Kapitel I

Funktionentheorie

§1 Holomorphe Funktionen

Wir kennen schon den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (Teil A, Kapitel I, §6) und haben einiges über die Geometrie von $\mathbb{C}$ gelernt (Teil A, Kapitel IV, §1). Insbesondere wissen wir, was Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{C}$ bedeutet, und wir haben auch schon einige Beispiele von komplexen Funktionen kennengelernt:

1. *Komplexe Polynome:* $\quad p(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$.

   $p(z)$ ist auf der gesamten komplexen Ebene definiert und stetig, und es gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*. Ist $p(z)$ nicht konstant, so hat $p(z)$ wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Insbesondere zerfällt jedes komplexe Polynom in Linearfaktoren. Tritt ein Linearfaktor $(z-c)$ in der k–ten Potenz auf, so sagt man, $p(z)$ hat in c eine *k-fache Nullstelle* (oder eine *Nullstelle mit der Vielfachheit* k). Ist $a_n \neq 0$, also $\deg(p) = n$, so besitzt p genau n Nullstellen, vorausgesetzt, man zählt sie alle mit ihrer Vielfachheit.

2. *Rationale Funktionen:* $\quad R(z) := \dfrac{p(z)}{q(z)}$, mit Polynomen p und q.

   Da $p(z)$ und $q(z)$ beide in Linearfaktoren zerfallen, kann man so lange kürzen, bis Zähler und Nenner keine gemeinsame Nullstelle mehr haben. Wir nehmen an, daß p und q schon selbst diese Eigenschaft besitzen. Dann nennt man jede Nullstelle des Nenners $q(z)$ eine *Polstelle* der rationalen Funktion R. Offensichtlich ist $R(z)$ außer in den endlich vielen Polstellen überall auf $\mathbb{C}$ definiert und stetig.

3. Eine spezielle Klasse von rationalen Funktionen bilden die *(gebrochen) linearen Transformationen:*

   $$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{mit } ad - bc \neq 0.$$

   Ist $c = 0$, so ist T eine affin-lineare Funktion, also ein Polynom vom Grad 1.

   Ist $c \neq 0$, so setzt sich T folgendermaßen zusammen:

   $$T(z) = T_2 \circ I \circ T_1(z),$$

   mit den affin-linearen Funktionen

   $$T_1(z) = cz + d \quad \text{und} \quad T_2(w) := Aw + B \quad (\text{mit } A = \frac{bc - ad}{c} \text{ und } B = \frac{a}{c})$$

   und der *Inversion*

   $$w = I(u) = \frac{1}{u}.$$

I hat eine einzige Polstelle bei $u = 0$, also hat T eine einzige Nullstelle bei $z = (T_1)^{-1}(0) = -\dfrac{d}{c}$.

4. *Komplexe Potenzreihen:* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

   Zu einer solchen Potenreihe gehört der *Konvergenzradius* R. Im Innern der Kreisscheibe $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\, z - a\,| < R\}$ konvergiert $f(z)$ absolut und gleichmäßig (gegen eine stetige Funktion), außerhalb von $\overline{D_R(a)}$ divergiert die Reihe. Dabei soll hier mit der Redeweise „im Innern" gemeint sein: auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_r(a)} \subset D_R(a)$.

   Wenn fast alle $c_n \neq 0$ sind und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |\,\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\,|$ existiert, dann stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius R überein. Ist $c_{2k} = 0$ für alle k, aber $c_{2k+1} \neq 0$ für fast alle k, so stimmt $\lim_{n\to\infty} |\,\dfrac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}}\,|$ mit R^2 überein, und das gilt auch, wenn die Koeffizienten mit ungeraden Nummern verschwinden und der Limes für die geraden Nummern existiert.

   Wichtigstes Beispiel ist die komplexe *Exponentialfunktion*

   $$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

   Sie steht über die Eulersche Formel in Beziehung zur reellen Exponentialfunktion und zu den reellen Winkelfunktionen:

   $$\exp(x + \mathbf{j}y) = e^x \cdot (\cos y + \mathbf{j}\sin y).$$

   Daraus kann man ablesen, daß die komplexe Exponentialfunktion periodisch ist, mit der Periode $2\pi\mathbf{j}$. Auf der reellen Achse (wo $y = 0$ ist) stimmt sie mit der reellen Exponentialfunktion überein.

   Im übrigen können auch rationale Funktionen als Grenzwerte von Potenzreihen auftreten, wie man am Beispiel der geometrischen Reihe sieht:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad \text{für } |\,z\,| < 1.$$

Zunächst einmal wollen wir das Problem mit dem Konvergenzradius noch etwas besser in den Griff bekommen:

Erinnern wir uns: Ist (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen, so heißt eine komplexe Zahl z_0 *Häufungspunkt* von (z_n), wenn in jeder Umgebung von z_0 unendlich viele Folgeglieder z_n liegen.

Beispiele:

1. $z_n := (-1)^n$ hat die Häufungspunkte -1 und $+1$.

2. $z_n := \mathbf{j}^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, 4, \ldots \\ \mathbf{j} & \text{für } n = 1, 5, \ldots \\ -1 & \text{für } n = 2, 6, \ldots \\ -\mathbf{j} & \text{für } n = 3, 7, \ldots \end{cases}$ hat 4 Häufungspunkte.

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie exakt einen Häufungspunkt besitzt.

Definition.

Ist (a_n) eine **reelle** Folge, so heißt der größte Häufungspunkt dieser Folge der *Limes superior* von (a_n), in Zeichen: $\overline{\lim}\, a_n$.

Beispiele :

1. $\overline{\lim}\,(-1)^n = 1$.
2. $\overline{\lim}\,[(-1)^n + (3 - \frac{1}{n})] = 4$.

I.1.1 Formel von Cauchy-Hadamard. *Sei* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine komplexe Potenzreihe und* $c := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|\,c_n\,|}$.

Dann gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe:

1. *Wenn c eine endliche Zahl > 0 ist, dann ist* $R = \dfrac{1}{c}$.
2. *Wenn $c = \infty$ ist, dann ist $R = 0$.*
3. *Wenn $c = 0$ ist, dann ist $R = \infty$.*

Beweis: O.B.d.A. sei $a = 0$. Das Konvergenzverhalten hängt nur von den Koeffizienten ab, nicht vom Entwicklungspunkt.

1) Es sei $0 \le c < \infty$.

a) Wir wählen eine reelle Zahl $r > 0$ so, daß $\dfrac{1}{r} > c$ ist. Das ist stets möglich: Ist $c = 0$, so kann r beliebig gewählt werden. Ist $c > 0$, so muß man r zwischen 0 und $\dfrac{1}{c}$ wählen.

Da c der größte Häufungspunkt der Folge $(\sqrt[n]{|\,c_n\,|})$ ist, muß dann gelten:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|\,c_n\,|} &< \frac{1}{r}, \text{ für fast alle } n, \\ \text{also} \quad |\,c_n\,|r^n &< 1 \qquad \text{für fast alle } n. \end{aligned}$$

Für $|\,z\,| < r$ ist demnach

$$|\,c_n z^n\,| = |\,c_n r^n\,| \cdot |\,\frac{z}{r}\,|^n < |\,\frac{z}{r}\,|^n,$$

wobei $q := |\frac{z}{r}|$ eine reelle Zahl mit $0 < q < 1$ ist. Also wird die Potenzreihe in $D_r(0)$ durch eine geometrische Reihe majorisiert und ist konvergent. Damit muß $R \geq r$ sein, und da r beliebig war, muß sogar $R \geq \frac{1}{c}$ sein (im Falle $c > 0$) bzw. $= \infty$ im Falle $c = 0$.

b) Ist $c > 0$, so wählen wir noch eine beliebige Zahl s mit $\frac{1}{c} < s < \infty$. Dann ist $c > \frac{1}{s}$, und es gibt unendlich viele n mit $\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{s}$. Aber dann ist auch

$$|c_n|s^n > 1 \text{ für unendlich viele } n.$$

Das bedeutet, daß die Potenzreihe für $|z| = s$ nicht konvergieren kann. Also ist $R \leq s$ und – weil s beliebig war – sogar $R \leq \frac{1}{c}$. Mit (a) folgt daraus, daß $R = \frac{1}{c}$ ist.

2) Ist $c = \infty$, so ist die Folge $\sqrt[n]{|c_n|}$ unbeschränkt, und damit auch für beliebiges $r > 0$ die Folge $r\sqrt[n]{|c_n|}$. Es folgt, daß dann auch $r^n|c_n|$ unbeschränkt ist. Damit kann die Potenzreihe für kein $z \neq 0$ konvergieren, es ist $R = 0$. □

Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine **reelle** Potenzreihe, so kann man f auch als komplexe Reihe auffassen, und ihr Konvergenzradius im Reellen stimmt mit dem im Komplexen überein. Das liefert weitere Beispiele komplexer Funktionen, etwa

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \text{und} \quad \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun lernen, mit dem Unendlichen zu rechnen. Dazu ergänzen wir die komplexe Zahlenebene um ein weiteres Element „∞“, das selbst nicht zu den Zahlen gehört:

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Anschaulich stellen wir uns vor, daß der Punkt ∞ weiter vom Nullpunkt entfernt ist als jede komplexe Zahl. Daher sagen wir:

Definition.

Eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt *Umgebung von* ∞, falls gilt:

1. $\infty \in U$.
2. Es gibt ein $r > 0$, so daß $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \subset U$ ist.

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt Umgebung einer komplexen Zahl z_0, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\} \subset U$ ist.

Der Umgebungsbegriff verschafft uns eine geometrische Struktur auf $\overline{\mathbb{C}}$. Bevor wir das näher untersuchen können, müssen wir etwas aus der Mengenlehre nachholen:

Sind A und B zwei beliebige Mengen, so ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \textbf{ oder } x \in B\} \\ \text{und} \quad A \cap B &= \{x \mid x \in A \textbf{ und } x \in B\}. \end{aligned}$$

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ irgend welche Mengen, so ist

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n &= \{x \mid x \in A_1 \textbf{ oder } x \in A_2 \textbf{ oder } \ldots \textbf{ oder } x \in A_n\} \\ &= \{x \mid \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } x \in A_i\} \\ \text{und } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n &= \{x \mid x \in A_1 \textbf{ und } x \in A_2 \textbf{ und } \ldots \textbf{ und } x \in A_n\} \\ &= \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\}. \end{aligned}$$

Manchmal ist es notwendig, unendlich viele Mengen zu vereinigen oder miteinander zu schneiden. Man versieht die Mengen (wie bei endlichen Systemen) mit einem Index, und die Indexmenge kann nun eine beliebige Menge sein.

Sei also ein System von Mengen A_i, $i \in I$, gegeben. Dann definiert man:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &:= \{x \mid \exists\, i \in I \text{ mit } x \in A_i\} \\ \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} A_i &:= \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}. \end{aligned}$$

Ein System von Mengen $(A_i)_{i \in I}$ heißt *endlich*, wenn I eine endliche Menge ist. Es heißt *abzählbar*, wenn $I = \mathbb{N}$ ist. Ist das System weder endlich noch abzählbar, so nennt man es *überabzählbar*.

Jetzt kehren wir zur geometrischen Struktur von $\overline{\mathbb{C}}$ zurück:

Definition.

Sei $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ eine Teilmenge.

1. Ein Punkt $z_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, falls es eine Umgebung von z_0 gibt, die ganz in M enthalten ist. (Dabei kann auch $z_0 = \infty$ sein)
2. Die Menge M heißt *offen in* $\overline{\mathbb{C}}$, falls jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist.

Das System aller offenen Mengen in $\overline{\mathbb{C}}$ besitzt folgende Eigenschaften:

T1 Die leere Menge ist offen.

T2 $\overline{\mathbb{C}}$ ist offen.

T3 Sind $M_1, \ldots, M_n$ offene Mengen in $\overline{\mathbb{C}}$, so ist auch $M_1 \cap \ldots \cap M_n$ offen in $\overline{\mathbb{C}}$.

T4 Ist $(M_i)_{i \in I}$ ein beliebiges System von offenen Mengen in $\overline{\mathbb{C}}$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ offen in $\overline{\mathbb{C}}$.

Die Mathematiker sagen nun:

Ist X irgend eine Menge, zusammen mit einem ausgezeichneten System von Teilmengen, das die Eigenschaften T1 – T4 besitzt, so heißt X ein *topologischer Raum*, und die ausgezeichneten Teilmengen werden offene Mengen genannt. Beispiele sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ und $\overline{\mathbb{C}}$. Man kann viele Sätze über abstrakte topologische Räume beweisen, die dann natürlich für alle Beispiele gleichzeitig gelten.

Wir führen weitere Begriffe für $\overline{\mathbb{C}}$ ein, die man so auch bei allen anderen Beispielen topologischer Räume benutzt, die bei uns vorgekommen sind:

Definition.

Eine Folge von Punkten (z_n) in $\overline{\mathbb{C}}$ *konvergiert* gegen einen Punkt z_0, wenn in jeder Umgebung von z_0 fast alle Folgeglieder liegen.

Ein Punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt *Randpunkt* einer Menge $M \subset \overline{\mathbb{C}}$, wenn es eine Folge (z_n) in M und eine Folge (w_n) in $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ gibt, die beide gegen z_0 konvergieren.

Eine Menge $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Man kann zeigen, daß eine Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement offen ist. Daher gilt:

A1 Ganz $\overline{\mathbb{C}}$ ist abgeschlossen.

A2 Die leere Menge ist abgeschlossen.

A3 Sind $M_1, \ldots, M_n$ abgeschlossene Mengen in $\overline{\mathbb{C}}$, so ist auch $M_1 \cup \ldots \cup M_n$ abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$.

A4 Ist $(M_i)_{i \in I}$ ein beliebiges System von abgeschlossenen Mengen in $\overline{\mathbb{C}}$, so ist auch $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$.

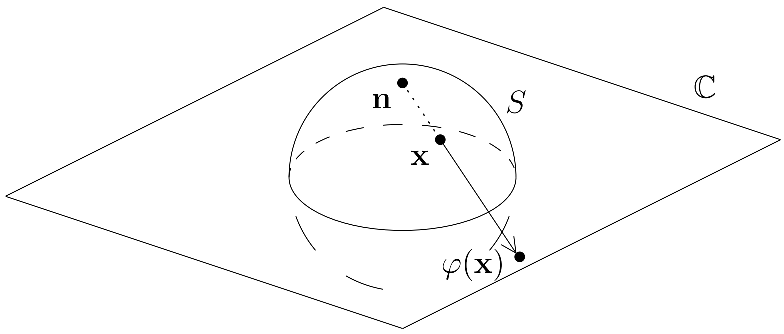
Zum Beweis benutzt man folgende Aussage aus der Mengenlehre:

Ist $(M_i)_{i \in I}$ ein System von Teilmengen einer „Grundmenge“ X und bezeichnet man für jede Teilmenge $T \subset X$ das Komplement $X \setminus T$ mit T', so ist

$$\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)' = \bigcap_{i \in I} (M_i)' \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right)' = \bigcup_{i \in I} (M_i)'.$$

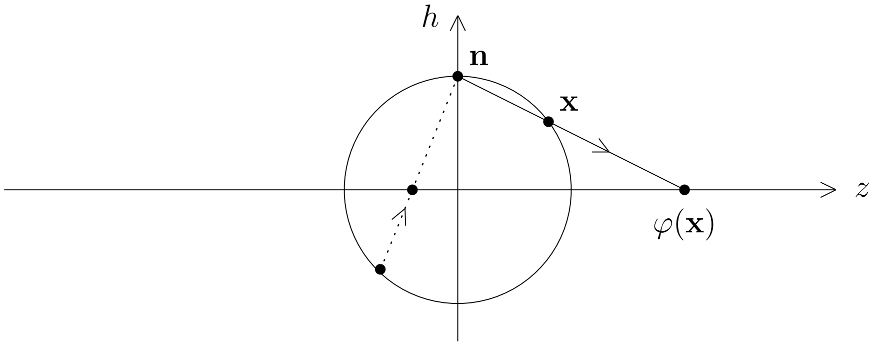
Wie üblich bezeichnet man die Menge der inneren Punkte einer Menge $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ mit $\mathring{M}$ und die Menge der Randpunkte mit ∂M. $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt abgeschlossene Hülle von M.

Wir geben nun eine anschauliche Deutung des Raumes $\overline{\mathbb{C}}$:



Sei $S := S^2 = \{(z,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |\,z\,|^2 + h^2 = 1\}$, $\mathbf{n} := (0,1) \in S$ der „Nordpol“. Dann wird die *stereographische Projektion* $\varphi : S \setminus \{n\} \to \mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:

Ist $\mathbf{x} = (z,h) \in S \setminus \{n\}$, so trifft der Strahl, der von $\mathbf{n}$ ausgeht und bei $\mathbf{x}$ die Sphäre S durchstößt, im Punkt $\varphi(\mathbf{x})$ die komplexe Ebene:



Ist $w = \varphi(z,h)$, so liegen w und z auf dem gleichen Strahl in $\mathbb{C}$, der von 0 ausgeht. Also muß $w = \lambda z$ sein, mit einem reellen Faktor $\lambda > 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: Ist $h > 0$, so ist $z \neq 0$, $\lambda > 1$, und nach dem Strahlensatz besteht das Verhältnis

$$h : 1 = |\,w - z\,| : |\,w\,|.$$

Also ist $h = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$, und daher $\lambda = \dfrac{1}{1-h}$.

Ist $-1 < h < 0$, so ist ebenfalls $z \neq 0$ und $0 < \lambda < 1$, und man kommt zum gleichen Ergebnis. Schließlich ist $\varphi(0,-1) = 0$. Somit ist die stereographische Projektion gegeben durch

$$\boxed{\varphi(z,h) = \frac{1}{1-h} \cdot z.}$$

Diese Abbildung ist bijektiv! Ist nämlich $w = \varphi(z,h) = \dfrac{1}{1-h} \cdot z$, so gilt:

$$z = tw \,(\text{mit } t \in \mathbb{R}),\ |\,z\,|^2 + h^2 = 1 \text{ und } h < 1.$$

Das liefert die folgenden Bestimmungsgleichungen für t und h:

$$\frac{t}{1-h} = 1 \quad \text{und} \quad t^2 |\,w\,|^2 + h^2 = 1, \text{ (mit } h < 1).$$

Einsetzen führt zu einer quadratischen Gleichung für h:

$$h^2(1+|\,w\,|^2) - 2h|\,w\,|^2 + (|\,w\,|^2 - 1) = 0.$$

Die Auflösung einer solchen Gleichung sollte inzwischen wohl jeder beherrschen. Es ergibt sich:

$$\boxed{\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|\,w\,|^2+1}, \frac{|\,w\,|^2-1}{|\,w\,|^2+1}\right).}$$

φ und φ^{-1} sind beides stetige Abbildungen, wobei man – genau genommen – die Stetigkeit auf S erst einmal mit Hilfe der Folgenkonvergenz definieren müßte. Es ist aber anschaulich klar, was gemeint ist.

Nähert sich $\mathbf{x} \in S$ dem Nordpol, so wandert $\varphi(\mathbf{x})$ immer weiter ins Unendliche. Und für eine Folge $(\mathbf{x}_n)$ auf $S \setminus \{\mathbf{n}\}$, die gegen $\mathbf{n}$ konvergiert, strebt $\varphi(\mathbf{x}_n)$ in $\mathbb{C}$ gegen ∞, in dem Sinne, wie wir es oben definiert haben. Deshalb kann man sich S als ein Modell des topologischen Raumes $\overline{\mathbb{C}}$ vorstellen, und $\mathbf{n}$ verkörpert dabei den Punkt ∞. Zwar stimmen im Modell die Entfernungen nicht mehr, und das wird um so schlimmer, je weiter man sich vom Nullpunkt entfernt, aber man kann zeigen, daß sogar die Winkel erhalten bleiben, und vor allem bleiben alle Nachbarschaftsbeziehungen erhalten.

Wir wollen das Verhalten der Inversion $I(z) := \dfrac{1}{z}$ auf $\overline{\mathbb{C}}$ untersuchen:

Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, die gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert auch $r_n := |\,z_n\,|$ gegen Null, und zu jedem $R > 0$ gibt es ein n_0, so daß $0 < r_n < \dfrac{1}{R}$ ist, bzw. $\dfrac{1}{r_n} > R$, für $n \ge n_0$. Aber das bedeutet, daß es zu jeder Umgebung U von ∞ ein n_0 gibt, so daß $I(z_n) \in U$ liegt, für $n \ge n_0$. Also ist

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty.$$

Konvergiert dagegen (z_n) in $\overline{\mathbb{C}}$ gegen ∞, so ist (z_n) in $\mathbb{C}$ eine unbeschränkte Folge, und da $|\,z_n\,|$ über alle Grenzen wächst, strebt $\dfrac{1}{|\,z_n\,|}$ gegen Null. Also gilt:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0.$$

Damit ist I eine stetige Abbildung von S nach S.

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, falls

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existiert und endlich ist.

$f'(z_0)$ nennt man die *(komplexe) Ableitung* von f in z_0.

Beispiel:

Sei $f(z) := z^n$. Dann ist

$$f(z) - f(z_0) = z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Also existiert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \sum_{i=0}^{n} z^i z_0^{n-i-1} = n \cdot z_0^{n-1},$$

f ist in z_0 komplex differenzierbar, mit $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

Das sieht genauso aus wie im Reellen! Tatsächlich gibt es noch mehr Gemeinsamkeiten:

I.1.2 Satz. *$f, g : U \to \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, $a, b \in \mathbb{C}$ seien Konstanten.*

1. *$a \cdot f + b \cdot g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$\begin{aligned} (a \cdot f + b \cdot g)'(z_0) &= a \cdot f'(z_0) + b \cdot g'(z_0) \\ \textit{und} \quad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \end{aligned}$$

2. *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0, $\dfrac{f}{g}$ ist in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. *Ist f in $w_0 := g(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $f \circ g$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(w_0) \cdot g'(z_0).$$

Der Beweis geht genauso wie im Reellen. Nützlich ist dabei das folgende Differenzierbarkeitskriterium:

I.1.3 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ ein Punkt und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
2. *Es gibt eine Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$, so daß gilt:*
   (a) *Δ ist in z_0 stetig.*
   (b) *Für $z \in U$ ist $f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0)$.*

Beweis:

1) Ist f komplex differenzierbar in z_0, so definieren wir Δ durch

$$\Delta(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{falls } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0 \end{cases}$$

Aus der Definition der komplexen Differenzierbarkeit folgt sofort, daß Δ in z_0 stetig ist. Außerdem ist $\Delta(z) \cdot (z - z_0) = f(z) - f(z_0)$ für $z \neq z_0$, und für $z = z_0$ ist die Gleichung trivialerweise erfüllt.

2) Umgekehrt gebe es eine Darstellung von f in der gewünschten Form, mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Dann ist

$$\Delta(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{für } z \neq z_0.$$

und daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \Delta(z_0).$$

□

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $M \subset U$ eine Teilmenge und f eine auf U definierte komplexwertige Funktion. Ist f in jedem Punkt von M komplex differenzierbar, so heißt f *auf M komplex differenzierbar.*

f heißt auf M *holomorph*, wenn es zu jedem Punkt $z \in M$ eine offene Umgebung W gibt, so daß f auf W definiert und komplex differenzierbar ist.

Ist f auf M komplex differenzierbar, so liefert die Ableitung $z \mapsto f'(z)$ eine neue Funktion auf M.

Bemerkung: Ist f in z_0, aber auf keiner offenen Umgebung von z_0 definiert, so kann f nach unseren Definitionen in z_0 komplex differenzierbar sein, nicht aber holomorph. Das ist manchmal eine zu starke Einschränkung. Wir nennen f auch dann in z_0 holomorph, wenn es eine offene Umgebung $W(z_0)$ und eine auf W komplex differenzierbare Funktion $\widehat{f}$ gibt, die auf dem Durchschnitt von W und dem Definitionsbereich von f mit f übereinstimmt. Man nennt $\widehat{f}$ dann eine *holomorphe Fortsetzung von f*.

Beispiele:

1. Die Polynome $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und dort demnach auch holomorph.

2. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich (also außerhalb ihrer Polstellen) holomorph.

3. Sei $f(z) := |\, z\,|^2 = z\overline{z}$. Dann ist $f(z) = f(0) + \Delta(z) \cdot (z - 0)$, wobei $\Delta(z) := \overline{z}$ stetig in 0 ist. Also ist f in $z = 0$ komplex differenzierbar.

   Wir wollen zeigen, daß f in keinem anderen Punkt von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist. Zunächst ist klar: Wäre $f(z)$ in einem $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar, so wäre dort auch $\overline{z} = \dfrac{1}{z} \cdot f(z)$ komplex differenzierbar. Wir betrachten nun die Folge

$$z_n := z_0 + \frac{\mathbf{j}^n}{n}.$$

Offensichtlich strebt z_n gegen z_0, aber es gilt:

$$\frac{\overline{z_n} - \overline{z_0}}{z_n - z_0} = \frac{\overline{z_0} + \frac{(-\mathbf{j})^n}{n} - \overline{z_0}}{z_0 + \frac{\mathbf{j}^n}{n} - z_0} = (-1)^n,$$

und diese Folge hat keinen Grenzwert!

Insbesondere ist $f(z) = z\overline{z}$ nirgends holomorph.

Weitere Beispiele liefern die Potenzreihen:

I.1.4 Satz. *Sei* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* a *und Konvergenzradius* R*. Dann ist* $f(z)$ *in* $D_R(a)$ *holomorph, und die Ableitung* $f'(z)$ *gewinnt man durch formales gliedweises Differenzieren:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}.$$

Beweis: Wir wissen schon aus Teil A, Kap.IV, Satz 4.1., daß die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$f^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$$

den gleichen Konvergenzradius wie $f(z)$ hat.

Nun müssen wir jedoch erst einmal die komplexe Differenzierbarkeit von $f(z)$ in einem beliebigen Punkt $z_0 \in D_R(a)$ zeigen. Um die Schreibarbeit zu verringern, nehmen wir an, daß der Entwicklungspunkt $a = 0$ ist:

Ist $F_N(z) := \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ die N–te Partialsumme von $f(z)$, so gilt:

$$f(z) - f(z_0) = \lim_{N\to\infty} F_N(z) - \lim_{N\to\infty} F_N(z_0) = \lim_{N\to\infty}(F_N(z) - F_N(z_0)).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} F_N(z) - F_N(z_0) &= \sum_{n=1}^{N} c_n(z^n - z_0^n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n(z-z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} \\ &= (z-z_0) \cdot \Delta_N(z), \end{aligned}$$

mit

$$\Delta_N(z) := \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Wir wählen ein r mit $0 < r < R$, so daß $|\, z_0 \,| < r$ ist. Für $z \in D_r(0)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\, c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} \,| &\leq |\, c_n \,| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |\, z \,|^i |\, z_0 \,|^{n-i-1} \\ &\leq |\, c_n \,| \cdot n \cdot r^{n-1}. \end{aligned}$$

Da $f^*(z)$ auf $\overline{D_r(0)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, konvergiert insbesondere die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|\, c_n\,|r^{n-1}$.

Nach dem Weierstraß-Kriterium (Teil A, Satz IV.3.3.) konvergiert dann $\Delta_N(z)$ gleichmäßig auf $D_r(0)$ gegen die stetige Funktion

$$\Delta(z) := \lim_{N\to\infty} \Delta_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Also ist $f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \cdot \Delta(z)$, mit einer in z_0 stetigen Funktion $\Delta(z)$. Damit ist f in z_0 komplex differenzierbar, und

$$f'(z_0) = \Delta(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z_0^{n-1}$$

hat den gewünschten Wert. □

Beispiele :

1. $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und es gilt:

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;=\; \exp(z). \end{aligned}$$

2. $\sin(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ und $\cos(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und es gilt:

$$\begin{aligned} \sin'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \;=\; \cos(z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2k \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \;=\; -\sin(z). \end{aligned}$$

Es folgen einige Sätze über die Exponentialfunktion, den Sinus und den Cosinus:

I.1.5 Eulersche Formel. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist*

$$\boxed{\exp(\mathbf{j}z) = \cos(z) + \mathbf{j}\sin(z).}$$

BEWEIS: Da alle vorkommenden Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig konvergieren, können wir recht sorglos mit den unendlichen Reihen arbeiten:

$$\begin{aligned}
\cos(z) + \mathbf{j}\sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + \mathbf{j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{j}z)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{j}z)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{j}z)^n}{n!} \\
&= \exp(\mathbf{j}z).
\end{aligned}$$

□

Aus der Reihenentwicklung entnimmt man sofort, daß gilt:

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(-z) = -\sin(z).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{j}z) &= \cos(z) + \mathbf{j}\sin(z) \\
\text{und} \quad \exp(-\mathbf{j}z) &= \cos(z) - \mathbf{j}\sin(z).
\end{aligned}$$

Daraus folgt (wenn wir auch e^w statt $\exp(w)$ schreiben) :

$$\boxed{\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{j}z} + e^{-\mathbf{j}z}).}$$

$$\boxed{\sin(z) = \frac{1}{2\mathbf{j}}(e^{\mathbf{j}z} - e^{-\mathbf{j}z}).}$$

Schließlich bleiben auch noch die Additionstheoreme gültig:

I.1.6 Satz.

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
2. $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.
3. $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

BEWEIS: Die Formel (1) für die Exponentialfunktion folgt genauso wie im Reellen, wir haben sie auch schon für die Formel

$$e^{x+\mathbf{j}y} = e^x(\cos(y) + \mathbf{j}\sin(y))$$

benutzt.

2) Es ist

$$\begin{aligned}\cos(z+w) + \mathbf{j}\sin(z+w) &= e^{\mathbf{j}(z+w)} = e^{\mathbf{j}z} \cdot e^{\mathbf{j}w} \\ &= (\cos(z) + \mathbf{j}\sin(z)) \cdot (\cos(w) + \mathbf{j}\sin(w)) \\ &= (\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)) + \\ &\quad + \mathbf{j}(\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)).\end{aligned}$$

Leider tut es hier noch nicht ein einfacher „Koeffizientenvergleich“, denn die Koeffizienten sind komplex, nicht reell. Aber wir haben noch eine weitere Formel:

$$\begin{aligned}\cos(z+w) - \mathbf{j}\sin(z+w) &= e^{-\mathbf{j}(z+w)} = e^{-\mathbf{j}z} \cdot e^{-\mathbf{j}w} \\ &= (\cos(z) - \mathbf{j}\sin(z)) \cdot (\cos(w) - \mathbf{j}\sin(w)) \\ &= (\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)) - \\ &\quad - \mathbf{j}(\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)).\end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert das erste Additionstheorem, Subtraktion das zweite. □

I.1.7 Satz. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist* $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\sin^2(z) + \cos^2(z) &= -\frac{1}{4}(e^{\mathbf{j}z} - e^{-\mathbf{j}z})^2 + \frac{1}{4}(e^{\mathbf{j}z} + e^{-\mathbf{j}z})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\mathbf{j}z} + 2 + e^{-2\mathbf{j}z} - e^{2\mathbf{j}z} + 2 - e^{-2\mathbf{j}z}) = 1.\end{aligned}$$

□

Wir wollen jetzt untersuchen, was man sich anschaulich unter der komplexen Ableitung vorzustellen hat. Dazu zunächst ein paar Vorbemerkungen:

Durch die Zuordnung $(x,y) \mapsto x + \mathbf{j}y$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ gegeben. Jede zweireihige reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ definiert durch

$$L_A(x + \mathbf{j}y) = (\alpha x + \beta y) + \mathbf{j}(\gamma x + \delta y)$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wann ist diese Abbildung zugleich $\mathbb{C}$-linear?

Auf jeden Fall muß dann $L(z) = L(z \cdot 1) = z \cdot L(1)$ sein. Daher gilt:

$$\beta + \mathbf{j}\delta = L_A(\mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot L_A(1) = \mathbf{j} \cdot (\alpha + \mathbf{j}\gamma) = -\gamma + \mathbf{j}\alpha,$$

also $\beta = -\gamma$ und $\delta = \alpha$.

Ist umgekehrt $A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, so ist

$$\begin{aligned}L_A(x + \mathbf{j}y) &= (\alpha x + \beta y) + \mathbf{j}(-\beta x + \alpha y) \\ &= (x + \mathbf{j}y) \cdot (\alpha - \mathbf{j}\beta) \\ &= (x + \mathbf{j}y) \cdot L_A(1)\end{aligned}$$

und L_A damit $\mathbb{C}$-linear. Wir haben also gezeigt:

L_A ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn A von der Form $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist.

Sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in U$. Wir schreiben

$$f(z) = g(z) + \mathbf{j}h(z),$$

mit reellwertigen Funktionen g und h. Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ und $\Delta(z_0) = f'(z_0)$.

Setzen wir jetzt $L(w) := f'(z_0) \cdot w$ und $r(w) := (\Delta(z_0 + w) - f'(z_0)) \cdot w$, so ist L $\mathbb{C}$-linear (und damit erst recht $\mathbb{R}$-linear), und es gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$.
2. $\displaystyle\lim_{w \to 0} \frac{r(w)}{|\,w\,|} = 0$.

