
Kapitel I

Mehrfache Integration

§1 Parameterintegrale

Ziel dieses Paragraphen ist die Untersuchung von parameterabhängigen Integralen der Form

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_a^b f(x_1, \dots, x_n, t) dt$$

mit stetigem f . Gefragt wird nach stetiger und differenzierbarer Abhängigkeit von den Parametern x_1, \dots, x_n . Außerdem werden „Doppelintegrale“ der Form

$$\int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds$$

untersucht.

Bis auf weiteres soll stets folgende Situation betrachtet werden:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : B \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

I.1.1 Hilfssatz. *Ist (\mathbf{x}_k) eine in B gegen ein \mathbf{x}_0 konvergente Punktfolge und $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(t) := f(\mathbf{x}_k, t)$, so konvergiert die Funktionenfolge f_k auf I gleichmäßig gegen f_0 , mit $f_0(t) := f(\mathbf{x}_0, t)$.*

Die punktweise Konvergenz ist trivial. Auf den BEWEIS der gleichmäßigen Konvergenz verzichten wir hier!

I.1.2 Satz.

Unter den obigen Voraussetzungen ist $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ stetig.

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in B$ und (\mathbf{x}_k) eine gegen \mathbf{x}_0 konvergente Folge. Laut Hilfssatz konvergiert $f_k(t) := f(\mathbf{x}_k, t)$ gleichmäßig gegen $f_0(t) := f(\mathbf{x}_0, t)$.

Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und gleichmäßiger Konvergenz (Teil A, Satz IV.3.4) konvergiert dann

$$F(\mathbf{x}_k) = \int_a^b f_k(t) dt \quad \text{gegen} \quad \int_a^b f_0(t) dt = F(\mathbf{x}_0).$$

Das bedeutet, daß F in \mathbf{x}_0 stetig ist. □

I.1.3 Satz. Ist f für jedes feste \mathbf{x} stetig in t und auf $B \times I$ stetig partiell differenzierbar nach x_1, \dots, x_n , so ist $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ stetig partiell differenzierbar auf B , und es gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt.$$

BEWEIS: O.B.d.A. können wir uns auf den Fall $n = 1$ beschränken. Für die Existenz des Integrals reicht die schwache Stetigkeitsvoraussetzung. Sei $x_0 \in B$ und (x_k) eine in B gegen x_0 konvergente Folge. Es sei $x_k \neq x_0$ für alle k .

Für festes t konvergiert $g_k(t) := \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{x_k - x_0}$ gegen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$. Auch hier kann man (analog zum Hilfssatz) sogar die gleichmäßige Konvergenz auf I beweisen. Es geht die Stetigkeit der partiellen Ableitungen und der Mittelwertsatz in einer Veränderlichen ein, die recht technischen Details lassen wir lieber weg. Der Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und gleichmäßiger Konvergenz liefert nun:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0} &= \frac{1}{x_k - x_0} \cdot \left(\int_a^b f(x_k, t) dt - \int_a^b f(x_0, t) dt \right) \\ &= \int_a^b \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{x_k - x_0} dt \\ &= \int_a^b g_k(t) dt \\ &\rightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt. \end{aligned}$$

□

I.1.4 Zusatz. Ist f r -mal stetig differenzierbar, so ist auch F r -mal stetig differenzierbar, und man kann Differentiationen bis zur Ordnung r mit dem Integral vertauschen.

BEWEIS: Induktion nach r .

□

Eine erste Anwendung ist die Lösung folgenden Problems:

Sei $B = B_r(\mathbf{0})$ eine offene Kugel um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n und

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B .

Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{F}$?

Damit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$ sein kann, muß auf jeden Fall gelten:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Ist diese notwendige „Integrabilitätsbedingung“

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \text{ für } i, j = 1, \dots, n \text{ und } \mathbf{x} \in B,$$

erfüllt, so kann man tatsächlich die gesuchte Funktion f konstruieren:

$$\text{Wir setzen } f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i.$$

Um zeigen zu können, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist, muß man beachten:

$$\frac{d}{dt} (tF_j(t\mathbf{x})) = F_j(t\mathbf{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x})x_i = F_j(t\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \delta_{ij} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \int_0^1 F_j(t\mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^1 \left(t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_j(t\mathbf{x})) dt \\ &= tF_j(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 = F_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In Teil A, Kapitel V, §1 haben wir neben dem Gradienten einer Funktion auch noch die Divergenz und die Rotation eines Vektorfeldes kennengelernt. Dabei kann die Rotation nur im Falle $n = 3$ eingeführt werden:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) := \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Gerade haben wir gezeigt:

I.1.5 Satz. Sei \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Kugel um $\mathbf{0}$ im \mathbb{R}^3 . \mathbf{F} ist genau dann der Gradient einer differenzierbaren Funktion, wenn $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist.

BEWEIS: Die Integrabilitätsbedingung bedeutet gerade, daß $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist. □

Beispiele:

1. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, y, z)$ auf einer Kugelumgebung von $\mathbf{0}$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Also muß \mathbf{F} Gradient einer Funktion f sein. Wir berechnen f nach der obigen Formel:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \int_0^1 F_1(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 F_2(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 F_3(tx, ty, tz) dt \\ &= x \cdot \int_0^1 tx dt + y \cdot \int_0^1 ty dt + z \cdot \int_0^1 tz dt \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Die Probe zeigt sofort, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist, wie es ja auch sein muß.

2. Sei $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$. Dann ist auf U das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) &= 0, \\ \text{und } \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Aber wir werden sehen, daß \mathbf{F} dennoch kein Gradientenfeld sein kann. Eine bequeme Methode, das festzustellen, lernen wir leider erst im nächsten Paragraphen kennen, deshalb müssen wir hier etwas improvisieren:

