} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_i) \\ &= \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i) \\ &= \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Damit ist auch die Existenz von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ vollständig bewiesen. □

Eigenschaften des Vektorproduktes

1. $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ist bilinear und alternierend.
2. $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.
3. Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^3 mit $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1$, so gilt:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2.$$

BEWEIS: 1) ergibt sich aus den Eigenschaften der Determinante.

2) Es ist $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ und $\mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$.

3) Aus (2) ergibt sich, daß $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ auf \mathbf{v} und \mathbf{w} senkrecht steht. Es gibt also Konstanten α, β, γ , so daß gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 &= \alpha \cdot \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 &= \beta \cdot \mathbf{a}_1 \\ \text{und } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 &= \gamma \cdot \mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

Und weiter ist

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha \cdot \mathbf{a}_3) \bullet \mathbf{a}_3 \\ &= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \bullet \mathbf{a}_3 \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1, \\ \beta &= (\beta \cdot \mathbf{a}_1) \bullet \mathbf{a}_1 \\ &= (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \bullet \mathbf{a}_1 \\ &= \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) = 1, \\ \text{und } \gamma &= (\gamma \cdot \mathbf{a}_2) \bullet \mathbf{a}_2 \\ &= (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \bullet \mathbf{a}_2 \\ &= \det(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 1. \end{aligned}$$

□

Die Isomorphie des \mathbb{R}^3 mit $A^1(\mathbb{R}^3)$ und $A^2(\mathbb{R}^3)$.

1. Durch $\mathbf{a} \mapsto \omega_{\mathbf{a}}$, mit $\omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) := \mathbf{a} \bullet \mathbf{v}$, wird ein Isomorphismus von \mathbb{R}^3 auf $A^1(\mathbb{R}^3) = (\mathbb{R}^3)^*$ definiert.
2. Durch $\mathbf{a} \mapsto \eta_{\mathbf{a}}$, mit $\eta_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{a} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, wird ein Isomorphismus von \mathbb{R}^3 auf $A^2(\mathbb{R}^3)$ definiert.

BEWEIS: Es ist offensichtlich, daß $\omega_{\mathbf{a}}$ eine 1-Form und $\eta_{\mathbf{a}}$ eine 2-Form ist. Und man sieht auch sofort, daß die Abbildungen $\mathbf{a} \mapsto \omega_{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{a} \mapsto \eta_{\mathbf{a}}$ linear sind. Es bleibt noch zu zeigen, daß sie bijektiv, also Isomorphismen sind. Bei der ersten Abbildung wissen wir das schon lange, vgl. etwa Kapitel I, §7.

Ist $\eta_{\mathbf{a}} = 0$, so ist $\det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a}) = 0$ für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Dann muß $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ sein, denn jeden Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ könnte man zu einer Basis $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a}\}$ ergänzen. Also ist die lineare Abbildung $\mathbf{a} \mapsto \eta_{\mathbf{a}}$ injektiv, und da \mathbb{R}^3 und $A^2(\mathbb{R}^3)$ beide 3-dimensional sind, muß es sich sogar um einen Isomorphismus handeln. □

Es gilt:

<p>Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, so ist</p> $\omega_{\mathbf{a}} = a_1 \varepsilon^1 + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3$ <p>und</p> $\eta_{\mathbf{a}} = a_1 \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + a_2 \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + a_3 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$

Der BEWEIS ist klar, nach Definition ist

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \\ \text{und } \eta_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a_1(v_2w_3 - v_3w_2) + a_2(v_3w_1 - v_1w_3) + a_3(v_1w_2 - v_2w_1).\end{aligned}$$

Hilfssatz

$$\omega_{\mathbf{a}} \wedge \omega_{\mathbf{b}} = \eta_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}.$$

BEWEIS: Wir rechnen die Formel „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{a}} \wedge \omega_{\mathbf{b}} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \varepsilon^i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 b_j \varepsilon^j \right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2) \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + (a_3b_1 - a_1b_3) \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + (a_1b_2 - a_2b_1) \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \\ &= \eta_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}.\end{aligned}$$

□

Weitere Eigenschaften des Vektorproduktes

1. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}.$
2. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \eta_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= (\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \cdot \omega_{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) - \omega_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \cdot \omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{v} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{y}) - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} \bullet \mathbf{y}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2) Sind \mathbf{v} und \mathbf{w} linear abhängig, so kommt auf beiden Seiten Null heraus. Seien also \mathbf{v} und \mathbf{w} linear unabhängig. Wendet man darauf das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, so erhält man eine ON-Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ des von \mathbf{v} und \mathbf{w} aufgespannten Unterraums. Mit $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ erhält man eine ON-Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ des \mathbb{R}^3 , und es gibt Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ und δ , so daß gilt:

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \gamma \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \cdot \mathbf{b} + \delta \cdot \mathbf{c}.$$

Außerdem ist

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \end{pmatrix} = 1,$$

also $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{c} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Damit folgt:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\|\mathbf{v}\| \beta \cdot \mathbf{c}) \times (\gamma \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \cdot \mathbf{b} + \delta \cdot \mathbf{c}) = (\|\mathbf{v}\| \beta) \cdot (\gamma \cdot \mathbf{b} - \varepsilon \cdot \mathbf{a}),$$

sowie

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}) \mathbf{w} &= (\|\mathbf{v}\| \gamma) \cdot (\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}) \\ &= (\|\mathbf{v}\| \gamma \alpha) \cdot \mathbf{a} + (\|\mathbf{v}\| \gamma \beta) \cdot (\gamma \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \mathbf{v} &= (\alpha \gamma + \beta \varepsilon) \cdot (\|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{a}) \\ &= (\|\mathbf{v}\| \gamma \alpha) \cdot \mathbf{a} + (\|\mathbf{v}\| \beta \varepsilon) \cdot (\varepsilon \cdot \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das die gewünschte Formel. □

Jetzt können wir mit der Theorie der Differentialformen beginnen.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine beliebig oft differenzierbare Funktion

$$\omega : B \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Differentialform vom Grad p* (oder kurz *p -Form*) auf B , falls für jedes $\mathbf{x} \in B$ gilt:

$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \mapsto \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ ist eine alternierende p -Form auf dem \mathbb{R}^n .

Bemerkung: Gelegentlich lassen wir auch Differentialformen zu, die nur endlich oft differenzierbar oder vielleicht sogar nur stetig sind.

Ist $p = 1$, so liegt eine Differentialform vom Grad 1 vor, wie wir sie in §2 betrachtet haben. Die 1-Form $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \varepsilon^i(\mathbf{v}) = v_i$ wird mit dx_i bezeichnet, und analog die p -Form $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \mapsto (\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ mit $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.

Offensichtlich kann man dann jede Differentialform vom Grad p in der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

schreiben, mit Funktionen $\omega_{i_1 \dots i_p}$, die so oft differenzierbar sind wie ω es ist.

Sind $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$dx_i \wedge dx_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b_j - a_j b_i = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}.$$

Auf einer offenen Menge B des \mathbb{R}^3 gibt es nur wenige Sorten von Differentialformen:

- 0-Formen sind differenzierbare Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$.
- Ist $\mathfrak{A} = (\text{id}_B, \mathbf{A})$ ein differenzierbares Vektorfeld auf B mit $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, so ordnen wir dem die 1-Form $\omega_{\mathbf{A}}$ zu, mit

$$\omega_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{A} \bullet \mathfrak{F}.$$

Dann ist $\omega_{\mathbf{A}} = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$.

Jede 1-Form sieht so aus!

- Einem Vektorfeld \mathfrak{A} können wir auch eine 2-Form $\eta_{\mathbf{A}}$ zuordnen, mit

$$\eta_{\mathbf{A}}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}) := \mathfrak{A} \bullet (\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}).$$

Dann ist $\eta_{\mathbf{A}} = A_1 dx_2 \wedge dx_3 + A_2 dx_3 \wedge dx_1 + A_3 dx_1 \wedge dx_2$.
(Man beachte die zyklischen Vertauschungen !)

Jede 2-Form kann auf diese Weise einem Vektorfeld zugeordnet werden.

- Wir setzen $dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ („Volumenelement“). Dann hat jede 3-Form die Gestalt $\varphi = g dV$. Man beachte bei dieser Schreibweise, daß dV kein totales Differential einer Funktion V ist!!

Auch das Dach-Produkt kann man von den alternierenden Multilinearformen auf Differentialformen übertragen. Dann gilt:

- Die Abbildung $(\omega, \varphi) \mapsto \omega \wedge \varphi$ ist bilinear.
- Das Dachprodukt ist assoziativ: $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$.
- Das Dachprodukt ist antikommutativ: $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$, wenn ω eine p -Form und φ eine q -Form ist.

Insbesondere gilt $\omega \wedge \omega = 0$ für jede 1-Form ω .

Im \mathbb{R}^3 gilt:

$$\omega_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}} = \eta_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$$

und

$$\eta_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}} = \omega_{\mathbf{A}} \wedge \eta_{\mathbf{B}} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) dV.$$

Die 1. Formel kennen wir schon. Die 2. Formel erhält man durch direktes Nachrechnen.

Als nächstes betrachten wir *das totale Differential* (bzw. *die Poincaré-Ableitung*) einer Differentialform.

Jeder p -Form ω kann nach den folgenden Regeln eine $(p+1)$ -Form $d\omega$ zugeordnet werden:

- Ist f eine 0-Form, also eine differenzierbare Funktion, so definiert man die 1-Form df durch $df := \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$. Das ist das totale Differential, das wir schon aus §2 kennen.

2. Ist $\omega = a \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, mit einer differenzierbaren Funktion a , so setzt man $d\omega := da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.

(Insbesondere ist dann $d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0$)

3. d soll additiv sein: Ist $\omega = \omega_1 + \omega_2$, so ist $d\omega = d\omega_1 + d\omega_2$.

Bekanntlich besitzt jede p -Form ω eine **eindeutige** Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Nach den angegebenen Regeln hat dann $d\omega$ die Gestalt

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Insbesondere gilt:

Eigenschaften der Poincaré-Ableitung

1. $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$ für Funktionen f .
2. $d(\varphi \wedge \omega) = d\varphi \wedge \omega + (-1)^p \varphi \wedge d\omega$ für p -Formen φ .
3. $dd\omega = 0$ für jede Differentialform ω .

BEWEIS:

Es reicht, die Behauptungen für Differentialformen vom Typ $\omega = a \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q$ zu beweisen.

- 1) Ist f eine Funktion, so gilt:

$$\begin{aligned} d(f \cdot \omega) &= d((f \cdot a) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q) \\ &= d(f \cdot a) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q \\ &= (a \cdot df + f \cdot da) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q \\ &= df \wedge (a \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q) + f \cdot (da \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q) \\ &= df \wedge \omega + f \cdot d\omega. \end{aligned}$$

- 2) Ist $\varphi = a \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ und $\omega = b \cdot dx_{p+1} \wedge \dots \wedge dx_{p+q}$, so folgt:

$$\begin{aligned} d(\varphi \wedge \omega) &= d((a \cdot b) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p+q}) \\ &= d(a \cdot b) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p+q} \\ &= (da \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) \wedge (b \cdot dx_{p+1} \wedge \dots \wedge dx_{p+q}) \\ &\quad + (a \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) \wedge ((-1)^p \cdot db \wedge dx_{p+1} \wedge \dots \wedge dx_{p+q}) \\ &= d\varphi \wedge \omega + (-1)^p \cdot \varphi \wedge d\omega. \end{aligned}$$

- 3) Zunächst gilt für eine Funktion f :

$$ddf = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i + \sum_{j>i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{j<i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
d(d(a \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p)) &= d(da \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) \\
&= dda \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p - da \wedge d(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Im Falle $n = 3$ wollen wir den Zusammenhang zwischen der Poincaré-Ableitung und den Differentialoperatoren der Vektoranalysis herstellen. Dabei identifizieren wir Vektorfelder mit ihren Richtungskomponenten.

Die Operatoren der klassischen Vektoranalysis

f sei eine differenzierbare Funktion, und \mathbf{A}, \mathbf{B} seien Vektorfelder auf einer offenen Menge des \mathbb{R}^3 . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
df &= \omega_{\mathbf{grad} f}, \\
d(\omega_{\mathbf{A}}) &= \eta_{\mathbf{rot} \mathbf{A}} \\
\text{und } d(\eta_{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{div} \mathbf{B})dV.
\end{aligned}$$

BEWEIS: Die erste Formel ist trivial, offensichtlich ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \omega_{\mathbf{grad} f}.$$

Die Vektorfelder \mathbf{A} und \mathbf{B} seien durch $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ und $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
d(\omega_{\mathbf{A}}) &= d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) \\
&= dA_1 \wedge dx_1 + dA_2 \wedge dx_2 + dA_3 \wedge dx_3 \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \frac{\partial A_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \\
&= \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \eta_{\mathbf{rot} \mathbf{A}}.
\end{aligned}$$

Und weiter ist

$$\begin{aligned} d(\eta_{\mathbf{B}}) &= d(B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= dB_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dB_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dB_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\mathbf{div} \mathbf{B}) dV. \end{aligned}$$

□

Formeln der klassischen Vektoranalysis

Sei f eine differenzierbare Funktion und \mathbf{A} ein Vektorfeld. Dann gilt:

1. $\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} = 0$.