Beweis: Es ist

$$f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + (\Delta(z) - f'(z_0)) \cdot (z - z_0) = f(z),$$

und

$$\frac{r(w)}{|\,w\,|} = (\Delta(z_0 + w) - f'(z_0)) \cdot \frac{w}{|\,w\,|}$$

konvergiert für $w \to 0$ selbst gegen Null. $\square$

Also ist die f zugrunde liegende Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ in z_0 total (reell) differenzierbar, mit $Df(z_0)(w) = f'(z_0) \cdot w$. Die reelle Funktionalmatrix A von f in z_0 ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

Weil $L_A = Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear ist, muß gelten:

$$h_x(z_0) = -g_y(z_0) \quad \text{und} \quad h_y(z_0) = g_x(z_0).$$

Ist umgekehrt bekannt, daß f in z_0 reell differenzierbar ist, und gelten die gerade nachgewiesenen Beziehungen zwischen h_x, h_y, g_x und g_y, so folgt: $L(w) := Df(z_0)(w)$ ist $\mathbb{C}$-linear. Also gibt es eine komplexe Zahl a, so daß $L(w) = aw$ ist. Und dann gilt:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{L(z - z_0) - r(z - z_0)}{z - z_0} = a - \frac{r(z - z_0)}{z - z_0} \to a \text{ für } z \to z_0.$$

Das bedeutet, daß f in z_0 komplex differenzierbar ist, mit $f'(z_0) = a = Df(z_0)(1)$. Wir haben bewiesen:

I.1.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f = g + \mathbf{j}h : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
2. *f ist in z_0 (total) reell differenzierbar und die reelle Ableitung $Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear.*
3. *f ist in z_0 (total) reell differenzierbar, und es gelten die sog.*

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z_0).}$$

In jedem dieser Fälle ist

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) + \mathbf{j}\,\frac{\partial h}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) - \mathbf{j}\,\frac{\partial g}{\partial y}(z_0).}$$

Setzt man noch (für beliebige reell differenzierbare Funktionen f)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &:= \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) + \mathbf{j}\,\frac{\partial h}{\partial x}(z_0) \\ \textit{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &:= \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) + \mathbf{j}\,\frac{\partial h}{\partial y}(z_0), \end{aligned}$$

so gilt für komplex differenzierbares f :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -\mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - \mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Zum Beweis der Formeln:

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist $Df(z_0)(w) = f'(z_0) \cdot w$, also

$$f'(z_0) = Df(z_0)(1) = g_x(z_0) + \mathbf{j}h_x(z_0) = f_x(z_0)$$

und

$$\mathbf{j} \cdot f'(z_0) = Df(z_0)(\mathbf{j}) = g_y(z_0) + \mathbf{j}h_y(z_0) = f_y(z_0).$$

Daraus folgen alle gewünschten Gleichungen. □

ACHTUNG! Die *partielle Differenzierbarkeit* von f allein reicht nicht aus!

Beispiele :

1. Sei $f(z) := z^2$. Dann ist

$$g(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad h(x, y) = 2xy.$$

Also ist $g_x = 2x$, $g_y = -2y$, $h_x = 2y$ und $h_y = 2x$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt!

Außerdem ist $f'(z) = g_x(z) + \mathbf{j}h_x(z) = 2x + \mathbf{j} \cdot 2y = 2 \cdot (x + \mathbf{j}y) = 2z$.

2. Sei $f(z) := \dfrac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ist $z = x + \mathbf{j}y$, so ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\overline{z}} \cdot \overline{z} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x - \mathbf{j}y),$$

also

$$g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad h(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Dann ist

$$g_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = h_y \quad \text{und} \quad h_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -g_y.$$

Es folgt:

$$f'(z) = g_x + \mathbf{j}h_x = \frac{(y^2-x^2) + \mathbf{j}\cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(\mathbf{j}(x-\mathbf{j}y))^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-\overline{z}^2}{(z\overline{z})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Das formale Rechnen im Komplexen ist meist viel einfacher als der Umweg über's Reelle! Dennoch liefern reelle Betrachtungen zusätzliche Informationen:

I.1.9 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f als reelle Abbildung orientierungserhaltend.*

BEWEIS: Wir müssen die Funktionaldeterminante ausrechnen:

$$\begin{aligned} J_f(z) &= \det\begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z) \\ h_x(z) & h_y(z) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} g_x(z) & g_y(z) \\ -g_y(z) & g_x(z) \end{pmatrix} \\ &= g_x(z)^2 + g_y(z)^2 = |\,f'(z)\,|^2 > 0. \end{aligned}$$

□

Eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{C}$ kann – wenn sie nicht konstant ist – niemals holomorph sein. Um das einzusehen, müssen wir etwas ausholen:

Eine (auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ definierte) Funktion f heißt *lokal-konstant*, wenn es zu jedem $z \in U$ eine Umgebung gibt, auf der f konstant ist.

I.1.10 Hilfssatz. *Eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Gebiet (also zusammenhängend), wenn jede lokal-konstante Funktion auf G schon konstant ist.*

BEWEIS: Sei $z_0 \in G$ fest gewählt und

$$G^* := \{z \in G \mid \text{ Es gibt einen stetigen Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ in } G\}.$$

1) Ist G ein Gebiet, so ist $G^* = G$. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ lokal-konstant, $c_0 := f(z_0)$. Wir nehmen an, es gibt ein $z \in G$ mit $f(z) = c \neq c_0$. Die Menge $B := \{z \in G \mid f(z) = c_0\}$ ist offen, und es gibt einen stetigen Weg $\alpha : [0,1] \to G$ mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = z$. Dieser Weg muß ∂B in einem Punkt z_1 treffen (man beweist das ähnlich wie Aufgabe 19 im 2. Semester). Offensichtlich ist $c_1 := f(z_1) \neq c_0$, und es gibt eine Umgebung von z_1, auf

der $f(z) \equiv c_1$ ist. Aber dann kann z_1 kein Randpunkt von B sein. Widerspruch! Also ist $B = G$, f ist konstant.

2) Jede lokal-konstante Funktion auf G sei schon konstant. Betrachte speziell die Funktion f, die $\equiv 1$ auf G^* und $\equiv 0$ auf $G \setminus G^*$ ist.

G^* ist offen: Ist $z \in G^*$ und $D_\varepsilon(z) \subset G$, so gehört auch noch ganz $D_\varepsilon(z)$ zu G^*.

$G \setminus G^*$ ist offen: Ist $z \in G \setminus G^*$ und $D_\varepsilon(z) \subset G$, so kann kein Punkt von $D_\varepsilon(z)$ zu G^* gehören.

Also ist f lokal-konstant. Aber dann folgt, daß sogar $f(z) \equiv 1$ sein muß, also $G^* = G$. □

I.1.11 Hilfssatz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist lokal-konstant.*
2. *f ist auf U komplex differenzierbar, und es ist $f'(z) \equiv 0$.*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Wegen $f'(z) = g_x(z) + \mathbf{j}h_x(z)$ und wegen der Gültigkeit der Cauchy-Riemmanschen DGLn ist $Df(z) = 0$ für alle $z \in U$. Aus der reellen Analysis folgt dann z.B., daß f auf jeder Kreisscheibe in U konstant ist. □

Nun folgt:

I.1.12 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ nicht konstant, so kann f nicht nur reelle oder nur rein imaginäre Werte annehmen.*

Beweis: Nähme etwa $f = g + \mathbf{j}h$ nur reelle Werte an, so wäre $h(z) \equiv 0$, also $g_x = h_y = 0$ und $g_y = -h_x = 0$. Mit dem 2. Hilfssatz folgt dann: f ist lokal-konstant. Aus dem 1. Hilfssatz entnehmen wir dann, daß f konstant ist, aber das hatten wir gerade ausgeschlossen. □

Beispiel:

$f(x + \mathbf{j}y) := x$ kann nicht holomorph sein.

Tatsächlich ist $g_x = 1$ und $h_y = 0$.

Ist $z \neq 0$ eine komplexe Zahl, so gibt es eine Darstellung

$$z = r \cdot e^{\mathbf{j}t},$$

mit $r > 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Man nennt dann $\arg(z) := t$ ein *Argument* von z. Es ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt. Beschränkt man die Werte von t auf ein halboffenes Intervall der Länge 2π, so wird das Argument dadurch eindeutig gemacht und eine „Argumentfunktion“ $z \mapsto \arg(z)$ eingeführt. Für $z = 0$ ist das Argument allerdings nie definiert.

Läßt man das Argument im Intervall $[0, 2\pi)$ laufen, so ist $\arg(z)$ der Winkel, den z gegen die positive x-Achse einnimmt. Möchte man die Winkel auch in negativer Richtung messen, so sollte man das Argument besser im Intervall $[-\pi, \pi)$ laufen lassen. Dann ist insbesondere

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

Schwieriger wird es, wenn man Winkel addiert und dabei aus dem Bereich erlaubter Argumente herauskommt. Ich will das am Beispiel des Argumentbereiches $[0, 2\pi)$ erläutern:

Für kleine Argumente (deren Summe $< 2\pi$ ist) gilt die Formel

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ist die rechte Seite jedoch $\geq 2\pi$, so muß man von diesem Wert 2π subtrahieren, um den wahren Wert der linken Seite zu erhalten. Analog funktioniert das bei der Subtraktion: Erhält man einen Wert < 0, so muß man 2π addieren.

Bei anderen Argumentbereichen verfährt man sinngemäß.

Definition.

Sind z, w komplexe Zahlen $\neq 0$, so heißt

$$\angle(z, w) := \arg(w\overline{z}) = \arg(w) - \arg(z)$$

der *Winkel zwischen* z und w.

Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zwei glatte Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) =: z_0$, so versteht man unter dem Winkel zwischen diesen beiden Wegen in z_0 (in Zeichen: $\angle(\alpha, \beta)$) den Winkel $\angle(\overset{\bullet}{\alpha}(0), \overset{\bullet}{\beta}(0))$ zwischen den Tangenten an α und β in z_0.

Wählt man alle Argumente im Bereich $[0, 2\pi)$, so liegt auch der Winkel immer in diesem Bereich. Die Richtung des Winkels wird dann nicht berücksichtigt!

Es soll jetzt untersucht werden, wie sich Winkel unter holomorphen Abbildungen transformieren. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Ableitung und $\alpha = \alpha_1 + \mathbf{j}\alpha_2 : [0, 1] \to U$ ein glatter Weg mit $\alpha(0) = z_0$. Die Ableitung von α hat die Form $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = \alpha_1'(t) + \mathbf{j}\alpha_2'(t)$.

$f \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ist wieder ein stetig differenzierbarer Weg. Ist $f = g + \mathbf{j}h$, so ist

$$f \circ \alpha(t) = g(\alpha_1(t) + \mathbf{j}\alpha_2(t)) + \mathbf{j} \cdot h(\alpha_1(t) + \mathbf{j}\alpha_2(t)).$$

Die Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)^\bullet(t) &= (g \circ \alpha)^\bullet(t) + \mathbf{j}(h \circ \alpha)^\bullet(t) \\
&= g_x(\alpha(t))\alpha_1'(t) + g_y(\alpha(t))\alpha_2'(t) + \mathbf{j}[h_x(\alpha(t))\alpha_1'(t) + h_y(\alpha(t))\alpha_2'(t)] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))\alpha_2'(t) \\
&= f'(\alpha(t)) \cdot \alpha_1'(t) + f'(\alpha(t)) \cdot \mathbf{j}\alpha_2'(t) \\
&= f'(\alpha(t)) \cdot \overset{\bullet}{\alpha}(t).
\end{aligned}$$

Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist

$$\arg((f \circ \alpha)^\bullet(0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\overset{\bullet}{\alpha}(0))$$

und daher

$$\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta)$$

für beliebige stetig differenzierbare glatte Wege.

Allgemein nennt man eine stetig differenzierbare Abbildung f mit $J_f(z_0) \neq 0$ *in* z_0 *winkeltreu*, wenn $\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta)$ für beliebige glatte Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ ist.

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine (reell) stetig differenzierbare Abbildung. f heißt *(lokal) konform*, wenn gilt:

1. f ist winkeltreu.
2. f ist orientierungserhaltend.

Wir haben inzwischen gesehen, daß holomorphe Funktionen, deren Ableitung $f'(z)$ stetig und überall $\neq 0$ ist, lokal konform sind. Es gilt aber auch die Umkehrung:

I.1.13 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar.*

f ist genau dann lokal konform, wenn f holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ ist.

Beweis: Wir müssen etwas aufpassen. Solange wir nicht wissen, ob f holomorph ist, können wir die Cauchy-Riemannschen DGLn nicht verwenden! Also müssen wir $f \circ \alpha$ und $(f \circ \alpha)^\bullet$ noch einmal ausrechnen, diesmal unter der schwächeren Voraussetzung, daß f nur reell stetig differenzierbar ist. Für $z = \alpha(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)^\bullet(t) &= (g \circ \alpha)^\bullet(t) + \mathbf{j}(h \circ \alpha)^\bullet(t) \\
&= g_x(z)\alpha_1'(t) + g_y(z)\alpha_2'(t) + \mathbf{j}[h_x(z)\alpha_1'(t) + h_y(z)\alpha_2'(t)] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(z)\alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\alpha_2'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(z) \cdot \frac{1}{2}[\overset{\bullet}{\alpha}(t) + \overline{\overset{\bullet}{\alpha}(t)}] + \frac{\partial f}{\partial y}(z) \cdot \frac{1}{2\mathbf{j}}[\overset{\bullet}{\alpha}(t) - \overline{\overset{\bullet}{\alpha}(t)}] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)\overset{\bullet}{\alpha}(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)\overline{\overset{\bullet}{\alpha}(t)}.
\end{aligned}$$

Sei $z_0 := \alpha(0)$. Ist $\overset{\bullet}{\alpha}(0) \neq 0$, so ist auch $(f \circ \alpha)^\bullet(0) \neq 0$. Das kann man bereits in der 2. Zeile erkennen, denn es ist ja $\det Df(z_0) > 0$.

Man definiert nun formal die sogenannten *Wirtinger-Ableitungen*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(z) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) \\
\text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right).
\end{aligned}$$

Sie sind schwer anschaulich zu deuten, aber recht brauchbar zum Rechnen. So sind z.B. die Cauchy-Riemannschen DGLn äquivalent zur Gleichung $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Wir haben gezeigt:

$$(f \circ \alpha)^\bullet(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \cdot \overset{\bullet}{\alpha}(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) \cdot \overline{\overset{\bullet}{\alpha}(t)}.$$

Ist f konform, so gilt für beliebige glatte Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$:

$$\arg((f \circ \alpha)^\bullet(0)) - \arg((f \circ \beta)^\bullet(0)) = \arg(\overset{\bullet}{\alpha}(0)) - \arg(\overset{\bullet}{\beta}(0)).$$

Man kann das auch so formulieren:

$$\arg\left(\frac{(f \circ \alpha)^\bullet(0)}{\overset{\bullet}{\alpha}(0)}\right) = \arg((f \circ \alpha)^\bullet(0)) - \arg(\overset{\bullet}{\alpha}(0)) \text{ ist unabhängig von } \alpha.$$

Also hat

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot \frac{\overline{\overset{\bullet}{\alpha}(0)}}{\overset{\bullet}{\alpha}(0)}$$

konstantes Argument, auch wenn $\overset{\bullet}{\alpha}(0)$ beliebige Werte $\neq 0$ durchläuft. Das ist nur möglich, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ist, und das für jedes z_0. Also ist f holomorph.

Da f orientierungserhaltend sein soll, muß $f'(z) \neq 0$ sein. $\square$

Beispiele:

1. Sei $f(z) := z^2$. f ist überall holomorph, aber es ist $f'(0) = 0$. Im Nullpunkt kann f demnach nicht konform sein. Da $(f \circ \alpha)^\bullet(0) = f'(0) \cdot \overset{\bullet}{\alpha}(0) = 0$ für alle Wege α ist, können wir die Winkeltreue nicht auf dem üblichen Wege überprüfen.

   Ist etwa $\alpha(t) := t$ und $\beta(t) := t \cdot e^{\mathbf{j}\lambda}$, mit $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, so beschreiben α und β zwei Geraden durch 0, die den Winkel λ einschließen.

   Dann sind $f \circ \alpha(t) = t^2$ und $f \circ \beta(t) = t^2 \cdot e^{2\mathbf{j}\lambda}$ zwar keine glatten Wege mehr, aber ihre Spuren sind wieder zwei Geraden durch 0, die nun den Winkel 2λ einschließen. *Durch f werden im Nullpunkt alle Winkel verdoppelt!*

   Anders verhält es sich, wenn wir einen Punkt $z_0 \neq 0$ untersuchen. Sei etwa $\alpha(t) := 1 + t$ und $\beta(t) := 1 + t \cdot e^{\mathbf{j}\lambda}$. Dann ist $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ und $\angle(\alpha, \beta) = \lambda$. Weiter ist

   $$f \circ \alpha(t) = 1 + 2t + t^2 \quad \text{und} \quad f \circ \beta(t) = 1 + 2te^{\mathbf{j}\lambda} + t^2 e^{2\mathbf{j}\lambda},$$

   und daher $(f \circ \alpha)^\bullet(0) = 2$ und $(f \circ \beta)^\bullet(0) = 2e^{\mathbf{j}\lambda}$. Also ist $\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \lambda = \angle(\alpha, \beta)$. Das ist nicht verwunderlich, denn außerhalb von $z = 0$ ist f konform.

2. Sei $f(z) := \overline{z}$. Dann ist f stetig differenzierbar und $J_f(z) = -1 \neq 0$. Da f nicht orientierungserhaltend ist, kann f nicht konform sein. Es ist aber

   $$(f \circ \alpha)^\bullet(0) = \overline{\overset{\bullet}{\alpha}(0)}.$$

Ist $\arg(\overset{\bullet}{\alpha}(0)) = t$ und $\arg(\overset{\bullet}{\beta}(0)) = s$, so ist

$$\arg((f \circ \beta)^\bullet(0)) - \arg((f \circ \alpha)^\bullet(0)) = -s - (-t) = -(s - t).$$

f erhält zwar die Winkel, dreht aber deren Orientierung um. Insbesondere ist f nicht holomorph.

Die Konformität liefert Möglichkeiten, holomorphe Funktionen im Bild darzustellen. So wird z.B. das durch die Geraden $\{x = \text{const.}\}$ und $\{y = \text{const.}\}$ gegebene orthogonale Liniennetz wieder auf ein orthogonales Liniennetz abgebildet.

Wir kommen jetzt zu einer ersten Anwendung der holomorphen Funktionen:

Sei $\mathbf{F} := p + \mathbf{j}q$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Wir nehmen an, daß $\mathbf{F}$ quellenfrei und wirbelfrei ist. Letzteres wird durch die Bedingung

$$\frac{\partial q}{\partial x}(z) - \frac{\partial p}{\partial y}(z) = 0 \text{ für } z \in U$$

ausgedrückt. Das ist gerade die „Integrabilitätsbedingung“ aus Kap. I, §1, im Falle $n = 2$. Also ist $\mathbf{F}$ zumindest lokal ein Gradientenfeld. Wir nehmen zusätzlich an, daß das sogar global der Fall ist, daß es also eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion g mit $\nabla g = \mathbf{F}$ auf U gibt.

Wegen der Quellenfreiheit von $\mathbf{F}$ ist $\triangle g = \nabla \bullet \nabla g = \mathbf{div}\, \mathbf{F} = 0$.

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion g auf U mit

$$\triangle g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \equiv 0$$

heißt *harmonisch*. Der Differentialoperator $\triangle$ heißt *Laplace-Operator*.

Wir haben gesehen: *Das Potential eines quell- und wirbelfreien Vektorfeldes ist eine harmonische Funktion.*

Beispiel :

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $g := \mathrm{Re}\,(f)$ und $h := \mathrm{Im}\,(f)$.

Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen DGLn:

$$\triangle g = \partial_x(g_x) + \partial_y(g_y) = \partial_x(h_y) - \partial_y(h_x) = 0$$

und

$$\triangle h = \partial_x(h_x) + \partial_y(h_y) = -\partial_x(g_y) + \partial_y(g_x) = 0.$$

Realteil und Imaginärteil von holomorphen Funktionen sind harmonisch!

In diesem Fall ist $\mathbf{F}(z) := \nabla g(z) = g_x(z) + \mathbf{j}g_y(z) = g_x(z) - \mathbf{j}h_x(z) = \overline{f'(z)}$.

Man nennt f ein *komplexes Potential* für $\mathbf{F}$. und verifiziert leicht:

$$\nabla h(z) = h_x(z) + \mathbf{j}h_y(z) = -g_y(z) + \mathbf{j}g_x(z) = \mathbf{j}(g_x(z) + \mathbf{j}g_y(z) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{F}(z).$$

Sei wieder $\mathbf{F} = p + \mathbf{j}q$ ein quell- und wirbelfreies Vektorfeld mit Potential g. Dann ist auch $\mathbf{jF} = -q + \mathbf{j}p$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und es gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(z) - \frac{\partial(-q)}{\partial y}(z) = p_x(z) + q_y(z) = \mathbf{div}\,\mathbf{F}(z) = 0.$$

Also erfüllt auch $\mathbf{jF}$ das Integrabilitätskriterium, und $\mathbf{jF}$ besitzt lokal ein Potential h. Dann haben wir:

$$\mathbf{j} \cdot (g_x(z) + \mathbf{j}g_y(z)) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{F}(z) = h_x(z) + \mathbf{j}h_y(z),$$

also $g_x = h_y$ und $-g_y = h_x$. Das bedeutet, daß $f := g + \mathbf{j}h$ komplex differenzierbar ist! Das obige Beispiel war also der Normalfall! Zumindest lokal besitzt ein quell- und wirbelfreies Vektorfeld in $\mathbb{C}$ immer ein komplexes Potential.

Ist $\mathbf{F}(z) = p(z) + \mathbf{j}q(z) = \overline{f'(z)}$ ein Vektorfeld mit dem komplexen Potential $f = g + \mathbf{j}h$, so nennt man die Kurven

$$\begin{array}{lll} & \{z \mid g(z) = \text{const.}\} & \text{Äquipotentiallinien} \\ \text{und} & \{z \mid h(z) = \text{const.}\} & \text{Feldlinien.} \end{array}$$

Da g das reelle Potential von $\mathbf{F}$ ist, liegt die Bezeichnung „Äquipotentiallinien“ nahe. Es handelt sich um die Niveaulinien der Funktion g. Die Feldlinien sollten dazu senkrecht, in Richtung der Gradienten von g, verlaufen. Tatsächlich gilt:

Ist $f = g + \mathbf{j}h$ holomorph, so ist $\nabla g \bullet \nabla h = 0$.

Denn wegen der Cauchy-Riemannschen DGLn ist

$$\nabla g \bullet \nabla h = g_x \cdot h_x + g_y \cdot h_y = h_y \cdot h_x - h_x \cdot h_y = 0.$$

Wenn aber $\mathbf{grad}\,g$ senkrecht auf $\mathbf{grad}\,h$ steht, dann verlaufen die Niveaulinien von h in Richtung des Gradienten von g.

Beispiel:

Das Feld eines Dipols (in der Ebene) kann mit dem komplexen Potential $f(z) = \dfrac{1}{z}$ beschrieben werden. Dann ist

$$g(x + \mathbf{j}y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad h(x + \mathbf{j}y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

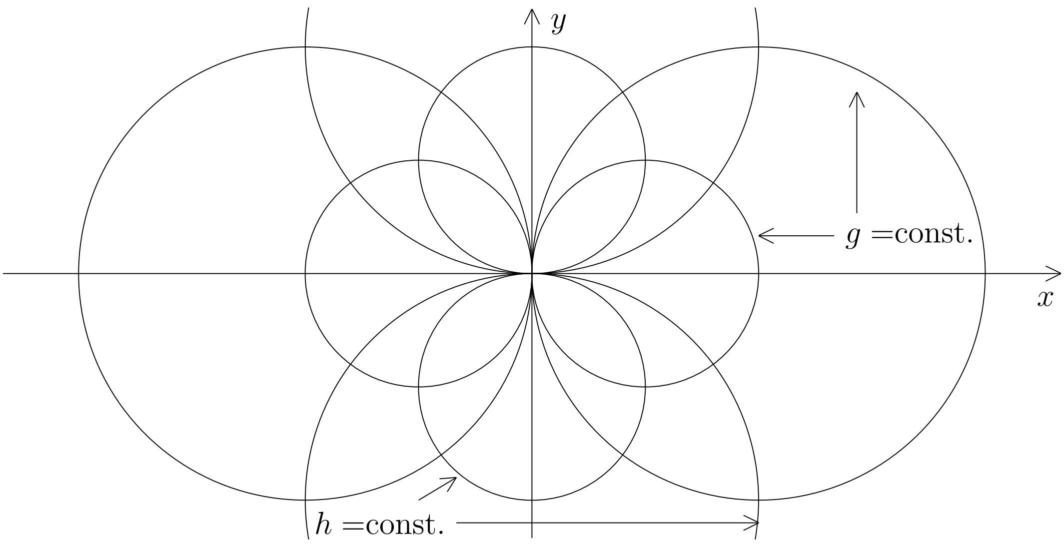
Also ist

$$\begin{array}{lccc} & g(z) = c & \Longleftrightarrow & \left(x - \dfrac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{2c}\right)^2 \\ \text{und} & h(z) = c & \Longleftrightarrow & x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2c}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2c}\right)^2. \end{array}$$

Äquipotentiallinien und Feldlinien sind jeweils Kreise, die Scharen stehen aufeinander senkrecht.

Das Feld ist gegeben durch

$$\mathbf{F}(z) = \overline{f'(z)} = -\frac{1}{\overline{z}^2} = \frac{-z^2}{|\,z\,|^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \mathbf{j} \cdot \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$



y
g =const.
x
h =const.

§2 Integration im Komplexen

Definition.

Sei $f = g + \mathbf{j}h : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b g(t)\,dt + \mathbf{j}\int_a^b h(t)\,dt.$$

Es gelten die bekannten Regeln:

I.2.1 Satz.

1. *Das Integral ist linear, d.h. für Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist*

$$\int_a^b (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\,dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt + c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

2. *Es ist*

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}.$$

3. *Ist $F = G + \mathbf{j}H$ und $F' := G' + \mathbf{j}H' = f$, so ist*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

4. *$\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig, stückweise stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, so ist*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds.$$

5. *Es gilt die Abschätzung*

$$|\int_a^b f(t)\,dt\,| \le \int_a^b |\,f(t)\,|\,dt.$$

Beweis: Die meisten Aussagen sind trivial. Durch Zerlegung in Realteil und Imaginärteil lassen sie sich sofort auf die entsprechenden Sätze aus der reellen Integrationstheorie zurückführen.

Wir beschränken uns hier auf einen Beweis der letzten Aussage, die im Komplexen nicht ganz so selbstverständlich ist:

Sei $z := \int_a^b f(t)\,dt = r \cdot e^{\mathbf{j}\lambda}$, mit $r > 0$ und $\lambda = \arg(z)$. (Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen)

Dann ist $e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot z = r = |\int_a^b f(t)\,dt\,|$, also

$$|\int_a^b f(t)\,dt\,| = \mathrm{Re}\left(e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot \int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot f(t))\,dt.$$

Da für eine komplexe Zahl $w = u + \mathbf{j}v$ stets $\mathrm{Re}\,(w) = u \le \sqrt{u^2 + v^2}$ ist und die gewünschte Ungleichung für reellwertige Funktionen bekannt ist, folgt:

$$|\int_a^b f(t)\,dt\,| = \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot f(t))\,dt \le \int_a^b |\,e^{-\mathbf{j}\lambda} \cdot f(t)\,|\,dt = \int_a^b |\,f(t)\,|\,dt.$$

$\square$

Die Komplexe Differenzierbarkeit wurde formal genauso wie im Reellen definiert, so daß sich viele aus dem Reellen bekannte Regeln ganz einfach ins Komplexe übertragen ließen.

Wir wollen nun nach dem Muster der reellen Analysis auch komplexe Integrale $\int_z^w f(z)\,dz$ einführen. Dazu müßten wir erst einmal Riemannsche Summen der Gestalt

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

betrachten. Und hier beginnt die Schwierigkeit. Wie sollen die Punkte z_k und wie die ξ_k gewählt werden? Intervalle gibt es im Komplexen nicht! Wir könnten Punkte auf der Verbindungsstrecke nehmen, aber die Funktion f braucht dort überhaupt nicht definiert zu sein. Also verbinden wir Anfangspunkt z und Endpunkt w durch einen Weg $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$, der ganz im Definitionsbereich von f verläuft, und wählen die Punkte auf dem Weg. Die Riemannschen Summen bekommen dann die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{n} f(\alpha(\xi_k))(\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha(\xi_k)) \cdot \frac{\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Wählt man jetzt die Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ feiner und feiner, so streben die Riemannschen Summen überraschenderweise gegen ein Integral, das wir schon mit der vorhandenen Theorie beschreiben können, und das im Falle des Weges $\alpha(t) := t$ und einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit dem bekannten Riemannschen Integral übereinstimmt. Wir können uns also den Umweg über die Riemannschen Summen sparen und das komplexe Integral direkt definieren.

Als Definitionsbereich einer zu integrierenden Funktion brauchen wir jetzt immer eine zusammenhängende offene Menge, also ein Gebiet. Ein *Integrationsweg* in einem solchen Gebiet G ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\alpha : [a, b] \to G$.

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und α ein Integrationsweg in G. Dann wird das *komplexe Kurvenintegral* von f über α definiert durch

$$\int_\alpha f(z)\,dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\,dt.$$

Diese Definition erinnert an das Kurvenintegral zweiter Art. Wir wollen sehen, wie weit die Übereinstimmung geht:

Ist $f = g + \mathbf{j}h$ und $\alpha = \alpha_1 + \mathbf{j}\alpha_2$, so ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz \;=\; \int_a^b [g(\alpha(t)) + \mathbf{j}h(\alpha(t))] \cdot [\alpha_1'(t) + \mathbf{j}\alpha_2'(t)]\,dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [g(\alpha(t))\alpha_1'(t) - h(\alpha(t))\alpha_2'(t)]\,dt + \mathbf{j}\cdot\int_a^b [g(\alpha(t))\alpha_2'(t) + h(\alpha(t))\alpha_1'(t)]\,dt \\
&= \int_a^b [g(\alpha(t)) - \mathbf{j}h(\alpha(t))] \bullet \dot{\alpha}(t)\,dt + \mathbf{j}\cdot\int_a^b [h(\alpha(t)) + \mathbf{j}g(\alpha(t))] \bullet \dot{\alpha}(t)\,dt,
\end{aligned}$$

wobei für komplexe Zahlen $z = a + \mathbf{j}b$ und $w = u + \mathbf{j}v$ das euklidische Skalarprodukt genauso wie für die reellen Vektoren $\mathbf{z} = (a, b)$ und $\mathbf{w} = (u, v)$ gebildet wird:

$$z \bullet w := au + bv.$$

Damit hat sich ergeben:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b [g(\alpha(t)) - \mathbf{j}h(\alpha(t))] \bullet \dot{\alpha}(t)\,dt \\
&= \int_\alpha (g - \mathbf{j}h)(z) \bullet d\mathbf{x} \\
&= \int_\alpha \overline{f(z)} \bullet d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b [h(\alpha(t)) + \mathbf{j}g(\alpha(t))] \bullet \dot{\alpha}(t)\,dt \\
&= \int_\alpha (h + \mathbf{j}g)(z) \bullet d\mathbf{x} \\
&= \int_\alpha [\mathbf{j}\cdot\overline{f(z)}] \bullet d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Erinnern wir uns: Ist α ein glatter Weg in der Ebene, so werden Tangenten- und Normalen-Einheitsvektor definiert durch

$$\mathbf{t}_\alpha(t) := \frac{1}{\| \dot{\alpha}(t) \|}\cdot\dot{\alpha}(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_\alpha(t) := \frac{1}{\| \dot{\alpha}(t) \|}\cdot(\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t)).$$

Der Normalenvektor ist so definiert, daß $\{\mathbf{t}_\alpha(t), \mathbf{n}_\alpha(t)\}$ für jedes t eine positiv orientierte Basis bilden. (siehe Skizze auf Seite 18)

Ist $z = a + \mathbf{j}b$, $w = u + \mathbf{j}v$ und $w^\perp := v - \mathbf{j}u$ (so daß $w \bullet w^\perp = 0$ ist), so ist

$$(\mathbf{j}\cdot z) \bullet w = (-b + \mathbf{j}a) \bullet (u + \mathbf{j}v) = -ub + av = (a + \mathbf{j}b) \bullet (v - \mathbf{j}u) = z \bullet w^\perp.$$

Also ist $(\mathbf{j}\cdot\overline{f(z)}) \bullet \mathbf{t}_\alpha = \overline{f(z)} \bullet \mathbf{n}_\alpha$, und wir haben gezeigt:

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha \overline{f(z)} \bullet \mathbf{t}_\alpha\,d\sigma + \mathbf{j}\cdot\int_\alpha \overline{f(z)} \bullet \mathbf{n}_\alpha\,d\sigma.$$

Das erste Integral nennt man die *Zirkulation* des Vektorfeldes $\overline{f(z)}$ längs α, das zweite den *Fluß* von $\overline{f(z)}$ durch α.

Im allgemeinen ist es allerdings viel günstiger, im Komplexen zu rechnen.