Wenn man nicht so genau auf die Definitionsbereiche achtet, findet man rasch eine Funktion g , deren Gradient das Vektorfeld \mathbf{F} ist. Man braucht z.B. nur eine Stammfunktion von F_2 bezüglich der Variablen y zu suchen:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{t}{x})^2} dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} dt \quad (\text{mit } \varphi(t) = \frac{t}{x}) \\ &= \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} \frac{1}{1 + s^2} ds \\ &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Konstante könnte noch von x und z abhängen, aber die Probe zeigt, daß wir sie nicht brauchen. Tatsächlich hat schon

$$g(x, y, z) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

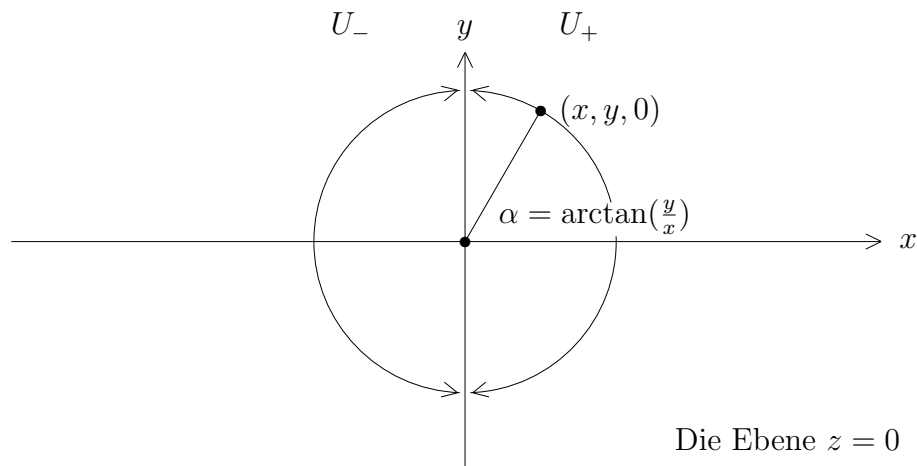
die gewünschte Eigenschaft: $\nabla g = \mathbf{F}$. Leider ist g nicht auf ganz U definiert!

Sei $U_+ := \{(x, y, z) \mid x > 0\}$ und $U_- := \{(x, y, z) \mid x < 0\}$. Diese beiden offenen Mengen werden durch die Hyperebene $\{(x, y, z) \mid x = 0\}$ voneinander getrennt, und g ist auf ihnen beiden jeweils definiert und stetig differenzierbar. Aus dem

Mittelwertsatz (Teil A, Satz V.3.5) kann man folgern, daß eine Funktion auf einer konvexen Menge¹, deren Gradient verschwindet, konstant sein muß. Wenn es also auf U eine stetig differenzierbare Funktion f mit $\nabla f = \mathbf{F}$ gäbe, dann müßte es Konstanten c_1, c_2 geben, so daß

$$f|_{U_+} = g + c_1 \quad \text{und} \quad f|_{U_-} = g + c_2$$

ist. Daß das aber nicht sein kann, sehen wir, wenn wir Punkte $(x, y, 0)$ auf dem „Einheitskreis“ (also mit $x^2 + y^2 = 1$ und $x \neq 0$) betrachten. Für solche Punkte liefert g nämlich den Winkel, den die Gerade durch $(x, y, 0)$ und $(0, 0, 0)$ mit der „x-Achse“ in der Ebene $\{z = 0\}$ einschließt. Innerhalb U_+ bekommen wir dabei für $y > 0$ positive Winkel (zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$), und für $y < 0$ negative Winkel (zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$). Innerhalb U_- ist es gerade umgekehrt, das kann man sofort am Verlauf des Arcustangens ablesen.



Das bedeutet, daß g bei $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ nicht stetig ergänzt werden kann. Von U_+ her erhält man den Wert $\frac{\pi}{2}$, von U_- her den Wert $-\frac{\pi}{2}$. Das ließe sich freilich mit Hilfe der Konstanten c_1 und c_2 ausbügeln, über die wir noch verfügen können. Wir würden daher

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c & \text{auf } U_+ \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c + \pi & \text{auf } U_- \end{cases}$$

setzen, mit einer evtl. noch zu wählenden Konstanten c . Dann läßt sich f stetig differenzierbar in den Punkt $(0, 1, 0)$ fortsetzen. Aber jetzt geht es auf jeden Fall im Punkt $(0, -1, 0)$ schief. Nähert man sich nämlich diesem Punkt von U_+ her, so strebt f gegen den Wert $-\frac{\pi}{2} + c$, nähert man sich ihm von U_- her, so erhält man den Wert $\frac{3\pi}{2} + c$. Egal, wie man c auch wählt, die Unstetigkeit läßt sich nicht beheben.

Ob also ein Vektorfeld \mathbf{F} mit $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ein Gradientenfeld ist, hängt von der Geometrie des Definitionsbereiches ab. Auf Kugeln um den Nullpunkt geht alles gut. Man kann auch noch eine erheblich allgemeinere Klasse von Gebieten angeben, auf denen der Satz gilt. Sobald es aber im Definitionsbereich U von \mathbf{F} Löcher gibt, die sich nicht innerhalb von U umgehen lassen, ist Vorsicht geboten.

¹also auf einer Menge, die mit zwei Punkten immer auch deren ganze Verbindungsstrecke enthält.

Wir betrachten nun eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Rechteck,

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann sind die Funktionen

$$F_1(s) := \int_c^d f(s, t) dt \quad \text{bzw.} \quad F_2(t) := \int_a^b f(s, t) ds$$

stetig und daher noch einmal integrierbar. Überraschenderweise gilt:

I.1.6 Satz von Fubini.

$$\int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds = \int_c^d \int_a^b f(s, t) ds dt.$$

BEWEIS: Für $c \leq \tau \leq d$ sei $g(s, \tau) := \int_c^\tau f(s, t) dt$. Diese Funktion ist nach Satz 1.2 für jedes feste τ stetig, und für festes $s \in [a, b]$ und $\tau_0 \in [c, d]$ ist $\tau \mapsto g(s, \tau)$ in τ_0 differenzierbar, mit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(s, \tau_0) = f(s, \tau_0).$$

Also ist g nach τ stetig partiell differenzierbar, und wir können Satz 1.3 anwenden:

$$\varphi(\tau) := \int_a^b g(s, \tau) ds = \int_a^b \left(\int_c^\tau f(s, t) dt \right) ds$$

ist stetig differenzierbar, mit

$$\varphi'(\tau) = \int_a^b f(s, \tau) ds.$$

Nun ist

$$\varphi(c) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(d) = \int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds,$$

also

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(s, t) ds dt &= \int_c^d \varphi'(t) dt \\ &= \varphi(d) - \varphi(c) \\ &= \int_a^b \int_c^d f(s, t) dt ds. \end{aligned}$$

□

Beispiele:

- Wir betrachten $f(x, y) := x^y$ auf $[0, 1] \times [a, b]$, mit $0 < a < b$. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind erfüllt. Die rechte Seite ist leicht ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy &= \int_a^b \left(\frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \\ &= \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right). \end{aligned}$$

Die linke Seite führt auf ein komplizierteres Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \cdot \ln x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} e^{y \cdot \ln x} \Big|_{y=a}^{y=b} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx. \end{aligned}$$

Das ist ein uneigentliches Integral, bei dem nicht sofort klar ist, wie man es ausrechnen sollte. Mit Hilfe des Satzes von Fubini haben wir jedoch schon den Wert!