BEWEIS:

$$1) 0 = dd f = d(\omega_{\mathbf{grad} f}) = \eta_{\mathbf{rot} \mathbf{grad} f}, \text{ also } \mathbf{rot} \mathbf{grad} f = \mathbf{0}.$$

$$2) 0 = dd \omega_{\mathbf{A}} = d(\eta_{\mathbf{rot} \mathbf{A}}) = (\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{A}) dV, \text{ also } \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} = 0.$$

□

Eine Interpretation der Operatoren \mathbf{div} und \mathbf{rot} werden wir später geben, dazu sind noch weitere Vorbereitungen nötig.

Definition:

Eine Differentialform ω vom Grad p heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ ist. Sie heißt *exakt*, wenn es eine Differentialform φ vom Grad $p - 1$ mit $d\varphi = \omega$ gibt.

Offensichtlich ist jede exakte Differentialform geschlossen, das folgt aus der Formel $dd\omega = 0$.

Man interessiert sich aber auch dafür, ob umgekehrt jede geschlossene Differentialform exakt ist. Unter gewissen Umständen ist das tatsächlich der Fall:

Lemma von Poincaré

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, ω eine p -Form auf U und $d\omega = 0$. Dann gibt es eine $(p - 1)$ -Form φ auf U mit $d\varphi = \omega$.

Den allgemeinen Beweis werden wir hier nicht ausführen. In einem Spezialfall haben wir ihn praktisch schon geliefert:

Sei $\omega = \omega_{\mathbf{A}}$ und $d\omega = 0$. Dann ist $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$, und wir haben in §1 gezeigt, daß es eine Funktion f mit $\mathbf{grad} f = \mathbf{A}$ gibt. Offensichtlich ist nun $df = \omega$.

Wozu brauchen wir Differentialformen?

Am Anfang dieses Paragraphen habe ich versprochen, daß wir mit Hilfe von Differentialformen über Flächen integrieren werden. Diesem Ziel sollten wir uns langsam etwas nähern.

Die größte Schwierigkeit stellt dabei der Flächenbegriff selbst dar. Wir benutzen zunächst nur eine provisorische Definition. Unter einem p -dimensionalen (parametrisierten) Flächenstück verstehen wir eine stetige oder differenzierbare Abbildung φ von einem nicht-entarteten Quader $Q \subset \mathbb{R}^p$ in den \mathbb{R}^n .

Ein 0-dimensionales Flächenstück ist also eine Abbildung $\varphi : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Stetigkeit oder Differenzierbarkeit sind hier irrelevant, und da φ durch den Punkt $\mathbf{y} := \varphi(0)$ vollständig festgelegt ist, kann man auch sagen: Ein 0-dimensionales Flächenstück ist ein Punkt \mathbf{y} im \mathbb{R}^n . Eine 0-Form ist eine differenzierbare Funktion f , die in der Nähe von \mathbf{y} definiert ist. Wir „integrieren“ f über \mathbf{y} , indem wir f an der Stelle \mathbf{y} auswerten. Mit anderen Worten:

$$\int_{\varphi} f := f(\varphi(0)) = f(\mathbf{y}).$$

Ein differenzierbares 1-dimensionales Flächenstück ist eine Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir wissen schon, wie man eine 1-Form ω über α integriert:

$$\int_{\alpha} A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n = \int_a^b (A_1(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) + \cdots + A_n(\alpha(t)) \cdot \alpha'_n(t)) dt.$$

Besonders einfach wird die Situation, wenn $\alpha = \text{id}_{[a,b]}$ und $\omega = f dt$ ist. Dann erhalten wir:

$$\int_{\text{id}_{[a,b]}} f dt = \int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f d\mu_1.$$

Wir haben in §2 gesehen, daß es zwar nicht auf die genaue Parametrisierung des Weges ankommt, wohl aber auf die „Orientierung“. Deshalb integrieren wir ab der Dimension 1 lieber über das parametrisierte Flächenstück $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ als über die Spur $|\varphi| := \varphi(Q)$.

Wir nehmen nun an, wir wüßten schon, wie man p -Formen über p -dimensionale Flächenstücke integriert. Dann könnten wir jeder p -Form ω eine Funktion

$$I_{\omega} : \mathcal{C}_p(B) := \{ p\text{-dim. Flächenstücke } \varphi \text{ in } B \} \rightarrow \mathbb{R}$$

zuordnen, durch

$$I_{\omega}(\varphi) := \int_{\varphi} \omega.$$

In Wirklichkeit kennen wir bisher die Bedeutung der rechten Seite nur im Falle $p = 0$ und $p = 1$. Aber zumindest in einem Spezialfall können wir uns auch bei höherem p denken, wie die Definition aussehen sollte:

Ist $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ eine p -Form auf dem \mathbb{R}^p , so setzen wir

$$I_{\omega}(\text{id}_Q) := \int_Q f d\mu_p.$$

Ist f eine 0-Form auf einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : \{0\} \rightarrow B$ ein 0-dimensionales Flächenstück in B mit $\varphi(0) = \mathbf{y}$, so gilt:

$$I_f(\varphi) = f(\mathbf{y}) = f(\varphi(0)) = (f \circ \varphi)(0) = I_{f \circ \varphi}(\text{id}_0).$$

Wir bezeichnen $f \circ \varphi$ auch mit $\varphi^*(f)$.

Etwas entsprechendes wollen wir in höheren Dimensionen einführen. Ist ω eine p -Form auf einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : Q \rightarrow B$ ein p -dimensionales Flächenstück, so suchen wir eine p -Form $\varphi^*(\omega)$ auf Q , so daß gilt:

$$I_\omega(\varphi) = I_{\varphi^*(\omega)}(\text{id}_Q), \quad \text{also} \quad \int_\varphi \omega = \int_{\text{id}_Q} \varphi^*(\omega).$$

Wenn wir $\varphi^*(\omega)$ haben, so kennen wir die rechte Seite und damit auch die linke Seite, also das Integral von ω über φ .

Wie muß $\varphi^*(\omega)$ aussehen? Es soll $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ sein, und

$$\varphi^*(A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n) = ((A_1 \circ \varphi) \cdot \varphi'_1 + \dots + (A_n \circ \varphi) \cdot \varphi'_n) dt,$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} \varphi^*(df) &= \varphi^*(f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_n} dx_n) \\ &= ((f_{x_1} \circ \varphi) \cdot \varphi'_1 + \dots + (f_{x_n} \circ \varphi) \cdot \varphi'_n) dt \\ &= (f \circ \varphi)' dt \\ &= d(f \circ \varphi). \end{aligned}$$

Das liefert genügend viele Hinweise.

Definition:

Sei $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen des \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{R}^n und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann definiert man:

1. $\Phi^*(df) := d(f \circ \Phi)$.
2. $\Phi^*(f \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}) := (f \circ \Phi) \cdot d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_p}$.
3. $\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = (\Phi^*\omega_1) + (\Phi^*\omega_2)$.

Die drei Bedingungen reichen aus, um die sogenannte „Liftung“ $\Phi^*\omega$ für jede Differentialform ω zu berechnen. Es ist

$$\Phi^*\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (a_{i_1 \dots i_p} \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_p}.$$

Insbesondere gilt:

Eigenschaften der „Liftung“ von Differentialformen

1. $\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Phi^*\omega_1) \wedge (\Phi^*\omega_2)$.
2. $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$.
3. Ist $\Psi : W \rightarrow U$ und $\Phi : U \rightarrow V$ differenzierbar, so ist

$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^*(\Phi^*\omega).$$

BEWEIS: Wir brauchen die Formeln wieder nur an Hand spezieller Differentialformen nachzuprüfen.

1) Die Verträglichkeit mit dem Dachprodukt ist trivial, denn es ist ja

$$(f \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}) \wedge (g \cdot dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}) = (f \cdot g) \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}.$$

2) Daß man Φ^* mit der Poincaré-Ableitung vertauschen kann, sieht man so:

$$\begin{aligned} d(\Phi^*(a \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p)) &= d((a \circ \Phi) \, d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_p) \\ &= d(a \circ \Phi) \wedge d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_p \\ &= \Phi^*(da) \wedge \Phi^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) \\ &= \Phi^*(da \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) \\ &= \Phi^*(d(a \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p)). \end{aligned}$$

3) Schließlich ist

$$(\Phi \circ \Psi)^*df = d(f \circ (\Phi \circ \Psi)) = d((f \circ \Phi) \circ \Psi) = \Psi^*(d(f \circ \Phi)) = \Psi^*(\Phi^*(df)).$$

Hieraus ergibt sich die gewünschte Formel sehr leicht auch für beliebige p -Formen. □

Beispiele:

1. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg und $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ eine 1-Form. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha^*(\omega) &= (a_1 \circ \alpha) \, d\alpha_1 + \dots + (a_n \circ \alpha) \, d\alpha_n \\ &= ((a_1 \circ \alpha)\alpha'_1 + \dots + (a_n \circ \alpha)\alpha'_n) \, dt \\ &= \omega(\dot{\alpha}(t)) \, dt, \end{aligned}$$

also

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b \omega(\dot{\alpha}(t)) \, dt = \int_{[a,b]} \alpha^*\omega.$$

2. Sei $j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $n > p$) definiert durch

$$j(x_1, \dots, x_p) := (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0).$$

Sei weiter $\omega := f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q$ eine q -Form auf dem \mathbb{R}^n .

Wir können schreiben: $j(x_1, \dots, x_p) = (j_1(x_1, \dots, x_p), \dots, j_n(x_1, \dots, x_p))$, mit

$$j_i(x_1, \dots, x_p) := \begin{cases} x_i & \text{für } i = 1, \dots, p \\ 0 & \text{für } i > p. \end{cases}$$

Also ist

$$j^*(dx_i) = d(j_i) = \begin{cases} dx_i & \text{für } i = 1, \dots, p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$j^*\omega = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_q & \text{falls } q \leq p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann $j^*\omega$ als „Einschränkung“ von ω auf den Unterraum $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$ auffassen. Formen vom Grad $> p$ verschwinden dabei, denn es kann auf dem \mathbb{R}^p keine Formen vom Grad $> p$ geben.

3. $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $\Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (Polarkoordinaten). Für $\omega := f dx \wedge dy$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= (f \circ \Phi) d(r \cdot \cos \theta) \wedge d(r \cdot \sin \theta) \\ &= (f \circ \Phi) \cdot (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= (f \circ \Phi) \cdot (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) dr \wedge d\theta \\ &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

4. Wir wollen das vorige Beispiel verallgemeinern. Sei $\Phi : U \rightarrow V$ eine bijektive differenzierbare Abbildung mit nirgends verschwindender Funktionaldeterminante. Dann ist auch die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ differenzierbar, und man nennt Φ einen *Diffeomorphismus*.

Ist $\mathbf{x} \in U$ und $\mathbf{y} := \Phi(\mathbf{x}) \in V$, so ist

$$F := D\Phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus, der bezüglich der Standard-Basen durch die Funktionalmatrix $\Phi'(\mathbf{x})$ beschrieben wird.

Sei $F^* : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ definiert durch $F^*(\lambda) := \lambda \circ F$ (vgl. S. 67/68). Dann ist

$$F^*(\varepsilon^i) = \varepsilon^i \circ F = D\Phi_i(\mathbf{x}) = (d\Phi_i)_{\mathbf{x}}.$$

Weil außerdem $(dx_i)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_i = \varepsilon^i(\mathbf{v})$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} (d\Phi_1)_{\mathbf{x}} \wedge \dots \wedge (d\Phi_n)_{\mathbf{x}} &= F^*(\varepsilon^1) \wedge \dots \wedge F^*(\varepsilon^n) \\ &= \det(\Phi'(\mathbf{x})) \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n \\ &= \det(\Phi'(\mathbf{x})) (dx_1)_{\mathbf{x}} \wedge \dots \wedge (dx_n)_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Das ergibt die Formel

$$\boxed{\Phi^*(f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (f \circ \Phi) \cdot \det \Phi' dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.}$$

Bemerkung: Manchmal ist auch folgendes nützlich:

$$(\Phi^* df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = df(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{v})).$$

Zum BEWEIS muß man nur die Definitionen einsetzen:

$$\begin{aligned} (\Phi^* df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= d(f \circ \Phi)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &= (\nabla(f \circ \Phi)(\mathbf{x})) \bullet \mathbf{v} \\ &= (\nabla f(\Phi(\mathbf{x}))) \circ \Phi'(\mathbf{x}) \circ \mathbf{v}^\top \\ &= (\nabla f(\Phi(\mathbf{x}))) \circ (D\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{v}))^\top \\ &= (\nabla f(\Phi(\mathbf{x}))) \bullet (D\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{v})) \\ &= df(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{v})). \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir uns dem Flächenbegriff zu.

Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p] \subset \mathbb{R}^p$ ein abgeschlossener Quader. Eine Abbildung $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar, falls es eine offene Umgebung $U = U(Q) \subset \mathbb{R}^p$ gibt, so daß φ sogar auf U definiert und differenzierbar ist.

Definition:

Ein *parametrisiertes p -dimensionales Flächenstück* (oder kurz ein *p -Simplex*) im \mathbb{R}^n ist eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Das Simplex heißt *regulär*, falls gilt:

$$\varphi|_{\overset{\circ}{Q}} \text{ ist injektiv, und } \operatorname{rg} \varphi'(\mathbf{x}) = p \text{ für alle } \mathbf{x} \in \overset{\circ}{Q}.$$

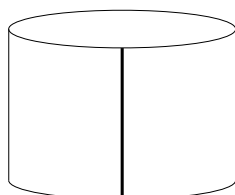
Das Simplex heißt *entartet*, falls φ von höchstens $p - 1$ Variablen abhängt oder $\operatorname{rg} \varphi'(\mathbf{x}) < p$ für alle $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{Q}$ ist.