Beispiele :

1. Ein fundamentaler Baustein der Funktionentheorie ist folgende Formel:

$$\int_{\partial D_r(z_0)} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi\mathbf{j} & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zum Beweis benutzt man die Parametrisierung $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathbf{j}t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist

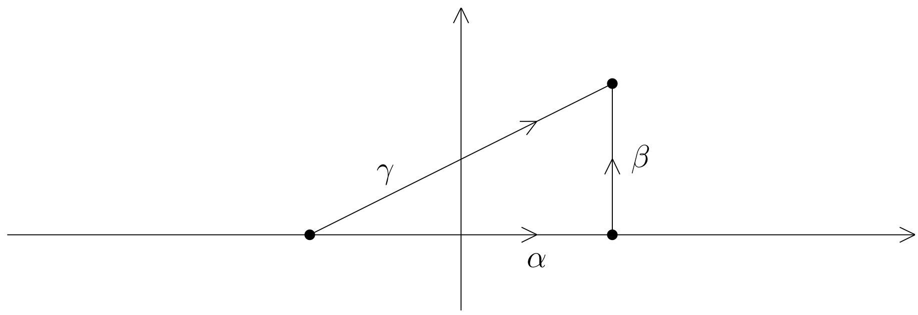
$$\begin{aligned} \int_\alpha \frac{1}{z - z_0} \, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathbf{j}t} \cdot r\mathbf{j}e^{\mathbf{j}t} \, dt \\ &= \mathbf{j} \cdot \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi\mathbf{j}, \end{aligned}$$

   und für $n \neq -1$ ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha (z - z_0)^n \, dz &= \int_0^{2\pi} (re^{\mathbf{j}t})^n \cdot r\mathbf{j}e^{\mathbf{j}t} \, dt \\ &= r^{n+1}\mathbf{j} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\mathbf{j}(n+1)t} \, dt \\ &= r^{n+1}\mathbf{j} \cdot \left(\frac{1}{\mathbf{j}(n+1)} e^{\mathbf{j}(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathbf{j}t \quad \text{und} \quad \gamma(t) := (-1 + 2t) + \mathbf{j}t.$$



   Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} \overline{z} \, dz &= \int_0^1 (-1 + 2t) \cdot 2 \, dt + \int_0^1 (1 - \mathbf{j}t) \cdot \mathbf{j} \, dt \\ &= 2 \cdot (-t + t^2) \Big|_0^1 + \mathbf{j} \cdot (t - \frac{\mathbf{j}}{2}t^2) \Big|_0^1 \\ &= 2 \cdot (-1 + 1) + \mathbf{j} \cdot (1 - \frac{\mathbf{j}}{2}) \\ &= \mathbf{j} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathbf{j}t)(2+\mathbf{j})\,dt\\ &= (2+\mathbf{j})\cdot(-t+\frac{2-\mathbf{j}}{2}t^2)\Big|_0^1\\ &= (2+\mathbf{j})\cdot(-1+1-\frac{\mathbf{j}}{2})\\ &= -\mathbf{j}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab! Wir werden bald sehen, daß das damit zusammenhängt, daß f nicht holomorph ist.

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine *Stammfunktion* von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

I.2.2 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *$\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G.*

Beweis:
$(1) \implies (2)$: Ist F eine Stammfunktion von f und $\alpha : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg, so ist

$$(F\circ\alpha)^\bullet(t) = F'(\alpha(t))\cdot\overset{\bullet}{\alpha}(t) = f(\alpha(t))\cdot\overset{\bullet}{\alpha}(t),$$

also

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha(t))\cdot\overset{\bullet}{\alpha}(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\alpha)^\bullet(t)\,dt = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Damit verschwindet das Integral über jeden geschlossenen Integrationsweg.

$(2) \implies (1)$: Sei $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg. Wir benutzen die Darstellung

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha \overline{f(z)} \bullet d\mathbf{x} + \mathbf{j}\cdot\int_\alpha [\mathbf{j}\cdot\overline{f(z)}]\bullet d\mathbf{x}.$$

Da es sich um die Zerlegung des Integrals in Realteil und Imaginärteil handelt, verschwinden auch die beiden reellen Integrale für jedes geschlossene α. Nach dem Hauptsatz über Kurvenintegrale bedeutet das, daß es reell differenzierbare Funktionen u und v auf G gibt, so daß gilt:

$$\nabla u(z) = \overline{f(z)} \quad \text{und} \quad \nabla v(z) = \mathbf{j}\cdot\overline{f(z)}.$$

Ist $f(z) = g(z) + \mathbf{j}h(z)$, also $\overline{f(z)} = g(z) - \mathbf{j}h(z)$ und $\mathbf{j} \cdot \overline{f(z)} = h(z) + \mathbf{j}g(z)$, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z) &= g(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \\ \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) &= -h(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \end{aligned}$$

Also erfüllt die reell differenzierbare Funktion $F := u + \mathbf{j}v$ die Cauchy-Riemannschen DGLn, d.h. F ist holomorph.

Außerdem ist

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + \mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial x}(z) = g(z) + \mathbf{j}h(z) = f(z).$$

□

I.2.3 Satz von Goursat. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine* **holomorphe** *Funktion und $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Es gibt einen sehr schönen trickreichen Beweis für den Satz von Goursat in der vorliegenden Form (vgl. z.B. W.Fischer / I.Lieb: Funktionentheorie). Aus Zeitgründen benutzen wir hier einen einfacheren Beweis, der allerdings eine Zusatzbedingung erfordert: Wir nehmen an, daß f sogar *stetig differenzierbar* ist.

Sei B das Innere des Dreiecks $\triangle$. Dann ist B ein Greenscher Bereich, und wir können den Satz von Green anwenden:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} f(z)\,dz &= \int_{\partial B}(g\,dx - h\,dy) + \mathbf{j}\cdot\int_{\partial B}(h\,dx + g\,dy) \\ &= \int_B \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(z) - \frac{\partial g}{\partial y}(z)\right) dv_2 + \mathbf{j}\cdot\int_B \left(\frac{\partial g}{\partial x}(z) - \frac{\partial h}{\partial y}(z)\right) dv_2 \\ &= \int_B \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(z) + \frac{\partial h}{\partial x}(z)\right) dv_2 + \mathbf{j}\cdot\int_B \left(\frac{\partial h}{\partial y}(z) - \frac{\partial h}{\partial y}(z)\right) dv_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Cauchy-Riemannschen DGLn benutzt. □

I.2.4 Hilfssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\alpha : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg. Dann ist*

$$\left|\int_\alpha f(z)\,dz\right| \le L(\alpha)\cdot\sup_{|\alpha|}|f(z)|.$$

Beweis: Es ist

$$\left|\int_\alpha f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\alpha(t))\cdot\dot{\alpha}(t)\,dt\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_a^b |\, f(\alpha(t))\,| \cdot \|\, \dot{\alpha}(t)\,\|\, dt \\
&\le \sup_{|\,\alpha\,|} |\, f\,| \cdot \int_a^b \|\, \dot{\alpha}(t)\,\|\, dt \\
&= \sup_{|\,\alpha\,|} |\, f\,| \cdot L(\alpha).
\end{aligned}
$$

$\square$

Damit können wir nun den Satz von Goursat noch ein wenig verschärfen.

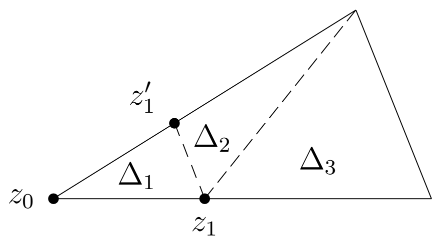
I.2.5 Satz von Goursat in verschärfter Form. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

BEWEIS: Wir können annehmen, daß f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von $\triangle$.

Dann zerlegen wir $\triangle$ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt, daß $\int_{\partial\triangle_2} f(z)\, dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)\, dz = 0$ ist, also

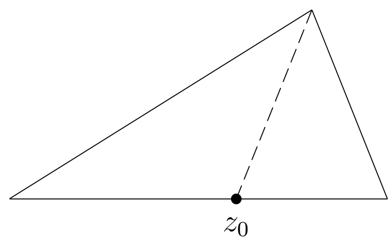
$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\, dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

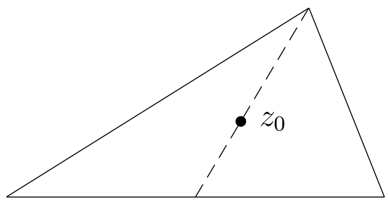
$$|\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz\,| \le L(\partial\triangle_1) \cdot \sup_{\triangle} |\, f(z)\,|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von $\triangle$, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man $\triangle$ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von $\triangle$. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



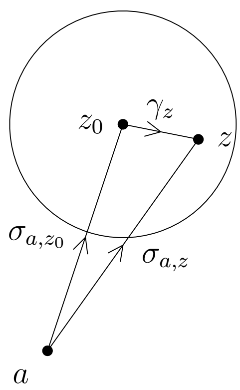
Liegt z_0 außerhalb $\triangle$, so ist überhaupt nichts zu zeigen. $\square$

I.2.6 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.*

Beweis: Es gibt einen Punkt $a \in G$, so daß mit jedem anderen Punkt $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\sigma_{a,z}$ von a mit z zu G gehört. Wir definieren dann

$$F(z) := \int_{\sigma_{a,z}} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Wir müssen zeigen, daß F holomorph und $F' = f$ ist. Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so gewählt, daß $\overline{D_r(z_0)} \subset G$ ist. Für $z \in G$ sei γ_z die Verbindungsstrecke von z_0 mit z, parametrisiert durch $\gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0), \quad t \in [0,1]$.



Ist $\triangle$ das von $\sigma_{a,z}$, $-\gamma_z$ und $-\sigma_{a,z_0}$ berandete Dreieck, so liegt dieses ganz in G, und nach dem Satz von Goursat ist

$$\int_{\partial\triangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\sigma_{a,z}} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\sigma_{a,z_0}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= F(z) - F(z_0) - \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0)\, dt \\ &= F(z) - F(z_0) - (z - z_0) \cdot \Delta(z), \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt$$

stetig ist (Parameter-Integral!). Also ist F in z_0 komplex differenzierbar, und

$$F'(z_0) = \Delta(z_0) = \int_0^1 f(z_0)\, dt = f(z_0).$$

$\square$

Hinweis: Wir haben im Beweis nicht die Holomorphie von f benutzt, sondern nur die Tatsache, daß das Integral über f und den Rand eines abgeschlossenen Dreiecks in G verschwindet!

Nun folgt:

I.2.7 Cauchyscher Integralsatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G:*

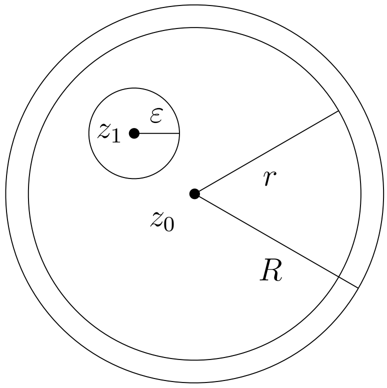
$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

Der Beweis ist jetzt trivial, die Arbeit wurde schon in den vorigen Sätzen erledigt.

Beispiel:

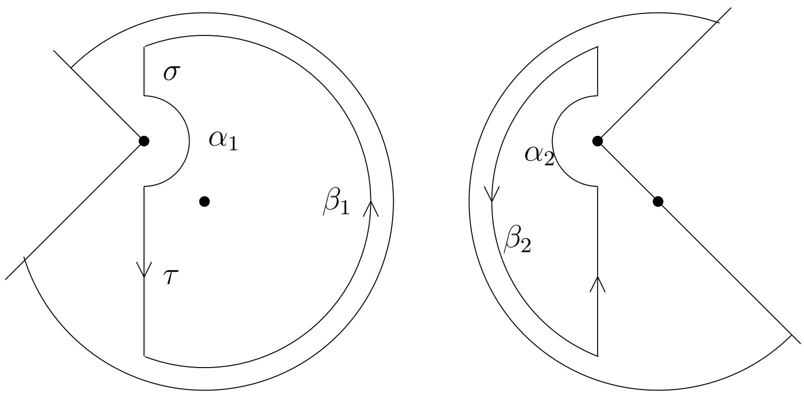
Sei $R > 0$ und $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph außerhalb des Punktes $z_1 \in D_R(z_0)$, $z_1 \neq z_0$.

Wir wählen ein r mit $0 < r < R$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß noch $D_\varepsilon(z_1) \subset D_r(z_0)$ ist.



Behauptung: $\displaystyle\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_1)} f(z)\,dz.$

Zum Beweis zeigen wir, daß die Differenz der Integrale verschwindet. Dazu fassen wir die „Differenz" der Kreislinien als Kette von Wegen auf. Und diese Kette schreiben wir wiederum als Summe zweier geschlossener Wege, auf die sich jeweils der Cauchysche Integralsatz anwenden läßt:



Bezeichnen wir die beiden Verbindungsstrecken vom kleinen inneren Kreis zum großen äußeren Kreis (von oben nach unten orientiert) mit σ und τ und die positiv orientierten Teil-Kreislinien mit α_1, α_2 und β_1, β_2, so gilt:

$$(\beta_1 + \sigma - \alpha_1 + \tau) + (\beta_2 - \tau - \alpha_2 - \sigma) = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die beiden geschlossenen Wege auf der linken Seite der Gleichung verlaufen jeweils in einem sternförmigen Gebiet, in dem f holomorph ist. Nach Cauchy ist das Integral über diese Wege $= 0$, und daraus folgt auch schon die Behauptung.

$G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht sternförmig. Tatsächlich ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, es ist z.B.

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi \mathbf{j} \neq 0.$$

Setzen wir aber $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, so ist die „geschlitzte Ebene" $G' := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$). Also gibt es auf G' z.B. für $f(z) := \dfrac{1}{z}$ eine Stammfunktion:

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in G' verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, daß das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Die Funktion $F(z)$ ist holomorph, es ist $F(1) = 0$ und $F'(z) = \dfrac{1}{z}$. Diese Eigenschaften kennen wir schon (im Reellen) vom natürlichen Logarithmus. Also stellt sich die Frage, ob wir hier auch im Komplexen die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gefunden haben. Leider ist das nur bedingt richtig. Zunächst gilt:

Behauptung: $\exp(F(z)) = z$.

BEWEIS: Mit einem kleinen Trick geht es ganz einfach:

Sei $g(z) := z \cdot \exp(-F(z))$. Dann ist g holomorph und

$$g'(z) = \exp(-F(z)) + z \cdot (-F'(z)) \cdot \exp(-F(z)) = \exp(-F(z)) - \exp(-F(z)) = 0.$$

Also ist g lokal-konstant, und da der Definitionsbereich G' ein Gebiet ist, ist g sogar konstant: $g(z) \equiv c$. Es folgt:

$$c \cdot \exp(F(z)) \equiv z.$$

Setzen wir speziell $z = 1$ ein, so erhalten wir $1 = c \cdot \exp(F(1)) = c \cdot \exp(0) = c$. Also ist $\exp(F(z)) = z$. $\square$

Das rechtfertigt schon einmal die

Definition.

$$\log(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad \text{heißt } \textit{Logarithmusfunktion.}$$

Damit $\log(z)$ die Umkehrabbildung zu $\exp(z)$ sein kann, muß exp zunächst einmal bijektiv sein. Wir wissen aber, daß exp periodisch ist (mit Periode $2\pi\mathbf{j}$) und daher garnicht bijektiv sein kann! Wäre nun auch $F(\exp(z)) = z$, so könnten wir zwei Punkte $z_1 \neq z_2$ wählen, für die $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ ist, und dann würde sich nach Anwendung von F ergeben: $z_1 = z_2$. Das ist natürlich absurd. Also untersuchen wir die Exponentialfunktion etwas genauer:

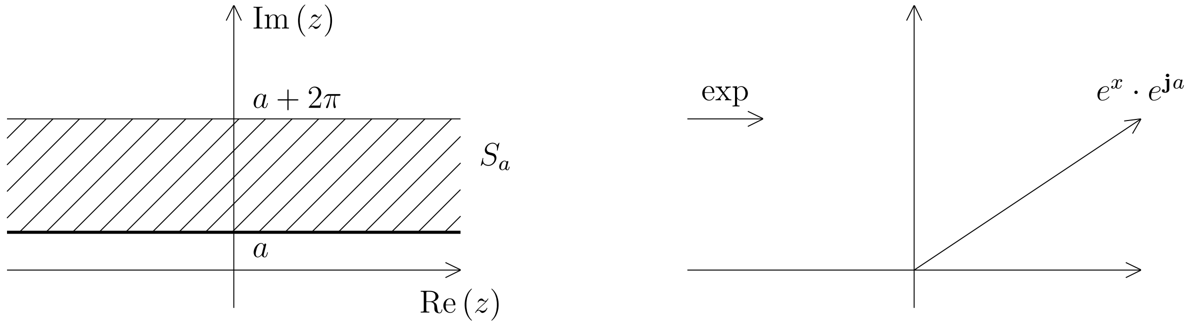
I.2.8 Satz. *Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist*

$$\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \mathrm{Im}\,(z) < a + 2\pi\} \to \mathbb{C}^*$$

bijektiv.

Beweis: Sei S_a der Streifen

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid a \le \mathrm{Im}\,(z) < a + 2\pi\}.$$



1) Injektivität:

Es ist $\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi\mathbf{j}n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z) = \exp(w) &\implies \exp(z - w) = 1\\ &\implies z = w + 2\pi\mathbf{j}n\\ &\implies z \text{ und } w \text{ nicht beide im gleichen Streifen } S_a.\end{aligned}$$

2) Surjektivität:

Sei $w = re^{\mathbf{j}t} \in \mathbb{C}^*$, also $r > 0$, $0 \le t < 2\pi$.

Wir setzen $z := \ln(r) + \mathbf{j}t$. Dann ist $\exp(z) = e^{\ln(r)+\mathbf{j}t} = r \cdot e^{\mathbf{j}t} = w$.

Liegt z nicht im Streifen S_a, so kann man ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so daß $z^* := z + 2\pi\mathbf{j}k$ in S_a liegt. Dann ist $\exp(z^*) = \exp(z) = w$. □

Definition.

$$\log_{(a)} := (\exp\big|_{\overset{\circ}{S}_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{\mathbf{j}a} \to \overset{\circ}{S}_a$$

heißt *der durch a bestimmte Logarithmuszweig.*

I.2.9 Satz. *Ist $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$, mit $a < t < a + 2\pi$, so ist*

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathbf{j}t.$$

Insbesondere ist $\log_{(-\pi)}(z) = \log(z)$.

Beweis: Durch $re^{\mathbf{j}t} \mapsto \ln(r) + \mathbf{j}t$ wird eine Umkehrfunktion zu $\exp\big|_{\overset{\circ}{S}_a}$ gegeben, wenn das Argument t zwischen a und $a + 2\pi$ läuft.

Ist $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t_0}$ mit $r > 0$ und $-\pi < t_0 < \pi$, so ist $\log(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, wobei es egal ist, über welchen Weg man integriert. Ist etwa $t_0 > 0$, so können wir den Weg $\gamma := \alpha + \beta$ wählen, mit

$$\alpha(s) := s \text{ für } s \text{ zwischen 1 und } r \quad \text{und} \quad \beta(t) := re^{\mathbf{j}t} \text{ für } t \text{ zwischen 0 und } t_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \log(z) &= \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_\beta \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \int_1^r \frac{ds}{s} + \int_0^{t_0} \mathbf{j}\, dt \\ &= \ln(r) + \mathbf{j}t_0 \;=\; \log_{(-\pi)}(z). \end{aligned}$$

□

Man nennt $\log(z)$ auch den *Hauptzweig des Logarithmus*.

Wir können noch eine weitere Beschreibung des Logarithmus geben: Im Teil A wurde gezeigt, daß gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $= 1$, also wird durch

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

eine auf $D_1(1)$ definierte und holomorphe Funktion gegeben.

Behauptung: Für $|\, z-1 \,| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

Beweis: Im Konvergenzkreis ist

$$\begin{aligned} L'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{n} \\ &= \frac{1}{1-(1-z)} \;=\; \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Also ist $L(z) = \log(z) + c$, mit einer Konstanten c. Setzen wir $z = 1$ ein, so erhalten wir $c = 0$. □

Der Nullpunkt scheint ein unüberwindliches Hindernis für den Logarithmus zu sein. Aber was passiert dort genau?

Betrachten wir die beiden Wege

$$\alpha_+(t) := e^{\mathbf{j}t} \text{ und } \alpha_-(t) := e^{-\mathbf{j}t} \text{ für } 0 \le t < \pi.$$

Dann ist

$$\int_{\alpha_+} \frac{dz}{z} - \int_{\alpha_-} \frac{dz}{z} = \int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi\mathbf{j}.$$

Das bedeutet: Die Funktionswerte von $\log(z)$ bei Annäherung an den Punkt $z = -1$ von oben bzw. von unten unterscheiden sich um $2\pi\mathbf{j}$. Dieser „Sprung“ tritt entlang der gesamten negativen Achse auf.

Allerdings passen die Werte von $\log_{(-\pi)}(z)$ bei Annäherung an die negative reelle Achse von oben hervorragend mit den Werten von $\log_{(\pi)}(z)$ bei Annäherung von unten zusammen. Durch Umrunden des Nullpunktes entgegen dem Uhrzeigersinn gelangt man also von einem Zweig des Logarithmus zu einem anderen, genauer von $\log_{(a)}$ zu $\log_{(a+2\pi)}$. Umrundet man dann den Nullpunkt ein weiteres Mal, so landet man beim Zweig $\log_{(a+4\pi)}$ usw. Man nennt den Nullpunkt daher auch einen *Verzweigungspunkt* für den Logarithmus.

Die Zweige $\log_{(-\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind alle auf $G' := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definiert. Verschafft man sich für jedes k ein Exemplar von G'_k und verheftet man jeweils G'_k mit G'_{k+1} entlang der negativen reellen Achse und so, daß die Logarithmuswerte aneinander passen, so erhält man eine wendeltreppenartige Fläche aus unendlich vielen Blättern, eine sogenannte *Riemannsche Fläche*, auf der der Logarithmus global definiert werden könnte.

Wie lautet nun das Kochrezept zum Bestimmen des Logarithmus?

Ist eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$ gegeben, mit $0 \le t < 2\pi$, so wähle man ein $a \in \mathbb{R}$, so daß $a < t < a + 2\pi$ ist. Wenn z nicht gerade auf der negativen reellen Achse liegt, kann $a = -\pi$ oder $a = \pi$ gewählt werden. In jedem Fall ist dann aber $w := \ln(r) + \mathbf{j}t$ ein Element des Streifens S_a, und $\exp(w) = z$, also

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathbf{j}t.$$

Beispiele:

1. Sei $z = 2\mathbf{j}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathbf{j}\frac{\pi}{2}$.

2. Sei $z = -2\mathbf{j}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Wir können $a = \pi$ wählen und erhalten: $\log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathbf{j}\frac{3\pi}{2}$.

   Nun ist zugleich $z = 2 \cdot e^{-\pi/2}$, also auch $\log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathbf{j}\frac{\pi}{2}$. Das ist ein Spezialfall der Gleichung
   $$\log_{(a+2\pi)}(z) = \log_{(a)}(z) + 2\pi\mathbf{j}.$$
   Da auch $0 < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ wählen können. Das ergibt aber nichts neues. Es ist $\log_{(0)}(z) = \ln(2) + \mathbf{j}\frac{3\pi}{2}$.

   Allgemein gilt für $a < b < t < a + 2\pi < b + 2\pi$ und $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$:
   $$\log_{(a)}(z) = \log_{(b)}(z) = \ln(r) + \mathbf{j}t.$$

Wir kommen zu zwei Anwendungen des Logarithmus:

Zunächst können wir jetzt auch beliebige Potenzen in $\mathbb{C}$ definieren.

Definition.

Für komplexe Zahlen z und w setzt man $z^w := \exp(w \cdot \log(z))$.

Dabei kann der Exponent w beliebig gewählt werden. z muß im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Normalerweise benutzt man den Hauptzweig, dann darf z nicht in $\mathbb{R}_-$ liegen.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist $\mathbf{j}^{\mathbf{j}}$? Benutzen wir die Beziehung $\mathbf{j} = e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathbf{j}^{\mathbf{j}} = \exp(\mathbf{j} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{\mathbf{j}\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879\ldots$$

   Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich $e^{-\pi/2}e^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathbf{j}t}$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\mathbf{j}k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + \mathbf{j}t + 2\pi\mathbf{j}k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2}\ln(r)) \cdot \exp(\mathbf{j}(\frac{t}{2} + \pi k)) \\ &= \pm\sqrt{r} \cdot e^{\mathbf{j}\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

   Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathbf{j}\frac{t}{n} + \mathbf{j}\frac{2k}{n}\pi} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathbf{j}\frac{t}{n}} \cdot (\zeta_n)^k,\ k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

   wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

Nun zu einer anderen Anwendung:

Durch $\gamma_k(t) := z_0 + re^{2\pi\mathbf{j}\cdot kt}$, $t \in [0,1]$, wird der Kreis um z_0 mit Radius r parametrisiert, und zwar so, daß er k-mal durchlaufen wird. Nun ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\int_0^1 \frac{1}{re^{2\pi\mathbf{j}\cdot kt}} r \cdot 2\pi\mathbf{j}k \cdot e^{2\pi\mathbf{j}\cdot kt}\,dt = k\int_0^1 dt = k.$$

Das Integral mißt, wie oft der Punkt z_0 von γ umlaufen wird. Das verallgemeinern wir jetzt auf beliebige Wege:

Definition.

Sei γ ein beliebiger geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$ und z ein Punkt, der nicht auf $|\,\gamma\,|$ liegt. Dann heißt

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die *Umlaufszahl* von γ um z.

Wir müssen überprüfen, ob die Umlaufszahl auch das leistet, was wir von ihr erwarten.

Ist $\gamma = \gamma_1 + \mathbf{j}\gamma_2$ auf $[a, b]$ definiert, so sind die Funktionen α_1, α_2 auf $[a, b]$ definitionsgemäß stetig und daher beschränkt. Das bedeutet, daß auch die Spur $|\,\gamma\,|$ des Weges eine beschränkte Menge ist. Es gibt also ein $R > 0$, so daß $|\,\gamma\,|$ ganz in $D_R(0)$ liegt.

I.2.10 Satz. *Verläuft die Spur des geschlossenen Weges γ ganz in $D_R(0)$, so ist $n(\gamma, z) = 0$ für alle z außerhalb von $D_R(0)$.*

Beweis: Nach den Sätzen über Parameterintegrale hängt $n(\gamma, z)$ stetig von z ab. Wir werden außerdem weiter unten zeigen, daß die Umlaufszahl nur ganzzahlige Werte annimmt. Beides zusammen ist nur möglich, wenn $z \mapsto n(\gamma, z)$ lokal-konstant ist, also z.B. konstant auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$. Für $z \to \infty$ gilt aber:

$$|\,n(\gamma, z)\,| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big| \le \frac{L(\gamma)}{2\pi} \cdot \sup\{\frac{1}{|\,\zeta - z\,|} \mid \zeta \in |\,\gamma\,|\} \to 0.$$

$\square$

Wir nehmen jetzt zur Vereinfachung an, daß $0 \notin |\,\gamma\,|$ ist, und versuchen,

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$$

zu berechnen. Bei einem beliebigen Punkt geht's analog.

Da der Weg γ um den Nullpunkt herumläuft und ihn nicht trifft, kann auch ein von 0 ausgehender Halbstrahl stets nur einen Teil des Weges berühren. Das bedeutet, daß wir eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Definitionsintervalls von γ finden können, so daß $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils ganz in einer längs eines Halbstrahls aufgeschlitzten Ebene enthalten ist. Und dort existiert jeweils ein Zweig f_i des Logarithmus, der als Stammfunktion für $\frac{1}{z}$ dienen kann. Sei $z_i := \gamma(t_i)$, für $i = 0, \ldots, n$. Dann ist $z_0 = z_n$,

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = f_i(z_i) - f_i(z_{i-1})$$

und

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f_i(z_i) - f_i(z_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [f_i(z_i) - f_{i+1}(z_i)] + (f_n(z_0) - f_1(z_0)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi\mathbf{j} \cdot k_i + 2\pi\mathbf{j} \cdot k_n \\
&= 2\pi\mathbf{j} \cdot (\sum_{i=1}^{n-1} k_i + k_n),
\end{aligned}$$

wobei die k_i geeignete ganze Zahlen sind, denn in ein und demselben Punkt unterscheiden sich zwei Logarithmuszweige höchstens um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathbf{j}$.

Also ist $n(\gamma, 0) = \dfrac{1}{2\pi\mathbf{j}} \displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$ stets eine ganze Zahl. Nun wollen wir auch noch die Bedeutung dieser Zahl herausbekommen:

Jede der Funktionen f_i hat die Gestalt

$$f_i(z) = \ln|\,z\,| + \mathbf{j}\varphi_i(z),$$

wobei φ_i im Definitionsbereich von f_i als stetige Argumentfunktion dienen kann, denn es ist ja

$$z = \exp(f_i(z)) = |\,z\,| \cdot e^{\mathbf{j}\varphi_i(z)}.$$

In einem festen Punkt unterscheiden sich zwei Argumentfunktionen höchstens um einen Summanden der Form $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wir ersetzen jetzt die Funktionen f_i so durch andere Logarithmenzweige, daß die zugehörigen Argumentfunktionen entlang γ nahtlos aneinanderpassen:

Es ist $f_{i+1}(z_i) = f_i(z_i) - 2\pi\mathbf{j}k_i$, für $i = 1, \ldots, n-1$. Also setzen wir

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_1(z) &:= f_1(z), \\
\widetilde{f}_2(z) &:= f_2(z) + 2\pi\mathbf{j}k_1, \\
\widetilde{f}_3(z) &:= f_3(z) + 2\pi\mathbf{j}(k_1 + k_2) \\
&\text{usw.} \\
\widetilde{f}_n(z) &:= f_n(z) + 2\pi\mathbf{j}(k_1 + k_2 \cdots + k_{n-1}).
\end{aligned}$$

Die neuen Funktionen $\widetilde{f}_i$ sind Logarithmuszweige mit dem gleichen Definitionsbereich wie die f_i, und sie sind dort natürlich Stammfunktionen von $\frac{1}{z}$. Wir hätten die Umlaufszahl auch mit ihrer Hilfe ausrechnen können. Aus den vielen Sprüngen (um $2\pi\mathbf{j}k_i$) ist nun aber ein einziger Sprung geworden, der dort auftritt, wo sich der Weg γ schließt, also bei $z_0 = z_n$.

Schreiben wir $\widetilde{f}_i(z) = \ln|\,z\,| + \mathbf{j}\widetilde{\varphi}_i(z)$, so wird durch

$$\varphi(t) := \widetilde{\varphi}_i(\gamma(t)) \qquad \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i]$$

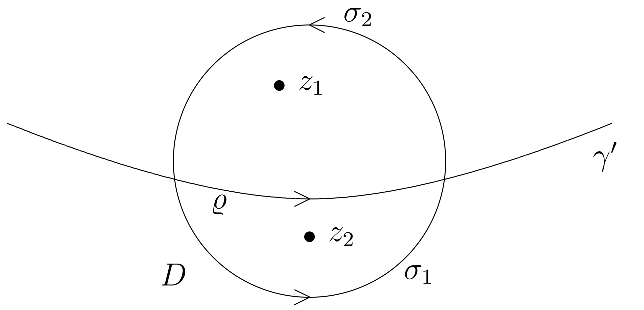
eine **stetige** Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert, die in jedem Augenblick t das Argument von $\gamma(t)$ angibt. Und die Differenz $\varphi(b) - \varphi(a)$ beschreibt die Gesamtänderung des Arguments beim Durchlaufen von γ. Da der Weg geschlossen ist, muß diese Gesamtänderung ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, und die Zahl $\dfrac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a))$ gibt an, wie oft γ den Punkt 0 umläuft, gemessen in mathematisch positiver Drehrichtung.

Benutzen wir andererseits die $\widetilde{f}_i$ zur Berechnung der Umlaufszahl, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
n(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \sum_{i=1}^{n} [\widetilde{f}_i(z_i) - \widetilde{f}_i(z_{i-1})]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\sum_{i=1}^{n-1}[\widetilde{f}_i(z_i)-\widetilde{f}_{i+1}(z_i)]+\frac{1}{2\pi\mathbf{j}}(\widetilde{f}_n(z_0)-\widetilde{f}_1(z_0))\\
&= \frac{1}{2\pi}(\varphi(b)-\varphi(a)).
\end{aligned}
$$

Also beschreibt die Umlaufszahl genau das, was man sich darunter vorstellt. Nun brauchen wir bloß noch eine einfache Methode zu ihrer Bestimmung. Und das geht so:



Sei γ ein geschlossener Integrationsweg und $D \subset \mathbb{C}$ eine kleine Kreisscheibe mit $|\,\gamma\,| \cap D \neq \varnothing$. Die Peripherie des Kreises werde von γ in genau zwei Teilwege σ_1 und σ_2 zerlegt, das Innere von D in zwei Teilgebiete und $|\,\gamma\,|$ in einen Teil innerhalb von D (parametrisiert durch ϱ) und einen außerhalb von D (parametrisiert durch γ'). In der Nähe von glatten Punkten von γ kann man diese Situation immer herstellen.

Ist α ein beliebiger Integrationsweg und $z \notin |\,\alpha\,|$, so kann man immer noch

$$
n(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z}
$$

bilden, auch wenn das Ergebnis keine ganze Zahl ist und auch nicht mehr ohne weiteres anschaulich gedeutet werden kann. Insbesondere ist dann

$$
n(\alpha+\beta, z) = n(\alpha, z) + n(\beta, z) \quad \text{und} \quad n(-\alpha, z) = -n(\alpha, z).
$$

Wir betrachten nun zwei Punkte $z_1, z_2 \in D$, der eine „links von γ“ und der andere „rechts von γ“. Wir wollen sehen, wie sich die Umlaufszahl beim Überqueren von γ verhält.