Will man das Integral direkt berechnen, so kann man es z.B. auf ein sogenanntes „Frullanisches Integral“ zurückführen:²

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(\infty)] \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Voraussetzung ist dabei, daß f für $x \geq 0$ definiert und stetig ist und daß der Grenzwert $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert und endlich ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx &= \int_0^1 x \cdot \frac{e^{(b-1)\varphi(x)} - e^{(a-1)\varphi(x)}}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx \\ &\quad (\text{mit } \varphi(x) := \ln(x)) \\ &= \int_0^1 \frac{e^{b\varphi(x)} - e^{a\varphi(x)}}{\varphi(x)} \varphi'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-(-at)} - e^{-(-bt)}}{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \\ &= [1 - 0] \cdot \ln \frac{b}{a} \quad (\text{nach Frullani}). \end{aligned}$$

Man sieht, daß einem der Satz von Fubini gelegentlich viel Arbeit ersparen kann.

2. Die Funktion

$$f(x, y) := \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist auf $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ definiert, aber im Nullpunkt nicht mehr stetig. Der Satz von Fubini kann nicht angewandt werden, aber dennoch existieren die iterierten Integrale:

Für $y > 0$ ist (wie wir von Beispiel 2 nach Satz 1.5 wissen)

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2},$$

²vgl. Fichtenholz: Differential- u. Integralrechnung II, Kap. XIII, §4, Nr. 495

und daher

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \arctan(y) \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{-1}{1+x^2} dx \\ &= -\arctan(x) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Es ist also gefährlich, bei mehrfachen Integralen einfach so drauf los zu integrieren!! Wir werden später lernen, wann eine Funktion von mehreren Veränderlichen „integrierbar“ ist, und wir werden sehen, unter welchen allgemeineren Voraussetzungen der Satz von Fubini noch gültig bleibt.

Statt eines Doppelintegrals kann man auch mehrfache Integrale betrachten:

Ist $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert das iterierte Integral

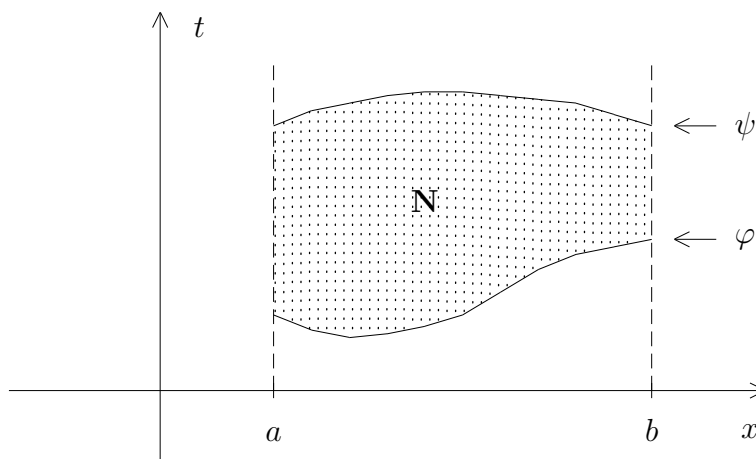
$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$

Mit dem Satz von Fubini und einem Induktionsbeweis kann man zeigen, daß der Wert des Integrals nicht von der Reihenfolge der Integrationen abhängt. In der Praxis werden allerdings wohl nur die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ vorkommen.

Zum Schluß wollen wir noch eine etwas allgemeinere Situation betrachten:

Es seien $\varphi, \psi : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und f eine stetige Funktion auf

$$N := \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}.$$



Dann kann man folgende Funktion bilden:

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt.$$

I.1.7 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen ist F stetig auf I .*

BEWEIS: Sei $x_0 \in I$. Dann zerlegen wir

$$F(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x, t) dt + \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x, t) dt - \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x, t) dt.$$

Das erste Integral ist nach Satz 1.2 stetig, strebt also für $x \rightarrow x_0$ gegen $F(x_0)$. Andererseits ist f als stetige Funktion auf der kompakten Menge N durch eine Konstante c beschränkt, und daher gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right| &\leq c \cdot |\psi(x) - \psi(x_0)| \\ &\text{und} \\ \left| \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(x, t) dt \right| &\leq c \cdot |\varphi(x) - \varphi(x_0)|. \end{aligned}$$

In beiden Fällen strebt die rechte Seite mit $x \rightarrow x_0$ gegen 0. Zusammengefaßt ergibt das:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Da x_0 beliebig war, ist F stetig auf I . □

I.1.8 Leibnizsche Formel. *Sei f auf $[a, b] \times [c, d]$ stetig und nach x stetig differenzierbar. Die Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar und haben ihre Werte in $[c, d]$. Dann ist*

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$$

auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

BEWEIS: Die Funktion $g(x, \tau) := \int_c^\tau f(x, t) dt$ ist nach τ stetig differenzierbar, wie wir im Beweis zum Satz von Fubini schon gesehen haben. Nach Satz 1.3 ist g auch stetig differenzierbar nach x . Also ist

$$\tilde{F}(x, u, v) := \int_u^v f(x, t) dt = g(x, v) - g(x, u)$$

nach allen drei Variablen stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$F(x) = \tilde{F}(x, \varphi(x), \psi(x)).$$

Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) \\
 &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) - \frac{\partial g}{\partial u}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(x, \psi(x))\psi'(x) \\
 &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x).
 \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$\text{Sei } F(x) := \int_x^{1+x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt.$$

Die Funktion $f(x, t) := \frac{\sin(tx)}{t}$ ist überall stetig und nach x stetig differenzierbar. Also ist F differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \int_x^{1+x^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, 1+x^2) \cdot 2x - f(x, x) \cdot 1 \\
 &= \int_x^{1+x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(tx)}{t} dt + \frac{\sin(x(1+x^2))}{1+x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(x^2)}{x} \\
 &= \int_x^{1+x^2} \cos(tx) dt + \frac{2x \cdot \sin(x+x^3)}{1+x^2} - \frac{\sin(x^2)}{x},
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \int_x^{1+x^2} \cos(tx) dt &= \left. \frac{\sin(tx)}{x} \right|_{t=x}^{t=1+x^2} \\
 &= \frac{\sin(x+x^3)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x}.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$F'(x) = \frac{1+3x^2}{x+x^3} \sin(x+x^3) - \frac{2}{x} \sin(x^2).$$

§2 Kurvenintegrale

In diesem Abschnitt wollen wir Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen über Kurven integrieren. Die betrachteten Kurvenintegrale sind nicht nur in der Mathematik sehr wichtig, sie spielen auch eine bedeutende Rolle in der Physik.