Die (kompakte) Menge $|\varphi| := \varphi(Q)$ bezeichnet man als die *Spur* von φ .

Offensichtlich kann ein entartetes Simplex nicht regulär sein. Ein nicht-entartetes Simplex braucht allerdings auch nicht unbedingt regulär zu sein.

Beispiele:

1. Sei $p = 1$, $Q = [a, b]$. Ein 1-Simplex $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nichts anderes als ein zweimal stetig differenzierbarer Weg. Ist φ entartet, so besteht $|\varphi|$ nur aus einem Punkt. Ist φ regulär, so ist φ ein glatter Weg.
2. $Q = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ und $\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v)$. Das ist ein 2-Simplex im \mathbb{R}^3 .



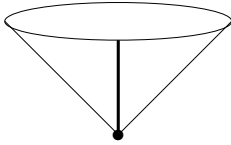
Es ist

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist φ injektiv und $\text{rg } \varphi'(u, v) = 2$ auf $\overset{\circ}{Q}$. Also ist φ ein reguläres Flächenstück. Die Spur von φ ist ein Zylinder vom Radius 1 und der Höhe 2.

3. Sei $Q := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ und $\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v)$.

Hier ist

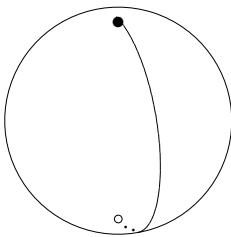


$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -v \sin(u) & \cos(u) \\ v \cos(u) & \sin(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\text{rg } \varphi'(u, v) = 2$ für $v \neq 0$ und φ injektiv auf $\overset{\circ}{Q}$.

Es entsteht ein Kegel mit einer Spitze im Nullpunkt.

4. Sei $Q := [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\varphi(u, v) := (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$. Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung der Einheitssphäre $S^2 = \partial B_1(\mathbf{0})$.

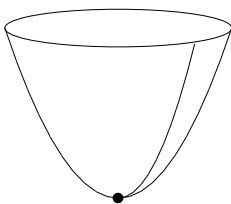


Es ist

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \cos(v) & -\cos(u) \sin(v) \\ \cos(u) \cos(v) & -\sin(u) \sin(v) \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Für $|v| < \frac{\pi}{2}$ ist $\cos(v) \neq 0$ und daher $\text{rg } \varphi'(u, v) = 2$. Auch diese Parametrisierung ist regulär.

5. Sei $Q := [0, 2\pi] \times [0, h]$, $h > 0$, und $\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v^2)$. Das ergibt ein Paraboloid:



Es ist

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -v \sin(u) & \cos(u) \\ v \cos(u) & \sin(u) \\ 0 & 2v \end{pmatrix},$$

also $\text{rg } \varphi'(u, v) = 2$ für $v \neq 0$.

6. Jeder Diffeomorphismus φ eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^3$ auf eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^3$ ist ein reguläres 3-Simplex im \mathbb{R}^3 .
7. Wir definieren für $i = 1, \dots, p$ den Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^{p-1}$ durch

$$Q_i := [a_1, b_1] \times \dots \times [\widehat{a_i, b_i}] \times \dots \times [a_p, b_p].$$

Dabei bedeutet das Dach über dem i -ten Faktor, daß dieser weggelassen werden soll.

Die $(p-1)$ -Simplizes $\sigma_{i,u} : Q_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $\sigma_{i,o} : Q_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ seien definiert durch

$$\begin{aligned}\sigma_{i,u}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) &:= (x_1, \dots, a_i, \dots, x_p) \\ \text{und } \sigma_{i,o}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) &:= (x_1, \dots, b_i, \dots, x_p).\end{aligned}$$

Man nennt $\sigma_{i,u}$ die parametrisierte i -te untere Seite und $\sigma_{i,o}$ die parametrisierte i -te obere Seite von Q . Insgesamt erhält man so die $2n$ parametrisierten Seiten von Q . Ihre Spuren bezeichnet man mit

$$\partial_{i,u}Q := \sigma_{i,u}(Q_i) \quad \text{und} \quad \partial_{i,o}Q := \sigma_{i,o}(Q_i).$$

Das sind die wirklichen $(p-1)$ -dimensionalen Seiten des Quaders.

Ist schließlich $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein beliebiges p -Simplex, so nennt man die $(p-1)$ -Simplizes $\varphi_{i,u} := \varphi \circ \sigma_{i,u}$ und $\varphi_{i,o} := \varphi \circ \sigma_{i,o}$ die Seiten von φ .

Die Seiten eines Simplex können regulär sein, wie z.B. im Falle des Zylinders:

$$\begin{aligned}\varphi_{1,u}(v) &= (1, 0, v), \\ \varphi_{1,o}(v) &= (1, 0, v), \\ \varphi_{2,u}(u) &= (\cos(u), \sin(u), -1) \\ \text{und } \varphi_{2,o}(u) &= (\cos(u), \sin(u), 1).\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist hier $\varphi_{1,u} = \varphi_{1,o}$. Entlang dieser Seite wird der Zylinder zusammengeklebt.

Im Falle des Kegels ist $\varphi_{2,u}(u) \equiv (0, 0, 0)$ entartet. Das ergibt die Kegelspitze. Bei der Kugel sind Nord- und Südpol zwei entartete Seiten, die entlang zweier nicht-entarteter Seiten in Form eines Meridians miteinander verbunden werden.

Ist $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein reguläres p -Simplex, so bezeichnet man die Menge $\varphi(\overset{\circ}{Q})$ mit $|\overset{\circ}{\varphi}|$. Man beachte, daß dies im Falle $p < n$ keine offene Menge im \mathbb{R}^n ist! Ist φ entartet, so setzen wir $|\overset{\circ}{\varphi}| := \emptyset$.

Definition:

$P, Q \subset \mathbb{R}^p$ seien abgeschlossene Quader, $\Phi : P \rightarrow Q$ eine bijektive zweimal stetig differenzierbare Abbildung.

Φ heißt eine *Parametertransformation*, falls $\det(\Phi'(\mathbf{x})) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in P$ ist.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß $\Phi^{-1} : Q \rightarrow P$ ebenfalls eine Parametertransformation ist. Außerdem gilt:

Satz

Ist $\Phi : P \rightarrow Q$ eine Parametertransformation, so besitzt $\det(\Phi')$ auf ganz P das gleiche Vorzeichen.

BEWEIS: Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ zwei beliebige Punkte. Dann gehört auch die Verbindungsstrecke von \mathbf{x} und \mathbf{y} zu P , und

$$f(t) := \det \Phi'(\mathbf{x} + t \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

ist eine stetige Funktion auf $[0, 1]$. Wäre etwa $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$, so müßte nach dem Zwischenwertsatz $f(t) = 0$ für ein $t \in (0, 1)$ sein. Das ist aber nach Voraussetzung ausgeschlossen. Also haben $f(0) = \det \Phi'(\mathbf{x})$ und $f(1) = \det \Phi'(\mathbf{y})$ das gleiche Vorzeichen.

□

Ist $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein p -Simplex und $\Phi : P \rightarrow Q$ eine Parametertransformation, so ist auch $\psi := \varphi \circ \Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein p -Simplex, und es ist $|\varphi| = |\psi|$.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : Q \rightarrow B$ ein p -Simplex und ω eine Differentialform vom Grad p auf B . Dann definiert man

$$\int_{\varphi} \omega := \int_Q \varphi^* \omega.$$

Im Falle $p = 1$ bekommt man so das schon bekannte Kurvenintegral.

Ist $p = n$, so ist $\varphi'(\mathbf{x})$ stets eine quadratische Matrix. Ist φ außerdem regulär, also $\det(\varphi'(\mathbf{x})) \neq 0$ für $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{Q}$, so folgt (genauso wie bei den Parametertransformationen), daß $\text{sgn}(\det(\varphi'(\mathbf{x}))) \in \{\pm 1\}$ auf $\overset{\circ}{Q}$ konstant sein muß. Ist $\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, so folgt:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_Q f(\varphi(\mathbf{x})) \cdot \det \varphi'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \text{sgn}(\det \varphi') \cdot \int_{\varphi(Q)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Allgemein bezeichnet man $\int_{\varphi} \omega$ als *Flächenintegral*.

Parametertransformationen in Flächenintegralen

Ist $\varphi : Q \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ ein p -Simplex, ω eine p -Form auf B und $\Phi : P \rightarrow Q$ eine Parametertransformation, so gilt:

$$\int_{\varphi \circ \Phi} \omega = \text{sgn}(\det \Phi') \cdot \int_{\varphi} \omega.$$

BEWEIS: Sei $\varphi^* \omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \circ \Phi} \omega &= \int_P (\varphi \circ \Phi)^* \omega \\ &= \int_P \Phi^* (\varphi^* \omega) \\ &= \int_P \Phi^* (f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) \\ &= \int_P f(\Phi(\mathbf{x})) \cdot \det \Phi'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sgn}(\det \Phi') \cdot \int_Q f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} && \text{(Transformationsformel)} \\
&= \operatorname{sgn}(\det \Phi') \cdot \int_Q \varphi^* \omega \\
&= \operatorname{sgn}(\det \Phi') \cdot \int_\varphi \omega.
\end{aligned}$$

□

Wie bei den Kurvenintegralen bedeutet dieser Satz, daß eine Änderung der Orientierung zu einem Vorzeichenwechsel führt. Aber was versteht man überhaupt unter der Orientierung eines Flächenstückes? Um das zu erklären, müssen wir etwas weiter ausholen.

Sei V ein p -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Eine *orientierte Basis* von V ist ein aus den Elementen einer Basis von V gebildetes p -Tupel (a_1, \dots, a_p) . Es kommt hier also auf die Reihenfolge der Vektoren an!

Definition:

Zwei (orientierte) Basen $A = (a_1, \dots, a_p)$ und $B = (b_1, \dots, b_p)$ des Vektorraumes V heißen *gleichorientiert*, wenn die Determinante der Basiswechsellmatrix $W_{A,B}$ positiv ist.

Dabei ist $W_{A,B}$ gegeben durch die formale Gleichung

$$(b_1, \dots, b_p) = (a_1, \dots, a_p) \circ W_{A,B}.$$

Sei \mathfrak{B} die Menge aller (orientierten) Basen von V , $\mathfrak{B}_+(A)$ die Menge aller derjenigen Basen, die zu A gleichorientiert sind, und $\mathfrak{B}_-(A) := \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_+(A)$.

$A_1 := (-a_1, a_2, \dots, a_p)$ gehört offensichtlich zu $\mathfrak{B}_-(A)$. Sei nun C eine beliebige orientierte Basis aus $\mathfrak{B}_-(A)$. Dann ist $W_{A_1,A} \circ W_{A,C} = W_{A_1,C}$, also $\det W_{A_1,C} > 0$. Das bedeutet, daß eine beliebige Basis entweder zu A oder zu A_1 gleichorientiert ist. Wir erhalten zwei Klassen von Basen und sprechen von zwei möglichen Orientierungen von V .

Die Klasseneinteilung von \mathfrak{B} ist zwar unabhängig von der Ausgangsbasis A , aber es ist i.a. nicht möglich, eine der beiden Klassen auszuzeichnen. Eine Ausnahme bildet der \mathbb{R}^n .

Definition:

Eine orientierte Basis $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ des \mathbb{R}^n heißt *positiv orientiert*, falls sie zur Standardbasis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ gleichorientiert ist, andernfalls heißt sie *negativ orientiert*.

B ist also genau dann positiv orientiert, wenn $\det(B) > 0$ ist. Und wir können jeder orientierten Basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ des \mathbb{R}^n eine Zahl

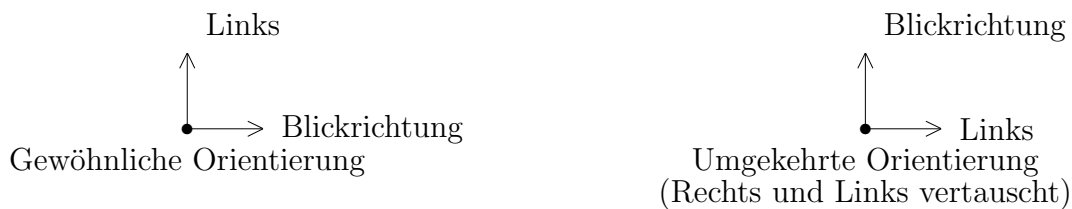
$$\operatorname{or}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \{\pm 1\}$$

zuordnen, je nachdem, ob sie positiv oder negativ orientiert ist.

Beispiele :

1. Sei $V := \mathbb{R}^2$, $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ die Standardbasis von V . Durch die orientierte Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ wird die gewöhnliche Orientierung der Ebene festgelegt: blickt man vom Nullpunkt aus in Richtung \mathbf{e}_1 , also in Richtung der positiven x -Achse, so liegt \mathbf{e}_2 und damit die positive y -Achse „links“ von der Blickrichtung. Dadurch wird auch der „mathematisch positive Drehsinn“ festgelegt, der gerade das Gegenteil des „Uhrzeigersinnes“ darstellt.

Vertauscht man die Vektoren, so erhält man die orientierte Basis $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$. Dadurch wird Rechts und Links vertauscht, und der Uhrzeigersinn ist nun der positive Drehsinn!



2. Sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ zwei linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^3 , so ist

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 > 0.$$

Das bedeutet, daß $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ stets eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^3 ist.