Da $n(\gamma, z)$ als stetige und ganzzahlige Funktion lokal-konstant ist, muß sie auf jedem Gebiet, auf dem sie definiert ist, konstant sein. Das werden wir jetzt mehrfach anwenden. Außerdem benutzen wir, daß $n(\gamma, z) = 0$ ist, wenn man von z aus beliebig ferne Punkte erreichen kann, ohne $|\,\gamma\,|$ zu treffen. Es ist

$$
\begin{aligned}
n(\gamma'-\sigma_2, z_1) &= n(\gamma'-\sigma_2, z_2)\\
&= n(\gamma'-\sigma_2, z_2) + n(\sigma_2+\varrho, z_2)\\
&= n(\gamma'+\varrho, z_2) \;=\; n(\gamma, z_2)
\end{aligned}
$$

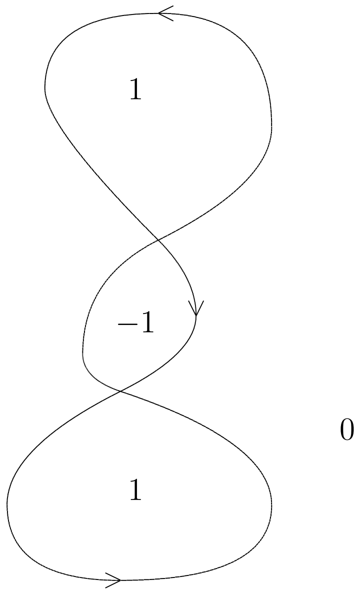
und dann

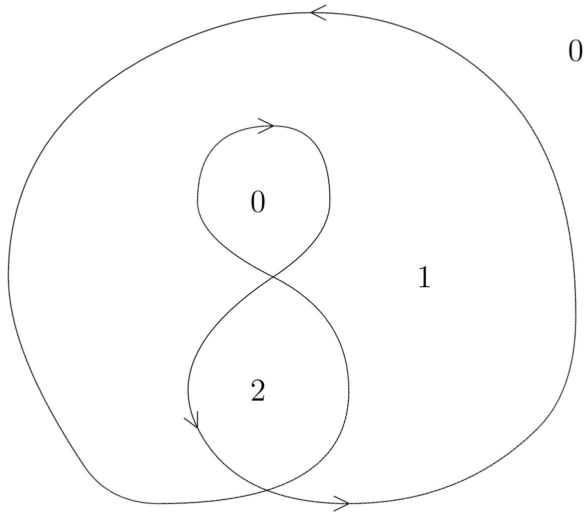
$$
\begin{aligned}
n(\gamma, z_1) &= n(\gamma'+\varrho, z_1) + n(\sigma_1-\varrho, z_1)\\
&= n(\gamma'+\sigma_1, z_1)\\
&= n(\gamma'+\sigma_1, z_1) + 1 - n(\sigma_1+\sigma_2, z_1)\\
&= n(\gamma'-\sigma_2, z_1) + 1\\
&= n(\gamma, z_2) + 1.
\end{aligned}
$$

Die Moral von der Geschichte ist nun:

1. „Weit draußen" ist auf jeden Fall $n(\gamma, z) = 0$.
2. Überquert man γ (in einem glatten Punkt) so, daß γ dabei von „links" kommt, dann erhöht sich die Umlaufzahl um 1.

Beispiel:





Definition.

Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \mid n(\gamma, z) \neq 0\}$$

das *Innere* von γ.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn mit jedem geschlossenen Integrationsweg γ in G auch das Innere von γ zu G gehört.

Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend, aber $\mathbb{C}^*$ ist z.B. nicht einfach zusammenhängend, weil der Rand des Einheitskreises in $\mathbb{C}^*$ liegt, während das Innere des Einheitskreises nicht zu $\mathbb{C}^*$ gehört.

Ohne Beweis zitieren wir:

I.2.11 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ ein geschlossener Integrationsweg in G und $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion f auf G.

I.2.12 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

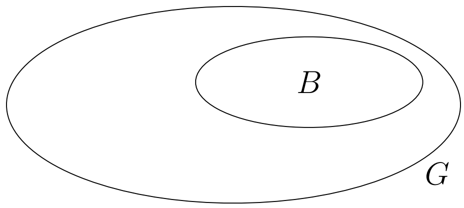
für jede holomorphe Funktion f auf G und jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G.

§3 Die Cauchysche Integralformel und ihre Folgen

Definition.

> Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, B liegt *relativkompakt* in G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), wenn B beschränkt und $\overline{B} \subset G$ ist.

Ist $B \subset\subset G$, so kann B nicht bis an den Rand von G herankommen. Es bleibt immer ein kleiner Abstand. Ist der Rand von B stückweise glatt, so stellt er einen geschlossenen Weg dar, der ganz in G verläuft.

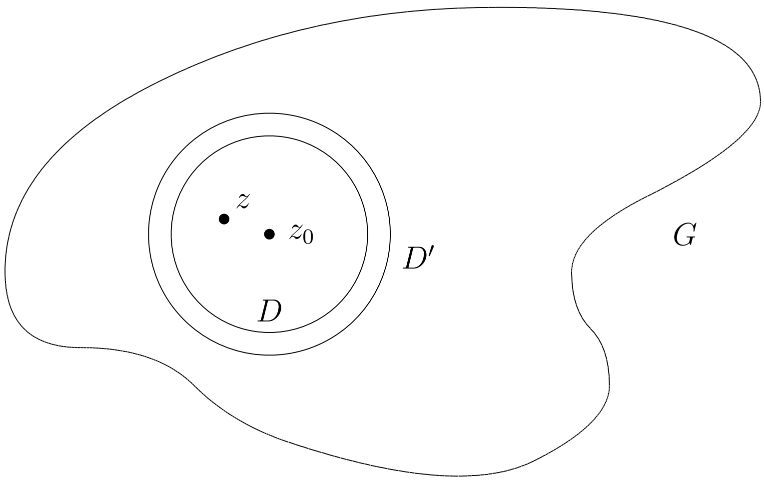


I.3.1 Die Cauchysche Integralformel. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.*

Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis:



Wir können ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß auch noch $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ ist.

Sei $z \in D$ beliebig vorgegeben. Da f in G holomorph ist, gibt es eine in z stetige Funktion Δ_z auf G, so daß für alle $\zeta \in G$ gilt:

$$f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z).$$

Dann ist

$$\Delta_z(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Nachdem Δ_z überall stetig und außerhalb z sogar holomorph ist, können wir auf der sternförmigen Menge D' den Cauchyschen Integralsatz auf Δ_z und den geschlossenen Weg $\partial D \subset D'$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Delta_z(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi\mathbf{j} \cdot n(\partial D, z) \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi\mathbf{j}. \end{aligned}$$

□

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist nun ganz deutlich die **komplexe** Differenzierbarkeit eingegangen. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde. Der ganze Paragraph ist diesen Konsequenzen gewidmet.

Beispiele:

1. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz$ berechnet werden. Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z+2}\right] \cdot e^z\, dz \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\, dz - \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z - (-2)}\, dz \\ &= 2\pi\mathbf{j} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] \\ &= \pi\mathbf{j}(1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}\mathbf{j})$. Dann liegt $\mathbf{j}$ im Innern von C, und $-\mathbf{j}$ nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \int_C \frac{dz}{z - \mathbf{j}} - \frac{1}{2\mathbf{j}} \int_C \frac{dz}{z + \mathbf{j}} \\ &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \cdot [2\pi\mathbf{j} \cdot -0] \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Hier kann man sehen, daß die Umlaufszahl ein Spezialfall der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel ist, nämlich für $f(z) \equiv 1$.

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel. Der Entwicklungssatz 3.3 ist höchst überraschend und läßt die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwächst also aus der Idee, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte schließlich das passende Hilfsmittel:

I.3.2 Hilfssatz (Trick mit der geometrischen Reihe). *Ist $|z| < |\zeta|$, so ist*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n .$$

Dabei konvergiert die Reihe im Innern des Kreises $D_{|\zeta|}(0)$ gleichmäßig.

Beweis: Bekanntlich ist $\dfrac{1}{1-w} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w^n$ für alle komplexen Zahlen w mit $|w| < 1$. Daher liegt es nahe, folgende Umformung zu machen:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}.$$

Damit der zweite Faktor als Grenzwert einer geometrischen Reihe geschrieben werden kann, muß $|w| < 1$ für $w := \dfrac{z}{\zeta}$ gelten. Aber das ist auf jeden Fall erfüllt, wenn $|z| < |\zeta|$ ist. $\square$

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

I.3.3 Entwicklungssatz von Cauchy. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpaßt, so gibt es eine Potenzreihe*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Außerdem ist dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis: Sei $\gamma(t) := z_0 + re^{\mathbf{j}t}$, $0 \le t \le 2\pi$, die Parametrisierung von $\partial D_r(z_0)$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel für $z \in D_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Ist nun $\zeta \in |\gamma| = \partial D_r(z_0)$, so ist $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$. Wir können den Trick mit der geometrischen Reihe anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n . \end{aligned}$$

Da f auf der kompakten Menge $\partial D_r(z_0)$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, ist

$$| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n | \le \frac{C}{r} \cdot \left(\frac{| z - z_0 |}{r} \right)^n ,$$

und diese Reihe konvergiert für jedes feste $z \in D_r(z_0)$.

Nach dem Weierstraß-Kriterium (Teil A, Kap. IV, §3) konvergiert dann (für festes z) die Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

gleichmäßig in ζ auf $\partial D_r(z_0)$. Da die Partialsummen stetig in ζ sind, kann man den Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Integration anwenden (Satz IV.3.4. in Teil A):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n .$$

Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta .$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz hängt a_n nicht von r ab, und da das obige Verfahren für jedes $r < R$ funktioniert, ist der Konvergenzradius der Reihe $\ge R$. Für $0 < r < R$ konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf $D_r(z_0)$. $\square$

I.3.4 Folgerung (Höhere Cauchysche Integralformeln). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z \in G$ und $D_r(z) \subset\subset G$ ist*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathbf{j}} \int\limits_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \qquad \textit{für } k \in \mathbb{N}_0 .$$

BEWEIS: Sei $D := D_r(z_0) \subset\subset D_R(z_0) \subset G$. Dann kann f in D in der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

geschrieben werden. Also ist f in z_0 beliebig oft differenzierbar, und es gilt:

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k = \frac{k!}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta .$$

$\square$

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *in eine Potenzreihe entwickelbar*, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G *analytisch*, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, daß man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

I.3.5 Satz von Morera. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ ist, für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$, dann ist f holomorph auf G.*

BEWEIS: Wie im Beweis zu Satz II.2.6. (über holomorphe Funktionen auf sternförmigen Gebieten) kann gezeigt werden, daß f zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F besitzt. Aber F ist beliebig oft komplex differenzierbar, und dann ist auch $f = F'$ holomorph. □

Fassen wir nun zusammen:

I.3.6 Theorem. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

1. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist holomorph.*
4. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
5. *f ist analytisch.*
6. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*
7. *f ist stetig, und es ist $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle$ in G.*

Wir haben eine erstaunliche Entdeckung gemacht. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie!

Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere wundersame Eigenschaften auf.

I.3.7 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.*

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt mit Satz II.2.6., daß f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. □

I.3.8 Konvergenzsatz von Weierstraß. *Ist (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G, die im Innern von G (also auf jedem relativ-kompakten Teilgebiet) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f holomorph.*

BEWEIS: Sei $\triangle$ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann konvergiert (f_n) auf $\partial\triangle$ gleichmäßig, und man kann den Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung anwenden:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\triangle} f_n(z)\,dz = 0.$$

Also ist f holomorph. □

I.3.9 Riemannscher Hebbarkeitssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.*

Beweis: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Nach Satz II.3.7. muß F dann auf ganz G holomorph sein.

Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, folgt noch einmal mit II.3.7., daß Δ sogar auf ganz G holomorph ist. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. □

Von besonderer Bedeutung ist der folgende Satz:

I.3.10 Identitätssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (hier ist wichtig, daß G zusammenhängend ist!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:*

1. *$f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*
2. *$f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.*
3. *Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Ist $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Menge $M \subset G$, so gibt es eine Folge (z_n) in M, die gegen z_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit ist

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(z_0).$$

Weiter ist

$$f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} = g'(z_0),$$

usw.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Sei $h := f - g$ und $N := \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann liegt z_0 in N, also ist $N \neq \varnothing$. Außerdem ist N offen: Ist nämlich $w_0 \in N$, so sind in der Potenzreihenentwicklung von h in w_0 alle Koeffizienten $= 0$, und das bedeutet, daß h auf einer ganzen Umgebung von w_0 identisch verschwindet.

Andererseits ist auch $G \setminus N$ offen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} G \setminus N &= \{z \in G \mid \exists\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } h^{(k)}(z) \neq 0\} \\ &= \bigcup_k \{z \in G \mid h^{(k)}(z) \neq 0\}, \end{aligned}$$

und das ist eine Vereinigung offener Mengen.

Die charakteristische Funktion von N ist demnach auf G eine lokal-konstante Funktion, und da G ein Gebiet ist, muß sie konstant sein. Also ist $G = N$. $\square$

Die Menge M, die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

Die Cauchysche Integralformel zeigt, daß der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt sind. Noch deutlicher können wir das durch die folgende Formel ausdrücken:

I.3.11 Mittelwerteigenschaft. *Ist f holomorph auf dem Gebiet G, $z_0 \in G$ und $D_r(z_0) \subset\subset G$, dann ist*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathbf{j}t})\,dt.$$

Zum Beweis braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchysche Integralformel einzusetzen.

Die höheren Cauchyschen Integralformeln führen zu einer Folge von Abschätzungen, von denen hier nur eine angegeben werden soll:

I.3.12 Cauchy-Ungleichung. *Unter den obigen Voraussetzungen ist*

$$|\,f'(z_0)\,| \le \frac{1}{r}\cdot \sup_{|\,\zeta - z_0\,| = r} |\,f(\zeta)\,|.$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}
|\,f'(z_0)\,| &= |\,\frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta\,| \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot|\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + re^{\mathbf{j}t})}{r^2e^{2\mathbf{j}t}} r\mathbf{j}e^{\mathbf{j}t}\,dt\,| \\
&\le \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} |\,f(z_0 + re^{\mathbf{j}t})\,|\,dt \\
&\le \frac{1}{2\pi r}\cdot 2\pi\cdot \sup_{|\,\zeta - z_0\,| = r} |\,f(\zeta)\,|.
\end{aligned}$$

$\square$

Vor dem nächsten Satz brauchen wir noch einen

I.3.13 Hilfssatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $|\,f\,|$ konstant, so ist auch f konstant.*

BEWEIS: Sei $|\,f(z)\,| \equiv c$. Dann ist $f(z)\cdot\overline{f(z)} \equiv c^2$. Daraus folgt:

$$f(z) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad f(z) \ne 0 \text{ für alle } z \in G.$$

Letzteres bedeutet, daß $\overline{f(z)} = \dfrac{c^2}{f(z)}$ auf G holomorph ist. Aber dann müßte auch $f(z) + \overline{f(z)} = 2\,\mathrm{Re}\,(f(z))$ holomorph sein, und das ist nur möglich, wenn f konstant ist. □

I.3.14 Maximumprinzip. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|\,f\,|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.*

Beweis: Wenn $|\,f\,|$ in $z_0 \in G$ ein Maximum besitzt, dann gibt es ein $r > 0$, so daß $|\,f(z)\,| \le |\,f(z_0)\,|$ für $|\,z - z_0\,| \le r$ ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt für $0 < \varrho < r$:

$$|\,f(z_0)\,| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\,f(z_0 + \varrho e^{\mathbf{j}t})\,|\, dt \le |\,f(z_0)\,|.$$

Dann muß natürlich überall sogar das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} \Big(|\,f(z_0 + \varrho e^{\mathbf{j}t})\,| - |\,f(z_0)\,| \Big)\, dt = 0.$$

Da der Integrand überall ≤ 0 und $\varrho < r$ beliebig ist, folgt:

$$|\,f(z)\,| = |\,f(z_0)\,| \text{ für } |\,z - z_0\,| < r.$$

Also ist $|\,f\,|$ auf $D_r(z_0)$ konstant, und nach dem Hilfssatz auch f selbst. Schließlich wenden wir den Identitätssatz an und erhalten, daß f auf ganz G konstant sein muß. □

Man kann das Maximumprinzip auch so formulieren:

Eine nicht-konstante holomorphe Funktion nimmt nirgendwo in ihrem Definitionsbereich ein lokales Maximum an (worunter stets ein Maximum von $|\,f\,|$ zu verstehen wäre).

I.3.15 Folgerung. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf G, so nimmt $|\,f\,|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.*

Beweis: Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge muß $|\,f\,|$ irgendwo auf $\overline{G}$ sein Maximum annehmen. Wegen des Maximumprinzips kann das nicht in G liegen. Da bleibt nur der Rand. □

Wer das Wundern noch nicht verlernt hat, sollte an dieser Stelle einmal innehalten und sich bewußt machen, wieviele erstaunliche Eigenschaften holomorpher Funktionen wir in kurzer Zeit hergeleitet haben!

Definition.

Eine *ganze Funktion* ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Polynome, aber auch die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus.

I.3.16 Satz von Liouville. *Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant.*

Beweis: Sei $f(z) \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Cauchy-Ungleichung folgt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$:

$$|\, f'(z)\,| \leq \frac{1}{r} \cdot C.$$

Das ist nur möglich, wenn $f'(z) \equiv 0$ ist, also f konstant. $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, einen besonders einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra anzugeben:

I.3.17 Fundamentalsatz der Algebra.

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(\frac{1}{z})},$$

mit einem Polynom

$$q(w) := a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n.$$

Da $q(0) = a_n \neq 0$ ist, ist

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion. Das geht nur, wenn f konstant ist, im Gegensatz zur Annahme. $\square$

§4 Isolierte Singularitäten

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine *isolierte Singularität* von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, daß z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, daß es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der Logarithmus hat z.B. im Nullpunkt keine isolierte Singularität, weil man einen kompletten Halbstrahl aus $\mathbb{C}$ herausnehmen muß, um log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f, wenn es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf U gibt, so daß $f = \widehat{f}|_{U \setminus \{z_0\}}$ ist.
2. z_0 heißt eine *Polstelle* von f, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ist.
3. z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt (Riemannscher Hebbarkeitssatz). Eine Polstelle liegt genau dann vor, wenn die Werte von $|\, f(z)\,|$ bei Annäherung an z_0 unbeschränkt wachsen. Und was passiert bei einer wesentlichen Singularität? Ohne Beweis geben wir den folgenden merkwürdigen Satz an:

I.4.1 Satz von Casorati-Weierstraß. *Hat f in z_0 eine wesentliche (isolierte) Singularität, so kommt $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe.*

Das bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ ist.

Beispiele:

1. Sei $f(z) := \dfrac{z}{\sin z}$ für $|\, z\,| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= z \cdot (1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \pm \cdots) \\ &= z \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit einer nahe $z_0 = 0$ holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß $\left|\dfrac{\sin(z)}{z}\right| = |\,h(z)\,| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

Also ist $|\,f(z)\,| = \left|\dfrac{z}{\sin(z)}\right| < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Der Wert, der in 0 ergänzt werden muß, ist gegeben durch $\dfrac{1}{h(0)} = 1$.

2. $f(z) := \dfrac{1}{z}$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

3. Sei $f(z) := \exp(\dfrac{1}{z})$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

   Setzen wir $z_n := \frac{1}{n}$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

   Setzen wir dagegen $z_n := -\frac{1}{2\pi n}\mathbf{j}$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathbf{j}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht besonders praktisch. Wir werden nach besseren Methoden suchen. Zuvor müssen wir jedoch noch einen Satz über Nullstellen holomorpher Funktionen beweisen:

I.4.2 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion h auf $D := D_\varepsilon(z_0)$, so daß gilt:*

1. *$D \subset U$.*

2. *$h(z) \neq 0$ für $z \in D$.*

3. *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot h(z)$ für $z \in D$.*

Die Zahl k und der Wert $h(z_0)$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß sich f auf $D_\delta(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da f nicht konstant ist, können nicht alle $a_n = 0$ sein. Da $f(z_0) = 0$ ist, muß $a_0 = 0$ sein.

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $k \geq 1$, so daß

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0 \quad \text{und} \quad a_k \neq 0$$

ist. Daraus folgt für $z \in D_\delta(z_0)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} \\ &= (z-z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^k \cdot h(z), \end{aligned}$$

mit

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n = a_k + a_{k+1}(z-z_0) + a_{k+2}(z-z_0)^2 + \cdots .$$

Offensichtlich hat $h(z)$ den gleichen Konvergenzradius wie die Entwicklung von $f(z)$ um z_0. Da $h(z_0) = a_k \neq 0$ ist, gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$, so daß $h(z) \neq 0$ für alle $z \in D_\varepsilon(z_0)$ ist.

Die Zahl k ist dadurch charakterisiert, daß

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

ist. Und nach den Cauchyschen Integralformeln ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta.$$

$\square$

Die Zahl k nennt man die *Ordnung der Nullstelle*. Auch hier zeigt sich ein eklatanter Unterschied zur reellen Theorie: Während eine reelle beliebig oft differenzierbare Funktion durchaus isolierte Nullstellen unendlicher Ordnung haben kann, ist das im Komplexen wegen des Identitätssatzes nicht möglich.

I.4.3 Folgerung. *f hat in z_0 genau dann eine Polstelle, wenn es eine Umgebung $W = W(z_0)$, eine holomorphe Funktion h auf W und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $h(z_0) \neq 0$ ist, und*

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z) \text{ für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt.

Beweis: f hat genau dann in z_0 eine Polstelle, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$ ist, wenn also $\dfrac{1}{f}$ in z_0 eine hebbare Singularität hat, in der man den Wert 0 ergänzen kann. Das bedeutet, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so daß gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \quad \text{und} \quad \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z), \quad \text{mit } h(z) := \frac{1}{\widetilde{h}(z)}.$$

□

Die Zahl k heißt hier die *Polstellenordnung* von f in z_0.

Ist $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$, mit einer holomorphen Funktion h, so können wir h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ für } |\, z - z_0 \,| < r.$$

Aber dann gilt für $z \neq z_0$ und $|\, z - z_0 \,| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1} \cdot (z-z_0) + \cdots$$

Betrachten wir dagegen die wesentliche Singularität $f(z) := \exp(1/z)$, so erhalten wir für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z. Wir werden sehen, daß es immer möglich ist, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition.

Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der Entwicklungspunkt.

$$\begin{aligned} H(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^n \\ &= \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots \end{aligned}$$

heißt *Hauptteil der Reihe*,

$$\begin{aligned} N(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

heißt *Nebenteil* der Reihe.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent*, wenn Hauptteil und Nebenteil jeweils für sich konvergent sind.

I.4.4 Satz. *Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0, $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der Konvergenzradius des Hauptteils, d.h. der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$H(\frac{1}{w} + z_0) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \cdots .$$

1. *Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*
2. *Ist $r^* \cdot R > 1$ und $r := \frac{1}{r^*}$, so konvergiert $L(z)$ auf dem Kreisring*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |\, z - z_0 \,| < R\}$$

absolut und im Inneren des Kreisringes gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.

Beweis: Die Reihe $\widetilde{H}(w) := H(\dfrac{1}{w} + z_0)$ konvergiert nach Voraussetzung für $|\, w \,| < r^*$. Dann konvergiert $H(z) := \widetilde{H}(\dfrac{1}{z - z_0})$ für $|\, z - z_0 \,| > \dfrac{1}{r^*} = r$.

Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so ist $R \leq r$, und die Reihe kann nirgends konvergieren. Ist $r^* \cdot R > 1$, so konvergieren Haupt- und Nebenteil beide für $r < |\, z - z_0 \,| < R$. $\square$

Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Läßt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

Wir wollen nun sehen, daß sich umgekehrt jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln läßt. Dazu wollen wir zunächst die Cauchysche Integralformel verallgemeinern:

I.4.5 Cauchysche Integralformel für Ringgebiete. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K = K_{r,R}(z_0) \subset\subset G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

Dann gilt für $z \in G \setminus \partial K$:

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z) & \textit{falls } z \in K \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Der Beweis geht eigentlich genauso wie bei der Integralformel für Kreisscheiben. Ist $z \in K$ vorgegeben, so gibt es wegen der Holomorphie von f eine in z stetige Funktion Δ_z, so daß $f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z)$ für alle $\zeta \in G$ ist.

$$\text{Dabei ist} \qquad \Delta_z(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

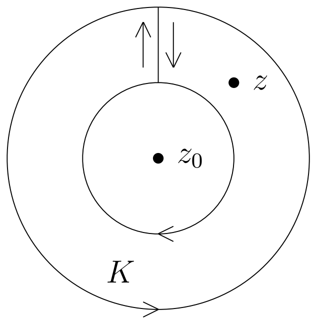
Da Δ_z überall stetig und außerhalb z holomorph ist, folgt mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, daß Δ_z sogar auf ganz G holomorph ist.

Wenn wir den Kreisring K an einer geeigneten Stelle aufschneiden, erhalten wir einen geschlossenen Weg γ mit folgenden Eigenschaften:

a) $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$ und $n(\gamma, z) = 1$.

b) $\operatorname{Int}(\gamma) \subset K \subset G$.

c) $\displaystyle\int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial K} g(\zeta)\, d\zeta$ für jede stetige Funktion g auf G.



Eigenschaft (c) ist erfüllt, weil die Schnittverbindung zwischen dem äußeren und dem inneren Rand zweimal durchlaufen wird, mit umgekehrtem Vorzeichen.

Nach dem verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatz (II.2.11.) und wegen Eigenschaft (b) ist

$$\int_\gamma \Delta_z(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Wegen Eigenschaft (a) folgt wie im Beweis der Originalformel von Cauchy:

$$\int_\gamma \Delta_z(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi\mathbf{j}.$$

Zusammen ergibt das den ersten Teil der Behauptung.

Ist $z \in G \setminus \overline{K}$, so ist der Integrand $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ auf einer offenen Umgebung von $\overline{K}$ holomorph, und es folgt wieder mit dem verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatz, daß das Integral darüber verschwindet. □

I.4.6 Satz von der „Laurent-Trennung“.

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |\, z - z_0 \,| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$$

mit

1. *$f^+ + f^- = f$ auf $K_{r,R}(z_0)$.*

2. *$|\, f^-(z) \,| \to 0$ für $|\, z \,| \to \infty$.*

Beweis: Wir beginnen mit der einfacher zu beweisenden Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Darstellungen der gewünschten Art:

$$f = f_1^+ + f_1^- = f_2^+ + f_2^- .$$

Dann definieren wir eine neue Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} f_1^+(z) - f_2^+(z) & \text{für } z \in D_R(z_0), \\ f_2^-(z) - f_1^-(z) & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und für $z \to \infty$ strebt sie gegen 0. Also handelt es sich um eine beschränkte ganze Funktion, die natürlich konstant sein muß (Liouville). Es ist nur $h(z) \equiv 0$ möglich.

Nun kommen wir zur Existenz von f^+ und f^-:

Für ϱ mit $r < \varrho < R$ und $|\, z - z_0 \,| \neq \varrho$ setzen wir

$$F_\varrho(z) := \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Da der Integrand holomorph ist, gilt das auch für F_ϱ, nach den Sätzen über Parameterintegrale.

Ist $|\, z - z_0 \,| < R$, so gibt es ein ϱ mit $|\, z - z_0 \,| < \varrho < R$, und wir setzen

$$f^+(z) := F_\varrho(z).$$

Dabei kommt es nicht darauf an, welches ϱ wir nun genau nehmen. Ist nämlich $|\, z - z_0 \,| < \varrho_1 < \varrho_2$ und $C := \partial D_{\varrho_2}(z_0) - \partial D_{\varrho_1}(z_0)$, so ist

$$F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

nach der Cauchyschen Integralformel für Ringgebiete.

Ist andererseits ein ϱ mit $|\, z - z_0 \,| < \varrho$ gewählt, so gilt auch noch für alle ζ aus einer kleinen Umgebung von z die Ungleichung $|\, \zeta - z_0 \,| < \varrho$. Das bedeutet, daß ϱ für alle diese ζ gültig ist. f^+ stimmt auf einer ganzen Umgebung von z mit F_ϱ überein und ist demnach dort holomorph.

Entsprechend definiert man $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$ durch $f^-(z) := -F_\varrho(z)$, wobei ϱ die Bedingung $r < \varrho < \min(R, |\, z - z_0 \,|)$ erfüllen muß. Holomorphie und Unabhängigkeit von ϱ folgen wie bei f^+.

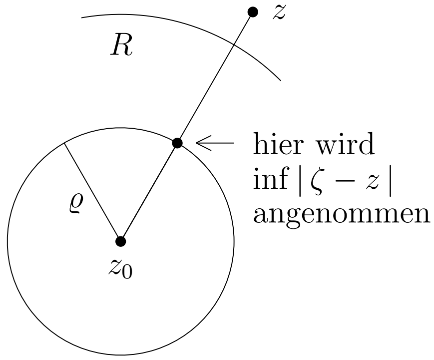
Ist nun $r < \varrho_1 < |\, z - z_0 \,| < \varrho_2 < R$, so ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel für Ringgebiete:

$$f(z) = F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

Nun müssen wir nur noch $|\, f^-(z) \,|$ für $|\, z \,| \to \infty$ abschätzen:

O.B.d.A. sei $|\, z \,| > R$.

$$\begin{aligned}
|\, f^-(z)\,| &= |\, F_\varrho(z)\,| \quad (\text{für } r < \varrho < |\, z - z_0\,| \text{ und } \varrho < R\,)\\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot |\int_{\partial D_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,|\\
&\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,|\\
&= \varrho \cdot \frac{1}{\inf_{\partial D_\varrho} |\, \zeta - z\,|} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |\, f(\zeta)\,|\\
&= \varrho \cdot \frac{1}{|\, z - z_0\,| - \varrho} \cdot \sup_{\overline{K}_{r,R}} |\, f(\zeta)\,|,\\
&\le R \cdot \frac{1}{|\, z - z_0\,| - R} \cdot \sup_{\overline{K}_{r,R}} |\, f(\zeta)\,|,
\end{aligned}$$



und dieser Ausdruck strebt gegen Null, für $|\, z\,| \to \infty$. □

I.4.7 Folgerung. *Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann läßt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe*

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln, d.h. die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f.

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis: Wir führen die Laurentzerlegung durch:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z),$$

wobei f^+ holomorph auf $D_R(z_0)$ ist, und f^- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$. Dann kann man f^+ in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad r < \varrho < R.$$

Dabei haben wir die höheren Cauchyschen Integralformeln benutzt (II.3.4).

Der Nebenteil muß etwas anders behandelt werden:

Sei $g(w) := f^-(z_0 + \dfrac{1}{w})$. Dann ist g holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$. Da $g(\dfrac{1}{z - z_0}) = f^-(z)$ ist, folgt:

$$\lim_{w \to 0} g(w) = \lim_{z \to \infty} f^-(z) = 0.$$

Also können wir auf g den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Es gibt eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf $D_{1/r}(0)$, die außerhalb 0 mit g übereinstimmt. Nun entwickeln wir $\widehat{g}$ in eine Taylorreihe:

$$\widehat{g}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \qquad \text{für } |\, w \,| < \frac{1}{r}.$$

Da $\widehat{g}(0) = 0$ ist, ist $b_0 = 0$. Also gilt für $|\, z - z_0 \,| > r$:

$$f^-(z) = g(\frac{1}{z - z_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

mit $a_{-n} := b_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Insgesamt ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{fr } z \in K_{r,R}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert im Innern des Ringgebietes absolut und gleichmäßig. Sie kann also fr $r < \varrho < R$ über $\partial D_\varrho(z_0)$ gliedweise integriert werden. Das gleiche gilt dann für

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N-1}.$$

Benutzt man noch, daß

$$\int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi \mathbf{j} & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist, so erhält man:

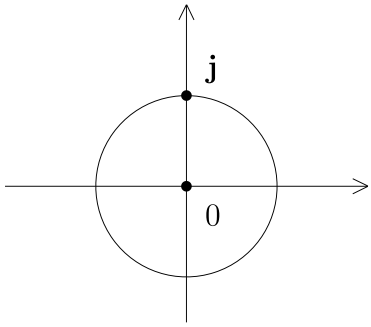
$$\frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} \, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^{n-N-1} \, dz = a_N.$$

□

Beispiel:

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z - \mathbf{j})^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathbf{j}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$**:**

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\dfrac{1}{z - z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|\, z - a \,| < |\, z_0 - a \,|$ ist

$$|\, \frac{z - a}{z_0 - a} \,| < 1,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{z - a - (z_0 - a)} \\ &= -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{z_0-a}} \\ &= -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{z_0 - a} \right)^n . \end{aligned}$$

Ist $|\, z - a \,| > |\, z_0 - a \,|$, so geht man analog vor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0-a}{z-a}} \\ &= \frac{1}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - a}{z - a} \right)^n . \end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z - z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m - 1)!} \cdot \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^{(m-1)} .$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\dfrac{1}{z - z_0}$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{1}{z - \mathbf{j}} = \mathbf{j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathbf{j}} \right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z - \mathbf{j})^2} = -\left(\frac{1}{z - \mathbf{j}} \right)' = -\mathbf{j} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z}{\mathbf{j}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\mathbf{j}} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \cdot \left(\frac{z}{\mathbf{j}} \right)^n .$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 1)}{\mathbf{j}^n} z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 2)}{\mathbf{j}^{n+1}} z^n .$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$**:**

Hier ist

$$\frac{1}{z - \mathbf{j}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{j}}{z} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathbf{j})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathbf{j}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \mathbf{j}^{n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3} \mathbf{j}^{-n-1}(n+2)z^n,$$

wegen $\mathbf{j}^{-n-3}(-n-2) = \mathbf{j}^{-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathbf{j})$:

Hier soll nach Potenzen von $(z-\mathbf{j})$ entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathbf{j}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathbf{j}}{-\mathbf{j}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{j}^{n+1})(z-\mathbf{j})^n,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z-\mathbf{j})^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathbf{j}^{n+1})(z-\mathbf{j})^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (-\mathbf{j}^{n+3})(z-\mathbf{j})^n \\ &= \frac{-\mathbf{j}}{(z-\mathbf{j})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{j}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{j}^{n+1}(z-\mathbf{j})^n. \end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathbf{j})$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

I.4.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ hebbar} &\iff a_n = 0 \text{ für } \textbf{alle } n < 0, \\ z_0 \text{ Polstelle} &\iff \exists\, n < 0 \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ und } a_k = 0 \text{ für } k < n, \\ z_0 \text{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\,\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das läßt nur die Möglichkeit, daß $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. □

Beispiele:

1.
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \ldots$$

besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2.
$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathbf{j})^2}$$

hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in $\mathbf{j}$. Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

3.
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.
$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$

ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$.
Aber dann ist auch $\dfrac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$

Also ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Das bedeutet, daß f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$, $U = U(z_0)$ eine offene Umgebung und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Polstelle in z_0, so kann man f zu einer stetigen Funktion $\widehat{f} : U \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen, mit $\widehat{f}(z_0) = \infty$.