Definition.

Einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir einen *Integrationsweg*. Die Menge

$$|\alpha| := \{(\alpha(t) \mid t \in [a, b])\}$$

heißt die *Spur* von α .

Ist α sogar überall stetig differenzierbar und $\dot{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [a, b]$, so sprechen wir von einem *glatten Integrationsweg*.

Wir haben schon in Teil A (Kap. III, §6) solche Wege betrachtet und dort auch gesehen, wie man die Länge von Wegen berechnen kann:

Ist $I = [a, b]$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg und $t_0 \in I$, so nennt man

$$\dot{\alpha}(t_0) := (\alpha'_1(t_0), \dots, \alpha'_n(t_0))$$

den *Tangentenvektor* an α in t_0 . Die *Länge* von α wird durch die Zahl

$$L(\alpha) := \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$$

gegeben.

Wir wollen jetzt den Begriff des Weges etwas verallgemeinern:

Definition.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ endlich viele Integrationswege mit Spur in B und sind $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, so bezeichnet man die formal gebildete Linearkombination

$$C := n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k$$

als *Kette* in B .

Ist $C_1 = \sum_{i=1}^k n_i\alpha_i$ und $C_2 = \sum_{i=1}^k m_i\alpha_i$, so setzt man

$$C_1 + C_2 := (n_1 + m_1)\alpha_1 + \dots + (n_k + m_k)\alpha_k.$$

Kommen in zwei Ketten nicht die gleichen Wege vor, so muß man die fehlenden Wege mit dem Koeffizienten 0 versehen und hinzufügen.

Beispiel:

Ist $C_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ und $C_2 = -4\alpha_2 + 7\alpha_3$, so ist

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= (2 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3) + (0 \cdot \alpha_1 - 4 \cdot \alpha_2 + 7 \cdot \alpha_3) \\ &= (2 + 0) \cdot \alpha_1 + (3 - 4) \cdot \alpha_2 + (0 + 7) \cdot \alpha_3 \\ &= 2\alpha_1 - \alpha_2 + 7\alpha_3. \end{aligned}$$

Was soll das Ganze? Man kann sich solche formalen Linearkombinationen von Wegen auch anschaulich vorstellen:

1. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg, so repräsentiert $-\alpha$ den entgegengesetzten Weg, mit

$$(-\alpha)(t) := \alpha(a + b - t).$$

Die Spur von $-\alpha$ ist die gleiche wie die von α , sie wird nur in der umgekehrten Richtung durchlaufen. Den Durchlaufsinne eines Weges bezeichnet man auch als *Orientierung* des Weges.

2. Ist $q \in \mathbb{N}$, also eine *positive ganze Zahl*, so hat $q \cdot \alpha$ die selbe Spur wie α , aber sie wird jetzt q -mal hintereinander in der gleichen Richtung durchlaufen. Ist etwa $q = 2$, so ist

$$(2 \cdot \alpha)(t) := \begin{cases} \alpha(2t - a) & \text{für } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \alpha(2t - b) & \text{für } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

eine mögliche Parametrisierung. Der resultierende Weg ist nur dann stetig, wenn α geschlossen ist, wenn also $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist.

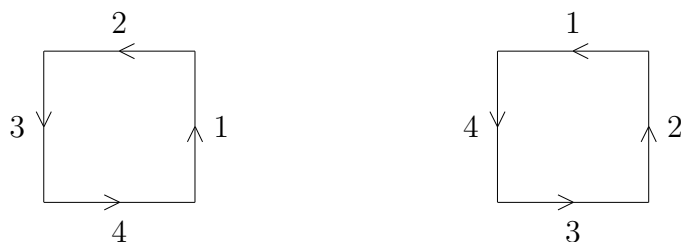
Ist $q = -|q|$ negativ, so ist $q\alpha = -(|q|\alpha)$.

3. Sind α_1 und α_2 zwei Wege, so bedeutet die Bildung von $\alpha_1 + \alpha_2$, daß man beide Wege hintereinander durchläuft. Besonders gut kann man sich das vorstellen, wenn der Endpunkt des ersten Weges mit dem Anfangspunkt des zweiten Weges zusammenfällt, und dann kann man auch eine stetige Parametrisierung des zusammengesetzten Weges finden. Aber das ist nicht unbedingt erforderlich.

Sind etwa $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ Parametrisierungen der vier Seiten eines Quadrates, so sind die Ketten

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{und} \quad \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_3$$

zwar nicht gleich, aber für die Integration werden sie sich als gleichwertig erweisen.



Wir wollen nun überlegen, wie man eine Funktion über einen Weg oder eine Kette integrieren kann. Dazu beginnen wir mit einem sehr einfachen Fall:

Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\alpha(t) := \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, für zwei beliebige Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} . Das ist bekanntlich die Parametrisierung der Verbindungsstrecke von \mathbf{a} und \mathbf{b} . Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet, das diese Strecke enthält, und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine (stetig) differenzierbare Funktion. Schränkt man f auf die Strecke ein, so erhält man eine Funktion einer Veränderlichen,

$$g(t) := f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})).$$

Wir könnten jetzt unter dem Integral über f und α das Integral $\int_0^1 g(t) dt$ verstehen. Aber damit würden wir nicht das bekommen, was wir wollen. Ein vernünftiger Integralbegriff sollte ja die Fläche unter dem Graphen liefern. Ist etwa $f(\mathbf{x}) \equiv c$ eine konstante Funktion, so ist

$$\int_0^1 g(t) dt = c \cdot \int_0^1 dt = c,$$

aber die zu messende Fläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ und c . Das Integral müßte den Wert $c \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ ergeben.