Das ist auch bekannt als „Rechte-Hand-Regel“. Spreizt man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand, so entsprechen die Richtungen, in die die Finger weisen, den Richtungen von \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 und $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

Man sieht hier übrigens auch, daß die Richtung des Vektorproduktes von der Orientierung des Raumes abhängt.

Sei jetzt $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein reguläres p -Simplex und $S := \varphi(Q)$. Weil $\text{rg } \varphi'(\mathbf{u}) \equiv p$ ist, sind die (Spalten-)Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(\mathbf{u})$$

linear unabhängig. Sie spannen den Untervektorraum $\text{Im}(D\varphi(\mathbf{u})) \subset \mathbb{R}^n$ auf, und der ist deshalb p -dimensional.

Ist $\Phi : P \rightarrow Q$ eine Parametertransformation, so ist auch $\psi := \varphi \circ \Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein reguläres p -Simplex, mit $|\psi| = |\varphi|$. Weil nun $D\psi(\mathbf{r}) = D\varphi(\Phi(\mathbf{r})) \circ D\Phi(\mathbf{r})$ und $D\Phi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ein Isomorphismus ist, folgt:

$$\text{Im}(D\psi(\mathbf{r})) = \text{Im}(D\varphi(\Phi(\mathbf{r}))).$$

Definition:

Ist $\mathbf{p} := \varphi(\mathbf{u}) \in S := \varphi(Q) \subset \mathbb{R}^n$, so bezeichnet man den Raum $T_{\mathbf{p}}(S) := \text{Im}(D\varphi(\mathbf{u}))$ als *Tangentialraum von S in \mathbf{p}* .

Jede Parametrisierung φ von S liefert für jeden Punkt $\mathbf{p} = \varphi(\mathbf{u}) \in S$ eine orientierte Basis

$$B_\varphi(\mathbf{u}) := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(\mathbf{u}) \right)$$

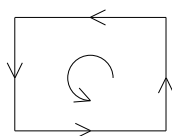
des Tangentialraumes $T_{\mathbf{p}}(S)$. Ist Φ eine Parametertransformation und $\psi := \varphi \circ \Phi$, so besteht die Beziehung

$$B_\psi(\mathbf{r}) = B_\varphi(\Phi(\mathbf{r})) \circ \Phi'(\mathbf{r}).$$

Das bedeutet, daß $\Phi'(\mathbf{r})$ die zugehörige Basiswechselmatrix ist: $\Phi'(\mathbf{r}) = W_{B_\varphi(\Phi(\mathbf{r})), B_\psi(\mathbf{r})}$.

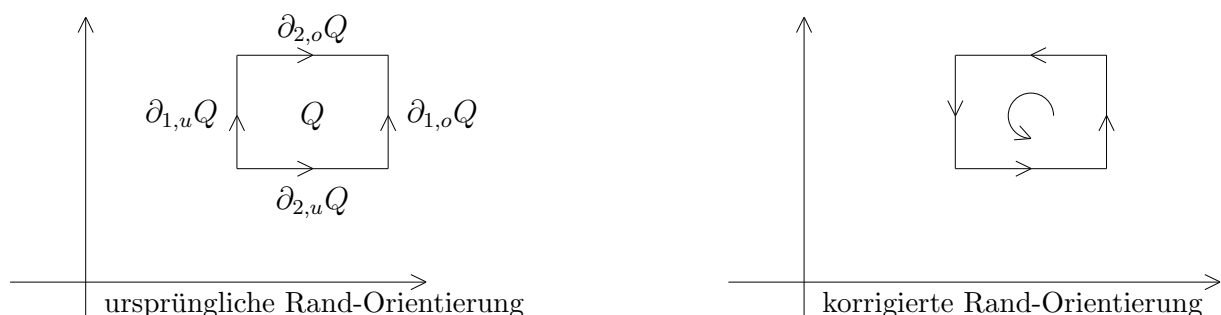
Deshalb nennen wir die zwei Parametrisierungen φ und ψ *gleichorientiert*, falls $\det \Phi'(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{P}$ ist. Eine Klasse von gleichorientierten Parametrisierungen der Menge S bezeichnen wir als (*innere*) *Orientierung* von S , und wir werden die Menge S ein *orientiertes Flächenstück* nennen, wenn durch die Auswahl einer Parametrisierung eine Orientierung festgelegt wurde.

Allerdings haben wir bisher völlig ignoriert, wie sich φ auf dem Rand von Q verhält. Legt man auf einem Quader $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ einen Drehsinn fest, so beschreibt man damit auch, in welcher Richtung der Rand ∂Q durchlaufen werden soll:



Leider induzieren die Standard-Parametrisierungen $\sigma_{i,u}$ und $\sigma_{i,o}$ der Seiten von Q nicht die richtigen Orientierungen.

Es ist $\sigma_{2,u}(u) = (u, c)$, $\sigma_{1,o}(v) = (b, v)$, $\sigma_{2,o}(u) = (u, d)$ und $\sigma_{1,u}(v) = (a, v)$. Also wird z.B. die obere Seite des Quaders von (a, d) nach (b, d) durchlaufen, es sollte aber gerade umgekehrt sein. Wir müssen die Orientierung der Seiten $\sigma_{2,o}$ und $\sigma_{1,u}$ korrigieren.



Wie kann man eine Regel für diese Korrektur finden, die sich dann auch noch auf höhere Dimensionen übertragen läßt? Man hat sich auf folgendes Verfahren geeinigt:

Sei \mathbf{x} ein Punkt auf einer Seite S eines p -dimensionalen Quaders Q , und nicht gerade eine Ecke von Q . Sei weiter $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ derjenige Einheitsvektor, der in \mathbf{x} auf S senkrecht steht und von $\overset{\circ}{Q}$ aus gesehen „nach außen“ zeigt. Man nennt $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ den *äußeren Normalen(einheits)vektor*. Dann soll S durch die Wahl einer geordneten Basis $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{p-1}\}$ von

$T_{\mathbf{x}}(S)$ so orientiert werden, daß gilt:

$$\text{or}(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{p-1}) = 1.$$

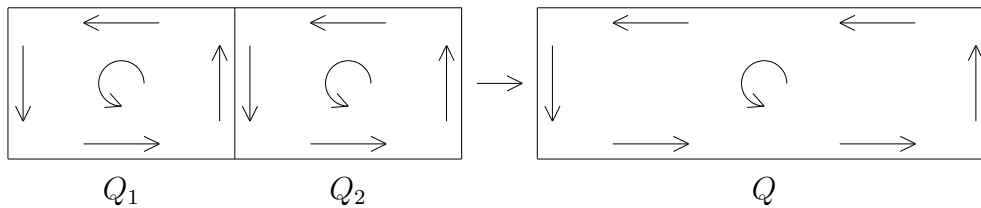
Man überzeugt sich im Falle $p = 2$ sehr schnell davon, daß dieses Verfahren funktioniert. In höheren Dimensionen legen wir die Orientierung des Randes einfach so fest.

Ist $\mathbf{x} \in \partial_{i,u}Q$, so ist $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_i$. Ist $\mathbf{x} \in \partial_{i,o}Q$, so ist $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i$. Die durch die Parametrisierungen $\sigma_{i,u}$ und $\sigma_{i,o}$ induzierte Orientierung von $\partial_{i,u}Q$ und $\partial_{i,o}Q$ ist jeweils durch die orientierte Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_p)$ festgelegt. Nun gilt:

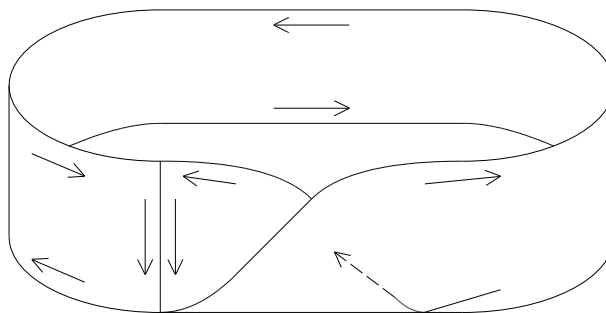
$$\begin{aligned} \text{or}(-\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_p) &= (-1)^i \\ \text{und } \text{or}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_p) &= (-1)^{i-1}. \end{aligned}$$

Wir müssen also die Orientierung von $\sigma_{i,u}$ bzw. $\sigma_{i,o}$ (durch eine Parametertransformation) um $(-1)^i$ bzw. $(-1)^{i-1}$ abändern, um die richtige Orientierung des Randes zu erhalten. Das Ergebnis bezeichnen wir dann als die *positive Orientierung des Randes*.

Versucht man, zwei orientierte Quader Q_1, Q_2 entlang einer Seite zu einem großen Quader Q zusammenzukleben, so sollte das folgendermaßen aussehen:



Wenn die Seiten, an denen die Quader zusammengeklebt werden, entgegengesetzt orientiert sind, so fallen sie – zumindest beim Integrieren – weg. Der gleiche Effekt tritt z.B. bei der Parametrisierung des Zylinders auf, wo zwei Seiten eines Quaders zusammengeklebt werden, und das ist gut so. Manchmal kann aber auch beim Kleben ein Unglück passieren, wie etwa beim „Möbiusband“:



Eine solche Fläche nennt man „nicht orientierbar“. Wir wollen hier nur mit orientierbaren Flächen arbeiten und müssen daher fordern, daß Seiten – wenn überhaupt – dann nur „richtig“ verklebt werden dürfen. Dabei können wir entartete Seiten außer Acht lassen.

Definition:

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. S heißt ein *orientiertes p -dimensionales Flächenstück*, wenn es ein p -Simplex $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so daß gilt:

1. φ ist regulär.
2. $|\varphi| = S$.
3. Stimmen die Bilder zweier nicht entarteter Seiten von φ überein, so müssen sie entgegengesetzt orientiert sein.

Die Parametrisierung φ legt die *Orientierung von S* fest. Geht man zur entgegengesetzten Orientierung über, so schreibt man zur Unterscheidung $-S$ statt S . Die Punktmenge bleibt dabei unverändert.

Bemerkung: Ist $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$, so ist $\Phi : [0, 1]^p \rightarrow Q$ mit $\Phi(t_1, \dots, t_p) := (a_1 + t_1(b_1 - a_1), \dots, a_p + t_p(b_p - a_p))$ eine Parameter-Transformation mit positiver Funktionaldeterminante. Man kann also stets annehmen, daß die Parametrisierung eines Flächenstücks auf dem Einheitswürfel definiert ist.

Beispiele:

1. Die Spur eines glatten Weges ohne Kreuzungspunkte ist ein „1-dimensionales orientiertes Flächenstück“. Ist der Weg nicht geschlossen, so gibt es einen wohldefinierten Anfangs- bzw. Endpunkt. Ist der Weg geschlossen, so besitzt er einen festen Umlaufsinn.
2. Die Spuren der schon behandelten 2-Simplizes sind allesamt 2-dimensionale orientierte Flächenstücke. Auf das Möbiusband trifft das natürlich nicht zu.
3. Die Seiten eines $\partial_{i,u}Q$ und $\partial_{i,o}Q$ eines p -dimensionalen Quaders Q bilden ihrerseits $(p - 1)$ -dimensionale orientierte Flächenstücke. Ihre Orientierungen sind zunächst die „falschen“ Orientierungen, die durch $\sigma_{i,u}$ bzw. $\sigma_{i,o}$ festgelegt werden.
4. Sei $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f(x) < g(x)$ für alle x . Dann wird durch

$$\varphi(u, v) := (u, f(u) + v \cdot (g(u) - f(u)))$$

eine Parametrisierung $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Normalbereichs

$$B := \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

definiert. Offensichtlich wird B so zu einem 2-dimensionalen orientierten Flächenstück.

Der Rand eines Quaders besteht aus mehreren Flächenstücken. Dafür brauchen wir einen weiteren Begriff.

Definition:

Eine p -dimensionale Kette im \mathbb{R}^n ist eine formale Linearkombination

$$\varphi = \varepsilon_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + \varepsilon_N \cdot \varphi_N$$

von p -Simplizes, mit Koeffizienten $\varepsilon_\nu \in \{\pm 1\}$.

Ist ω eine p -Form im \mathbb{R}^n , so setzt man

$$\int_{\varphi} \omega := \sum_{\nu=1}^N \varepsilon_\nu \int_{\varphi_\nu} \omega.$$

Zwei Ketten φ und ψ werden *gleich* genannt, wenn $\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$ für jede p -Form ω ist.

Die *Spur* von φ (in Zeichen $|\varphi|$) ist die Vereinigung der Spuren der φ_ν . Dabei können alle die Teile weggelassen werden, die beim Integrieren keinen Beitrag leisten, also z.B. alle entarteten φ_ν und Kombinationen der Gestalt $1 \cdot \varphi_\mu + (-1) \cdot \varphi_\mu$.

Beispiele :

1. Eine leere Summe stellt immer die Null dar. Hier würde das die „Null-Kette“ 0 ergeben, mit $|0| = \emptyset$.
2. Jedes p -Simplex φ ist auch eine p -dimensionale Kette. Ist φ entartet, so ist $\int_{\varphi} \omega = 0$ für jede p -Form, also $\varphi = 0$ (als Kette) und $|\varphi| = \emptyset$.
3. Sind $\sigma_{i,u}, \sigma_{i,o}$ die Parametrisierungen der Seiten eines Quaders, so heißt die Kette

$$\partial_+ Q := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\sigma_{i,o} - \sigma_{i,u})$$

der *orientierte Rand* von Q . Dann ist $|\partial_+ Q| = \partial Q$ der topologische Rand von Q , versehen mit der „richtigen“ Orientierung.