Definition.

> Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine *meromorphe Funktion* auf G ist eine stetige Funktion $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$, die bis auf isolierte Polstellen holomorph ist.

Wenn sich die Polstellen von f im Inneren von G häufen, dann muß auch der Häufungspunkt eine Polstelle sein, wegen der Stetigkeit von f. Aber dann erhält man eine Polstelle, die nicht isoliert ist, und das ist bei einer meromorphen Funktion nicht erlaubt.

Man kann zeigen: Ist G sogar beschränkt, so besitzt eine meromorphe Funktion auf G höchstens endlich viele Polstellen.

Die Funktion $\dfrac{1}{\sin z}$ ist Beispiel einer meromorphen Funktion, aber natürlich auch jede rationale Funktion. Wesentliche Singularitäten sind bei meromorphen Funktionen nicht zugelassen.

§5 Der Residuenkalkül

Definition.

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so daß $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta$$

das *Residuum* von f in z_0.

Bemerkungen:

1. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

2. $\operatorname{res}_{z_0}(f) = a_{-1}$ in der Laurententwicklung von f um z_0. Insbesondere hängt f nicht von dem gewählten ε ab.

3. Es ist
$$\operatorname{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) + b \cdot \operatorname{res}_{z_0}(g).$$

4. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

   Beweis: Es ist
$$[(z - z_0)^n]' = \begin{cases} n \cdot (z - z_0)^{n-1} & \text{für } n \neq 0 \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

   Ist also f Ableitung einer Funktion F, so kann die Laurentreihe von f nur Terme der Gestalt $(z - z_0)^m$ mit $m \neq -1$ enthalten. $\square$

5. $\operatorname{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z - z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

6. Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist
$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

   Beweis: Wir schreiben
$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad h \text{ holomorph in } z_0.$$

   Dann folgt:
$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) h(z) \to a_{-1} \text{ für } z \to z_0.$$
$\square$

7. Man kann die vorangegangene Aussage noch verallgemeinern:

   Hat f in z_0 eine m-fache Polstelle, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

   Beweis: Es ist

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots ,$$

   also

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots$$

   Damit ist

$$[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)! a_{-1} + (z-z_0) \cdot (\ldots),$$

   und es folgt die Behauptung. □

8. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

   Dann ist $\operatorname{res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{h}\right) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

   Beweis: Wir können schreiben:

$$\begin{array}{rrcl} & g(z) & = & c_0 + (z-z_0) \cdot \widetilde{g}(z), \text{ mit } c_0 \neq 0 \\ \text{und} & h(z) & = & (z-z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z)), \text{ mit } b_1 \neq 0 \text{ und } \widetilde{h}(z_0) = 0. \end{array}$$

   Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{h(z)} &= \frac{c_0 + (z-z_0) \cdot \widetilde{g}(z)}{(z-z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z))} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z)} + \frac{\widetilde{g}(z)}{b_1 + \widetilde{h}(z)}. \end{aligned}$$

   Also hat $f := \dfrac{g}{h}$ in z_0 eine einfache Polstelle, und es ist

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z_0)} = \frac{c_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

   □

Beispiele:

1. Sei $f(z) := \dfrac{e^{\mathbf{j}z}}{z^2+1} = \dfrac{e^{\mathbf{j}z}}{(z-\mathbf{j})(z+\mathbf{j})}$.

   f hat einfache Polstellen bei $\mathbf{j}$ und $-\mathbf{j}$. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\mathbf{j}}(f) = \lim_{z \to \mathbf{j}} (z-\mathbf{j}) f(z) &= \lim_{z \to \mathbf{j}} \frac{e^{\mathbf{j}z}}{z+\mathbf{j}} \\ &= -\frac{1}{2e}\mathbf{j}, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{-\mathbf{j}}(f) = \lim_{z\to-\mathbf{j}}(z+\mathbf{j})f(z) &= \lim_{z\to-\mathbf{j}} \frac{e^{\mathbf{j}z}}{z-\mathbf{j}}\\ &= \frac{e}{2}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

2. $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat 4 einfache Nullstellen, insbesondere in

$$z_0 := e^{(\pi/4)\mathbf{j}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{j}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{j}).$$

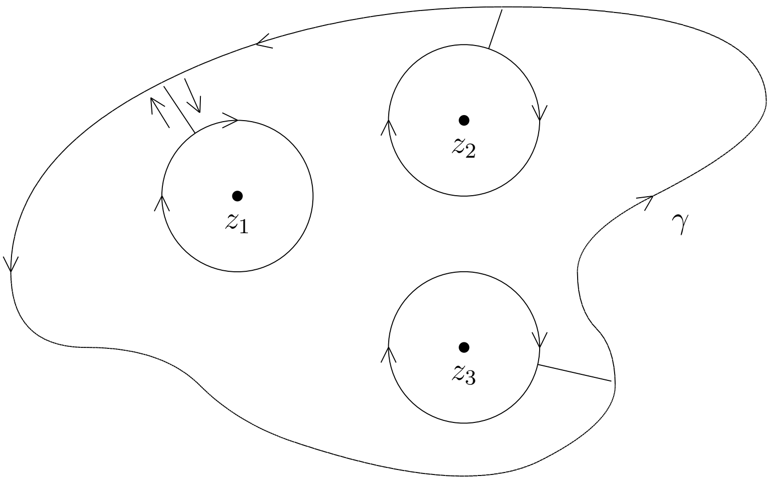
Mit $g(z) := z^2$ und $h(z) := 1 + z^4$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\\ &= \frac{z_0^2}{4z_0^3}\\ &= \frac{1}{4z_0}\\ &= \frac{1}{4}e^{-(\pi/4)\mathbf{j}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathbf{j}).\end{aligned}$$

I.5.1 Der Residuensatz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ eine einfach geschlossene Kurve in G mit $\mathrm{Int}(\gamma) \subset G$. Weiter seien $z_1, \ldots, z_N$ Punkte in $\mathrm{Int}(\gamma)$ und $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}_{z_k}(f).$$

Beweis:



Wir ergänzen den Weg γ zu einem geschlossenen Weg γ', der alle Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$ umgeht (siehe Zeichnung!). γ' besteht aus dem Weg γ, kleinen (negativ durchlaufenen)

Kreisrändern $\partial D_\varepsilon(z_k)$, $k = 1, \ldots, N$, und Verbindungslinien von γ zu den Kreislinien. Die Verbindungslinien werden jeweils zweimal durchlaufen, in entgegengesetzter Richtung.

Außerdem setzen wir

$$G' := G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}.$$

Dann ist auch G' ein Gebiet, es ist $\operatorname{Int}(\gamma') \subset G'$ und f holomorph auf G'. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist dann

$$\int_{\gamma'} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

also

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial D_\varepsilon(z_k)} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_k)} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}_{z_k}(f).$$

$\square$

Beispiele :

1. Es soll $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\, dz$ berechnet werden. Das geht in diesem Falle auch sehr einfach mit der Cauchyschen Integralformel: $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\, dz = \frac{2\pi\mathbf{j}}{3!} \frac{d^3(e^z)}{dz^3}(0) = \frac{\pi\mathbf{j}}{3}.$

   Mit dem Residuensatz macht man es so:

   Die Laurentreihe des Integranden um $z = 0$ hat die Gestalt

   $$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24} + \cdots$$

   Also ist

   $$\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \text{ Koeffizient bei } z^{-1} = \frac{1}{6}.$$

   Daraus folgt:

   $$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\, dz = 2\pi\mathbf{j} \cdot \operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \frac{\pi\mathbf{j}}{3}.$$

2. Die Funktion

   $$f(z) := \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

   hat einen doppelten Pol bei $z = -1$ und einfache Pole bei $z = \pm 2\mathbf{j}$.

Es ist

$$[(z+1)^2 \cdot f(z)]' = \frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z) \cdot 2z}{(z^2+4)^2},$$

also

$$\operatorname{res}_{-1}(f) = \lim_{z \to -1} [(z+1)2 \cdot f(z)]' = \frac{-4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)}{25} = -\frac{14}{25}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{2\mathbf{j}}(f) &= \lim_{z \to 2\mathbf{j}} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2\mathbf{j})} &&= \frac{-4-4\mathbf{j}}{(1+2\mathbf{j})^2 4\mathbf{j}} \\
& &&= \frac{-(1+\mathbf{j})}{(-3+4\mathbf{j})\mathbf{j}} = \frac{1+\mathbf{j}}{4+3\mathbf{j}} \\
& &&= \frac{(1+\mathbf{j})(4-3\mathbf{j})}{(4+3\mathbf{j})(4-3\mathbf{j})} = \frac{7+\mathbf{j}}{25}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2\mathbf{j}}(f) &= \lim_{z \to -2\mathbf{j}} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2\mathbf{j})} = \frac{-4+4\mathbf{j}}{(1-2\mathbf{j})^2(-4\mathbf{j})} \\
& \frac{1-\mathbf{j}}{(-3-4\mathbf{j})\mathbf{j}} = \frac{1-\mathbf{j}}{4-3\mathbf{j}} \\
& \frac{(1-\mathbf{j})(4+3\mathbf{j})}{(4-3\mathbf{j})(4+3\mathbf{j})} = \frac{7-\mathbf{j}}{25}.
\end{aligned}$$

Von den Polstellen liegen -1 und $-2\mathbf{j}$ in der Kreisscheibe $D_2(-\mathbf{j})$ (es ist $|-1-(-\mathbf{j})| = |-1+\mathbf{j}| = \sqrt{2} < 2$). Der Punkt $2\mathbf{j}$ liegt außerhalb. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_2(-\mathbf{j})} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz &= 2\pi\mathbf{j} \cdot [\operatorname{res}_{-1}(f) + \operatorname{res}_{-2\mathbf{j}}(f)] \\
&= 2\pi\mathbf{j} \cdot \left[-\frac{14}{25} + \frac{7-\mathbf{j}}{25}\right] \\
&= \frac{2\pi\mathbf{j}}{25} \cdot (-7-\mathbf{j}) = \frac{2\pi}{25}(1-7\mathbf{j}).
\end{aligned}$$

Oft wendet man den Residuensatz in folgender Form an:

I.5.2 Das Argument-Prinzip. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein einfach geschlossener Weg in G mit $\operatorname{Int}(\gamma) \subset G$.*

Weiter sei f auf G meromorph, n die Anzahl der Nullstellen von f in $\operatorname{Int}(\gamma)$ und p die Anzahl der Polstellen von f in $\operatorname{Int}(\gamma)$. Beides werde jeweils mit Vielfachheiten gezählt. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = n - p.$$

Beweis: Ist $z_0 \in \operatorname{Int}(\gamma)$, so kann man f in der Nähe von z_0 schreiben als

$$f(z) = (z-z_0)^m \cdot h(z),$$

mit einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$. Ist $m > 0$, so liegt eine Nullstelle der Ordnung m vor. Ist $m < 0$, so hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung m. Ist $m = 0$, so ist f in z_0 holomorph und $\neq 0$.

Nun ist
$$f'(z) = m \cdot (z - z_0)^{m-1} \cdot h(z) + (z - z_0)^m \cdot h'(z),$$
also
$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m \cdot h(z) + (z - z_0)h'(z)}{(z - z_0)h(z)} \\ &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \end{aligned}$$
wobei der zweite Summand holomorph ist. Daraus folgt:
$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m.$$
Nur bei den endlich vielen Nullstellen und Polstellen, die f eventuell in $\operatorname{Int}(\gamma)$ besitzt, kann ein Residuum $\neq 0$ herauskommen.

Nun folgt der Satz unmittelbar aus dem Residuensatz. $\square$

Zur Deutung des Argument-Prinzips betrachten wir einen einfach geschlossenen Weg
$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$
und eine meromorphe Funktion f, die auf der Spur von γ weder Nullstellen noch Polstellen hat. Dann ist $f \circ \gamma$ ein Weg, der den Nullpunkt nicht trifft, und es gilt:
$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \\ &= n - p. \end{aligned}$$
Sei etwa 0 eine k-fache Nullstelle einer holomorphen Funktion f und γ eine kleine Kreislinie um den Nullpunkt herum. Dann ist $n(f \circ \gamma, 0) = k$. Der Weg $f \circ \gamma$ umläuft den Nullpunkt k-mal. Das bedeutet: Ist $z = \gamma(t)$, so wird $w := f(\gamma(t))$ k-mal angenommen. Und das gilt für alle Werte in der Nähe von 0.

Beispiel:

Die Funktion $f(z) := z^2$ besitzt in $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung und ist ansonsten holomorph ohne Nullstellen. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := e^{\mathbf{j}t}$ umrundet diese Nullstelle einmal, ist also eine einfach geschlossene Kurve, auf der keine Nullstelle von f liegt. Daher ist $n(f \circ \gamma, 0) = 2$. Und tatsächlich umläuft $f \circ \gamma(t) = e^{2\mathbf{j}t}$ den Nullpunkt zweimal! Jeder Wert $w \neq 0$ wird zweimal angenommen, es gibt ja jeweils 2 Wurzeln.

Eine besonders wichtige Anwendung des Residuensatzes stellt die Berechnung gewisser reeller Integrale dar. Wir betrachten zwei Spezialfälle:

Trigonometrische Integrale

Sei $R(x, y)$ eine komplexwertige rationale Funktion. Wir wollen den Residuensatz anwenden, um Integrale vom Typ
$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$
zu berechnen. Zu diesem Zweck suchen wir eine holomorphe oder meromorphe Funktion f, so daß wir das fragliche Integral als komplexes Kurvenintegral auffassen können:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz, \qquad \text{mit } \gamma(t) := e^{\mathbf{j}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathbf{j} \sin t$ und $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \\ \text{und} \qquad \sin t &= \frac{1}{2\mathbf{j}}(z - \frac{1}{z}). \end{aligned}$$

Da $\gamma'(t) = \mathbf{j}\gamma(t)$ ist, ist

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathbf{j}\gamma(t)} \cdot R\left(\frac{1}{2}(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}), \frac{1}{2\mathbf{j}}(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)})\right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also
$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathbf{j}}(z - \frac{1}{z})\right),$$
so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt &= \frac{1}{\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\mathbf{j}} \int_\gamma f(z)\, dz \\ &= 2\pi \cdot \sum_{z \in D_1(0)} \operatorname{res}_z(f). \end{aligned}$$

Beispiel:

Sei $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $\quad a > 1$ reell. Hier ist
$$R(x, y) = \frac{1}{a + y},$$
also
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2\mathbf{j}}(z - \frac{1}{z})} = \frac{2\mathbf{j}}{2a\mathbf{j}z + z^2 - 1} = \frac{2\mathbf{j}}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit $z_{1,2} = \mathbf{j}(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$.

f hat zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Da $a > 1$ ist, ist

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1, \text{ also } a - 1 < \sqrt{a^2 - 1}.$$

Da in einem Dreieck stets eine Seite kleiner als die Summe der beiden anderen ist, folgt – mit Pythagoras –, daß $\sqrt{a^2 - 1} < a + 1$ ist. Also ist

$$-1 < -a + \sqrt{a^2 - 1} < 1, \quad \text{d.h. } z_1 = \mathbf{j}(-a + \sqrt{a^2 - 1}) \in D_1(0).$$

Andererseits ist $|\,-a - \sqrt{a^2 - 1}\,| = |\,a + \sqrt{a^2 - 1}\,| \geq |\,a\,| > 1$, also $z_2 \notin D_1(0)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} &= 2\pi \cdot \operatorname{res}_{z_1}(f) \\
&= 2\pi \cdot \lim_{z \to z_1} \frac{2\mathbf{j}}{z - z_2} \\
&= \frac{4\pi\mathbf{j}}{z_1 - z_2} \\
&= \frac{4\pi\mathbf{j}}{2\mathbf{j}\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

Uneigentliche rationale Integrale

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

betrachten, wobei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sei, und $p(x)$ und $q(x)$ Polynome ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

I.5.3 Satz. *Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten c, $C > 0$ und ein $R > 0$, so daß gilt:*

$$c|\,z\,|^n \leq |\,p(z)\,| \leq C|\,z\,|^n \quad \textit{für } |\,z\,| \geq R.$$

Beweis: Sei

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad r(z) := \sum_{\nu=0}^{n-1} |\,a_\nu\,| \cdot |\,z\,|^\nu.$$

Mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichungen folgt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$|\,a_n\,| \cdot |\,z\,|^n - r(z) \leq |\,p(z)\,| \leq |\,a_n\,| \cdot |\,z\,|^n + r(z).$$

Für $|\,z\,| \geq 1$ und $\nu < n$ ist $|\,z\,|^\nu \leq |\,z\,|^{n-1}$, also

$$r(z) \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} |\,a_\nu\,| \cdot |\,z\,|^{n-1} = k \cdot |\,z\,|^{n-1}, \text{ mit } k := \sum_{\nu=0}^{n-1} |\,a_\nu\,|.$$

Daraus folgt:

$$|a_n| \cdot |z|^n - k|z|^{n-1} \le |p(z)| \le |a_n| \cdot |z|^n + k|z|^{n-1},$$

also

$$(|a_n| - \frac{k}{|z|})|z|^n \le |p(z)| \le (|a_n| + \frac{k}{|z|})|z|^n.$$

Wählt man $R > \dfrac{k}{|a_n|}$, so ist $\dfrac{k}{R} < |a_n|$ und daher $|a_n| - \dfrac{k}{R} > 0$.

Setzt man $c := |a_n| - \dfrac{k}{R}$ und $C := |a_n| + \dfrac{k}{R}$, so folgt die gewünschte Beziehung für $|z| \ge R$. □

I.5.4 Folgerung. *Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) \ge \deg(p) + k$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $R > 0$, so daß*

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \le C \cdot \frac{1}{|z|^k}$$

für $|z| \ge R$ ist.

Außerdem folgt:

1. *Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}|$ im Unendlichen beschränkt.*
2. *Ist $k = 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx.$$

Beweis: Ist

$$\begin{aligned} c_1|z|^m &\le |p(z)| \le C_1|z|^m \\ \text{und} \quad c_2|z|^n &\le |q(z)| \le C_2|z|^n \end{aligned}$$

für $|z| \ge R$, so ist

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \le C \cdot |z|^{m-n},$$

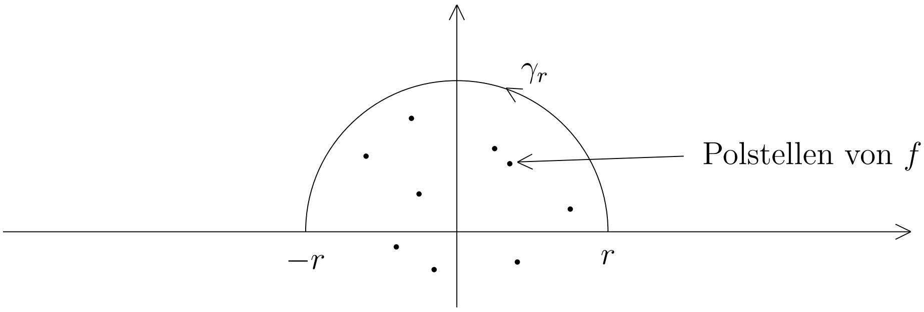
für $|z| \ge R$, und mit $C := \dfrac{C_1}{c_2}$ und $m - n \le -k$.

Ist $k = 1$, so ist $|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}| \le C$.

Ist $k = 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus dem Majoranten-Kriterium und der Tatsache, daß $q(x)$ keine Nullstelle besitzt. □

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ erfüllt, mit $k = 2$. Insbesondere ist dann $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch höchstens endlich viele sein.

Wir betrachten nun folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathbf{j}t}$, $0 \leq t \leq \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\mathbf{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}\,(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man beachte, daß das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine *endliche* Summe!

Da $|\, f(z)\,| \leq \dfrac{C}{|\,z\,|^2}$ für große z ist, folgt:

$$|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\,| \leq \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathbf{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}\,(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall.

Erinnerung:

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt *Cauchyscher Hauptwert* des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchyschen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, daß der Cauchysche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

Beispiel:

Wir wollen $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathbf{j}\pi/4} = e^{\mathbf{j}\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos(\frac{\pi+2\pi k}{4}) + \mathbf{j}\sin(\frac{\pi+2\pi k}{4}),$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Dabei ist $\operatorname{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da alle 4 Nullstellen von $1 + z^4$ verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathbf{j}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{j}) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathbf{j}e^{\mathbf{j}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - 1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\overline{z}_0 \\ \text{und} \quad \operatorname{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\overline{z}_1, \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\mathbf{j}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \mathbf{j}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1 - \mathbf{j})\right) \\ &= \frac{\pi\mathbf{j}}{2\sqrt{2}}(-2\mathbf{j}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

§6 Die Fouriertransformation

Wir müssen unsere Kenntnisse über Parameterintegrale etwas erweitern:

I.6.1 Satz. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge oder ein abgeschlossener Quader, $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $h : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, $g : B \times I \to \mathbb{R}$ stetig und*

$$F(\mathbf{x}) := \int_a^b g(\mathbf{x}, t) h(t)\, dt.$$

Dann gilt:

1. *F ist stetig auf B.*
2. *Ist B offen und g stetig differenzierbar nach x_i, so ist auch F stetig differenzierbar nach x_i, und es gilt:*
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) h(t)\, dt.$$
3. *Ist B ein abgeschlossener Quader, so ist*
$$\int_B F(\mathbf{x})\, dv_n = \int_a^b h(t) \int_B g(\mathbf{x}, t)\, dv_n\, dt.$$

Den Beweis können wir hier nicht bringen! (vgl. W.Walter, Analysis II, 7.14 und 7.15)

Definition.

Sei $f : [a,b] \times [c, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, und für jedes $x \in [a,b]$ existiere das uneigentliche Integral

$$\int_c^\infty f(x,t)\, dt := \lim_{d \to \infty} \int_c^d f(x,t)\, dt.$$

Das uneigentliche Parameterintegral $\displaystyle\int_c^\infty f(x,t)\, dt$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf $[a,b]$, falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $d_0 = d_0(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\left| \int_c^d f(x,t)\, dt - \int_c^\infty f(x,t)\, dt \right| < \varepsilon$$

ist, für alle $d \geq d_0$ und alle $x \in [a,b]$.

I.6.2 Satz. *Wie oben sei f stückweise stetig, und es existiere das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_c^\infty f(x,t)\, dt$. Außerdem gebe es eine Funktion $\varphi : [c, \infty) \to \mathbb{R}$, so daß gilt:*

1. *$|\, f(x,t)\,| \leq \varphi(t)$ für alle x und t.*
2. *φ ist stückweise stetig.*
3. *Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_c^\infty \varphi(t)\, dt$ konvergiert.*

Dann konvergiert $\displaystyle\int_c^\infty f(x,t)\, dt$ auf $[a,b]$ gleichmäßig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann gibt es ein $d_0 = d_0(\varepsilon)$, so daß gilt:

$$\int_{d_1}^{d_2} \varphi(t)\,dt < \varepsilon \quad \text{für } d_0 \le d_1 < d_2.$$

Für alle diese d_1, d_2 und alle $x \in [a,b]$ ist dann

$$\left| \int_{d_1}^{d_2} f(x,t)\,dt \right| \le \int_{d_1}^{d_2} |\, f(x,t)\,|\,dt \le \int_{d_1}^{d_2} \varphi(t)\,dt < \varepsilon.$$

Daraus folgt:

Für $d \ge d_0$ und $x \in [a,b]$ ist $\left| \int_d^\infty f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon$ und daher

$$\left| \int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^\infty f(x,t)\,dt \right| = \left| \int_d^\infty f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Also konvergiert das Integral gleichmäßig. □

Jetzt können die Sätze über Parameterintegrale auf uneigentliche Integrale erweitert werden:

I.6.3 Satz. *Sei $g : [a,b] \times [c,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig und $h : [c,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Das uneigentliche Parameterintegral*

$$F(x) := \int_c^\infty g(x,t)h(t)\,dt$$

sei gleichmäßig konvergent für $x \in [a,b]$. Dann gilt:

1. *F ist stetig auf $[a,b]$.*
2. *Ist $a \le a' \le b' \le b$, so ist*

   $$\int_{a'}^{b'} \left(\int_c^\infty g(x,t)h(t)\,dt \right) dx = \int_c^\infty h(t) \int_{a'}^{b'} g(x,t)\,dx\,dt.$$

3. *Sei $b = +\infty$, h absolut integrierbar über $[a,\infty)$ und und für jedes d mit $c \le d < \infty$ sei*

   $$\int_a^\infty g(x,t)\,dx$$

   gleichmäßig konvergent über $[c,d]$. Dann ist

   $$\int_a^\infty \left(\int_c^\infty g(x,t)h(t)\,dt \right) dx = \int_c^\infty h(t) \int_a^\infty g(x,t)\,dx\,dt,$$

   sofern das Integral auf der rechten Seite existiert.

   (d.h., es muß $\lim\limits_{R\to\infty} \int_c^R \left(h(t) \int_a^\infty g(x,t)\,dx \right) dt$ existieren und $< \infty$ sein.)

Den Beweis können wir hier nicht ausführen. Der Satz liefert genau das, was wir im Folgenden bei den Integraltransformationen brauchen. Die Schwierigkeit besteht darin, daß wir das Riemannsche Integral benutzen, während in der Literatur in diesem Zusammenhang meist das Lebesgue-Integral verwendet wird. Es ist also nicht leicht, ein Zitat für den obigen Satz anzugeben. Ich habe ihn in dem Buch von James S. Walker (Fourier Analysis) gefunden, (6, 2.5). Allerdings würde ich dieses Buch nur Mathematikern zur Lektüre empfehlen.

Zu ergänzen wäre noch folgendes Resultat:

I.6.4 Satz. *Die Funktionen g und h seien wie oben definiert, g stetig und h stückweise stetig. Außerdem sei g nach x stetig partiell differenzierbar. Das uneigentliche Integral*

$$\int_c^\infty g(x,t)h(t)\,dt$$

sei für jedes $x \in [a,b]$ konvergent, das uneigentliche Integral

$$\int_c^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)h(t)\,dt$$

konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig.

Dann ist $F(x) := \int_c^\infty g(x,t)h(t)\,dt$ stetig differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)h(t)\,dt.$$

Beweis: Gleiche Quelle wie eben, (6, 2.8).

Sei nun f eine stückweise stetige ($\mathbb{C}$-wertige) Funktion auf $\mathbb{R}$. Außerdem sei f absolut integrierbar

$$\text{(d.h.: } \int_{-\infty}^\infty |\,f(t)\,|\,dt \quad \text{existiert und ist } < \infty \text{).}$$

Dann existiert

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt$$

für jedes $\omega \in \mathbb{R}$.

Man schreibt auch

$$F(\omega) = \widehat{f}(\omega) \quad \text{oder} \quad F = \mathcal{F}[f],$$

und nennt F die *Fourier-Transformierte* von f.

f heißt *Originalfunktion* oder *Urbildfunktion*, F heißt *Spektralfunktion* oder *Bildfunktion.* Den Zusammenhang zwischen Originalfunktion und Bildfunktion macht man auch mit folgender Symbolik deutlich:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$$

I.6.5 Satz. *Sei f stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann ist die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ stetig und beschränkt.*

Beweis: Es ist $|\,f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,| = |\,f(t)\,|$, und da f absolut integrierbar ist, konvergiert

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt$$

gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall. Also ist $\widehat{f}(\omega)$ dort stetig.

Weiter ist

$$|\,\widehat{f}(\omega)\,| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt\,| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\,f(t)\,|\,dt,$$

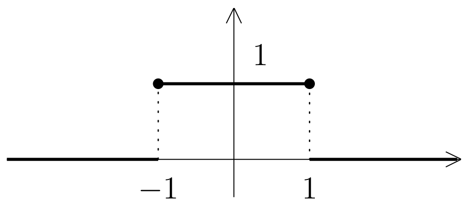
und letzteres ist eine Konstante. Also ist $\widehat{f}$ beschränkt. $\square$

Die Funktionen $f = f(t)$ sind im sogenannten *Original- oder Zeitbereich* angesiedelt. Man kann sich darunter irgendwelche eingehenden elektromagnetischen Signale vorstellen. Mit Hilfe der Fourier-Transformation wird das Signal wie beim Empfang durch eine Antenne als kontinuierliche Überlagerung von harmonischen Schwingungen dargestellt. Die im *Bild- oder Frequenzbereich* angesiedelte Fourier-Transformierte $F = F(\omega)$ beschreibt, welchen Beitrag die verschiedenen Frequenzen leisten.

Beispiele :

1. Wir beginnen mit dem „Rechteck-Impuls“

$$\pi(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |\,t\,| \le 1 \\ 0 & \text{für } |\,t\,| > 1. \end{cases}$$



Die Fourier-Transformierte $F = \mathcal{F}[\pi]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-1}^{1} e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt \\ &= \frac{\mathbf{j}}{\omega} \cdot e^{-\mathbf{j}\omega t}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{\mathbf{j}}{\omega} \cdot (e^{-\mathbf{j}\omega} - e^{\mathbf{j}\omega}) \\ &= \frac{2}{\omega} \cdot \sin(\omega). \end{aligned}$$

Führen wir die Schreibweise

$$\mathrm{si}(x) := \frac{\sin x}{x}$$

ein, so erhalten wir:

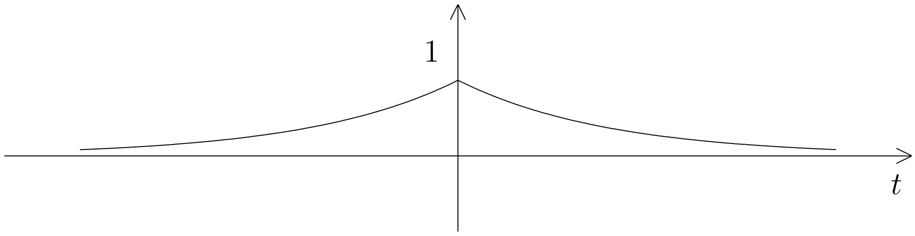
$$\pi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\mathrm{si}(\omega)\,.$$

2. Als nächstes betrachten wir den symmetrisch abfallenden Impuls

$$f(t) := e^{-a|\,t\,|}.$$

f ist stetig und absolut integrierbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,f(t)\,|\,dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-at}\,dt = 2 \cdot \frac{e^{-at}}{-a}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{2}{a}.$$

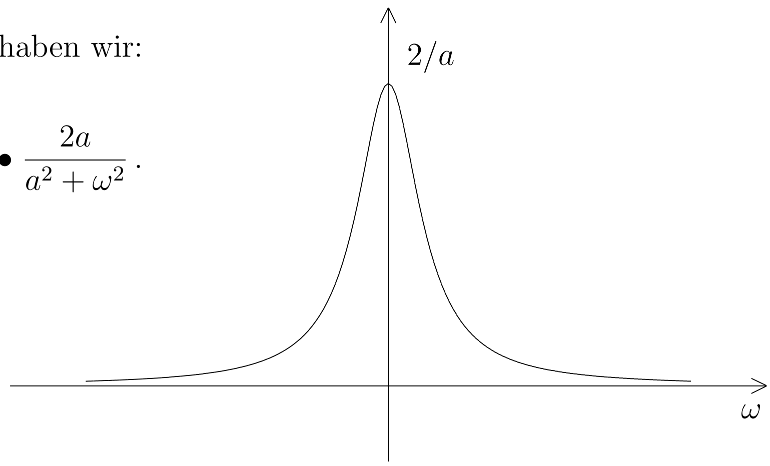


Die Fourier-Transformierte ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(a+\mathbf{j}\omega)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(-a+\mathbf{j}\omega)t}\,dt \\
&= -\frac{1}{a+\mathbf{j}\omega} e^{-(a+\mathbf{j}\omega)t}\,\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-a+\mathbf{j}\omega} e^{-(-a+\mathbf{j}\omega)t}\,\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{a+\mathbf{j}\omega} - \frac{1}{-a+\mathbf{j}\omega} \\
&= \frac{-2a}{-\omega^2 - a^2} \\
&= \frac{2a}{\omega^2 + a^2}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir:

$$e^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.$$



Man beachte, daß man zu vielen Standard-Funktionen nicht die Fourier-Transformierte bilden kann (z.B. Konstante, sin, cos usw.) !