Ist nun f beliebig, so wird man versuchen, die Fläche unter dem Graphen durch Riemannsche Summen zu approximieren. Dazu betrachten wir eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

und wählen Zwischenpunkte $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Die gesuchte Fläche wird durch Riemannsche Summen der Gestalt

$$\begin{aligned} \Sigma_n(f, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\alpha(\xi_k)) \cdot \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^n f(\alpha(\xi_k)) \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\alpha(\xi_k)) \cdot \|\dot{\alpha}(\xi_k)\| \cdot (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

approximiert. Diese Riemannschen Summen streben aber andererseits gegen das Integral $\int_0^1 f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| dt$.

Offensichtlich liefert dieses Integral im Falle $f(\mathbf{x}) \equiv c$ den richtigen Wert. Wir testen es noch für die gleiche Funktion und die Kreislinie als Integrationsweg:

$$\alpha(t) := (r \cos(t), r \sin(t)), \text{ für } t \in [0, 2\pi].$$

Dann ist $\|\dot{\alpha}(t)\| \equiv r$ und

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| dt = cr \int_0^{2\pi} dt = c \cdot 2r\pi,$$

und das ist tatsächlich der Inhalt der Zylinderfläche mit der Höhe c und dem Radius r .

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein beliebiger (aber überall stetig differenzierbarer) Weg, so können wir die Weglängenfunktion einführen:

$$\sigma(t) := L(\alpha|_{[a,t]}) = \int_a^t \|\dot{\alpha}(\tau)\| d\tau, \text{ für } a \leq t \leq b.$$

Dann ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\|, \text{ also salopp geschrieben } d\sigma = \|\dot{\alpha}(t)\| dt.$$

Man bezeichnet $d\sigma$ als *Linielement* und verbindet damit anschaulich die Vorstellung einer infinitesimalen skalaren Größe, die man gewinnt, wenn man in den Riemannschen Summen die Terme $\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|$ beliebig klein werden läßt. Man kann das Linielement – unabhängig von der Anschauung – auch streng mathematisch einführen, aber das erfordert Techniken, die uns hier nicht zur Verfügung stehen.

Definition.

Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Integrationsweg und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nennt man

$$\int_{\alpha} f d\sigma := \int_a^b f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| dt$$

das *Kurvenintegral (1. Art) von f über α* .

Ist $C = \sum_{i=1}^k n_i \alpha_i$ eine Kette von stetig differenzierbaren Wegen, so setzt man

$$\int_C f d\sigma := \sum_{i=1}^k n_i \cdot \int_{\alpha_i} f d\sigma.$$

Dadurch wird das Kurvenintegral auch für beliebige (nur stückweise stetig differenzierbare) Integrationswege und schließlich für Ketten von beliebigen Integrationswegen definiert.

Zunächst einige Rechenregeln:

I.2.1 Satz. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg.

$$1. \int_{\alpha} (c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2) d\sigma = c_1 \cdot \int_{\alpha} f_1 d\sigma + c_2 \cdot \int_{\alpha} f_2 d\sigma,$$

für Funktionen f_1, f_2 und Konstanten c_1, c_2 .

2. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine „Parametertransformation“, also eine streng monoton wachsende oder fallende stetig differenzierbare Funktion, so besitzen die Wege α und $\alpha \circ \varphi$ die gleiche Spur, und es ist

$$\int_{\alpha \circ \varphi} f d\sigma = \int_{\alpha} f d\sigma.$$

3. Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\alpha} f d\sigma \right| \leq \sup_{|\alpha|} |f| \cdot L(\alpha).$$

BEWEIS: 1) folgt ganz leicht aus der Linearität des Riemannsches Integrals.

2) Ist φ streng monoton wachsend, so ist $\varphi'(t) \geq 0$ für alle t , und für fast alle t ist sogar $\varphi'(t) > 0$. Ist φ streng monoton fallend, so ist überall $\varphi'(t) \leq 0$, und für fast alle t ist sogar $\varphi'(t) < 0$. Deshalb macht die folgende Unterscheidung Sinn:

$$\operatorname{sgn}(\varphi') := \begin{cases} +1 & \text{falls } \varphi'(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in [c, d] \\ -1 & \text{falls } \varphi'(t) \leq 0 \text{ für alle } t \in [c, d]. \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \circ \varphi} f \, d\sigma &= \int_c^d f(\alpha(\varphi(t))) \|\dot{\alpha}(\varphi(t))\varphi'(t)\| \, dt \\ &= \operatorname{sgn}(\varphi') \cdot \int_c^d f(\alpha(\varphi(t))) \|\dot{\alpha}(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| \, dt \\ &= \operatorname{sgn}(\varphi') \cdot \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\alpha(s)) \|\dot{\alpha}(s)\| \, ds \\ &= \int_a^b f(\alpha(s)) \|\dot{\alpha}(s)\| \, ds \\ &= \int_{\alpha} f \, d\sigma. \end{aligned}$$

3) Die stetige Funktion $f \circ \alpha$ nimmt auf $[a, b]$ ein endliches Supremum an, also auch f auf $|\alpha| = \alpha([a, b])$, und wegen III.3.3(3) (in Teil A) ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} f \, d\sigma \right| &= \left| \int_a^b f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\alpha(t))| \cdot \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt \\ &\leq \sup_{|\alpha|} |f| \cdot \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt \\ &= \sup_{|\alpha|} |f| \cdot L(\alpha). \end{aligned}$$

□

Beispiel:

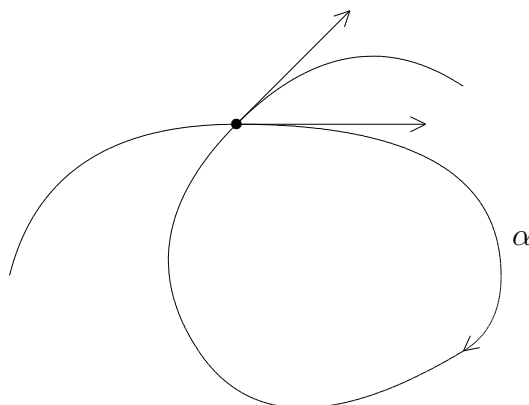
Sei $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$ für $0 \leq t \leq \pi$ die Parametrisierung der oberen Hälfte des Einheitskreises. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} (x + y) \, d\sigma &= \int_0^{\pi} (\cos t + \sin t) \|(-\sin(t), \cos(t))\| \, dt \\ &= \int_0^{\pi} (\cos t + \sin t) \, dt \\ &= (\sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi} \\ &= -((-1) - 1) = 2. \end{aligned}$$