Ist $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nicht-entartete Parametrisierung eines p -dimensionalen Flächenstücks S , so ist $\partial_+ \varphi := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\varphi \circ \sigma_{i,o} - \varphi \circ \sigma_{i,u})$ eine $(p-1)$ -dimensionale Kette. $bS := |\partial_+ \varphi|$ nennt man den *positiv orientierten Rand von S* . Ist $p = n$, so ist $bS = \partial S$ der topologische Rand von S . Ist $p < n$, so stimmt das nicht mehr!

Ist $S = S^2$ die Sphäre, so ist $bS = \emptyset$, denn die zugehörige Kette besteht aus zwei entarteten 1-Zellen (Nord- und Südpol) und einer 1-Zelle, die zweimal mit entgegengesetzter Orientierung auftritt. Die Oberfläche einer Kugel hat eben keinen Rand.

4. Ist $\varphi = \sum_{\nu=1}^N \varepsilon_\nu \varphi_\nu$ eine Kette, so setzt man $\partial_+ \varphi := \sum_{\nu=1}^N \varepsilon_\nu \cdot \partial_+ \varphi_\nu$.

Definition:

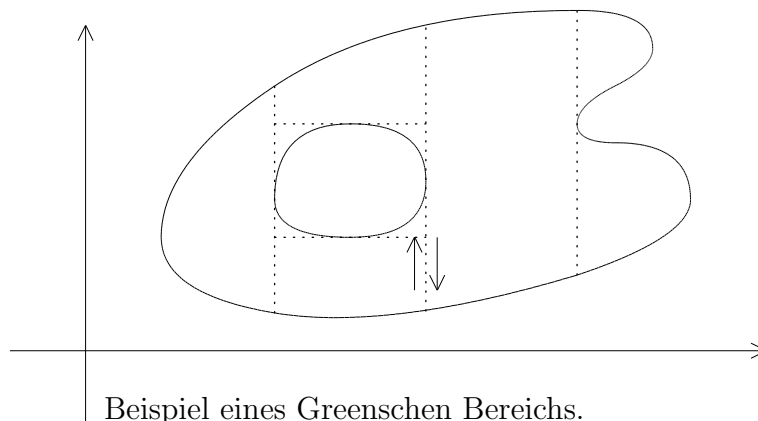
Sei $G \subset \mathbb{R}^p$ ein Gebiet, also eine zusammenhängende offene Menge. Es gebe reguläre p -Simplizes $\varphi_\nu : Q_\nu \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\nu = 1, \dots, N$, so daß gilt:

1. $|\mathring{\varphi}_\nu| \cap |\mathring{\varphi}_\mu| = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$.
2. $\overline{G} = |\varphi_1| \cup \dots \cup |\varphi_N|$.
3. $\partial G = |\partial_+(\varphi_1 + \dots + \varphi_N)|$.

Dann heißt G ein *Gebiet mit stückweise glattem Rand*.

Beispiel:

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, das sich durch achsenparallele Schnitte in endlich viele Normalbereiche zerlegen läßt, nennt man auch einen *Greenschen Bereich*. Offensichtlich ist jeder Greensche Bereich ein Gebiet mit stückweise glattem Rand.



Beispiel eines Greenschen Bereichs.

Definition:

Eine kompakte Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *p-dimensionale orientierte Fläche*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

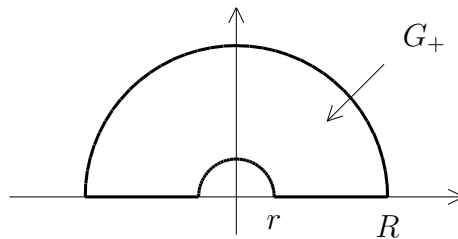
1. S ist ein p -dimensionales orientiertes Flächenstück, parametrisiert durch ein reguläres p -Simplex $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$.
2. Es gibt ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^p$ mit stückweise glattem Rand und eine injektive zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{rg}(\varphi') = p$ und $\varphi(\overline{G}) = S$.
3. $S = \partial \widehat{G}$, wobei \widehat{G} ein Gebiet im \mathbb{R}^{p+1} mit stückweise glattem Rand ist.

$$\text{b}S := \begin{cases} |\partial_+\varphi| & \text{im 1. Fall} \\ \varphi(\partial G) & \text{im 2. Fall} \\ \emptyset & \text{im 3. Fall} \end{cases} \quad \text{wird als Rand von } S \text{ bezeichnet.}$$

Beispiel :

Sei S der schon häufiger betrachtete Zylinder. S ist natürlich ein 2-dimensionales orientiertes Flächenstück, aber wir können S auch als Bild eines Gebietes mit stückweise glattem Rand beschreiben:

Sei $0 < r < R$ und $\psi : [r, R] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\psi(u, v) := (u \cos v, u \sin v)$. Dann ist $\psi([r, R] \times [0, \pi]) = \{(x, y) : r \leq x^2 + y^2 \leq R \text{ und } y \geq 0\}$ ein halber Kreisring, dessen offenen Kern wir mit G_+ bezeichnen. Die andere Hälfte des Kreisringes kann analog parametrisiert werden, das ergibt ein Gebiet G_- . Schließlich setzen wir $G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : r < \mathbf{x} < R\}$.



Dann ist $\overline{G} = \overline{G}_+ \cup \overline{G}_-$, also G ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Nun sei $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(x, y) := \left(\frac{x}{\|(x, y)\|}, \frac{y}{\|(x, y)\|}, \frac{1}{R-r}(2\|\mathbf{x}\| - R - r) \right).$$

Das Bild $S := \varphi(\overline{G})$ ist der Zylinder vom Radius 1 und der Höhe 2, der oben schon einmal betrachtet wurde.

Tatsächlich ist der Begriff des Flächenstückes eigentlich überflüssig, wir können jedes Flächenstück auch als injektives Bild eines Gebietes mit stückweise glattem Rand schreiben. In vielen Anwendungsfällen lassen sich aber Flächenstücke einfacher parametrisieren, wie man hier an einem Beispiel gesehen hat.

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset \mathbb{R}^p$ entweder ein abgeschlossener Quader oder die abgeschlossene Hülle eines Gebietes mit stückweise glattem Rand und $\varphi : K \rightarrow B$ die Parametrisierung einer p -dimensionalen Fläche $S \subset B$.

Ist ω eine p -Form auf B , so setzt man

$$\int_S \omega := \int_\varphi \omega = \int_K \varphi^* \omega.$$

Ist ω eine $(p-1)$ -Form auf B , so setzt man

$$\int_{\text{bs} S} \omega := \int_{\partial_+ \varphi} \omega = \int_{\partial_+ K} \varphi^* \omega,$$

wobei mit $\partial_+ K$ die Kette bezeichnet wird, die den positiv orientierten Rand von K definiert.

Satz von Stokes für Quader

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und ω eine $(n-1)$ -Form auf einer Umgebung von Q . Dann gilt:

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega.$$

BEWEIS: Es reicht, die Behauptung für eine Form ω vom Typ

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

zu zeigen. Dann ist

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Bezeichnen wir die Parametrisierungen der Seiten von $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ wieder mit $\sigma_{i,u}$ und $\sigma_{i,o}$, so folgt:

$$\begin{aligned} \int_Q d\omega &= \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) (-1)^{j-1} dx_1 \dots dx_n \\ &= (-1)^{j-1} \cdot \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_j}^{b_j} \dots \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_j \dots dx_n \\ &= (-1)^{j-1} \cdot \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_j}^{\widehat{b_j}} \dots \int_{a_1}^{b_1} [f \circ \sigma_{j,o}(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n) \\ &\quad - f \circ \sigma_{j,u}(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n)] dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n \\ &= (-1)^{j-1} \left[\int_{\sigma_{j,o}} \omega - \int_{\sigma_{j,u}} \omega \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left[\int_{\sigma_{i,o}} \omega - \int_{\sigma_{i,u}} \omega \right] \\ &= \int_{\partial_+ Q} \omega = \int_{\partial Q} \omega, \end{aligned}$$

denn für $i \neq j$ ist $\sigma_{i,u}^* \omega = 0$ und $\sigma_{i,o}^* \omega = 0$. □

Folgerung (Satz von Stokes für p-dimensionale Flächen)

Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $S \subset B$ eine p -dimensionale Fläche und ω eine $(p-1)$ -Form auf B , so gilt:

$$\int_{bS} \omega = \int_S d\omega.$$

BEWEIS: Wir zeigen die Behauptung zunächst für ein Flächenstück $\varphi : Q \rightarrow S$.

$$\begin{aligned} \int_S d\omega &= \int_Q \varphi^*(d\omega) \\ &= \int_Q d(\varphi^* \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial Q} \varphi^* \omega \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \left[\int_{\sigma_{i,o}} \varphi^* \omega - \int_{\sigma_{i,u}} \varphi^* \omega \right] \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \left[\int_{\varphi \circ \sigma_{i,o}} \omega - \int_{\varphi \circ \sigma_{i,u}} \omega \right] \\
&= \int_{\partial_+ \varphi} \omega = \int_{bS} \omega.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt der Satz unmittelbar auch für Gebiete mit stückweise glattem Rand.

Ist schließlich G ein solches Gebiet und $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung einer Fläche S , so ist

$$\int_{bS} \omega = \int_{\partial_+ G} \varphi^* \omega = \int_G d(\varphi^* \omega) = \int_G \varphi^*(d\omega) = \int_S d\omega.$$

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, daß S Rand eines $(p+1)$ -dimensionalen Gebietes \widehat{G} ist, also $bS = \emptyset$. Dann gilt:

$$\int_{bS} \omega = 0 \quad \text{und} \quad \int_S d\omega = \int_{\partial \widehat{G}} d\omega = \int_{\widehat{G}} dd\omega = 0.$$

□

§6 Vektoranalysis

In diesem Paragraphen sollen die Ergebnisse des vorigen Abschnittes auf Kurven und Flächen im 3-dimensionalen Raum angewandt werden. Das ergibt die klassische Vektoranalysis mit den Integralformeln von Green, Gauß und Stokes. Als Anwendung werden die Maxwell'schen Gleichungen behandelt.

Wir erinnern uns:

Jedem Vektorfeld \mathbf{F} wird im \mathbb{R}^3 eine 1-Form $\omega_{\mathbf{F}}$ und eine 2-Form $\eta_{\mathbf{F}}$ zugeordnet, mit

$$\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{A}) := \mathbf{F} \bullet \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \eta_{\mathbf{F}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \mathbf{F} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Diese Zuordnungen, die wir momentan mit α_1 und α_2 bezeichnen wollen, sind Isomorphismen von \mathbb{R} -Vektorräumen, und es gilt sogar für jede differenzierbare Funktion g :

$$\omega_{g \cdot \mathbf{F}} = g \cdot \omega_{\mathbf{F}} \quad \text{und} \quad \eta_{g \cdot \mathbf{F}} = g \cdot \eta_{\mathbf{F}}.$$

Außerdem kann man jeder Funktion f die 3-Form $f dV = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ zuordnen.

Nun haben wir bereits gezeigt.

$$\omega_{\text{grad } f} = df, \quad \eta_{\text{rot } \mathbf{F}} = d(\omega_{\mathbf{F}}) \quad \text{und} \quad \text{div}(\mathbf{F})dV = d(\eta_{\mathbf{F}}).$$

Das liefert uns das folgende „kommutative Diagramm“ :

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\text{-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{1\text{-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{2\text{-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{3\text{-Formen}\} \\ \parallel & & \uparrow \alpha_1 & & \uparrow \alpha_2 & & \uparrow \cdot dV \\ \{\text{Funktionen}\} & \xrightarrow{\text{grad}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xrightarrow{\text{rot}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xrightarrow{\text{div}} & \{\text{Funktionen}\} \end{array}$$

Die „Kommutativität“ bedeutet:

$$\alpha_1 \circ \text{grad} = d, \quad \alpha_2 \circ \text{rot} = d \circ \alpha_1 \quad \text{und} \quad (\cdot dV) \circ \text{div} = d \circ \alpha_2.$$

Die einfachen Rechenregeln für die Poincaré-Ableitung d und das obige kommutative Diagramm liefern uns einfache Beweise für viele Formeln der Vektoranalysis. Dabei verwenden wir noch die Formeln

$$\omega_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}} = \eta_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}} \quad \text{und} \quad \omega_{\mathbf{A}} \wedge \eta_{\mathbf{B}} = \eta_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) dV.$$

Formeln der klassischen Vektoranalysis

Sei f eine differenzierbare Funktion, \mathbf{A} und \mathbf{B} Vektorfelder. Dann gilt:

1. $\text{rot}(f \cdot \mathbf{A}) = f \cdot \text{rot}(\mathbf{A}) + \text{grad } f \times \mathbf{A}.$
2. $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} - \mathbf{A} \bullet \text{rot } \mathbf{B}.$
3. $\text{div}(f \cdot \mathbf{A}) = \text{grad } f \bullet \mathbf{A} + f \cdot \text{div } \mathbf{A}.$