I.6.6 Satz. *Die Fourier-Transformation hat folgende Eigenschaften:*

1. $\mathcal{F}[f_1 + f_2] = \mathcal{F}[f_1] + \mathcal{F}[f_2]$.
2. *Ist* $\alpha \in \mathbb{C}$, *so ist* $\mathcal{F}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathcal{F}[f]$.
3. $f(t-c) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\omega)e^{-\mathbf{j}\omega c}$.
4. $f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{|a|} \cdot \widehat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

Beweis: (1) und (2) sind trivial.

Zu (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-c)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathbf{j}\omega(s+c)}\,ds = e^{-\mathbf{j}\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathbf{j}\omega s}\,ds.$$

Zu (4):

Sei $\varphi(t) := at$. Im Endlichen gilt (für stückweise stetiges g) :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} g(at)\,dt &= \frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{a\alpha}^{a\beta} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{|\,a\,|}\cdot\int_{|\,a\,|\alpha}^{|\,a\,|\beta} g(s)\,ds.\end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt = \frac{1}{|\,a\,|}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\mathbf{j}\omega\frac{s}{a}}\,ds = \frac{1}{|\,a\,|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

$\square$

I.6.7 Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Außerdem seien f und f' absolut integrierbar. Dann gilt:*

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathbf{j}\omega\cdot\widehat{f}(\omega).$$

Beweis: Es ist

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Nach Voraussetzung existiert dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}[f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt] \\ \text{und}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}[f(0) - \int_x^0 f'(t)\,dt].\end{aligned}$$

Da f absolut integrierbar ist, muß dann

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

sein.

Weiter ist

$$\int_{-N}^{M} f'(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt = f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\Big|_{-N}^{M} - \int_{-N}^{M} f(t)(-\mathbf{j}\omega)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt.$$

Für $N, M \to \infty$ strebt der erste Summand auf der rechten Seite gegen 0 und der zweite gegen $\mathbf{j}\omega\cdot\widehat{f}(\omega)$. $\square$

Bemerkung : Bei höherer Differenzierbarkeit erhält man die Formel

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (\mathbf{j}\omega)^n\cdot\widehat{f}(\omega).$$

Auf die Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

I.6.8 Satz. *Sei f stückweise stetig und absolut integrierbar. Außerdem sei auch die Funktion $t \mapsto t \cdot f(t)$ absolut integrierbar.*

Dann ist $\widehat{f}$ stetig differenzierbar, und es gilt:

$$t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \ \mathbf{j} \cdot \widehat{f}\,'(\omega).$$

BEWEIS: Auf Grund der Voraussetzungen existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$. Außerdem gilt:

$$|\, f(t) \cdot \frac{\partial(e^{-\mathbf{j}\omega t})}{\partial\omega} \,| = |\,(-\mathbf{j}t) \cdot f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,| = |\,t \cdot f(t)\,|,$$

und da $t \cdot f(t)$ absolut integrierbar ist, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\partial(e^{-\mathbf{j}\omega t})}{\partial\omega}\, dt$$

gleichmäßig konvergent. Nach Satz 6.4. ist dann $\widehat{f}$ stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\,'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-\mathbf{j}t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\, dt \\
&= -\mathbf{j}\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\, dt \\
&= -\mathbf{j} \cdot \mathcal{F}[t \cdot f(t)].
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiele:

1. Wir betrachten einen etwas modifizierten Rechteck-Impuls:

$$\pi_{A,T} := A \cdot \pi(\frac{2}{T}t) = \begin{cases} A & \text{für } |\,t\,| \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |\,t\,| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

   Dann gilt:

$$\pi_{A,T} \circ\!\!-\!\!\bullet \ A \cdot T \cdot \mathrm{si}(\frac{T}{2}\omega).$$

2. Als nächstes untersuchen wir einen modifizierten und verschobenen Rechteck-Impuls:

$$f(t) := \pi(\frac{t-a}{T}) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\,t-a\,| \le T \\ 0 & \text{für } |\,t-a\,| > T. \end{cases}$$

   Wir gehen aus von der Beziehung $\pi(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\mathrm{si}(\omega)$.

   Sei $f_1(t) := \pi(t - \frac{a}{T})$. Dann ist $f(t) = \pi(\frac{1}{T}t - \frac{a}{T}) = f_1(\frac{1}{T}t)$. Damit folgt:

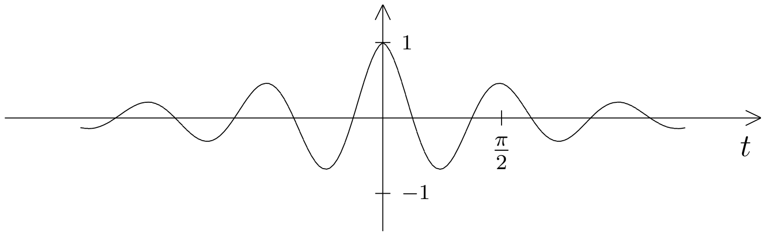
$$f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{\pi}(\omega)e^{-\mathbf{j}\omega\frac{a}{T}} = 2\mathrm{si}(\omega)e^{-\mathbf{j}\omega\frac{a}{T}}$$

   und

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T \cdot \widehat{f_1}(T\omega) = 2T \cdot \mathrm{si}(T\omega)e^{-\mathbf{j}\omega a}.$$

3. Schließlich betrachten wir noch die Fourier-Transformation einer amplitudenmodulierten Cosinus-Schwingung:

$$f(t) := e^{-a|t|} \cdot \cos(\Omega t),\ \Omega, a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$



Wir erinnern uns an die Formeln

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{j}z} &= \cos z + \mathbf{j}\sin z \\ \text{und} \quad e^{-\mathbf{j}z} &= \cos z - \mathbf{j}\sin z. \end{aligned}$$

Also ist $\cos z = \dfrac{1}{2}(e^{\mathbf{j}z} + e^{-\mathbf{j}z})$ und

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-a|t|}(e^{\mathbf{j}\Omega t} + e^{-\mathbf{j}\Omega t}).$$

Zur Berechnung der Transformierten benötigen wir noch eine weitere Formel:

Behauptung:

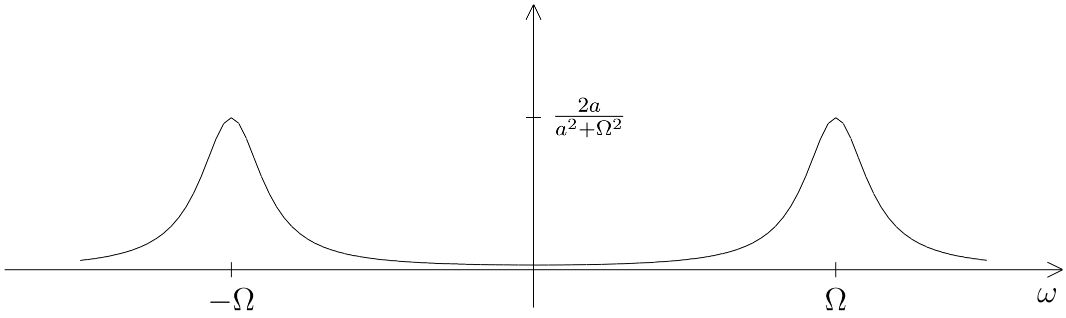
$$\begin{array}{lrcl} \text{Wenn} & f(t) & ○\!\!-\!\!\bullet & F(\omega), \\ \text{dann} & e^{\mathbf{j}\omega_0 t} f(t) & ○\!\!-\!\!\bullet & F(\omega - \omega_0). \end{array}$$

Beweis dafür: Es ist

$$\begin{aligned} F(\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathbf{j}(\omega-\omega_0)t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)e^{\mathbf{j}\omega_0 t}\right] e^{-\mathbf{j}\omega t}\, dt. \qquad \square \end{aligned}$$

Nun haben wir:

$$\begin{array}{rrcl} & e^{-a|t|} & ○\!\!-\!\!\bullet & F(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}, \\ \text{also} & e^{-a|t|}e^{\mathbf{j}\Omega t} & ○\!\!-\!\!\bullet & F(\omega - \Omega) = \dfrac{2a}{a^2 + (\omega-\Omega)^2} \\ \text{und} & e^{-a|t|}e^{-\mathbf{j}\Omega t} & ○\!\!-\!\!\bullet & F(\omega + \Omega) = \dfrac{2a}{a^2 + (\omega+\Omega)^2}, \\ \text{und damit} & e^{-a|t|}\cos(\Omega t) & ○\!\!-\!\!\bullet & \dfrac{a}{a^2+(\omega-\Omega)^2} + \dfrac{a}{a^2+(\omega+\Omega)^2}. \end{array}$$



I.6.9 Satz. *f und g seien stückweise stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Dann ist die* Faltung *(das* Konvolutionsprodukt*)*

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

eine stetige und absolut integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$.

Außerdem ist $f \star g = g \star f$.

Beweis: $\varphi(t) := f(t-\tau)g(\tau)$ ist stückweise stetig, und es existiert das Integral über φ über jedem abgeschlossenen Intervall.

Sei $|\,f(s)\,| \le M$ auf $\mathbb{R}$. Dann gilt für $a < b$:

$$\int_a^b |\,\varphi(\tau)\,|\,d\tau \le M \cdot \int_a^b |\,g(\tau)\,|\,d\tau.$$

Da g absolut integrierbar ist, ist auch φ absolut integrierbar. Also existiert $(f \star g)(t)$ für jedes t, und aus der Abschätzung folgt, daß das Integral $(f \star g)(t)$ auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig konvergiert.

Außerdem gilt (mit $\psi(\tau) := t - \tau$):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau &= -\int_a^b f(\psi(\tau))g(t-\psi(\tau))\psi'(\tau)\,d\tau \\ &= -\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(u)g(t-u)\,du \\ &= \int_{t-b}^{t-a} f(u)g(t-u)\,du.\end{aligned}$$

Auf beiden Seiten existiert der Limes für $a \to -\infty$ und $b \to +\infty$, und das liefert

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\,du = (g \star f)(t).$$

Ist f sogar stetig, so folgt mit Satz 6.3., daß $f \star g$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist, und es ist

$$\begin{aligned}\int_a^b |\,(f \star g)(t)\,|\,dt &= \int_a^b \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\,\Big|\,dt \\ &\le \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |\,f(t-\tau)\,| \cdot |\,g(\tau)\,|\,d\tau\,dt \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |\,g(\tau)\,| \cdot \int_a^b |\,f(t-\tau)\,|\,dt\,d\tau \\ &\le \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\,g(\tau)\,|\,d\tau\Big) \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\,f(\tau)\,|\,d\tau\Big).\end{aligned}$$

Ist f nicht stetig, aber eine Funktion mit kompaktem Träger, so ist das Faltungs-Integral ein eigentliches Integral über ein abgeschlossenes Intervall, und die Aussagen lassen sich genauso leicht beweisen. Damit kommt man bei den meisten Anwendungen aus. Ist f eine beliebige beschränkte stückweise stetige Funktion, so wird der Beweis erheblich schwieriger. (vgl. T.W. Körner: Fourier Analysis, Appendix C) $\square$

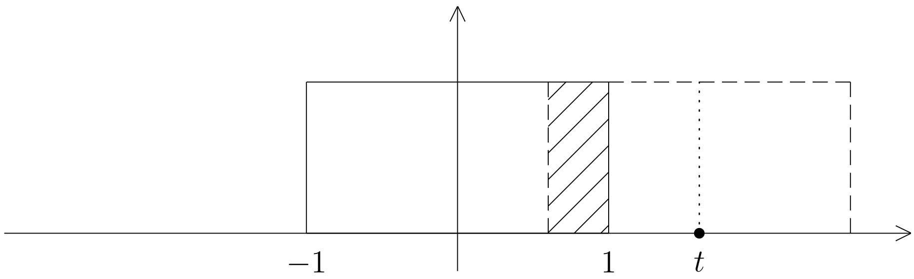
Beispiel:

Wir wollen sehen, was herauskommt, wenn man den Rechteckimpuls π mit sich selbst faltet:

Es ist

$$(\pi \star \pi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\tau)\pi(t-\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{1} \pi(t-\tau)\,d\tau.$$

Der Integrand ist $= 1$, wenn $|\,\tau\,| \le 1$ und $|\,t-\tau\,| \le 1$ ist, sonst ist er $= 0$. Nur wenn $|\,t\,| \le 2$ ist, überlappen sich die beiden Bereiche:



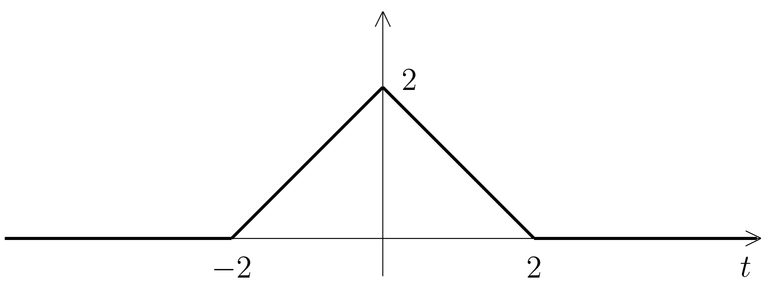
Ist x die Länge des Überlappungsbereiches, so ist

$$x + (|\,t\,| - 1) = 1, \quad \text{also } x = 2 - |\,t\,|.$$

Daraus folgt:

$$(\pi \star \pi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |\,t\,| \ge 2 \\ 2 - |\,t\,| & \text{falls } |\,t\,| < 2. \end{cases}$$

Das ist ein Dreiecks-Impuls der Breite 4 und der Höhe 2.



I.6.10 Satz. *Die Funktionen f und g seien stückweise stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Dann gilt:*

$$(f \star g)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega).$$

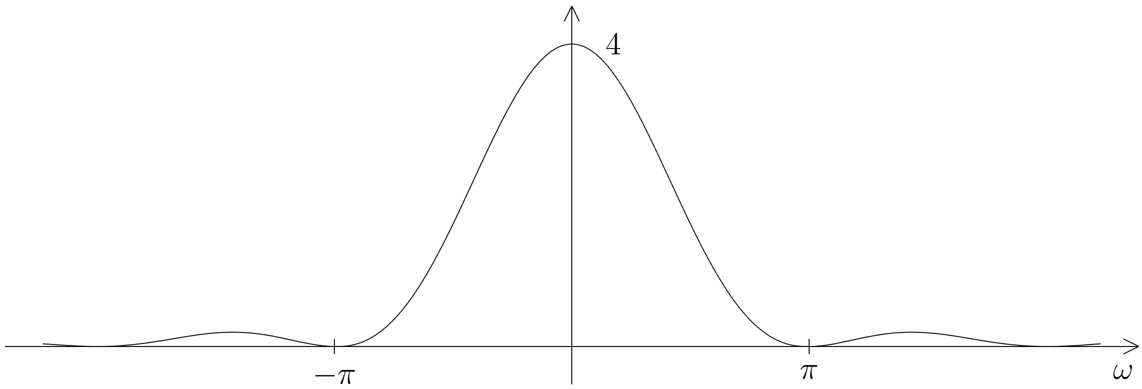
BEWEIS: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\omega)f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathbf{j}\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathbf{j}\omega\tau}g(\tau)\,d\tau\right)f(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathbf{j}\omega(t+\tau)}g(\tau)f(t)\,d\tau\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathbf{j}\omega u}g(\tau)f(u-\tau)\,d\tau\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathbf{j}\omega u}(g\star f)(u)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(f\star g)(u)e^{-\mathbf{j}\omega u}\,du.
\end{aligned}$$

□

Beispiel :

Es ist $(\pi\star\pi)(t)$ ○—● $\widehat{\pi}(\omega)\cdot\widehat{\pi}(\omega)=4\mathrm{si}^2(\omega)$.



I.6.11 Fourier-Integral-Theorem. *Sei f absolut integrierbar und auf jedem abgeschlossenen Intervall stückweise stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]=\frac{1}{2\pi}\mathrm{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega x}\,d\omega.\ \textit{(Cauchyscher Hauptwert)}$$

Wir verzichten hier auf den BEWEIS. Eine Beweis-Skizze findet sich bei Meyberg-Vachenauer (Höhere Mathematik 2, Kap. 11, Satz 6.3.), detailliertere Beweise in der einschlägigen mathematischen Fachliteratur.

I.6.12 Folgerung. *Erfüllen f und g die Voraussetzungen des Fourier-Integral-Theorems, und ist außerdem*

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]\quad \textit{und}\quad g(x)=\frac{1}{2}[g(x-)+g(x+)]$$

für alle x, so gilt:

$$\widehat{f}=\widehat{g}\implies f=g\,.$$

Auf den stetigen Funktionen ist die Fourier-Transformation also injektiv.

Wir wollen jetzt ein wichtiges Beispiel behandeln:

Sei $f(t) := e^{-t^2}$. Die Funktion ist stetig, ≥ 0 und absolut integrierbar. Also existiert die Fourier-Transformierte

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt.$$

f ist sogar stetig differenzierbar, und $f'(t) = -2t \cdot e^{-t^2} = -2t \cdot f(t)$ ist ebenfalls absolut integrierbar. Wir haben deshalb zwei Darstellungsmöglichkeiten für die Fourier-Transformierte von $f'(t)$:

$$\begin{array}{rll} & f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & -2\mathbf{j}F'(\omega) \quad \text{(nach Satz 6.8)} \\ \text{und} & f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathbf{j}\omega F(\omega) \quad \text{(nach Satz 6.7)} \end{array}$$

Also ist

$$\begin{array}{rrcl} & F'(\omega) & = & -\frac{\omega}{2}F(\omega) \\ \text{und} & F(0) & = & \sqrt{\pi} \qquad \text{(vgl. folg. Hilfssatz)} \end{array}$$

Das ist eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit Anfangsbedingung. Die Lösung ist einfach:

$$(\ln F)'(\omega) = \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{\omega}{2},$$

also

$$\ln F(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + \text{const.}, \quad \text{d.h. } F(\omega) = C \cdot e^{-(\omega^2/4)},$$

und wegen der Anfangsbedingung ist $C = \sqrt{\pi}$. Also haben wir:

$$f(t) = e^{-t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-(\omega^2/4)}.$$

Daraus folgt:

I.6.13 Satz.

$$e^{-(t^2/2)} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sqrt{2\pi}e^{-(\omega^2/2)}.$$

Beweis: Wir verwenden die Formel

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|\,a\,|} \cdot \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Daraus ergibt sich (mit $F(\omega) := \sqrt{\pi}e^{-(\omega^2/4)}$):

$$e^{-(t^2/2)} = e^{-(t/\sqrt{2})^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sqrt{2} \cdot F(\sqrt{2}\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-(\omega^2/2)}.$$

$\square$

In der Literatur ist die Fourier-Transformation nicht einheitlich definiert. Setzen wir

$$\widetilde{\mathcal{F}}[f(t)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt,$$

so ergibt sich:

$$\widetilde{\mathcal{F}}[e^{-(t^2/2)}] = e^{-(\omega^2/2)}.$$

Die Funktion wird von der Fourier-Transformation fest gelassen!

Wir müssen noch eine Rechnung nachtragen:

I.6.14 Hilfssatz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

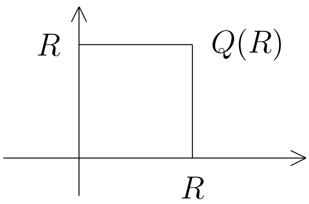
Beweis: Sei $I(R) := \int_0^R e^{-x^2}\,dx$ und $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Dann ist

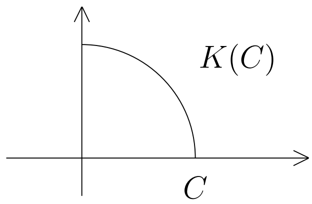
$$\lim_{R\to\infty} I(R) = \frac{1}{2}I.$$

Nun ist

$$I(R)^2 = \int_0^R e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^R e^{-y^2}\,dy = \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Wir benutzen die folgenden geometrischen Figuren:





Dann ist $K(R) \subset Q(R) \subset K(\sqrt{2}R)$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dv_2 &= \int_0^{\pi/2}\int_0^R e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^R\ d\varphi \\
&= -\frac{\pi}{4}(e^{-R^2}-1) \\
&= \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\int_{K(\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dv_2 = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}),$$

also

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le I(R)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}).$$

Läßt man R gegen ∞ gehen, so folgt:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}I^2, \qquad \text{also } I = \sqrt{\pi}.$$

□

Wir wollen nun eine Methode kennenlernen, wie man die Rücktransformation praktisch ausführen kann:

Ist $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt$ und f stetig, so ist bekanntlich

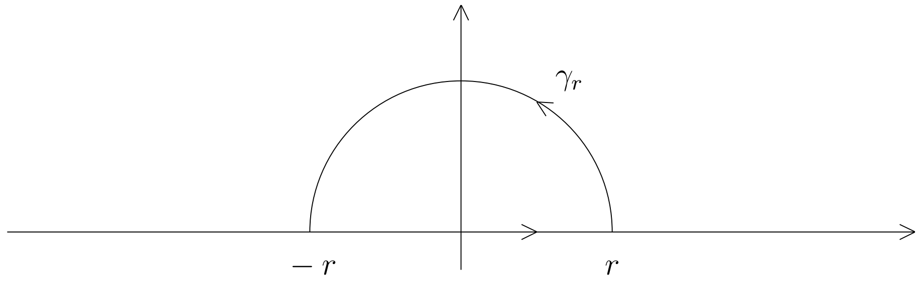
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\text{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, daß $\widehat{f}$ Einschränkung einer meromorphen Funktion F auf $\mathbb{C}$ ist.

Achtung!! F ist hier nicht die Fourier-Transformierte, sondern deren Fortsetzung ins Komplexe.

Wir nehmen außerdem an, daß F nur endlich viele Polstellen hat und daß $z \cdot F(z)$ für großes z beschränkt bleibt, und wir betrachten zunächst nur den Fall $t > 0$.

Dann benutzen wir folgenden Integrationsweg:



Nach dem Residuensatz ist

$$\int_{\gamma_r} F(z)e^{\mathbf{j}zt}\,dz + \int_{-r}^{r} \widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega = 2\pi\mathbf{j} \cdot \sum_{\mathrm{Im}\,(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathbf{j}zt}).$$

Ist $|\, z \cdot F(z) \,| \le M$ für $|\, z \,| \ge R$, so gilt für $r \ge R$:

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_r} F(z)e^{\mathbf{j}zt}\,dz\,| &= |\int_0^\pi F(re^{\mathbf{j}s})\mathbf{j}re^{\mathbf{j}s} \cdot e^{\mathbf{j}\gamma_r(s)t}\,ds\,| \\ &\le \int_0^\pi r|\,F(re^{\mathbf{j}s})\,|e^{-rt\sin s}\,ds \\ &\le M \cdot \int_0^\pi e^{-rt\sin s}\,ds \\ &= 2M \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-rt\sin s}\,ds. \end{aligned}$$

Um das verbliebene Integral auszuwerten, müssen wir die Sinusfunktion näher untersuchen:

Ist $0 \le s \le \dfrac{\pi}{2}$, so ist $\sin s \ge \dfrac{2}{\pi}s$, also

$$e^{-rt\sin s} \le e^{-rt\frac{2}{\pi}s}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{-rt\sin s}\,ds &\le \int_0^{\pi/2} e^{-rt\frac{2}{\pi}s}\,ds \\ &= \left(\frac{-\pi}{2rt}\right) e^{-rt\frac{2}{\pi}s}\,\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2rt}(1 - e^{-rt}), \end{aligned}$$

und es folgt:

$$|\int_{\gamma_r} F(z)e^{\mathbf{j}zt}\,dz\,| \le \frac{M\pi}{rt}(1 - e^{-rt}) \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\text{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega \\ &= \mathbf{j}\cdot\sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z(F(z)e^{\mathbf{j}zt}. \end{aligned}$$

Die Formel gilt nur für $t > 0$. Ist $t < 0$, so muß man durch die untere Halbebene laufen und erhält:

$$f(t) = -\mathbf{j}\cdot\sum_{\operatorname{Im}(z)<0} \operatorname{res}_z(F(z)e^{\mathbf{j}zt}.$$

Wir wollen das Ergebnis auf rationale Funktionen $F(z)$ anwenden. Nach II.5.4. gilt: Ist $F(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit $\deg(q) \ge \deg(p) + 1$, so ist $|\,z \cdot F(z)\,|$ im Unendlichen beschränkt. Für unsere Zwecke reicht diese Bedingung, denn für die Rücktransformation brauchen wir nur den Cauchyschen Hauptwert, nicht die Existenz des uneigentlichen Integrals von $-\infty$ bis $+\infty$.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion $\widehat{f}(\omega) := \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$, mit einer Konstanten $a > 0$. Dann ist $\widehat{f}$ Einschränkung einer meromorphen Funktion

$$F(z) := \frac{2a}{(z - \mathbf{j}a)(z + \mathbf{j}a)},$$

die zwei einfache Polstellen aufweist. Sie erfüllt alle Bedingungen, die wir brauchen, um die Rücktransformation vornehmen zu können.

Es ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{res}_{\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) &= \frac{2a}{2\mathbf{j}a}e^{-at} = \frac{1}{\mathbf{j}}e^{-at} \\ \text{und}\quad &\operatorname{res}_{-\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) &= \frac{2a}{-2\mathbf{j}a}e^{at} = \frac{1}{-\mathbf{j}}e^{at}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Für $t > 0$ ist $f(t) = \mathbf{j}\cdot\operatorname{res}_{\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) = e^{-at}$,
und für $t < 0$ ist $f(t) = -\mathbf{j}\cdot\operatorname{res}_{-\mathbf{j}a}(F(z)e^{\mathbf{j}zt}) = a^{at}$.

Zusammen ergibt das:

$$f(t) = e^{-a|\,t\,|}.$$

Das ist genau das, was wir erwartet haben.

Wir beschließen den Paragraphen mit einem Ausblick auf weitere Aspekte der Theorie der Fourier-Transformationen:

Definition.

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} |\, x^p f^{(q)}(x)\,| < \infty \text{ für } p, q \in \mathbb{N}_0\}$$

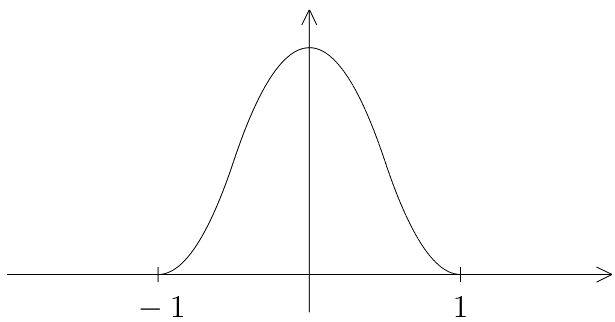
heißt *Raum der stark abfallenden Funktionen.*

$\mathcal{S}$ ist ein Vektorraum von komplexwertigen Funktionen. Die Funktion e^{-x^2} gehört dazu, und natürlich jede C^∞-Funktion mit kompaktem Träger. Mit f gehört auch die Ableitung f' zu $\mathcal{S}$. Das Produkt eines Elementes von $\mathcal{S}$ mit einem Polynom gehört wieder zu $\mathcal{S}$. Zu jedem $f \in \mathcal{S}$ existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$, und auch sie liegt wieder in $\mathcal{S}$. f läßt sich aus $\widehat{f}$ zurückgewinnen, mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathbf{j}\omega t}\, d\omega.$$

Man kann eine Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. $\varphi(t) \geq 0$ für alle t und $\varphi(t) = 0$ für $|\, t\,| \geq 1$.
2. $\varphi(-t) = \varphi(t)$ für alle t.
3. $\varphi(t)$ streng monoton wachsend für $-1 < t < 0$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = 1$.
5. $\varphi^{(q)}(0) = 0$ für alle $q \geq 1$.



Wir setzen

$$\varphi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Dann hat φ_ε ähnliche Eigenschaften wie φ, aber der Träger schrumpft nun auf ein Intervall der Länge 2ε, und das Maximum bei 0 wächst mit fallendem ε. Das Integral über die ganze Achse behält immer den Wert 1.

Sei nun f auf $\mathbb{R}$ stetig und absolut integrierbar und $t_0 \in \mathbb{R}$.

I.6.15 Behauptung.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t - t_0)\, dt = f(t_0).$$

Beweis: Wir können den Beweis nur skizzieren: Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t-t_0)\,dt - f(t-0) &= \int_{-\infty}^{\infty}(f(t)-f(t_0))\varphi_\varepsilon(t-t_0)\,dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)(f(t)-f(t_0))\,dt \\ &= \int_{-1}^{1}\varphi(s)(f(s\varepsilon+t_0)-f(t_0))\,ds,\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. □

Ist f stetig und absolut integrierbar, so wird durch

$$T_f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt, \qquad (\text{für } \varphi \in \mathcal{S})$$

eine Abbildung (ein Funktional, ein Operator)

$$T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$

definiert. Man überzeugt sich sofort davon, daß T_f linear ist, wir können also auch von einer Linearform auf $\mathcal{S}$ sprechen.

Wir haben oben gezeigt, daß man die Funktionswerte von f aus den Integralen $T_f[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{S}$, wieder berechnen kann. Anders ausgedrückt:

Sind f, g zwei stetige und absolut integrierbare Funktionen, und ist $T_f[\varphi] = T_g[\varphi]$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$, so ist auch $f = g$.

Das lineare Funktional T_f ist somit nur eine andere Erscheinungsform der Funktion f. Wir können f und T_f miteinander identifizieren. Aber die Beschreibung einer Funktion als Linearform auf dem Raum der stark abfallenden Funktionen erlaubt es jetzt, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern:

Definition.

Eine Linearform $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ nennt man eine *verallgemeinerte Funktion* oder *(temperierte) Distribution.*

Bemerkung : Generell nennt man lineare Funktionale auf einem Funktionenraum Distributionen. Von „temperierten“ Distributionen spricht man, wenn der Grundraum der Raum $\mathcal{S}$ der stark abfallenden Funktionen ist. Sehr wichtig ist auch der Raum der Schwartzschen Distributionen, die Linearformen auf dem Raum der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger sind.

Eigentlich ist unsere Definition der verallgemeinerten Funktionen unvollständig. Wir müßten genaugenommen noch fordern, daß T in folgendem Sinne stetig ist:

Wenn (φ_n) in $\mathcal{S}$ gegen φ konvergiert, dann konvergiert auch $T[\varphi_n]$ in $\mathbb{C}$ gegen $T[\varphi]$.

Aber dazu müßten wir wissen, wie die Folgenkonvergenz in $\mathcal{S}$ definiert ist, und auf diese Details wollen wir hier nicht eingehen. Für den Anwender sind sie nicht so relevant.

Die Menge aller Distributionen (also aller Linearformen auf $\mathcal{S}$) bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$. Wir haben gesehen, daß die Zuordnung

$$f \mapsto T_f$$

(von der Menge der stetigen absolut integrierbaren Funktionen auf $\mathcal{D}$) eine injektive Abbildung ist, so daß wir jede solche Funktion f auch als Distribution auffassen können. Umgekehrt geht es nicht! Es gibt Distributionen, die nicht irgendwelchen Funktionen entsprechen.

Beispiel:

Durch

$$\delta[\varphi] := \varphi(0)$$

wird eine Distribution definiert, die sogenannte Dirac'sche δ-Distribution.

Dazu muß nur nachgerechnet werden, daß δ linear auf $\mathcal{S}$ operiert, aber das ist trivial.

Angenommen, es gäbe eine Funktion f, so daß $\delta = T_f$ ist!

Dann wäre (für $t_0 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t - t_0)\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} T_f[\varphi_\varepsilon(t - t_0)] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \delta[\varphi_\varepsilon(t - t_0)] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(-t_0) \\ &= \begin{cases} \infty & \text{für } t_0 = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aber eine solche Funktion gibt es nicht!

Die Distributionen sind also wirklich „verallgemeinerte Funktionen".

Wir betrachten nun eine Distribution $T = T_f$, die zu einer **stetig differenzierbaren** Funktion f gehört. Ist auch f' absolut integrierbar, so können wir f' als Distribution auffassen:

$$\begin{aligned} T_{f'}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt \\ &= f(t)\varphi(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= -T_f[\varphi']. \end{aligned}$$

Wir haben ein Gesetz gefunden, daß sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Definition.

Ist $T \in \mathcal{D}$ eine beliebige Distribution, so definiert man die *Ableitung* T' von T durch

$$T'[\varphi] := -T[\varphi'].$$

Bei stetig differenzierbaren Funktionen mit absolut integrierbarer Ableitung ist die distributionelle Ableitung nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung.

Beispiel:

Wir beginnen mit der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

f ist stetig differenzierbar, aber leider nicht absolut integrierbar. Da jedoch mit $\varphi \in \mathcal{S}$ auch $t^n\varphi(t)$ für jedes $n \ge 0$ eine stark abfallende Funktion ist, wird auch durch

$$T_f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^2\varphi(t)\,dt$$

eine Distribution definiert.