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg, $|\alpha| \subset B$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so hängt das Kurvenintegral von f über α in Wirklichkeit nur von den Werten von f in

den Punkten von $|\alpha|$ ab. Wir könnten also auch Funktionen integrieren, die nur auf $|\alpha|$ gegeben sind. Das kommt nun in der folgenden Situation zur Anwendung:

Ein Massenpunkt soll in einem Kraftfeld \mathbf{F} längs eines glatten Weges α bewegt werden. Dabei wirkt auf den Punkt immer nur diejenige Komponente der Kraft, die in Richtung des Tangentialvektors an α zeigt. Diese Komponente ist an der Stelle $\alpha(t)$ durch das Skalarprodukt aus $\mathbf{F}(\alpha(t))$ und dem *Tangenteneinheitsvektor* $\frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \cdot \dot{\alpha}(t)$ gegeben. Und hier beginnt die Schwierigkeit! Es kann Stellen $\alpha(t)$ auf der Spur des Weges geben, an denen der Tangenteneinheitsvektor nicht eindeutig bestimmt ist:



Es gibt also kein Vektorfeld auf $|\alpha|$, das in jedem Punkt gerade den Tangenteneinheitsvektor liefert. Wir führen daher einen neuen Begriff ein:

Definition.

Ein *Vektorfeld längs eines Weges* ist ein Paar $\mathbf{V} = (\alpha, \mathbf{v})$, bestehend aus

1. einem Integrationsweg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,
2. einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{v} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Für $t \in [a, b]$ nennen wir $\alpha(t)$ die *Ortskomponente* und $\mathbf{v}(t)$ die *Richtungskomponente* von \mathbf{V} in t .

Orts- und Richtungskomponente sind über den gemeinsamen Parameter t miteinander verbunden: Zum Zeitpunkt t denke man sich den Vektor $\mathbf{v}(t)$ im Punkt $\alpha(t)$ angeheftet. (Für die korrekte mathematische Behandlung ist diese anschauliche Deutung unerheblich, aber sie ist sehr wichtig, wenn man mit dem abstrakten Begriff eine Vorstellung verbinden will).

Ersetzt man die vektorwertige Funktion \mathbf{v} durch eine skalarwertige Funktion f , so spricht man von einer *Funktion längs α* .

Beispiele:

1. Ist α ein glatter Integrationsweg, so nennt man

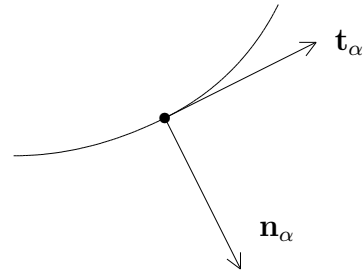
$$\mathbf{t}_\alpha(t) := \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \cdot \dot{\alpha}(t)$$

den Tangenteneinheitsvektor von α zum Parameter t .

Das Paar $\mathbf{T}_\alpha := (\alpha, \mathbf{t}_\alpha)$ ist ein Vektorfeld längs α , das sogenannte *Tangenteneinheitsvektorfeld* von α .

2. Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein glatter Weg in der Ebene. Dann nennt man

$$\mathbf{n}_\alpha(t) := \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \cdot (\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))$$



den (*äußeren*) *Normaleneinheitsvektor* an α in t . $\mathbf{N}_\alpha := (\alpha, \mathbf{n}_\alpha)$ ist ein Vektorfeld längs α , das sogenannte *Normaleneinheitsvektorfeld*.

Ist ein gewöhnliches Vektorfeld \mathbf{W} auf $|\alpha|$ gegeben, so ist $(\alpha, \mathbf{W} \circ \alpha)$ ein Vektorfeld längs α . Umgekehrt funktioniert das i.a. nicht (wie wir oben am Beispiel des Tangentenvektorfeldes gesehen haben), es sei denn, α ist injektiv.

Ist \mathbf{W} ein gewöhnliches Vektorfeld auf $|\alpha|$ und $\mathbf{V} = (\alpha, \mathbf{v})$ ein Vektorfeld längs α , so ist

$$\mathbf{W} \bullet \mathbf{V} := (\alpha, (\mathbf{W} \circ \alpha) \bullet \mathbf{v})$$

eine Funktion längs α . Man kann den Begriff des Kurvenintegrals sofort auf solche Funktionen längs α ausdehnen:

Definition.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Integrationsweg und $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so nennt man

$$\int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} := \int_\alpha \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}_\alpha d\sigma = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt$$

das *Kurvenintegral (2. Art) von \mathbf{F} über α* .

Bemerkung : Die Formel auf der rechten Seite kommt so zustande:

$$\int_\alpha \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}_\alpha d\sigma = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \mathbf{t}_\alpha(t) \cdot \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt.$$

Dabei wurde $\|\dot{\alpha}(t)\|$ weggekürzt. Während der Tangenteneinheitsvektor zunächst nur für glatte Kurven definiert werden kann, ist das dann resultierende Integral für beliebige stetig differenzierbare Wege definiert. Sauberer sollte man also gleich so definieren:

$$\int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt.$$

Das zu Anfang dieses Paragraphen eingeführte Kurvenintegral über eine Funktion heißt auch *Kurvenintegral 1. Art* oder *Kurvenintegral nach der Bogenlänge*. Obwohl es so aussieht, als sei das Kurvenintegral 2. Art nur ein Spezialfall des Integrals 1. Art, ist es in Wirklichkeit nicht so!! Wir haben bislang übersehen, daß das Kurvenintegral 1. Art einen kleinen Schönheitsfehler besitzt: es soll ja das gewöhnliche Riemannsche Integral verallgemeinern. Und ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha(t) := t$, so gilt für eine stetige Funktion f auf \mathbb{R} in der Tat:

$$\int_{\alpha} f d\sigma = \int_a^b f(t) dt.$$

Schaut man nicht so genau hin, so erwartet man dann auch, daß

$$\int_{-\alpha} f d\sigma = \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt = - \int_{\alpha} f d\sigma$$

ist, aber das ist nicht der Fall! Das ist kein Widerspruch in der Mathematik, vielmehr ist die erste Gleichung falsch. In Wirklichkeit ist auch

$$\int_{-\alpha} f d\sigma = \int_a^b f(t) dt.$$

Das Kurvenintegral 1. Art ermöglicht es nicht, die Integrationsrichtung umzukehren, es ist „orientierungsunabhängig“. Ganz anders liegen die Dinge beim Kurvenintegral 2. Art:

I.2.2 . Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg.

$$1. \int_{\alpha} (c_1 \cdot \mathbf{F}_1 + c_2 \cdot \mathbf{F}_2) \bullet d\mathbf{x} = c_1 \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F}_1 \bullet d\mathbf{x} + c_2 \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F}_2 \bullet d\mathbf{x},$$

für Vektorfelder $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und Konstanten c_1, c_2 .

2. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation mit $\varphi'(x) > 0$ für alle $x \in [c, d]$, so ist

$$\int_{\alpha \circ \varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

3. Es ist

$$\int_{-\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = - \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

4. Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha).$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) + 3): Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parameter-Transformation, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \circ \varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_c^d \mathbf{F}(\alpha(\varphi(t))) \bullet \dot{\alpha}(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \mathbf{F}(\alpha(s)) \bullet \dot{\alpha}(s) ds \\ &= \operatorname{sgn}(\varphi') \cdot \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(s)) \bullet \dot{\alpha}(s) ds \\ &= \operatorname{sgn}(\varphi') \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

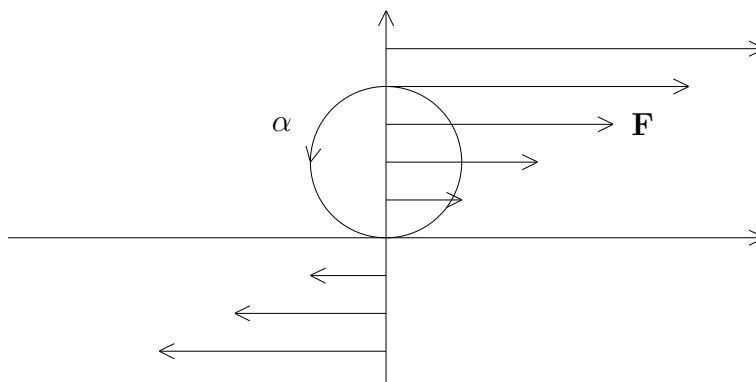
4) Zur Abschätzung benötigt man die Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \right| \\
 &\leq \int_a^b |\mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t)| dt \\
 &\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\alpha(t))\| \cdot \|\dot{\alpha}(t)\| dt \\
 &\leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt \\
 &= \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha).
 \end{aligned}$$

□

Beispiele :

1. Sei $n = 2$, $\mathbf{F}(x, y) := (cy, 0)$, $c > 0$, und $\alpha(t) := (\cos t, 1 + \sin t)$, für $0 \leq t \leq 2\pi$.



Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (c(1 + \sin t), 0) \bullet (-\sin t, \cos t) dt \\
 &= -c \cdot \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t) dt = -c\pi.
 \end{aligned}$$

Faßt man \mathbf{F} als Strömungsfeld auf, so mißt das Kurvenintegral über einen Kreis die „Zirkulation“ der Strömung.

2. Sei $n = 3$, $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) und

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad \text{für } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Das Vektorfeld ist uns schon im ersten Paragraphen begegnet, als eines, das kein Gradientenfeld ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \bullet (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Setzen wir dagegen $\beta(t) := (2 + \cos t, \sin t, 0)$, so ist

$$\begin{aligned}\int_{\beta} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\beta(t)) \bullet \dot{\beta}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{5 + 4 \cos t}, \frac{2 + \cos t}{5 + 4 \cos t}, 0 \right) \bullet (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 4 \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{5 + 4 \cos t} \right] dt \\ &= \pi - \frac{3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}.\end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{1}{5 + 4 \cos t}$ ist auf $[0, 2\pi]$ positiv und symmetrisch zur Geraden $t = \pi$. Daher gilt (mit der Substitution $\varphi(x) = 2 \arctan(x)$):

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{5 + 4 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{9 + x^2} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + (x/3)^2} \\ &= \frac{12}{9} \cdot \left(\arctan \frac{x}{3} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{12}{9} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \pi.\end{aligned}$$

Also ist $\int_{\beta} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0$.

Im ersten Fall haben wir über eine geschlossene Kurve um die Polstellenmenge von \mathbf{F} herum integriert, im zweiten Fall über eine geschlossene Kurve, die ganz in der Menge U_+ liegt, innerhalb der \mathbf{F} ein Gradientenfeld ist. Es wird sich gleich erweisen, daß es kein Zufall ist, daß wir im zweiten Fall Null als Ergebnis erhalten!

I.2.3 Hauptsatz über Kurvenintegrale. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine offene zusammenhängende Menge), und $\mathbf{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf G . Dann sind die folgenden Aussagen über \mathbf{F} äquivalent:

1. \mathbf{F} ist ein Gradientenfeld, d.h. es gibt eine stetig differenzierbare Funktion f auf G , so daß $\mathbf{F} = \nabla f$ ist.
2. Sind \mathbf{p} und \mathbf{q} Punkte in G , so hat das Kurvenintegral $\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ für alle Integrationswege $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ mit $\alpha(a) = \mathbf{p}$ und $\alpha(b) = \mathbf{q}$ den gleichen Wert. (Das Integral ist wegunabhängig).
3. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein **geschlossener** Integrationsweg, so ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0.$$

Insbesondere ist

$$\int_{\alpha} (\nabla f) \bullet d\mathbf{x} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

BEWEIS:

1 \implies 2: Ist $\mathbf{F} = \nabla f$, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\ &= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

und das hängt nicht mehr von α ab.

Den Zusatz haben wir damit auch gleich bewiesen!

2 \implies 3: Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg und $\mathbf{p} := \alpha(a) = \alpha(b)$, so haben α und $-\alpha$ den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_{-\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

und daher $\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0$.

3 \implies 1: Sei $\mathbf{p} \in G$ ein fest gewählter Punkt. Ist $\mathbf{x} \in G$, so gibt es einen stetigen Weg α , der \mathbf{p} innerhalb von G mit \mathbf{x} verbindet. Man kann diesen Weg sogar als Integrationsweg (also stückweise stetig differenzierbar) wählen. (z.B. kann man die Spur des ursprünglichen Weges durch endlich viele Kugeln überdecken, die alle noch ganz in G liegen, und dann kann man innerhalb jeder Kugel den Weg durch eine Strecke „abkürzen“)

Wir setzen $f(\mathbf{x}) := \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$.