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned}
 \eta_{\text{rot}(f \cdot \mathbf{A})} &= d(\omega_{f \cdot \mathbf{A}}) = d(f \cdot \omega_{\mathbf{A}}) \\
 &= df \wedge \omega_{\mathbf{A}} + f \cdot d\omega_{\mathbf{A}} \\
 &= \omega_{\text{grad } f} \wedge \omega_{\mathbf{A}} + f \cdot \eta_{\text{rot } \mathbf{A}} \\
 &= \eta_{\text{grad } f \times \mathbf{A}} + \eta_{f \cdot \text{rot } \mathbf{A}} \\
 &= \eta_{\text{grad } f \times \mathbf{A} + f \cdot \text{rot } \mathbf{A}}.
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 (\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}))dV &= d(\eta_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}) \\
 &= d(\omega_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}}) \\
 &= d\omega_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}} - \omega_{\mathbf{A}} \wedge d\omega_{\mathbf{B}} \\
 &= \eta_{\text{rot } \mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{B}} - \omega_{\mathbf{A}} \wedge \eta_{\text{rot } \mathbf{B}} \\
 &= (\text{rot } \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} - \mathbf{A} \bullet \text{rot } \mathbf{B})dV.
 \end{aligned}$$

3) Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
 (\text{div}(f \cdot \mathbf{A}))dV &= d(\eta_{f \cdot \mathbf{A}}) = d(f \cdot \eta_{\mathbf{A}}) \\
 &= df \wedge \eta_{\mathbf{A}} + f \cdot d\eta_{\mathbf{A}} \\
 &= \omega_{\text{grad } f} \wedge \eta_{\mathbf{A}} + f \cdot (\text{div } \mathbf{A})dV \\
 &= (\text{grad } f \bullet \mathbf{A} + f \cdot \text{div } \mathbf{A})dV.
 \end{aligned}$$

□

Wir wollen jetzt ein ähnliches kommutatives Diagramm benutzen, um das sogenannte *Codifferential* δ zu definieren, das jeder p -Form eine $(p-1)$ -Form zuordnet:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\text{-Formen}\} & \xleftarrow{\delta} & \{1\text{-Formen}\} & \xleftarrow{\delta} & \{2\text{-Formen}\} & \xleftarrow{\delta} & \{3\text{-Formen}\} \\
 \parallel & & \uparrow \alpha_1 & & \uparrow \alpha_2 & & \uparrow \cdot dV \\
 \{Funktionen\} & \xleftarrow{\text{div}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xleftarrow{\text{rot}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xleftarrow{\text{grad}} & \{Funktionen\}
 \end{array}$$

Damit gilt:

$$\delta f = 0, \quad \delta(\omega_{\mathbf{F}}) = \text{div } \mathbf{F}, \quad \delta(\eta_{\mathbf{F}}) = -\omega_{\text{rot } \mathbf{F}} \quad \text{und} \quad \delta(f dV) = \eta_{\text{grad } f}.$$

Definition:

Ist ω eine p -Form, so wird die p -Form $\Delta\omega$ definiert durch

$$\Delta\omega := (d\delta + \delta d)\omega.$$

Man nennt Δ den *Laplace-Operator*.

Ist \mathbf{F} ein Vektorfeld, so definiert man das Feld $\Delta\mathbf{F}$ durch $\omega_{\Delta\mathbf{F}} = \Delta\omega_{\mathbf{F}}$.

Der Laplace-Operator für Funktionen

Ist f eine (zweimal stetig differenzierbare) Funktion, so ist

$$\Delta f = \mathbf{div grad} f = f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + f_{x_3x_3}.$$

BEWEIS: Da $\delta f = 0$ ist, ist $\Delta f = \delta df = \delta(\omega_{\mathbf{grad} f}) = \mathbf{div grad} f$.

Weiter ist $\mathbf{div grad} f = \mathbf{div}(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}) = f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + f_{x_3x_3}$. □

Der Laplace-Operator für Vektorfelder

Ist \mathbf{F} ein (zweimal stetig differenzierbares) Vektorfeld, so ist

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{grad div} \mathbf{F} - \mathbf{rot rot} \mathbf{F},$$

und wenn $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ist, so gilt:

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3).$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{\mathbf{F}} &= (d\delta + \delta d)\omega_{\mathbf{F}} \\ &= d(\mathbf{div} \mathbf{F}) + \delta(\eta_{\mathbf{rot} \mathbf{F}}) \\ &= \omega_{\mathbf{grad div} \mathbf{F}} - \omega_{\mathbf{rot rot} \mathbf{F}}, \end{aligned}$$

daraus folgt die erste Formel.

Die Schwierigkeit steckt erstaunlicherweise in der zweiten Formel. Wir zeigen (am Beispiel $i = 1$), daß $\Delta(f dx_i) = (\Delta f) dx_i$ ist. Dann folgt, daß

$$\Delta(F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) = (\Delta F_1) dx_1 + (\Delta F_2) dx_2 + (\Delta F_3) dx_3$$

ist.

Tatsächlich ist $\mathbf{rot}(f \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{rot}(f, 0, 0) = (0, f_{x_3}, -f_{x_2})$ und damit

$$\mathbf{rot rot}(f \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{rot}(0, f_{x_3}, -f_{x_2}) = (-f_{x_2x_2} - f_{x_3x_3}, f_{x_1x_2}, f_{x_1x_3}),$$

$$\text{so wie } \mathbf{grad div}(f \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{grad}(f_{x_1}) = (f_{x_1x_1}, f_{x_1x_2}, f_{x_1x_3}).$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} \Delta(f dx_1) &= \Delta(\omega_{f \cdot \mathbf{e}_1}) = \omega_{\mathbf{grad div}(f \cdot \mathbf{e}_1)} - \omega_{\mathbf{rot rot}(f \cdot \mathbf{e}_1)} \\ &= (f_{x_1x_1} dx_1 + f_{x_1x_2} dx_2 + f_{x_1x_3} dx_3) \\ &\quad - ((-f_{x_2x_2} - f_{x_3x_3}) dx_1 + f_{x_1x_2} dx_2 + f_{x_1x_3} dx_3) \\ &= (\Delta f) dx_1. \end{aligned}$$

□

Wir wollen jetzt die klassischen Integralformeln der Vektoranalysis herleiten.

Satz von Green

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Greenscher Bereich, f und g seien stetig differenzierbare Funktionen auf \bar{G} . Dann gilt:

$$\int_{\partial G} (f dx + g dy) = \int_G \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

BEWEIS: Sei $\omega := f dx + g dy$. Dann ist $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$. Der Satz von Stokes für 2-dimensionale Gebiete mit stückweise glattem Rand liefert das gewünschte Ergebnis. \square

Beispiel:

Sei $G = D_r(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$. Dann ist z.B.

$$\int_{\partial G} (2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy) = \int_G (6xy^2 - 6xy^2) dx dy = 0.$$

Folgerung

Sei G ein Greenscher Bereich. Dann ist

$$\mu_2(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x dy - y dx).$$

BEWEIS:

$$\mu_2(G) = \int_G 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_G 2 dx dy = \frac{1}{2} \int_G (1 - (-1)) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (-y dx + x dy).$$

\square

Ist $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstückes S , so setzt man

$$\mathbf{N}_\varphi(u, v) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v).$$

Diese *Flächennormale* steht in $\varphi(u, v)$ auf S senkrecht, ihre Länge hängt von φ ab.

Man kann leicht eine Formel für die Länge von $\mathbf{N}_\varphi(u, v)$ herleiten.

Hilfssatz

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $A := (\mathbf{a}^\top, \mathbf{b}^\top) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ die aus ihnen gebildete Matrix. Dann ist

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{\det(A^\top \circ A)}.$$

BEWEIS: Es ist

$$A^T \circ A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \end{pmatrix}, \text{ also } \det(A^T \circ A) = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2.$$

□

Definition:

$G_A := \det(A^T \circ A)$ heißt die *Gramsche Determinante* von A .

Folgerung

$$\|\mathbf{N}_\varphi(u, v)\| = \sqrt{\det((\varphi'(u, v))^T \circ (\varphi'(u, v)))} = \sqrt{G_{\varphi'(u, v)}}.$$

Für $\mathbf{p} := \varphi(u, v) \in S$ ist der Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}_S(\mathbf{p}) := \frac{1}{\|\mathbf{N}_\varphi(u, v)\|} \cdot \mathbf{N}_\varphi(u, v)$$

unabhängig von der Parametrisierung φ , zumindest bis auf die Orientierung. Natürlich ist $\mathbf{n}_{-S}(\mathbf{p}) = -\mathbf{n}_S(\mathbf{p})$.

Es werden nun zwei Arten von Flächenintegralen eingeführt:

Definition:

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen, $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossener Quader, $\varphi : Q \rightarrow B$ die Parametrisierung eines Flächenstückes $S \subset B$.

Ist f eine in der Nähe von S definierte stetig differenzierbare Funktion, so wird das *Flächenintegral 1. Art* über f bezüglich φ definiert durch

$$\int_\varphi f \, d\mathbf{o} := \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \|\mathbf{N}_\varphi(u, v)\| \, dudv.$$

Ist \mathbf{F} ein in der Nähe von S definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld, so wird das *Flächenintegral 2. Art* über \mathbf{F} bezüglich φ definiert durch

$$\int_\varphi \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} := \int_\varphi (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_S) \, d\mathbf{o}.$$

Bemerkung: Es ist

$$\int_\varphi \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_Q \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \bullet \mathbf{N}_\varphi(u, v) \, dudv,$$

man braucht also nicht die Norm des Normalenfeldes auszurechnen.

Wir werden nun zeigen, daß das Flächenintegral 2. Art in Wirklichkeit ein Integral über eine Differentialform ist.

Hilfssatz

Die Koordinaten im \mathbb{R}^3 seien mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Ist $\mathbf{N}_\varphi(u, v) = (N_1, N_2, N_3)$, so gilt:

$$\begin{aligned}\varphi^*(dx_1 \wedge dx_2) &= N_3 du \wedge dv, \\ \varphi^*(dx_2 \wedge dx_3) &= N_1 du \wedge dv, \\ \varphi^*(dx_3 \wedge dx_1) &= N_2 du \wedge dv.\end{aligned}$$

BEWEIS: Ist $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, so ist

$$\begin{aligned}\varphi^*(dx_i \wedge dx_j) &= d\varphi_i \wedge d\varphi_j \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} dv \right) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \right) du \wedge dv \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \end{pmatrix} du \wedge dv.\end{aligned}$$

Die hier auftretenden Determinanten sind aber die Komponenten von $\mathbf{N}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. \square

Nützlich ist auch die folgende Feststellung:

Transformationsverhalten des Normalenvektors

Ist $\Phi : P \rightarrow Q$ eine Parameter-Transformation, so ist

$$\mathbf{N}_{\varphi \circ \Phi} = (\mathbf{N}_\varphi \circ \Phi) \cdot J_\Phi.$$

BEWEIS: r und s seien die Koordinaten in P . Ist $\mathbf{N}_{\varphi \circ \Phi}(r, s) = (\widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{N}_3)$, so gilt z.B.:

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_3 dr \wedge ds &= (\varphi \circ \Phi)^*(dx_1 \wedge dx_2) \\ &= \Phi^*(\varphi^*(dx_1 \wedge dx_2)) \\ &= \Phi^*(N_3 du \wedge dv) \\ &= (N_3 \circ \Phi) \cdot \Phi^*(du \wedge dv) \\ &= (N_3 \circ \Phi) \cdot J_\Phi \cdot dr \wedge ds.\end{aligned}$$

Genauso geht's mit den Komponenten N_1 und N_2 . \square

Jetzt haben wir alles beisammen, um das Verhalten der Flächenintegrale bei Parameter-Transformationen zu ermitteln.

Transformationsverhalten von Flächenintegralen

1. Ein Flächenintegral 1. Art ändert sich bei einer Parameter-Transformation nicht und ist insbesondere unabhängig von der Orientierung der Fläche.
2. Ein Flächenintegral 2. Art ändert sich nicht bei einer Parameter-Transformation mit positiver Funktionaldeterminante. Wechselt man jedoch die Orientierung der Fläche, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Insbesondere ist $\int_{\varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ nichts anderes als das Integral über die 2-Form $\eta_{\mathbf{F}}$.

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \circ \Phi} f \, do &= \int_P f(\varphi \circ \Phi(r, s)) \cdot \|\mathbf{N}_{\varphi \circ \Phi}(r, s)\| \, drds \\ &= \int_P f(\varphi \circ \Phi(r, s)) \cdot |J_{\Phi}(r, s)| \cdot \|\mathbf{N}_{\varphi} \circ \Phi(r, s)\| \, drds \\ &= \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \|\mathbf{N}_{\varphi}(u, v)\| \, dudv \\ &= \int_{\varphi} f \, do. \end{aligned}$$

Wie man sieht, spielt dabei das Vorzeichen von J_{Φ} keine Rolle.

2) Es ist

$$\begin{aligned} \varphi^*(\eta_{\mathbf{F}}) &= \varphi^*(F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= ((F_1 \circ \varphi) \cdot N_1 + (F_2 \circ \varphi) \cdot N_2 + (F_3 \circ \varphi) \cdot N_3) \, du \wedge dv \\ &= (\mathbf{F} \circ \varphi) \bullet \mathbf{N}_{\varphi} \, du \wedge dv, \end{aligned}$$

also

$$\int_{\varphi} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_S) \, do = \int_Q \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \bullet \mathbf{N}_{\varphi}(u, v) \, dudv = \int_Q \varphi^*(\eta_{\mathbf{F}}) = \int_S \eta_{\mathbf{F}}.$$

Nun ist auch klar: wenn man zu einer anderen Orientierung von S übergeht, so ändert sich das Vorzeichen des Integrals. \square

Da die Flächenintegrale (im Wesentlichen) nicht von der Parametrisierung abhängen, können wir auch $\int_S f \, do$ und $\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ dafür schreiben.