Nun ist

$$\begin{aligned} (T_f)'[\varphi] &= -T_f[\varphi'] \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2\varphi'(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\Big[(t^2\varphi(t))\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2t\varphi(t)\,dt\Big] \\ &= \int_0^\infty t\varphi(t)\,dt \\ &= T_{f'}[\varphi]. \end{aligned}$$

Auch hier ist die distributionelle Ableitung gleich der gewöhnlichen Ableitung. Die Funktion

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

ist stetig, aber nicht absolut integrierbar. Wie schon f selbst definiert f' aber dennoch eine Distribution.

f' hat eine Knick-Stelle und ist daher im gewöhnlichen Sinne nicht mehr differenzierbar, wohl aber im Distributions-Sinne:

$$\begin{aligned} (T_{f'})'[\varphi] &= -T_{f'}[\varphi'] \\ &= -\int_0^\infty t\varphi'(t)\,dt \\ &= -\Big[(t\varphi(t))\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(t)\,dt\Big] \\ &= \int_0^\infty \varphi(t)\,dt \;=\; T_H[\varphi], \end{aligned}$$

wobei H die sogenannte *Heaviside-Funktion* ist, definiert durch

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

H ist nun nicht einmal mehr stetig! Dennoch ist T_H eine Distribution. Man beachte aber, daß H durch T_H nicht mehr eindeutig bestimmt ist. Wir können den Wert von H in $t = 0$ beliebig abändern, ohne daß sich T_H ändert. Die Injektivität der Zuordnung $f \mapsto T_f$ gilt nur für stetige Funktionen!

Nichts kann uns daran hindern, T_H erneut zu differenzieren:

$$\begin{aligned}(T_H)'[\varphi] &= -T_H[\varphi'] \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt \\ &= -\varphi(t)\,\Big|_0^\infty = \varphi(0).\end{aligned}$$

Also ist $(T_H)' = \delta$ die Dirac-Distribution!

Und nun differenzieren wir δ ein weiteres Mal:

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0).$$

Offensichtlich kann man das beliebig oft so weitertreiben und erhält schließlich

$$\delta^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \cdot \varphi^{(n)}(0).$$

Distributionen sind immer beliebig oft differenzierbar.

Nun kommen wir endlich wieder zu den Fourier-Transformationen zurück.

Ist f stetig und absolut integrierbar, so existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$. Sie ist stetig und beschränkt und definiert daher eine Distribution. Dann gilt:

$$\begin{aligned}T_{\widehat{f}}[\varphi] &= \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\int_{-\infty}^\infty f(s)e^{-\mathbf{j}st}\,ds\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(s)\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)e^{-\mathbf{j}st}\,dt\,ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(s)\widehat{\varphi}(s)\,ds \\ &= T_f[\widehat{\varphi}].\end{aligned}$$

Also bietet sich folgende Verallgemeinerung der Fourier-Transformation an:

Definition.

Ist T eine Distribution, so wird ihre *Fourier-Transformierte* $\widehat{T}$ definiert durch

$$\widehat{T}[\varphi] := T[\widehat{\varphi}].$$

Beispiel :

Wir berechnen die Fourier-Transformierte der Dirac-Distribution:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}[\varphi] &= \delta[\widehat{\varphi}] = \widehat{\varphi}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt \\ &= T_1[\varphi].\end{aligned}$$

Also ist $\widehat{\delta} = 1$.

Da mit φ stets auch $\widehat{\varphi}$ zu $\mathcal{S}$ gehört, definiert die Fourier-Transformation $T \mapsto \widehat{T}$ einen Isomorphismus

$$F : \mathcal{D} \to \mathcal{D},$$

mit $F^{-1}T[\varphi] = T[\mathcal{F}^{-1}\varphi]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}F^{-1}T[\varphi] &= T[t \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)e^{\mathbf{j}st}\,ds] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot T[t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)e^{-\mathbf{j}(-t)s}\,ds] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot T[t \mapsto \widehat{\varphi}(-t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot T^*[\widehat{\varphi}],\end{aligned}$$

mit $T^*[t \mapsto \psi(t)] := T[t \mapsto \psi(-t)]$. Also gilt:

$$F^{-1}T = \frac{1}{2\pi} \cdot F(T^*).$$

Mit dieser Umkehrformel kann man die Fourier-Transformierten weiterer Funktionen bestimmen.

§7 Die Laplacetransformation

Die Arbeit mit der Fourier-Transformation bereitet gewisse Probleme. Viele wichtige Funktionen lassen sich nicht transformieren, oder höchstens als Distribution. Außerdem hat man es in der Praxis selten mit Funktionen zu tun, die für alle Zeiten existieren. Einschaltvorgänge werden zu wenig berücksichtigt.

Wir wenden uns nun Funktionen f mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ zu. Normalerweise existiert auch deren Fourier-Transformierte nicht. Wir erzwingen daher die Konvergenz des Fourier-Integrals, indem wir einen „konvergenzerzeugenden Faktor“ einführen, d.h. wir ersetzen $f(t)$ durch $f(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Dann ist

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty f(t)e^{-(\alpha+\mathbf{j}\omega)t}\,dt.$$

Dieses Integral existiert z.B., wenn $f(t)$ stückweise stetig und $f(t)e^{-\alpha t}$ absolut integrierbar ist.

Definition.

Eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \to \mathbb{C}$ *wächst höchstens exponentiell von der Ordnung* γ, wenn es Konstanten $M > 0$ und $T > 0$ gibt, so daß

$$|\,f(t)\,| \leq M \cdot e^{\gamma t}$$

für $t \geq T$ ist.

I.7.1 Satz. *Wenn $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ höchstens exponentiell von der Ordnung γ wächst, dann konvergiert das uneigentliche Integral*

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(z) > \gamma$.

Beweis: Wir schreiben z in der Form $z = x + \mathbf{j}y$, mit $x > \gamma$. Dann gilt für $t \geq T$:

$$|\,f(t)e^{-zt}\,| = |\,f(t)\,| \cdot e^{-xt} \leq M \cdot e^{(\gamma-x)t} = M \cdot e^{-|\,\gamma-x\,|t}.$$

Diese Funktion ist absolut integrierbar, denn es ist

$$\int_T^{T_1} e^{-|\,\gamma-x\,|t}\,dt = \left(-\frac{1}{|\,\gamma-x\,|} \cdot e^{-|\,\gamma-x\,|t}\right)\Big|_T^{T_1} = \frac{1}{|\,\gamma-x\,|} \cdot (e^{-|\,\gamma-x\,|T} - e^{-|\,\gamma-x\,|T_1}),$$

und dieser Ausdruck bleibt beschränkt für $T_1 \to \infty$. □

Definition.

Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Das uneigentliche Integral

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

heißt *Laplace-Transformierte* von f, sofern es für ein $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Man schreibt auch

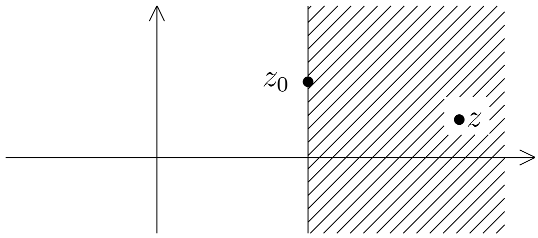
$$F(z) = \mathcal{L}[f(t)],$$

oder – wenn keine Verwechslungsgefahr besteht – wie bei der Fourier-Transformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z).$$

$f(t)$ heißt *Urbildfunktion*, $F(z)$ *Bildfunktion.*

I.7.2 Satz. *Wenn die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $f(z)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, dann tut sie das auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z_0)$.



Beweis: Sei $z_0 := u + \mathbf{j}v$ und $z = x + \mathbf{j}y$, mit $x \geq u$. Dann ist

$$|\,e^{-zt}\,| = e^{-xt} \leq e^{-ut} = |\,e^{-z_0 t}\,|.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Das Infimum α aller reeller Zahlen $x \geq 0$, so daß

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

für $\mathrm{Re}\,(z) > x$ absolut konvergiert, heißt die *Abszisse absoluter Konvergenz* für $\mathcal{L}[f(t)]$. Die Halbebene, die links von der vertikalen Geraden $\{z \mid \mathrm{Re}\,(z) = \alpha\}$ begrenzt wird, ist das genaue Konvergenzgebiet des Laplace-Integrals. Der Rand gehört entweder ganz dazu oder überhaupt nicht. Da $f(t) = 0$ für $t < 0$ ist, kann auch die ganze Ebene als Konvergenzgebiet herauskommen.

Beispiele :

1. Sei $f(t) \equiv 1$. Da wir nur Funktionen betrachten, die $= 0$ für $t < 0$ sind, lassen wir diese zusätzliche Bedingung meistens weg.

   Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^R 1 \cdot e^{-zt}\,dt &= \left(-\frac{1}{z}e^{-zt}\right)\Big|_0^R \\ &= \frac{1}{z}(1 - e^{-zR}),\end{aligned}$$

   und dieser Ausdruck konvergiert für $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ gegen $\dfrac{1}{z}$. Also haben wir:

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{z} \qquad (\text{für } \mathrm{Re}\,(z) > 0)$$

2. Die Funktion $f(t) := e^{at}$ wächst höchstens exponentiell von der Ordnung a. Also können wir die Laplace-Transformierte bilden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at} e^{-zt}\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-z)t}\,dt \\
&= \left(\frac{1}{a-z} e^{(a-z)t}\right)\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{a-z}(0-1) = \frac{1}{z-a},
\end{aligned}$$

falls $\operatorname{Re}(a-z) < 0$ ist, also $\operatorname{Re}(z) > a$.

3. Sei $f(t) := \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{j}\omega t} + e^{-\mathbf{j}\omega t})$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(\mathbf{j}\omega - z)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(\mathbf{j}\omega + z)t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathbf{j}\omega - z} e^{(\mathbf{j}\omega - z)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{-(\mathbf{j}\omega + z)} e^{-(\mathbf{j}\omega + z)t}\Big|_0^\infty\right] \\
&= \frac{1}{2}[-\frac{1}{\mathbf{j}\omega - z} + \frac{1}{\mathbf{j}\omega + z}] \\
&= \frac{z}{z^2 + \omega^2},
\end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}(\mathbf{j}\omega - z) < 0$ und $\operatorname{Re}(\mathbf{j}\omega + z) > 0$, also $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Analog erhält man:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

Bemerkung : Die Laplace-Transformierte

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\,dt$$

ist als Parameterintegral im Bereich der absoluten Konvergenz eine holomorphe Funktion von z. (Zum genauen Beweis vgl. G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, 3. Kap., §2, Satz 1.). Es kann allerdings vorkommen – wie die vorangegangenen Beispiele zeigen – , daß $F(z)$ auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann. Man wird dann auch die fortgesetzte Funktion als Laplace-Transformierte von f bezeichnen.

Beschränkt man sich auf reelle Parameter s, so endet der Existenzbereich von $F(s)$ stets bei der Abszisse der absoluten Konvergenz.

I.7.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation.

Sei $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z)$ *und* $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(z)$. *Dann gilt:*

1. *Linearität:* $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$.

2. *Ähnlichkeitssatz:*

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot F(\frac{1}{a} z). \qquad \textit{(für } a \in \mathbb{R},\ a > 0\textit{)}$$

3. *Verschiebungssatz (Verschiebung im Zeitbereich):*

$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-zT} \cdot F(z). \qquad \textit{(für } T \in \mathbb{R}\textit{)}$$

(Man beachte, daß $f(t-T)$ links vom Nullpunkt abgeschnitten werden muß!)

4. *Dämpfungssatz (Verschiebung im Bildbereich):*

$$e^{-ct} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+c). \qquad \textit{(für } c \in \mathbb{C}\textit{)}$$

Beweis: 1) ist trivial.

2) Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(at)e^{-zt}\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(at)e^{-\frac{z}{a}at} \cdot a\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{z}{a}\tau}\,d\tau \\ &= \frac{1}{a}F(\frac{z}{a}). \end{aligned}$$

3) Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-T)] &= \int_0^\infty f(t-T)e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-z(\tau+T)}\,d\tau \\ &= e^{-zT} \cdot \int_0^\infty f(\tau)e^{-z\tau}\,d\tau \\ &= e^{-zT} \cdot F(z). \end{aligned}$$

4) Es ist

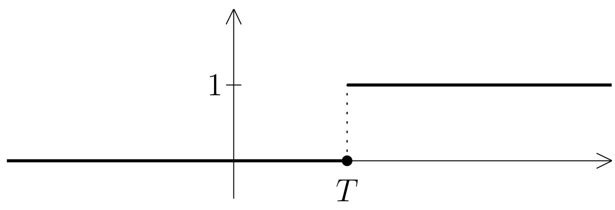
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-ct}f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-(z+c)t}\,dt \\ &= F(z+c). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele :

1. Als erstes betrachten wir die Sprungfunktion

$$\sigma_T(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le T \\ 1 & \text{für } t > T. \end{cases}$$



Ist H die Heaviside-Funktion, so kann man schreiben:

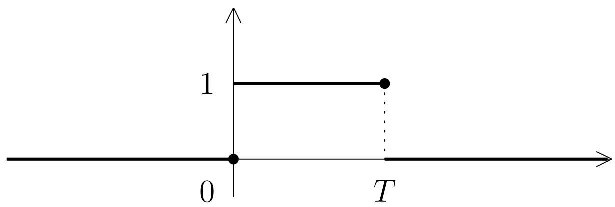
$$\sigma_T(t) = H(t-T).$$

Für die Laplace-Transformation besteht kein Unterschied zwischen H und der Funktion 1. Also gilt:

$$\mathcal{L}[\sigma_T(t)] = \mathcal{L}[H(t-T)] = e^{-zT} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{1}{z} \cdot e^{-zT}.$$

2. Als nächstes betrachten wir den Rechteck-Impuls

$$\pi_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

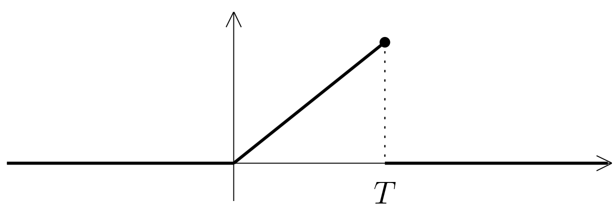


Es ist $\pi_T(t) = \sigma_0(t) - \sigma_T(t)$, also

$$\mathcal{L}[\pi_T(t)] = \frac{1}{z}(1 - e^{-zT}).$$

3. Nun untersuchen wir die folgende Zackenfunktion:

$$f(t) := \begin{cases} at & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Ist $g(t) = at$, so ist

$$(g \cdot H)(t) - (g \cdot H)(t-T) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ at & \text{für } 0 < t \leq T \\ aT & \text{für } t > T. \end{cases}$$

Also folgt:

$$f(t) = (g \cdot H)(t) - (g \cdot H)(t-T) - aT \cdot \sigma_T(t).$$

Wir können jetzt die Laplace-Transformierte von f bestimmen, wenn wir $\mathcal{L}[t]$ kennen. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t] &= \int_0^\infty te^{-zt}\,dt \\
&= \Big(t \cdot (-\frac{1}{z}e^{-zt})\Big)\Big|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zt}\,dt \\
&= -\frac{1}{z^2}e^{-zt}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{z^2},
\end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[g(t)] - \mathcal{L}[g(t-T)] - aT \cdot \mathcal{L}[\sigma_T(t)] \\
&= a \cdot \mathcal{L}[t] - a \cdot \mathcal{L}[t-T] - aT\mathcal{L}[\sigma_T(t)] \\
&= \frac{a}{z^2} - a \cdot e^{-zT} \cdot \frac{1}{z^2} - aT \cdot e^{-zT} \cdot \frac{1}{z} \\
&= \frac{a}{z^2}(1 - e^{-zT} - zTe^{-zT}).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt, wie sich *Differentiation und Integration im Zeitbereich* auswirkt. Dabei wollen wir die Klasse derjenigen Funktionen, die wir Laplace-transformieren können, geringfügig erweitern:

Definition.

Unter einer L-*Funktion* verstehen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f(t) = 0$ für $t < 0$.
2. f ist stückweise stetig für $t > 0$.
3. f ist bei 0 uneigentlich integrierbar.
4. Das Laplace-Integral
$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$
existiert für wenigstens ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ (und dann natürlich für alle ζ mit $\mathrm{Re}\,(\zeta) > \mathrm{Re}\,(z)$).

Selbstverständlich ist jede stückweise stetige Funktion mit höchstens exponentiellem Wachstum eine L-Funktion.

I.7.4 Satz. *$f(t)$ sei $= 0$ für $t < 0$ und differenzierbar für $t > 0$, und f' sei eine L-Funktion.*

Dann ist f selbst eine stückweise stetige L-Funktion, und mit $F(z) := \mathcal{L}[f(t)]$ gilt:

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; z \cdot F(z) - f(0+).$$

BEWEIS: Da f' eine L-Funktion ist, existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^t f'(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0}(f(t) - f(\varepsilon)),$$

und damit existiert auch

$$f(0+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon),$$

und es ist

$$\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(0+).$$

Weiterhin existiert nach Voraussetzung für ein z mit $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ das Integral

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}\,dt \\
&= f(t)e^{-zt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-ze^{-zt})\,dt \\
&= -f(0+) + z \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\
&= -f(0+) + z \cdot F(z).
\end{aligned}$$

Die Existenz von $F(z)$ ergibt sich dabei automatisch, weil alle anderen Terme konvergieren. Damit ist auch klar, daß f eine stückweise stetige L-Funktion ist. □

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht:

I.7.5 Satz. *Sei $f(t)$ für $t > 0$ n-mal differenzierbar, und $f^{(n)}$ eine L-Funktion. Dann ist auch f eine L-Funktion, und für die Laplace-Transformierte $F(z)$ von f gilt:*

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; z^n \cdot F(z) - z^{n-1} \cdot f(0+) - z^{n-2} \cdot f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

I.7.6 Satz. *Sei $f(t)$ stetig für $t > 0$ und von höchstens exponentiellem Wachstum. Es existiere $f(0+)$ und damit die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $f(t)$. Dann existiert auch die Laplace-Transformierte von*

$$h(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau,$$

und es gilt:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{z}F(z).$$

BEWEIS: Da $h'(t) = f(t)$ für $t > 0$ ist, folgt aus den vorangegangenen Sätzen, daß die Laplace-Transformierte von h existiert. Außerdem ist h in $t = 0$ stetig, mit $h(0) = 0$.

Also ist $F(z) = z \cdot \mathcal{L}[h(t)]$ und $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{z}F(z)$. □

Beispiele:

1. Die Funktion $f(t) = t^n$ erfüllt alle nötigen Voraussetzungen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{n-1}] &= \mathcal{L}[(\frac{1}{n}t^n)'] \\ &= \frac{1}{n}(z \cdot \mathcal{L}[t^n] - 0) \\ &= \frac{z}{n} \cdot \mathcal{L}[t^n]. \end{aligned}$$

   Nachdem $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{z^2}$ ist, folgt aus der obigen Reduktionsformel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

2. Es ist $(\sin^2 t)' = 2\sin t \cos t = \sin 2t$.

   Also ist

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{z} \cdot \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{z(z^2+4)}.$$

Ähnlich sieht es bei der *Differentiation und Integration im Bildbereich* aus:

I.7.7 Satz. *Aus der Beziehung $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)$ folgt:*

$$t^n \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^n \cdot F^{(n)}(z).$$

BEWEIS: Die Laplace-Transformierte $F(z)$ ist holomorph in z, also beliebig oft differenzierbar. Außerdem lassen sich Differentiation und Laplace-Integral miteinander vertauschen (vgl. Doetsch, wie oben). Also gilt:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{d}{dz}\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}\Big(f(t)e^{-zt}\Big)\,dt \\ &= \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-zt}\,dt \\ &= -\int_0^\infty tf(t)e^{-zt}\,dt. \end{aligned}$$

Damit ist $t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -F'(z)$.

Mit vollständiger Induktion folgt die allgemeine Formel. □

I.7.8 Satz. *Sei f stückweise stetig und $\dfrac{1}{t}f(t)$ Laplace-transformierbar.*

Aus $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)$ folgt:

$$\frac{1}{t}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_z^\infty F(\zeta)\,d\zeta.$$

Dabei kann über einen beliebigen Strahl in $\mathbb{C}$ integriert werden, der von z ausgeht und mit der positiven x-Achse einen spitzen Winkel einschließt. Ist z reell, so kann man entlang der positiven reellen Achse integrieren.

Beweis:

$\widetilde{F}(z) := \mathcal{L}[\frac{1}{t}f(t)]$ sei auf der Halbebene $H_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > \alpha\}$ definiert. Dort ist $\widetilde{F}$ dann auch holomorph, und es gilt:

$$\widetilde{F}'(z) = -\mathcal{L}[t \cdot \frac{1}{t}f(t)] = -F(z).$$

Daraus folgt für ein beliebiges $z_0 \in H_\alpha$:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z} F(\zeta)\,d\zeta &= -\int_{z_0}^{z} \widetilde{F}'(\zeta)\,d\zeta \\ &= -(\widetilde{F}(z) - \widetilde{F}(z_0)),\end{aligned}$$

also

$$\widetilde{F}(z) = \widetilde{F}(z_0) + \int_{z}^{z_0} F(\zeta)\,d\zeta.$$

Dabei kann über einen beliebigen Weg in H_α integriert werden, z.B. über die Verbindungsstrecke zwischen z und z_0. Lassen wir nun z_0 gegen ∞ gehen, so strebt

$$\widetilde{F}(z_0) = \int_0^\infty \frac{1}{t}f(t)e^{-z_0 t}\,dt$$

gegen Null,[1] und es folgt die gewünschte Formel. □

Beispiel:

Die Funktion $\dfrac{\sin t}{t}$ ist über $[0,\infty)$ nicht absolut integrierbar (Beweis siehe 1. Semester), aber sie hat höchstens exponentielles Wachstum und ist von da her Laplacetransformierbar.

Es gilt: $\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$ (für $\mathrm{Re}\,(z) > 0$). Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\omega t)}{t} \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_z^\infty \frac{\omega}{\zeta^2+\omega^2}\,d\zeta \\ &= \quad \frac{1}{\omega}\int_z^\infty \frac{1}{(\zeta/\omega)^2+1}\,d\zeta.\end{aligned}$$

Für reelles $x > 0$ erhält man dann:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\omega t)}{t} \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\omega}\int_x^\infty \frac{1}{(u/\omega)^2+1}\,du \\ &= \quad \int_{x/\omega}^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds \\ &= \quad \arctan(s)\,\Big|_{x/\omega}^{\infty} \\ &= \quad \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{x}{\omega}) \\ &= \quad \arctan(\frac{\omega}{x}).\end{aligned}$$

[1]Hier ist eigentlich ein sorgfältiger Grenzübergang erforderlich, den ich aber nicht ausführen will. Damit alles klappt, muß $\mathrm{Re}\,(z_0)$ stets positiv bleiben. Auf Geraden, die mit der positiven x-Achse einen spitzen Winkel einschließen, ist diese Voraussetzung erfüllt.

Letzteres gilt wegen der Gleichung

$$\arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Wie weit läßt sich unser Ergebnis ins Komplexe übertragen? Wir wissen, daß das Laplace-Integral in der ganzen rechten Halbebene absolut konvergiert und dort holomorph ist. Aber was ist das für eine Funktion? Der Arcustangens ist wegen der Periodizität der Winkelfunktionen im Komplexen nicht eindeutig definierbar. Wegen

$$\sin(z) = \frac{1}{2\mathbf{j}}(e^{\mathbf{j}z} - e^{-\mathbf{j}z}) \quad \text{und} \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{\mathbf{j}z} + e^{-\mathbf{j}z})$$

ist

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{\mathbf{j}} \cdot \frac{e^{\mathbf{j}z} - e^{-\mathbf{j}z}}{e^{\mathbf{j}z} + e^{-\mathbf{j}z}} = \frac{1}{\mathbf{j}} \cdot \frac{e^{2\mathbf{j}z} - 1}{e^{2\mathbf{j}z} + 1}.$$

Also setzt sich der Tangens aus den Funktionen

$$f(z) := e^{2\mathbf{j}z} \quad \text{und} \quad g(\zeta) := \frac{1}{\mathbf{j}} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

zusammen.

Sei $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,(z) < \frac{\pi}{2}\}$. Dann bildet $z \mapsto 2\mathbf{j}z$ das Gebiet G_0 biholomorph auf das Gebiet

$$\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\,(z) < \pi\}$$

ab, also f das Gebiet G_0 biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

g ist eine gebrochen lineare Transformation (vgl. Mathematik A, Kap. IV, §1), mit den Koeffizienten $a = 1$, $b = -1$, $c = \mathbf{j}$ und $d = \mathbf{j}$. Daraus kann man ablesen, daß g die reelle Achse auf die imaginäre Achse abbildet. Außerdem ist $g(-1) = \infty$, $g(0) = \mathbf{j}$, $g(1) = 0$ und $g(\infty) = -\mathbf{j}$. Also bildet g das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ biholomorph auf

$$G := \mathbb{C} \setminus \{t\mathbf{j} \mid |\,t\,| \geq 1\}$$

ab.

Der komplexe Arcustangens ist nun die Funktion

$$\arctan = f^{-1} \circ g^{-1} : G \to G_0,$$

mit

$$\arctan(z) = \frac{1}{2\mathbf{j}} \cdot \log \frac{1 + \mathbf{j}z}{1 - \mathbf{j}z}.$$

Insbesondere ist der komplexe Arcustangens auf der Halbebene $\{\mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ definiert und holomorph. Wir können somit schreiben:

$$\frac{\sin(\omega t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \arctan\left(\frac{\omega}{z}\right).$$

Ich erinnere nun an die Faltung

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Ist $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, so wird daraus das Faltungsintegral

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

I.7.9 Satz. *Sind f und g stückweise stetig, so existiert das Faltungsintegral $f * g$, und es gilt:*

1. $f * g = g * f$.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

BEWEIS: Die Existenz ist klar, es wird ja nur über ein endliches Intervall integriert.

Das Kommutativgesetz haben wir schon für absolut integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ nachgewiesen.

Zum Beweis des Assoziativgesetzes berechnen wir beide Seiten:

$$\begin{aligned}(f * g) * h(t) &= \int_0^t f * g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(t-\tau-s)g(s)h(\tau)\,ds\,d\tau \\ &= \int_0^t \int_\tau^t f(t-u)g(u-\tau)h(\tau)\,du\,d\tau,\end{aligned}$$

wobei die Substitution $u(s) = \tau + s$ gemacht wurde.

Andererseits ist

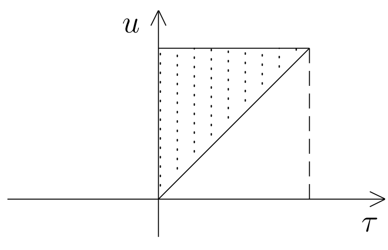
$$\begin{aligned}f * (g * h)(t) &= \int_0^t f(t-u)g * h(u)\,du \\ &= \int_0^t \int_0^u f(t-u)g(u-\tau)h(\tau)\,d\tau\,du.\end{aligned}$$

In beiden Fällen wird die Funktion $F_t(\tau, u) := f(t-u)g(u-\tau)h(\tau)$ über

$$\begin{aligned}A &:= \{(\tau, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \tau \le t,\ \tau \le u \le t\} \\ &= \{(\tau, u) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \tau \le u,\ 0 \le u \le t\}\end{aligned}$$

integriert.

A ist sowohl ein Normalbereich bzgl. der τ-Achse, als auch ein Normalbereich bzgl. der u-Achse.



Daher ist

$$\begin{aligned}(f*g)*h(t) &= \int_0^t \int_\tau^t F_t(\tau,u)\,du\,d\tau \\ &= \int_A F_t(\tau,u)\,dv_2 \\ &= \int_0^t \int_0^u F_t(\tau,u)\,d\tau\,du \\ &= f*(g*h)(t).\end{aligned}$$

□

Die Faltung verhält sich weitgehend wie ein normales Produkt, es gilt auch das Distributivgesetz. Allerdings ist $1*f \neq f$:

$$1*f(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

I.7.10 Satz. *Sind f und g stückweise stetig und von höchstens exponentiellem Wachstum, so ist $f*g$ stetig und ebenfalls höchstens von exponentiellem Wachstum. Außerdem gilt:*

Wenn $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z)$ *und* $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(z)$, *dann*

$$(f*g)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(z)\cdot G(z).$$

Beweis: Daß $f*g$ höchstens von exponentiellem Wachstum ist, kann man leicht nachrechnen. Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned}F(z)\cdot G(z) &= \int_0^\infty f(u)e^{-zu}\,du \cdot \int_0^\infty g(v)e^{-zv}\,dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-z(u+v)}\,du\,dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-v)g(v)e^{-zt}\,dt\,dv \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t f(t-v)g(v)\,dv\,dt \\ &= \int_0^\infty (f*g)(t)e^{-zt}\,dt \\ &= \mathcal{L}[f*g(t)].\end{aligned}$$

□

Beispiele :

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z-a} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at} \\ \text{und}\quad &\frac{1}{z-b} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{bt},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{at} * e^{bt} \\ &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} e^{b\tau}\,d\tau \\ &= e^{at} \cdot \int_0^t e^{(b-a)\tau}\,d\tau \\ &= e^{at} \cdot \left(\frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a}\right)\Big|_0^t \\ &= e^{at} \cdot \frac{1}{b-a}(e^{(b-a)t}-1) \\ &= \frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}.\end{aligned}$$

2. Wir wollen noch ein etwas schwierigeres Beispiel durchrechnen:

   Es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{t} * \sqrt{t} &= \int_0^t \sqrt{(t-\tau)\tau}\,d\tau \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{(1-\tau(s))\tau(s)}\tau'(s)\,ds \quad (\,\tau(s) := s + \frac{t}{2}\,) \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{ts + \frac{t^2}{2} - (s^2 + \frac{t^2}{4} + st)}\,ds \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{\frac{t^2}{4} - s^2}\,ds \\ &= \frac{t}{2} \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{1 - (\frac{2s}{t})^2}\,ds \\ &= \frac{t^2}{4} \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{1-\varphi(s)^2}\varphi'(s)\,ds \quad (\,\varphi(s) := \frac{2s}{t}\,) \\ &= \frac{t^2}{4} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{t^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}t^2.\end{aligned}$$

   Also ist

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] \cdot \mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\pi}{8} \cdot \mathcal{L}[t^2] = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{z^3} = \frac{\pi}{4z^3}$$

   und

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2z\sqrt{z}}.$$

3. Das vorige Beispiel ist ein Spezialfall der Transformation der Funktion t^α, mit positivem reellen α.

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$ hat höchstens exponentielles Wachstum, ist also Laplace-transformierbar. Mit der Substitution $u(t) = zt$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^\alpha] &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{z}\int_0^\infty \left(\frac{u(t)}{z}\right)^\alpha e^{-u(t)}\,u'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{z}\int_0^\infty \left(\frac{u}{z}\right)^\alpha e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{z^{\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{z^{\alpha+1}}\cdot\Gamma(\alpha+1).
\end{aligned}$$

Die „Gamma-Funktion" $\Gamma(x) := \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$ wurde im 1. Semester (Kap. III, §5, 4. Beispiel nach Satz 5.4.) eingeführt.

Das Ergebnis aus dem vorigen Beispiel ($\alpha = \frac{1}{2}$) erhält man über die Beziehungen

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \quad \text{und } \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Die Rekursionsformel haben wir bewiesen, aber den Wert bei $x = \frac{1}{2}$ konnten wir damals nicht berechnen. Jetzt ergibt er sich natürlich aus der Theorie der Laplace-Transformationen.

Wir wollen uns nun mit der Rücktransformation befassen:

Sei f stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum:

$$|\,f(t)\,| \le M\cdot e^{\gamma t},$$

für große t. Außerdem sei natürlich $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Sei $x > \gamma$ fest, aber beliebig gewählt. Dann ist auch $f_x(t) := e^{-xt}f(t)$ stückweise glatt und $= 0$ für $t < 0$. Daher ist f_x Laplace-transformierbar und erfüllt die Voraussetzungen des Fourier-Integral-Theorems. Es ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f_x}(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty f_x(t)e^{-\mathbf{j}\omega t}\,dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-(x+\mathbf{j}\omega)t}\,dt \\
&= F(x+\mathbf{j}\omega),
\end{aligned}$$

wenn wir mit $F(z)$ die Laplace-Transformierte von f bezeichnen. Und dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f_x(t-)+f_x(t+)) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\widehat{f_x}(\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}F(x+\mathbf{j}\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(t-)+f(t+)) &= \frac{e^{xt}}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} F(x+\mathbf{j}\omega)e^{\mathbf{j}\omega t}\,d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} F(x+\mathbf{j}\omega)e^{(x+\mathbf{j}\omega)t}\,d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\lim_{A\to\infty}\int_{x-\mathbf{j}A}^{x+\mathbf{j}A} F(z)e^{zt}\,dz,\end{aligned}$$

wobei über den Weg $\omega \mapsto x+\mathbf{j}\omega$ integriert wird. Damit haben wir bewiesen:

I.7.11 Komplexe Umkehrformel. *Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum, $F(z)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$, mit γ als Abszisse der absoluten Konvergenz. Dann ist*

$$\frac{1}{2}(f(t-)+f(t+)) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}}\cdot \mathrm{C.H.}\int_{x-\mathbf{j}\infty}^{x+\mathbf{j}\infty} F(z)e^{zt}\,dz.$$

Die Integration ist über die Gerade $\{z \mid \mathrm{Re}\,(z)=x\}$ zu erstrecken, wobei $x>\gamma$ beliebig gewählt werden kann. Ist f in t stetig, so steht auf der linken Seite der Gleichung einfach nur der Wert $f(t)$.

Die komplexe Umkehrformel kann nur auf solche holomorphen Funktionen angewandt werden, die Laplace-Transformierte sind. Wir hatten mehrfach eine gewisse Analogie zur Theorie der Potenzreihen festgestellt. Man kann sich nun fragen, ob jede holomorphe Funktion, die auf einer rechten Halbebene holomorph ist, schon automatisch die Laplace-Transformierte einer geeigneten Urbildfunktion ist. Leider gilt das nicht, es lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben.

Das Problem, ein vollständiges Kriterium dafür anzugeben, wann eine holomorphe Funktion eine Laplace-Transformierte ist, ist ungelöst. Es gibt bis jetzt nur hinreichende Kriterien. So reicht es z.B., wenn $F(x+\mathbf{j}y)$ auf jeder vertikalen Geraden absolut integrierbar ist und lokal gleichmäßig in x für $|\,y\,|\to\infty$ gegen Null konvergiert. Etwas konkreter ist folgender Satz:

I.7.12 Satz. *Sei $F(z)$ in der Halbebene $\{z \mid \mathrm{Re}\,(z) > x_1 \geq 0\}$ holomorph und von der Gestalt*

$$F(z) = \frac{c}{z^\alpha} + \frac{g(z)}{z^{1+\varepsilon}},$$

mit $0<\alpha\leq 1$, $\varepsilon>0$ und einer für $\mathrm{Re}\,(z)\geq x_1+\delta$, $\delta>0$, beschränkten Funktion g.

Dann ist $F(z)$ die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$.

Zum Beweis vgl. Doetsch, 7. Kap., §2, Satz 4.

Wir kommen nun zu den verschiedenen Methoden, die Rück-Transformation praktisch durchzuführen.

Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen:

Die folgende Tabelle kann benutzt werden:

$F(z)$		$f(t)$
$\dfrac{1}{z}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	1
$\dfrac{1}{z-a}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	e^{at}
$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
$\dfrac{1}{z^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	t
$\dfrac{1}{z^n}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$\dfrac{z}{z^2+\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\cos(\omega t)$
$\dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sin(\omega t)$

$F(z)$		$f(t)$
$\dfrac{1}{z}e^{-zT}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sigma_T(t)$
$\dfrac{1}{z}(1-e^{-zT})$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\pi_T(t)$
$\dfrac{2}{z(z^2+4)}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sin^2 t$
$\arctan(\dfrac{\omega}{z})$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\dfrac{\sin(\omega t)}{t}$
$\dfrac{z}{z^2-\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\cosh(\omega t)$
$\dfrac{\omega}{z^2-\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sinh(\omega t)$
$\dfrac{1}{z\sqrt{z}}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

Rücktransformation durch Partialbruch-Zerlegung

Diese Methode ist anwendbar, wenn die gegebene Bildfunktion eine rationale Funktion der Gestalt

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomen P und Q mit $\deg(P) < \deg(Q)$ ist. Wir werden etwas später untersuchen, wann man der Funktion F ansehen kann, daß sie eine Laplace-Transformierte ist.

Sind $a_1, \ldots, a_k$ die (komplexen) Nullstellen des Nenner-Polynoms $Q(z)$, mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$, so gilt:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{m_i} \frac{A_{i\nu}}{(z-a_i)^\nu},$$

mit geeigneten komplexen Koeffizienten $A_{i\nu}$. Das ist die komplexe Version des Satzes, der in Teil A, Kap. III, §4, angegeben wurde.

Man braucht nun lediglich die Formel

$$\frac{1}{(z-a)^n} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Beispiel:

Sei $F(z) := \dfrac{2z^2-9z+19}{(z+3)(z-1)^2}$.

Die Partialbruchzerlegung führen wir mit Hilfe eines Ansatzes durch:

$$F(z) \;=\; \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(z-1)^2A + (z+3)(z-1)B + (z+3)C}{(z+3)(z-1)^2} \\
&= \frac{(A+B)z^2 + (-2A+2B+C)z + (A-3B+3C)}{(z+3)(z-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Das ergibt das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
A & + & B & & & = & 2, \\
-2A & + & 2B & + & C & = & -9, \\
A & - & 3B & + & 3C & = & 19.
\end{array}
$$

Wir lösen es nach dem Gaußschen Verfahren:

$$
\begin{array}{rrr|r}
1 & 1 & 0 & 2 \\
-2 & 2 & 1 & -9 \\
1 & -3 & 3 & 19 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 4 & 1 & -5 \\
0 & -4 & 3 & 17 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 4 & 1 & -5 \\
0 & 0 & 4 & 12 \\
\hline
\end{array}
$$

Also ist $C = 3$, $B = -2$ und $A = 4$, d.h.:

$$F(z) = \frac{4}{z+3} - \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

Daraus folgt:

$$F(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\; 4e^{-3t} - 2e^t + 3te^t.$$

Rücktransformation mit Residuenkalkül

Sei $F(z)$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, so daß $z \cdot F(z)$ für $z \to \infty$ beschränkt bleibt. Dann ist F außerhalb einer genügend großen Kreisscheibe holomorph, und es gibt dort eine Laurententwicklung

$$z \cdot F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}.$$

Also ist

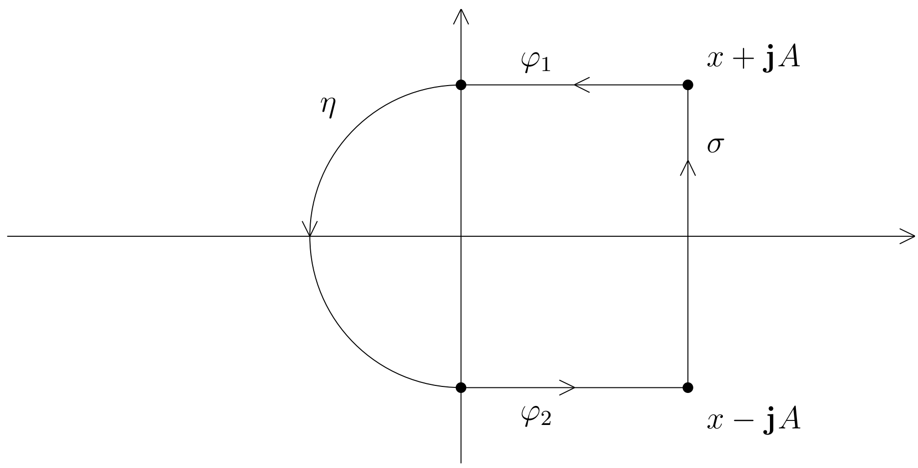
$$F(z) = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} z^{-n},$$

und das bedeutet, daß $F(z)$ eine Laplace-Transformierte ist. (Satz 7.12)

Ist $F(z)$ holomorph in der Halbebene $\{z \mid \mathrm{Re}\,(z) > x_1 \geq 0\}$, so erhält man die Urbildfunktion $f(t)$ durch die komplexe Umkehrformel:

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \cdot \lim_{A\to\infty} \int_{x-\mathbf{j}A}^{x+\mathbf{j}A} F(z)e^{zt}\,dz.$$

Wir betrachten nun folgende Figur:



Dabei sei

$$\begin{array}{rrcl} & \sigma(\tau) & := & x + \mathbf{j}\tau, \qquad (-A \le \tau \le A) \\ & \varphi_1(\tau) & := & (x-\tau) + \mathbf{j}A, \qquad (0 \le \tau \le x) \\ & \varphi_2(\tau) & := & \tau - \mathbf{j}A, \qquad (0 \le \tau \le x) \\ \text{und} & \eta(\tau) & := & Ae^{\mathbf{j}\tau}, \qquad (\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{3\pi}{2}). \end{array}$$

$C := \sigma + \varphi_1 + \eta + \varphi_2$ ist ein geschlossener Weg, der bei genügend großem A alle Singularitäten von $F(z)$ in seinem Inneren enthält. Nach dem Residuensatz ist also

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_C F(z)e^{zt}\,dz = \sum_{\mathrm{Re}\,(z) \le x_1} \mathrm{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Wir können die Werte von f aus den Residuen von $F(z)e^{zt}$ berechnen, wenn wir zeigen können, daß die Integrale über φ_1, φ_2 und η für $A \to \infty$ verschwinden.

Wir halten t fest. Bei den Wegen φ_i kommt es nicht auf den Durchlaufungssinn an. Daher gilt – wenn $|\, z \cdot F(z)\,| \le C$ ist – :

$$\begin{aligned} |\int_{\varphi_i} F(z)e^{zt}\,dz\,| &= |\int_0^x F(\tau \pm \mathbf{j}A)e^{(\tau \pm \mathbf{j}A)t}\,d\tau\,| \\ &\le \frac{C}{A}\int_0^x e^{\tau t}\,d\tau \\ &= \frac{C}{A}\cdot(\frac{1}{t}e^{\tau t})\,\Big|_0^x \\ &= \frac{C}{At}(e^{xt}-1) \to 0 \quad (\text{für } A \to \infty) \end{aligned}$$

Es ist $\eta(\tau) = A\cos\tau + \mathbf{j}A\sin\tau$. Wir benutzen, daß der Cosinus symmetrisch zur Achse $\tau = \pi$ ist, und daß gilt:

$$\cos\tau \le 1 - \frac{2}{\pi}\tau \qquad \text{für } \frac{\pi}{2} \le \tau \le \pi.$$

Dann folgt nämlich:

$$|\int_\eta F(z)e^{zt}\,dz\,| \;\le\; \frac{C}{A}\cdot\int_{\pi/2}^{(3\pi)/2} A\cdot|\,e^{\eta(\tau)t}\,|\,d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= C \cdot \int_{\pi/2}^{(3\pi)/2} e^{At\cos\tau}\,d\tau \\
&= 2C \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} e^{At\cos\tau}\,d\tau \\
&\le 2C \cdot e^{At} \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\frac{2At}{\pi}\tau}\,d\tau \\
&= 2Ce^{At} \cdot \left(-\frac{\pi}{2At}e^{-\frac{2At}{\pi}\tau}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= 2Ce^{At} \cdot \left(-\frac{\pi}{2At}(e^{-2At} - e^{-At})\right) \\
&= \frac{C\pi}{At}(1 - e^{-At}) \;\to\; 0 \quad (\text{für } A \to \infty)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir bewiesen:

I.7.13 Satz. *Ist $F(z)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ und holomorph für* $\mathrm{Re}\,(z) > \gamma$ *und $z \cdot F(z)$ beschränkt für $z \to \infty$, so ist $F(z)$ die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$, und es gilt:*

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \sum_{\mathrm{Re}\,(z)\le\gamma} \mathrm{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt, wenn $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ist, mit Polynomen P und Q, so daß

$$\deg(Q) \ge \deg(P) + 1$$

ist.

Der vorangegangene Satz läßt sich auf die Situation verallgemeinern, daß $F(z)$ unendlich viele Singularitäten besitzt. Voraussetzung ist dann aber ein einigermaßen kontrolliertes Wachstum von F.

Nachzutragen ist noch die Laplace-Transformation von periodischen Funktionen:

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ periodisch mit Periode T. Dann gilt für die Laplace-Transformierte:

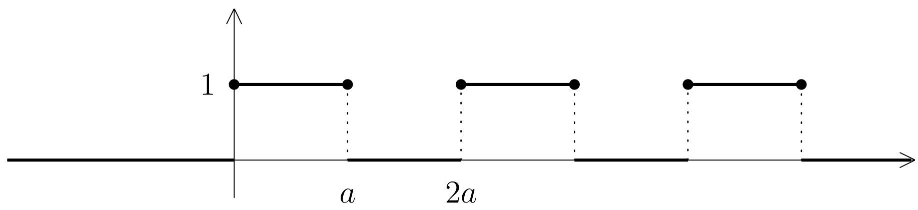
$$
\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-zt}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(t + nT)e^{-z(t+nT)}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(t)e^{-zt}e^{-znT}\,dt \\
&= \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-znT}\right) \cdot \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt.
\end{aligned}
$$

Der Vorfaktor ist eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-znT} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{e^{zT}}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-zT}}.$$

Beispiel:

Sei $a > 0$ und $f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2na \le t \le (2n+1)a \\ 0 & \text{für } (2n+1)a < t < (2n+2)a. \end{cases}$



Dann ist

$$\int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt = \int_0^a e^{-zt}\,dt = \left(\frac{1}{-z}\cdot e^{-zt}\right)\Big|_0^a = -\frac{1}{z}(e^{-az}-1),$$

also

$$F(z) = \frac{1-e^{-az}}{z(1-e^{-2az})}.$$

Eine beliebte **Anwendung** der Laplace-Transformation stellt die Lösung linearer DGLn mit konstanten Koeffizienten dar.

Man kann zeigen, daß die Lösungen einer solchen DGL Funktionen von höchstens exponentiellem Wachstum sind (vorausgesetzt, das trifft auf die Inhomogenität zu!). Auf einen Beweis wollen wir hier nicht eingehen, weil das für die praktische Anwendung keine große Rolle spielt.

Wir beginnen mit einer DGL 1. Ordnung:

$$y' + ay = g(t), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(0) = A.$$

Man kann nun schrittweise vorgehen:

1. **Laplace-Transformation**

   Sei $y(t)$ eine Lösung, $Y(z) := \mathcal{L}[y(t)]$ und $G(z) := \mathcal{L}[g(t)]$. Wendet man auf beide Seiten der DGL die Laplace-Transformation an, so erhält man:

   $$(z\cdot Y(z) - y(0)) + a\cdot Y(z) = G(z),$$

   also

   $$(z+a)\cdot Y(z) - A = G(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

   Wir lösen die gewonnene Gleichung nach $Y(z)$ auf:

   $$Y(z) = \frac{G(z)+A}{z+a}.$$

3. **Rücktransformation**

Wir suchen nun die Urbildfunktion $y(t)$ zu $Y(z)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{G(z)+A}{z+a}].$$

Dabei können alle drei vorgestellten Methoden der Rück-Transformation zum Einsatz kommen. In der Praxis wird man es meist mit Tabellen versuchen.

Bemerkung: Wir haben im 2. Semester gelernt, daß sich die allgemeine Lösung der DGL aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzt. Das Verfahren mit der Laplace-Transformation liefert gleich die allgemeine Lösung, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beispiel:

Wir betrachten die DGL

$$y' + 2y = 2t - 4,$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

1. Schritt: Laplace-Transformation!

$$z \cdot Y(z) - 1 + 2 \cdot Y(z) = \mathcal{L}[2t-4] = \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}.$$

2. Schritt: Lösung im Bildbereich!

$$\begin{aligned} (z+2)\cdot Y(z) - 1 &= \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}, \\ \text{also} \quad Y(z) &= \frac{2}{z^2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2}. \end{aligned}$$

3. Schritt: Rück-Transformation:

Die Funktionen, die als Summanden auf der rechten Seite auftreten, finden sich nicht alle in der Mini-Tabelle, die wir aufgestellt haben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+2)} &\bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ \text{und} \quad \frac{1}{z+2} &\bullet\!\!-\!\!\circ e^{-2t}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch die Urbildfunktion zu $\dfrac{1}{z^2(z+2)}$ finden. Wir tun dies mit Hilfe der Partialbruch-Zerlegung.

$$\textbf{Ansatz:} \quad \begin{aligned} \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z+2} &= \frac{az(z+2) + b(z+2) + cz^2}{z^2(z+2)} \\ &= \frac{(a+c)z^2 + (2a+b)z + 2b}{z^2(z+2)}. \end{aligned}$$

Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & & & c & = & 0, \\ 2a & + & b & & & = & 0, \\ & & 2b & & & = & 1. \end{array}$$

Also ist $b = \dfrac{1}{2}$, $a = -\dfrac{1}{4}$ und $c = \dfrac{1}{4}$, und damit

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2}\right) - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{3}{2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \ t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2(1 - e^{-2t}) \\ &= t - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir eine DGL 2. Ordnung:

$$y'' + ay' + by = g(t), \quad \text{mit Anfangswerten } y(0) = A \text{ und } y'(0) = B.$$

Auch hier gibt es die drei Schritte:

1. **Laplace-Transformation**

$$(z^2 \cdot Y(z) - z \cdot A - B) + a \cdot (z \cdot Y(z) - A) + b \cdot Y(z) = G(z),$$

also

$$(z^2 + az + b) \cdot Y(z) - (z + a)A - B = G(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

$$Y(z) = \frac{G(z) + (z + a)A + B}{z^2 + az + b}.$$

3. **Rücktransformation** Hier kann man auf die bekannten Methoden zurückgreifen.

Beispiel:

$$y'' + 4y = \sin(\omega t).$$

1. Schritt:

$$z^2 Y(z) - zA - B + 4Y(z) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2},$$

also

$$(z^2 + 4)Y(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} + zA + B.$$

2. Schritt:

$$Y(z) = \frac{\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + 4)} + A \cdot \frac{z}{z^2 + 4} + B \cdot \frac{1}{z^2 + 4},$$

für $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. **3. Schritt:** Die gesuchte Lösung ist

$$y(t) = \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)}] + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Zur Berechnung des ersten Termes müssen wir Fälle unterscheiden:

a) der Fall $\omega^2 \neq 4$:

In diesem Falle hat

$$F(z) := \frac{1}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)}$$

4 verschiedene einfache Polstellen, nämlich $z = \pm\mathbf{j}\omega$ und $z = \pm 2\mathbf{j}$. Es bietet sich die Residuen-Methode an:

$$\begin{aligned}
f(t) &:= \mathcal{L}^{-1}[F(z)] \\
&= \mathrm{res}_{\mathbf{j}\omega}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{-\mathbf{j}\omega}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{2\mathbf{j}}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{-2\mathbf{j}}(F(z)e^{zt}) \\
&= \frac{1}{2\mathbf{j}\omega(\omega^2-4)} \cdot (-e^{\mathbf{j}\omega t} + e^{-\mathbf{j}\omega t}) + \frac{1}{4\mathbf{j}(\omega^2-4)} \cdot (e^{2\mathbf{j}t} - e^{-2\mathbf{j}t}) \\
&= -\frac{1}{\omega(\omega^2-4)} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{2(\omega^2-4)}\sin(2t) \\
&= \frac{\omega\sin(2t) - 2\sin(\omega t)}{2\omega(\omega^2-4)}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$y(t) = \frac{\omega\sin(2t) - 2\sin(\omega t)}{2(\omega^2-4)} + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

b) der Fall $\omega^2 = 4$ (Resonanzfall):

Ist $\omega^2 = 4$, so ist

$$Y(z) = \frac{\pm 2}{(z^2+4)^2} + A \cdot \frac{z}{z^2+4} + B \cdot \frac{1}{z^2+4},$$

also

$$y(t) = \pm 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+4)^2} + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Wir kennen die Beziehung

$$\frac{1}{z^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{2}\sin(2t),$$

und verwenden den Faltungssatz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z^2+4)^2} &= \frac{1}{4} \cdot (\mathcal{L}[\sin(2t)])^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \mathcal{L}[\sin(2t) * \sin(2t)], \text{ also} \\
\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+4)^2} &= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2(t-\tau))\sin(2\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\cdot\Big(\sin(2t)\int_0^t \cos(2\tau)\sin(2\tau)\,d\tau - \cos(2t)\int_0^t \sin^2(2\tau)\,d\tau\Big)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\Big(\sin(2t)\cdot\frac{1}{4}\sin^2(2t) - \cos(2t)(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin(2t)\cos(2t))\Big)\\
&= \frac{1}{16}\cdot(\sin(2t) - 2t\cos(2t))\,.
\end{aligned}$$

Also ist in diesem Falle

$$y(t) = \pm\frac{1}{8}\cdot(\sin(2t) - 2t\cos(2t)) + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Die Amplitude von $y(t)$ nimmt im Resonanzfall beliebig hohe Werte an.

In einem ganz einfachen Fall wollen wir uns noch ansehen, wie Systeme von DGLn 1. Ordnung behandelt werden:

Beispiel:

Wir betrachten das bekannte System

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2,\\
y_2' &= -y_1,
\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$. Bezeichnen wir die Laplace-Transformierten von y_1 bzw. y_2 mit Y_1 bzw. Y_2, so folgt:

$$\begin{aligned}
z\cdot Y_1(z) - y_1(0) &= Y_2(z),\\
z\cdot Y_2(z) - y_2(0) &= -Y_1(z).
\end{aligned}$$

Das ergibt folgendes Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} z & -1\\ 1 & z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} Y_1(z)\\ Y_2(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1(z)\\ Y_2(z)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z & -1\\ 1 & z\end{pmatrix}^{-1}\circ\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{z^2+1}\cdot\begin{pmatrix} z & 1\\ -1 & z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{z^2+1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}\\
&\bullet\!\!-\!\!\circ \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nichts anderes haben wir erwartet!

In den Anwendungen der Integraltransformationen wird häufig mit Distributionen gearbeitet. Deshalb soll hier noch beschrieben werden, wie man die Laplace-Transformation einer Distribution bildet.

Wie am Ende des vorigen Paragraphen bezeichne $\mathcal{D}$ den Raum der (temperierten) Distributionen. Für $T \in \mathcal{D}$ sei D^kT die durch

$$D^kT[\varphi] := (-1)^k \cdot T[\varphi^{(k)}]$$

definierte k-te Ableitung von T. Ist g eine stückweise stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$, so kann man g auch als Distribution T_g auffassen, mit

$$T_g[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\,dt.$$

Definition.

> Eine Distribution T heißt *von endlicher Ordnung*, falls es eine **stetige** Funktion h auf $\mathbb{R}$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß
>
> $$T = D^kT_h$$
>
> ist. Das kleinste k mit dieser Eigenschaft heißt die *Ordnung von T*.

Die Dirac'sche Delta-Distribution ist die (distributionelle) Ableitung der Heaviside'schen Sprungfunktion H. Das weist sie noch nicht als Distribution von endlicher Ordnung aus, denn H ist ja nicht stetig. Allerdings ist H seinerseits die distributionelle Ableitung der stetigen „Knick-Funktion“

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ t & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Also ist $\delta = D^2T_h$ eine Distribution 2. Ordnung.

Jede beschränkte stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist eine Distribution 0-ter Ordnung, die Heaviside-Funktion ist eine Distribution 1. Ordnung.

Wir erinnern nun an die L-Funktionen (Seite 208). Eine stetige Funktion f auf $\mathbb{R}$ ist genau dann eine L-Funktion, wenn gilt:

1. $f(t) = 0$ für $t < 0$.
2. Die Laplace-Transformierte $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$ existiert für wenigstens ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Ist eine solche L-Funktion sogar k-mal stetig differenzierbar, so folgt aus (1) und der Stetigkeit der Ableitungen, daß

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 0$$

ist. Wir setzen

$$\mathcal{D}_+ := \{T \in \mathcal{D} \mid \exists\, k \in \mathbb{N}_0, \text{ stetige } L\text{-Funktion } h \text{ mit } T = D^kT_h.\}.$$

Ist f eine k-mal stetig differenzierbare L-Funktion, so ist auch $f^{(k)}$ eine L-Funktion, und es gilt:

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = z^k \cdot \mathcal{L}[f(t)].$$

Das liefert die Motivation für folgende Definition:

Definition.

Ist $T = D^k T_h$ eine Distribution der Ordnung k in $\mathcal{D}_+$, so definiert man die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[T]$ durch

$$\mathcal{L}[T] := z^k \cdot \mathcal{L}[h(t)].$$

Bemerkungen:

1. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß auch die Laplace-Transformierte einer Distribution eine (in einer rechten Halbebene) holomorphe Funktion ist.
2. Im Gegensatz zu der Transformation von Funktionen tauchen bei der Transformation von Distributionen auch **positive** Potenzen von z auf. Das wird bei den nachfolgenden Beispielen noch deutlicher.
3. Ist $T = T_g$, mit einer stetigen L-Funktion g, so ist

$$\mathcal{L}[T] = z^0 \cdot \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[g(t)].$$

In diesem Falle stimmt die neue Definition mit der alten überein, und man kann zeigen, daß das auch auf stückweise stetige L-Funktionen zutrifft.

Beispiel:

Die Delta-Distribution liegt in $\mathcal{D}_+$, denn es ist ja $\delta = D^2 T_h$, mit der Knick-Funktion h, die eine stetige L-Funktion ist. Es gilt:

$$\mathcal{L}[\delta] = z^2 \cdot \mathcal{L}[h(t)] = z^2 \cdot \frac{1}{z^2} = 1.$$

Für die verschobene Delta-Distribution $\delta(t-T)$ mit

$$\delta(t-T)[\varphi] := \varphi(T)$$

und $\widetilde{h}(t) := h(t-T)$ gilt:

$$\begin{aligned}
D^2 T_{\widetilde{h}}[\varphi] &= T_{\widetilde{h}}[\varphi''] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(t)\varphi''(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-T)\varphi''(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\varphi''(s+T)\,ds \\
&= T_h[\varphi''(s+T)] \\
&= D^2 T_h[\varphi(s+T)] \\
&= \delta[\varphi(s+T)] \;=\; \varphi(T) \;=\; \delta(t-T)[\varphi].
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{L}[\delta(t-T)] = z^2 \cdot \mathcal{L}[h(t-T)] = z^2 \cdot e^{-zT}\mathcal{L}[h(t)] = e^{-zT}.$$

Schließlich gilt für höhere Ableitungen der Delta-Distribution:

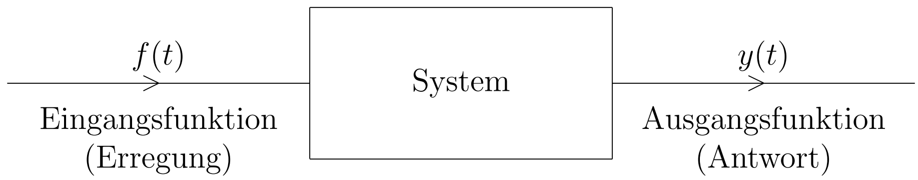
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^k\delta] &= \mathcal{L}[D^{k+2}T_h]\\ &= z^{k+2}\cdot\mathcal{L}[h(t)]\\ &= z^{k+2}\cdot\frac{1}{z^2} = z^k.\end{aligned}$$

Auf diese Weise tauchen positive Potenzen von z als Laplace-Transformierte auf, und wir können unsere kleine Tabelle für die Rücktransformation ergänzen durch

$$e^{-zT}\cdot z^k \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; \delta^{(k)}(t-T).$$

Zum Schluß soll angedeutet werden, wie die Laplace-Transformation in der Elektrotechnik zur Systemanalyse benutzt wird.

Es geht um folgende Standard-Situation:



Unter dem „System“ ist häufig ein elektrisches Netzwerk zu verstehen. Die Eingangsfunktion ist normalerweise eine stückweise stetige L-Funktion, kann aber auch eine Distribution sein. Dementsprechend ist auch die Systemantwort eine Funktion oder eine Distribution.

Beliebige Systeme sind kaum zu bearbeiten. Daher stellt man an das System gern einige Minimalforderungen:

1. Linearität:

   Das System wird durch einen linearen Operator S beschrieben.

   $$y(t) = S(f(t)).$$

   Das bedeutet, daß eine Überlagerung von Eingangssignalen auch eine entsprechende Überlagerung der Ausgangssignale zur Folge hat.

2. Zeitinvarianz:

   $$S(f(t-T)) = y(t-T).$$

   Das bedeutet, daß die Übertragungseigenschaften des Systems nicht vom Zeitpunkt der Messung abhängen.

3. Kausalität: Ist $f(t) = 0$ für $t < 0$, so soll auch $y(t) = 0$ für $t < 0$ sein. Die Wirkung kann nicht zeitlich vor der Ursache eintreten.

Zusätzlich werden meist noch Stabilitätsbedingungen gestellt. Wenn das Eingangssignal für $t \to \infty$ nach Null abklingt, so soll das auch für das Ausgangssignal gelten.

Die Grundaufgabe der Systemanalyse besteht darin, aus dem Eingangssignal das Ausgangssignal zu bestimmen.

In vielen wichtigen Fällen wird das System durch eine Differentialgleichung beschrieben:

$$\begin{gathered} y(t) = S[f(t)] \text{ ist Lösung der DGL} \\ y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = f(t), \\ \text{unter der Anfangsbedingung } y(0) = y'(0) = y^{(n-1)} = 0. \end{gathered}$$

Man kann nun die Laplace-Transformation anwenden und erhält:

$$p(z) \cdot Y(z) = F(z),$$

wobei $Y(z) = \mathcal{L}[y(t)]$, $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$ ist, und

$$p(z) := z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0.$$

Man kann diese Beziehung auch in folgender Form schreiben:

$$Y(z) = G(z) \cdot F(z),$$

wobei die sogenannte *Übertragungsfunktion* $G(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ nur von den Konstanten c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1} abhängt, also durch den inneren Aufbau des Systems bestimmt ist. Man spricht auch von der *Systemfunktion*. Die Urbildfunktion

$$g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(z)]$$

heißt *Greensche Funktion* oder *Gewichtsfunktion*.

Ist $f(t)$ irgend eine Eingangsfunktion, so ist die System-Antwort $y(t)$ gegeben durch

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \cdot \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t) * f(t)].$$

Also ist

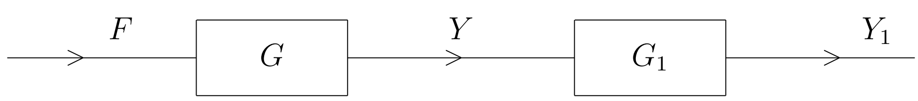
$$y(t) = g(t) * f(t)$$

durch die Eingangsfunktion und die Gewichtsfunktion bestimmt.

Meistens arbeitet man nur noch auf der Frequenz-Seite, wo der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal besonders einfach ist. Das ermöglicht es z.B., komplexe Systeme zu vereinfachen:

Beispiele :

1. Hintereinanderschaltung:

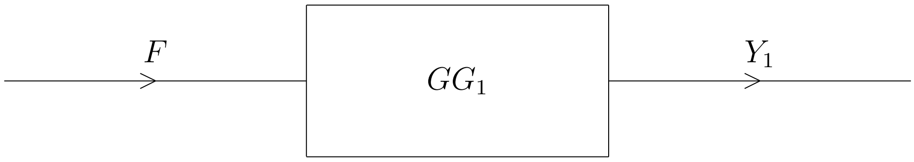


Wenn G bzw. G_1 die jeweiligen Übertragungsfunktionen sind, dann gelten die Beziehungen

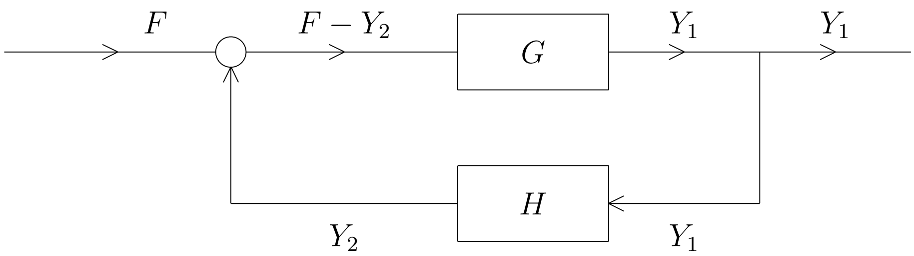
$$Y = G \cdot F \quad \text{und} \quad Y_1 = G_1 \cdot Y.$$

Daraus folgt: $\qquad Y_1 = (GG_1) \cdot F.$

Das System kann folgendermaßen vereinfacht werden:



2. Rückkoppelung:



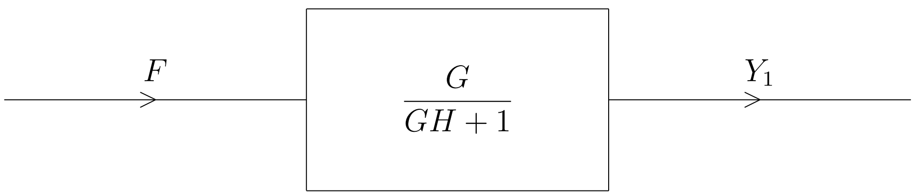
Hier ist

$$Y_1 = G \cdot (F - Y_2) \quad \text{und} \quad Y_2 = H \cdot Y_1.$$

Damit ist $Y_1 = G \cdot (F - HY_1)$, also $Y_1(1 + GH) = GF$. Aufgelöst nach Y_1 ergibt das:

$$Y_1 = \frac{G}{1 + GH} \cdot F.$$

Das vereinfachte System sieht nun so aus:



Die Systemfunktion $G(z)$ – und damit das Verhalten des Systems – kann ermittelt werden, wenn man die Systemantwort auf gewisse spezielle Erregungen kennt.

Sei etwa $H(t)$ die Heavisidesche Sprungfunktion. Wählt man $H(t)$ als Eingangssignal, so erhält man als Ausgangssignal die „Sprungantwort“ $y_H(t)$, mit

$$y_H(t) = g(t) * 1 = 1 * g(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau.$$

Also ist

$$g(t) = \frac{dy_H}{dt}(t).$$

Wählt man als Eingangssignal die Dirac'sche δ-Distribution, so erhält man als Ausgangssignal die sogenannte „Impulsantwort" y_δ. Es muß im Distributionssinne gelten:

$$D^n y_\delta + c_{n-1} D^{n-1} y_\delta + \cdots + c_1 D y_\delta + c_0 y_\delta = \delta.$$

Wendet man die Laplace-Transformation an, so erhält man:

$$p(z) \cdot Y_\delta(z) = 1.$$

Damit ist $Y_\delta(z) = \dfrac{1}{p(z)} = G(z)$ die Übertragungsfunktion, und y_δ ist die Gewichtsfunktion $g(t)$, allerdings als Distribution aufgefaßt. Schickt man also den Impuls δ, etwa realisiert durch einen starken Stoß, in das System, so kann man durch Messung der Ausgangsfunktion die Gewichtsfunktion $g(t)$ experimentell bestimmen.