Insbesondere nennt man $A(S) := \int_S 1 \, do = \int_Q \sqrt{G_{\varphi'(u,v)}} \, d\mu_2$ den *Flächeninhalt* von S .

Beispiele:

1. Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Gehen wir von der Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v)$$

aus. Der Zylinder entsteht, indem man das Rechteck zusammenrollt und entlang einer Seite verklebt. Daher erwarten wir, daß der Flächeninhalt $2 \cdot 2\pi = 4\pi$ beträgt.

Nun ist $\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also

$$(\varphi'(u, v))^{\top} \circ (\varphi'(u, v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante = 1, und es gilt für $S := \varphi([0, 2\pi] \times [-1, 1])$:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_S 1 \, d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 dv \, du \\ &= 2 \cdot \int_0^{2\pi} du \\ &= 4\pi, \end{aligned}$$

ganz so, wie wir es erwartet haben.

2. Wir wollen den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \cos(u) \cos(v), r \sin(u) \cos(v), r \sin(v)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die Tangentialvektoren sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= (-r \sin(u) \cos(v), r \cos(u) \cos(v), 0) \\ \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= (-r \cos(u) \sin(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(v)). \end{aligned}$$

Mit der Formel

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (r^2 \cos(u) \cos^2(v), r^2 \sin(u) \cos^2(v), r^2 \sin(v) \cos(v)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 &= r^4 \cdot [\cos^2(u) \cos^4(v) + \sin^2(u) \cos^4(v) + \sin^2(v) \cos^2(v)] \\ &= r^4 \cdot [\cos^4(v) + \sin^2(v) \cos^2(v)] \\ &= r^4 \cos^2(v). \end{aligned}$$

Da $\cos(v)$ im Parameterbereich immer ≥ 0 ist, folgt für $S := \varphi([0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \partial B_r(\mathbf{0})$:

$$\begin{aligned} A(S) &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(v) \, dv \, du \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin(v) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \, du \\ &= 2r^2 \int_0^{2\pi} du = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

3. Ist $f : Q := [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so wird der Graph von f parametrisiert durch

$$\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right), & \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right), \end{aligned}$$

also

$$A(G_f) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \, du \, dv.$$

Flächenintegrale 1. Art brauchen wir meist nur zur Berechnung von Flächeninhalten. Eine wichtigere Rolle spielen dagegen die Flächenintegrale 2. Art. Bevor wir darauf eingehen, müssen wir noch ein Ergebnis aus der Integrationstheorie nachtragen:

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in K$, so daß gilt:

$$\int_K f \, d\mu_n = f(\mathbf{x}_0) \cdot \mu_n(K).$$

BEWEIS: Sei $m := \min_K f(\mathbf{x})$ und $M := \max_K f(\mathbf{x})$. Dann ist $m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$ für $\mathbf{x} \in K$, und es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ mit $f(\mathbf{x}_1) = m$ und $f(\mathbf{x}_2) = M$. Zunächst folgt:

$$m \cdot \mu_n(K) = \int_K m \, d\mu_n \leq \int_K f \, d\mu_n \leq \int_K M \, d\mu_n = M \cdot \mu_n(K).$$

Sei nun $\alpha : [0, 1] \rightarrow K$ ein stetiger Weg mit $\alpha(0) = \mathbf{x}_1$ und $\alpha(1) = \mathbf{x}_2$. Dann ist

$$F(t) := \mu_n(K) \cdot f(\alpha(t))$$

stetig auf $[0, 1]$, mit $F(0) = m \cdot \mu_n(K)$ und $F(1) = M \cdot \mu_n(K)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [0, 1]$, so daß $F(\xi) = \int_K f \, d\mu_n$ ist. Dann setzen wir $\mathbf{x}_0 := \alpha(\xi)$. \square

Der Integralsatz von Gauß

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $G \subset\subset U$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und \mathbf{A} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann gilt:

$$\int_{\partial G} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O} = \int_G \operatorname{div} \mathbf{A} dV.$$

BEWEIS: Es ist $d(\eta_{\mathbf{A}}) = \operatorname{div} \mathbf{A} dV$ und $\int_{\partial G} \eta_{\mathbf{A}} = \int_G d(\eta_{\mathbf{A}})$, nach dem allgemeinen Stokesschen Satz. \square

Eine erste Anwendung ist jetzt die anschauliche Interpretation der Divergenz.

Interpretation der Divergenz

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen, \mathbf{A} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B und $\mathbf{x}_0 \in B$ ein fester Punkt. Für $\varepsilon > 0$ bezeichne B_ε die Kugel mit Radius ε um \mathbf{x}_0 .

$$\text{Dann ist } \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_3(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O}.$$

BEWEIS: Sei $f(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $\mathbf{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon$, so daß gilt:

$$\int_{B_\varepsilon} f d\mu_3 = f(\mathbf{x}_\varepsilon) \cdot \mu_3(B_\varepsilon).$$

Wegen der Stetigkeit von f existiert der Grenzwert

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_3(B_\varepsilon)} \cdot \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_3(B_\varepsilon)} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O}.$$

\square

Stellt man sich vor, daß das Vektorfeld \mathbf{A} ein strömendes Medium beschreibt, so liefert das Integral

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O}$$

eine Bilanz darüber, wieviel von dem Medium durch die Kugeloberfläche nach außen fließt. Ist der Wert positiv, so liegt in B_ε eine Quelle, ist er negativ, so liegt in B_ε eine sogenannte „Senke“. Der Wert pro Volumeneinheit kann dann als *Quelldichte* bezeichnet werden, und wir haben gerade bewiesen, daß die Divergenz von \mathbf{A} genau diese Quelldichte darstellt.

Die Kontinuitätsgleichung

Ein bewegtes Medium sei durch eine zeitabhängige Dichtefunktion ϱ und ein zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld \mathbf{V} beschrieben. Es werde dabei weder Masse produziert noch vernichtet.

$$\text{Dann ist } \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{div}(\varrho \cdot \mathbf{V}) = 0.$$

Diese Beziehung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung.

BEWEIS: Sei B ein kleiner beschränkter Volumenbereich, $M(t) := \int_B \varrho(\mathbf{x}, t) dV$ die Gesamtmasse in B zur Zeit t . Die Änderungsrate $M'(t)$ entspricht der Masse, die den Bereich B durch den Rand hindurch in einer Zeiteinheit verläßt. Ist die Gesamtbilanz an ausströmender Masse positiv, so nimmt die Masse im Inneren von B ab. Also erhält man folgende Gleichung:

$$-M'(t) = \int_{\partial B} (\varrho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \bullet d\mathbf{O}.$$

Die physikalische Dimension auf der rechten Seite ist

$$\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \cdot \text{Fläche} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}},$$

und das entspricht der linken Seite.

Mit dem Gaußschen Integralsatz und den Regeln über die Differentiation parameterabhängiger Integrale folgt:

$$-\int_B \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV = \int_B \mathbf{div}(\varrho \cdot \mathbf{V})(\mathbf{x}, t) dV.$$

Weil das für jedes Volumen B gilt, ergibt sich daraus die Kontinuitätsgleichung. \square

Man spricht von einer „stationären Strömung“, wenn ϱ und \mathbf{V} nicht von der Zeit abhängen. Dann ist $\mathbf{div}(\varrho \cdot \mathbf{V}) = 0$. Ist das Medium außerdem „inkompressibel“, also ϱ auch unabhängig vom Ort, so ist $\mathbf{div}(\mathbf{V}) = 0$, d.h. es gibt keine Quellen und Senken.

Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine (2-dimensionale) orientierte Fläche, so ist bS ein stückweise glatter geschlossener Weg, mit einem wohldefinierten Umlaufsinn, oder es ist $bS = \emptyset$, wie z.B. bei der Sphäre.

Der klassische Satz von Stokes

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen, $S \subset B$ eine orientierte Fläche und \mathbf{A} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B . Dann gilt:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O} = \int_{bS} \mathbf{A} \bullet ds.$$

BEWEIS: Sei φ eine Parametrisierung von S . Es ist $\omega_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \bullet ds$, also

$$\int_{\partial_+ \varphi} \omega_{\mathbf{A}} = \int_{\varphi} d\omega_{\mathbf{A}} = \int_{\varphi} \eta_{\text{rot } \mathbf{A}} = \int_{\varphi} \text{rot } \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O}.$$

□

Dieser Satz erlaubt nun auch eine Interpretation der Rotation eines Vektorfeldes.

Interpretation der Rotation

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen, \mathbf{A} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B und $\mathbf{x}_0 \in B$ ein fester Punkt. Für einen Einheitsvektor \mathbf{n} und $\varepsilon > 0$ bezeichne S_ε die Kreisscheibe mit Radius ε um \mathbf{x}_0 , die senkrecht auf \mathbf{n} steht. Dann ist

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{bS_\varepsilon} \mathbf{A} \bullet ds.$$

BEWEIS: Sei $D_\varepsilon := D_\varepsilon(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2$ und $\varphi : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v) := \mathbf{x}_0 + u \cdot \mathbf{a}_1 + v \cdot \mathbf{a}_2,$$

wobei $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n})$ eine positiv orientierte ON-Basis des \mathbb{R}^3 sein soll. Dann ist $\varphi(D_\varepsilon) = S_\varepsilon$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \mathbf{a}_1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \mathbf{a}_2$ und $N_\varphi = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{n}$.

Nun sei $f(u, v) := \text{rot } \mathbf{A}(\varphi(u, v)) \bullet \mathbf{n}$. Wieder gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\mathbf{u}_\varepsilon \in D_\varepsilon$, so daß gilt:

$$\int_{D_\varepsilon} f(\mathbf{u}) \, dudv = f(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \mu_2(D_\varepsilon) = f(\mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 \pi.$$

Es ist

$$(\varphi')^\top \circ \varphi' = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \circ (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $A(S_\varepsilon) = \int_{D_\varepsilon} \sqrt{G_{\varphi'}} \, dudv = \int_{D_\varepsilon} dudv = \varepsilon^2 \pi$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{n} &= f(\mathbf{0}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\mathbf{u}_\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{D_\varepsilon} f(\mathbf{u}) \, dudv \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{D_\varepsilon} \text{rot } \mathbf{A}(\varphi(\mathbf{u})) \bullet \mathbf{N}_\varphi(\mathbf{u}) \, dudv \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{S_\varepsilon} \text{rot } \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{bS_\varepsilon} \mathbf{A} \bullet ds. \end{aligned}$$

□

Nehmen wir wieder an, daß \mathbf{A} das Geschwindigkeitsfeld eines bewegten Mediums ist. Dann mißt das Integral $\int_{bS_\varepsilon} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{s}$ die „Zirkulation“ des Mediums um die durch \mathbf{n} festgelegte Achse (gegen den Uhrzeigersinn). $\mathbf{rot} \mathbf{A} \bullet \mathbf{n}$ ist dann die Zirkulation pro Flächeneinheit und wird als *Wirbeldichte* bezüglich \mathbf{n} bezeichnet. Offensichtlich ist die Wirbeldichte am größten, wenn $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ und \mathbf{n} in die gleiche Richtung zeigen. Die Rotation von \mathbf{A} ist also wirklich ein Maß für die Wirbelbewegung des Mediums.

Zum Schluß wollen wir uns mit den *Maxwellschen Gleichungen* beschäftigen:

Das *Coulombsche Gesetz* besagt: Eine Ladungsverteilung erzeugt ein *elektrisches Feld* und verändert damit die Struktur des Raumes (Fernwirkung). Wird eine Probeladung q in das elektrische Feld gebracht, so wirkt auf q eine zu q proportionale Kraft in Richtung der Feldlinien. Diese Kraft kann man messen und dadurch für jeden stückweise glatten Weg C die Arbeit $A(q, C)$ ermitteln, die verrichtet wird, wenn q entlang C bewegt wird. Wir beschreiben deshalb die elektrische Feldstärke durch eine 1-Form

$$e = \omega_{\mathbf{E}} = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$

und die Arbeit durch das Integral

$$A(q, C) = q \cdot \int_C e = q \cdot \int_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s}.$$

In einem elektrostatischen Feld, also bei ruhender Ladung, hängt das Integral nicht vom Verlauf des Weges ab, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt, und sein Wert gibt die *Spannungsdifferenz* zwischen diesen Punkten wieder.

Die durch das elektrische Feld veränderte Struktur des Raumes wird durch die *elektrische Verschiebungsdichte* oder *elektrische Erregung* beschrieben, die unmittelbar das Verhalten von geladenen Objekten beeinflusst (Nahwirkung). Man beobachtet ihren Fluß durch Flächenstücke, die senkrecht zu den Feldlinien gedacht sind. Daher ordnet die elektrische Erregung jedem (orientierten) Flächenstück S den elektrischen Fluß $\delta(S)$ durch dieses Flächenstück zu, und wir führen eine 2-Form

$$\delta = \eta_{\mathbf{D}} = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy$$

ein, so daß gilt:

$$\delta(S) = \int_S \delta = \int_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O}.$$

Die Rechtfertigung dafür, daß e und δ tatsächlich durch Differentialformen bzw. die zugehörigen Vektorfelder beschrieben werden können, ergibt sich u.a. aus dem Superpositionsprinzip.

Wir betrachten nun eine besonders einfache Situation: im Nullpunkt des \mathbb{R}^3 sei eine punktförmige Ladung q gegeben. Diese erzeugt ein elektrisches Feld, und deshalb existiert auch im ganzen umgebenden Raum eine elektrische Erregung $\delta = \eta_{\mathbf{D}}$. Sie wird benutzt, um den Fluß der Feldlinien durch Flächenstücke zu messen, deshalb nimmt man an, daß \mathbf{E} und \mathbf{D} in die gleiche Richtung zeigen. Wenn wir außerdem annehmen, daß das Experiment im Vakuum durchgeführt wird, so ergibt sich in einem geeigneten Maßsystem:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi r^3} \cdot \mathbf{x}, \quad (\text{mit } r := \|\mathbf{x}\|).$$

Dann besagt das sogenannte **Gaußsche Gesetz**:

$$\int_{\partial G} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O} = \begin{cases} q & \text{falls } \mathbf{0} \in G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gilt für jedes Gebiet G mit stückweise glattem Rand.

Der BEWEIS dafür benutzt die oben angegebene (experimentell ermittelte) Darstellung von \mathbf{D} und folgende Formel:

Gaußsches Gesetz (mathematischer Teil)

$$\int_{\partial G} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} = \begin{cases} 4\pi & \text{falls } \mathbf{0} \in G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Sei zunächst $\mathbf{0} \notin G$. Dann ist $f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{r^3}$ auf G differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) \\ &= \frac{r^3 - x \cdot \frac{3}{2}r \cdot 2x}{r^6} + \dots \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Gaußschen Satz ist in diesem Falle

$$\int_{\partial G} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} = \int_G \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right) dV = 0.$$

Ist nun $\mathbf{0} \in G$, so wähle man $\varepsilon > 0$ so, daß $B_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset\subset G$ ist, und setze $G' := G \setminus \overline{B_\varepsilon(\mathbf{0})}$.

Dann liegt $\mathbf{0}$ nicht in G' , und es ist

$$0 = \int_{\partial G'} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\partial G} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O},$$

also

$$\int_{\partial G} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O}.$$

Das letztere Integral können wir direkt berechnen. Der äußere Normaleneinheitsvektor zu $S = \partial B_\varepsilon$ in \mathbf{x} ist nämlich der Vektor $\mathbf{n}_S(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{x}$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \bullet d\mathbf{O} &= \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}_S(\mathbf{x})) do \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} (\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}) do \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} do \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\varepsilon^2\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Ist in einem Gebiet G eine Ladungsverteilung durch eine Dichtefunktion ϱ gegeben, so verallgemeinert man das Gaußsche Gesetz zu der Formel

$$\int_{\partial G} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O} = \int_G \varrho dV.$$

Ausgehend von der Situation einer einzelnen Punktladung kann man das Gesetz in vielen Fällen experimentell verifizieren. Zusammen mit der Gaußschen Integralformel ergibt sich nun für beliebige Gebiete G mit stückweise glattem Rand:

$$\int_G (\mathbf{div} \mathbf{D} - \varrho) dV = 0.$$

Weil G beliebig war, folgt daraus die 1. Maxwell'sche Gleichung:

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \varrho.$$

Als nächstes nehmen wir an, daß ein Magnetfeld vorliegt. Es kann von einem Stabmagneten oder von bewegten Ladungen erzeugt sein. Man interessiert sich für den magnetischen Fluß $\beta(S)$ der magnetischen Feldlinien durch Flächenstücke S . Daher beschreibt man die *magnetische Feldstärke* (oder *magnetische Induktion*) durch eine 2-Form

$$\beta = \eta_{\mathbf{B}} = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy.$$

Der magnetische Fluß durch S ist dann die Zahl

$$\beta(S) := \int_S \beta = \int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{O}.$$

Bewegt man eine Leiterschleife in einer bestimmten Zeit ganz aus dem Magnetfeld heraus, so wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert, die zu einem elektrischen Stromfluß führt. Das Ergebnis hängt nur von dem Fluß durch die Fläche S ab, deren Rand bS zu Anfang des Experimentes durch die Leiterschleife beschrieben wird. Und der gleiche Effekt wird beobachtet, wenn die Schleife ruht, aber das Magnetfeld sich verändert. Aber wo ein Strom fließt, da werden Ladungen bewegt, und die Ursache einer solchen Bewegung von Ladungen muß ein elektrisches Feld sein.

Durch zahlreiche Experimente kam Faraday zu dem Schluß, daß die beobachtete Spannung in der Leiterschleife bS der negativen zeitlichen Änderung des Flusses durch S entspricht. Also gilt:

$$\int_{bS} \mathbf{E} \bullet ds = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{O}.$$

Nach Stokes und wegen der eindeutigen Rekonstruierbarkeit der Vektorfelder aus ihren Flächenintegralen folgt das *Induktionsgesetz* (die 2. Maxwell'sche Gleichung):

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

Da man außerdem noch nie magnetische Monopole (also magnetische Quellen) entdeckt hat, fordert man zusätzlich als 3. *Maxwellsche Gleichung*):

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.}$$

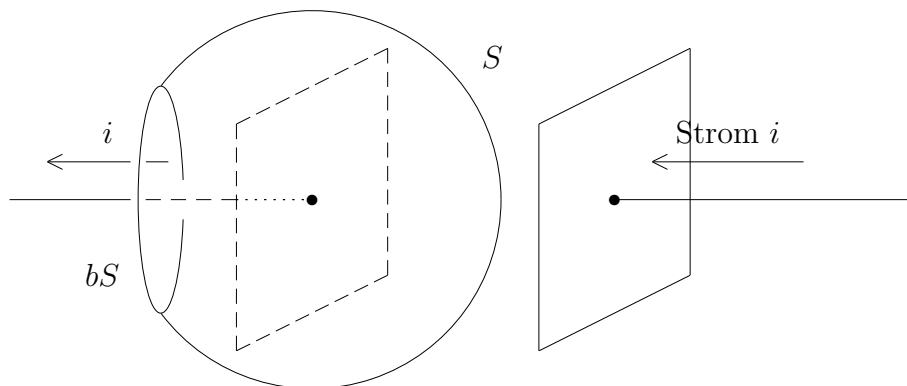
Fließt Strom durch eine Leiterschleife, so kann man beobachten, daß sich ein Magnetfeld um die Stromlinien herum aufbaut. Die *magnetische Erregung* ergibt durch Integration über geschlossene Wege den Gesamtstrom durch die eingeschlossene Fläche. Wir beschreiben sie also durch eine 1-Form

$$h = \omega_{\mathbf{H}} = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz.$$

Ist die Stromverteilung durch eine (vektorielle) Dichtefunktion \mathbf{J} gegeben, die sogenannte *Stromdichte*, so ergibt sich der Gesamtstrom als Integral über die Stromdichte und damit das *Durchflutungsgesetz*

$$\int_{bS} \mathbf{H} \bullet ds = \int_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{O}.$$

Maxwell entdeckte als erster, daß das Gesetz so unvollständig ist und in gewissen Situationen zu Widersprüchen führt. In dem folgenden Gedankenexperiment gibt es keinen Fluß durch S , aber das Integral über bS ist $\neq 0$.



Als Korrekturterm muß zur Stromdichte noch die zeitliche Änderung der elektrischen Verschiebungsdichte addiert werden:

$$\boxed{\int_{bS} \mathbf{H} \bullet ds = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \bullet d\mathbf{O}.$$

Mit dem Stokesschen Satz führt das zur 4. *Maxwellschen Gleichung*:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Will man die Maxwellschen Gleichungen relativistisch invariant schreiben, so muß man zu den drei räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 noch die Zeit t hinzunehmen. Man führt dann die 2-Formen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &:= e \wedge dt + \beta \\ \text{und } \mathbf{G} &:= -\delta + h \wedge dt \end{aligned}$$

ein, sowie die 3-Form $\Omega := \eta_{\mathbf{J}} \wedge dt - \varrho dV$. Die Maxwell'schen Gleichungen reduzieren sich dann auf das folgende einfache Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{l} d\mathbf{F} = 0, \\ d\mathbf{G} = \Omega. \end{array}}$$

Zum BEWEIS: Ist φ eine p -Form, die nur räumliche Differentiale enthält, so ist

$$d\varphi = d_{\mathbf{x}}\varphi + (-1)^p \dot{\varphi} \wedge dt,$$

wobei $d_{\mathbf{x}}\varphi$ das räumliche Differential von φ ist und $\dot{\varphi}$ durch Differenzieren der Koeffizienten von φ nach t entsteht, also

$$d(\omega_{\mathbf{F}}) = \eta_{\text{rot } \mathbf{F}} - \omega_{\partial \mathbf{F} / \partial t} \wedge dt \quad \text{und} \quad d(\eta_{\mathbf{F}}) = (\text{div } F) dV + \eta_{\partial \mathbf{F} / \partial t} \wedge dt.$$

Die Gleichung

$$0 = d\mathbf{F} = de \wedge dt + d\beta = (d_{\mathbf{x}}e + \dot{\beta}) \wedge dt + d_{\mathbf{x}}\beta$$

führt zu

$$d_{\mathbf{x}}e + \dot{\beta} = 0 \quad \text{und} \quad d_{\mathbf{x}}\beta = 0.$$

Das ist die 2. und 3. Maxwell'sche Gleichung.

Die Gleichung

$$\eta_{\mathbf{J}} \wedge dt - \varrho dV = \Omega = d\mathbf{G} = -d\delta + dh \wedge dt = (d_{\mathbf{x}}h - \dot{\delta}) \wedge dt - d_{\mathbf{x}}\delta$$

führt zu

$$d_{\mathbf{x}}h - \dot{\delta} = \eta_{\mathbf{J}} \quad \text{und} \quad d_{\mathbf{x}}\delta = \varrho dV.$$

Das ist die 4. und die 1. Maxwell'sche Gleichung. □

$\mathbf{F} = E_1 dx_1 \wedge dt + E_2 dx_2 \wedge dt + E_3 dx_3 \wedge dt + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$ heißt *elektromagnetischer Feldtensor* oder *Faraday-Tensor*. Wegen seiner 6 Koeffizienten bezeichnen ihn die Physiker auch als „Sechservektor“. Im Vakuum ist $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Dann stimmt der *Maxwell-Tensor* \mathbf{G} mit dem zu \mathbf{F} „dualen“ Tensor $*\mathbf{F}$ überein, der wie folgt definiert ist:

$$*\mathbf{F} := -E_1 dx_2 \wedge dx_3 - E_2 dx_3 \wedge dx_1 - E_3 dx_1 \wedge dx_2 + B_1 dx_1 \wedge dt + B_2 dx_2 \wedge dt + B_3 dx_3 \wedge dt.$$

Die Maxwell'schen Gleichungen haben dann die Form

$$d\mathbf{F} = 0 \quad \text{und} \quad d*\mathbf{F} = \Omega.$$

$\Omega = J_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt + J_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt + J_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt - \varrho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ wird als *Viererstromdichte* bezeichnet.

Wir kehren wieder zur nichtrelativistischen Physik zurück. Für die Gleichungen

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

kann man (lokal) wie folgt eine Lösung finden:

Wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ gibt es ein Vektorfeld \mathbf{A} mit $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Das folgt aus dem Poincaréschen Lemma: ist $d\beta = d\eta_{\mathbf{B}} = 0$, so gibt es eine 1-Form $a = \omega_{\mathbf{A}}$ mit $da = \beta$. Man nennt \mathbf{A} das *Vektorpotential*.

Setzt man die Beziehung $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ in die Gleichung $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ein, so erhält man:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Aber dann gibt es eine Funktion f mit $-\operatorname{grad} f = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Diese Funktion nennt man das *skalare Potential*.

Die Potentiale sind nicht eindeutig festgelegt. Ist g eine weitere Funktion und

$$\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} + \operatorname{grad} g, \quad f_1 := f - \frac{\partial g}{\partial t},$$

so ist auch $\operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}$ und $-\operatorname{grad} f_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = \mathbf{E}$. Man spricht von einer *Eichtransformation*. Es gibt verschiedene Methoden, eine *Eichung* vorzunehmen, d.h. die Potentiale festzulegen. Wir können darauf aber nicht näher eingehen.

Im Vakuum können wir $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ setzen⁶ Wenn es außerdem keine Ströme und Ladungen gibt, so reduzieren sich die Maxwellschen Gleichungen auf

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Dann ist

$$0 = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{und analog} \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Das sind die *Wellengleichungen*.

Ist etwa $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t) := F(x_2, t) \cdot \mathbf{e}_1$, mit einer C^∞ -Funktion F , so können wir

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3, t) := -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{\partial F}{\partial t}(x_2, t) \cdot \mathbf{e}_1$$

und

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, t) := \operatorname{rot} \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2, t) \cdot \mathbf{e}_3$$

setzen. Dabei steht \mathbf{H} senkrecht \mathbf{E} . Die Maxwellschen Gleichungen $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ und $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ sind erfüllt. Damit ein elektromagnetisches Feld vorliegt, muß auch $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ sein, also

$$\Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

⁶Eigentlich gibt es Konstanten ε, μ , so daß $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ist, mit $\varepsilon \cdot \mu \cdot c^2 = 1$. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

Diese 1-dimensionale Wellengleichung wird z.B. von

$$F(x_2, t) := \frac{1}{k} \sin(k(x_2 - t)), \quad k \text{ konstant,}$$

erfüllt. Dann ist

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3, t) = (\cos(k(x_2 - t)), 0, 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, t) = (0, 0, -\cos(k(x_2 - t))).$$

Das sind sinusförmige Wellen, die sich mit fortlaufender Zeit durch den Raum ausbreiten. Auf diese Weise sorgen die Maxwell'schen Gleichungen dafür, daß wir unser Radio- und Fernsehprogramm empfangen können.