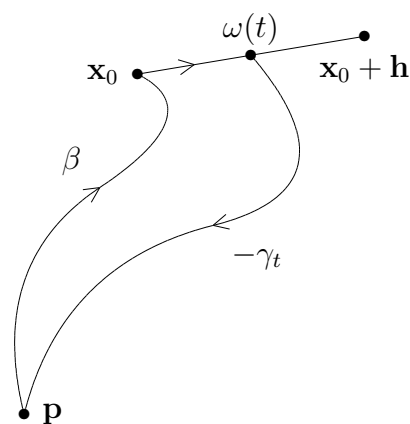
Ist β ein weiterer Weg von \mathbf{p} nach \mathbf{x} , so stellt die Kette $C := \alpha - \beta$ einen geschlossenen Integrationsweg dar, der bei \mathbf{p} beginnt und endet. Nach Voraussetzung ist

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0 \quad , \text{ also } \quad \int_\alpha \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_\beta \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

Damit ist die Funktion f auf G „wohldefiniert“, d.h. unabhängig vom benutzten Weg α . Es bleibt zu zeigen, daß $\nabla f = \mathbf{F}$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ beliebig und \mathbf{h} irgend ein Richtungsvektor. Weiter sei $\omega(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}$ (für $s \in [0, 1]$) die Verbindungsstrecke von \mathbf{x}_0 nach $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, $\omega_t := \omega|_{[0,t]}$ die Verbindungsstrecke von \mathbf{x}_0 und $\omega(t)$, β ein Weg von \mathbf{p} nach \mathbf{x}_0 und γ_t ein Weg von \mathbf{p} nach $\omega(t)$. Dann ist die Kette $\beta + \omega_t - \gamma_t$ für jedes $t \in [0, 1]$ geschlossen, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\gamma_t} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} - \int_\beta \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &= \int_{\omega_t} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &= \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}) \bullet \mathbf{h} \, ds. \end{aligned}$$



Setzen wir $g(s) := \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}) \bullet \mathbf{h}$, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s) \, ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (A, Satz III.3.5) gibt es ein $c = c(t) \in [0, t]$, so daß gilt:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{h}) \bullet \mathbf{h} \cdot t,$$

also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{h}) \bullet \mathbf{h} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{h}.$$

Damit existieren in \mathbf{x}_0 alle Richtungsableitungen. Setzt man speziell $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{e}_i = F_i(\mathbf{x}_0),$$

für $i = 1, \dots, n$. □

Definition.

Ist $\nabla f = \mathbf{F}$, so nennt man f ein *Potential* für \mathbf{F} .

Jetzt können wir das Beispiel

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

interpretieren. Auf U_+ (und genauso auf U_-) besitzt \mathbf{F} ein Potential, und deshalb muß dort das Integral über \mathbf{F} und jeden geschlossenen Weg verschwinden.

Besäße \mathbf{F} sogar auf seinem ganzen Definitionsbereich ein Potential, so müßte auch dort jedes Integral über einen geschlossenen Weg verschwinden. Wir haben aber bereits einen Weg gefunden, auf den das nicht zutrifft. Also kann \mathbf{F} kein globales Gradientenfeld sein. Das hatten wir schon auf etwas mühsamere Weise festgestellt, hier folgt es noch einmal aus dem Hauptsatz über Kurvenintegrale.

Zum Schluß wollen wir eine physikalische Anwendung betrachten:

Auf dem \mathbb{R}^3 sei ein Kraftfeld \mathbf{F} gegeben. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in diesem Kraftfeld entlang eines Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann ist $\mathbf{v}(t) := \dot{\alpha}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zur Zeit t . Das Newtonsche Gesetz der Bewegung besagt:

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = m \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \quad \text{für jeden Zeitpunkt } t.$$

Wenn man das Teilchen entlang α von $\mathbf{p} := \alpha(a)$ nach $\mathbf{q} := \alpha(b)$ bewegt hat, so beträgt die dabei geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \\ &= \int_a^b m \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \bullet \mathbf{v}(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \bullet \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{m}{2} \cdot [\|\mathbf{v}(b)\|^2 - \|\mathbf{v}(a)\|^2]. \end{aligned}$$

$T(t) := \frac{m}{2} \cdot \|\mathbf{v}(t)\|^2$ ist die *kinetische Energie* des Teilchens zur Zeit t . Die geleistete Arbeit ist also gerade die Änderung der kinetischen Energie.

Man nennt das Kraftfeld \mathbf{F} *konservativ*, wenn es ein Potential besitzt. Man schreibt dann: $\mathbf{F} = -\nabla U$.

In diesem Fall ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = -[U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))],$$

also $T(a) + U(\alpha(a)) = T(b) + U(\alpha(b))$. Das bedeutet, daß die *Gesamtenergie* $E(\alpha(t)) := U(\alpha(t)) + T(t)$ bei der Bewegung des Teilchens konstant bleibt. Das ist der Satz von der Erhaltung der Energie.

§3 Inhaltsmessung

In diesem Abschnitt lernen wir den Jordan-Inhalt von Mengen im \mathbb{R}^n kennen und erfahren, was Nullmengen sind und wie man das Volumen von Teilmengen des \mathbb{R}^3 berechnet.

Unter einem (*abgeschlossenen*) *Quader* im \mathbb{R}^n versteht man eine Menge der Gestalt

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Wir setzen $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$ und schreiben:

$$Q = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

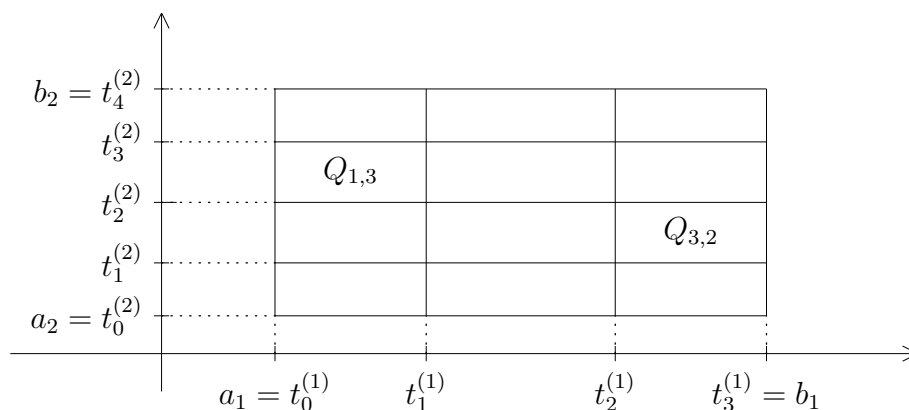
Dann ist $v_n(Q) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$ das *n-dimensionale Volumen* von Q , und die Länge der Hauptdiagonalen $\delta(Q) := \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ nennen wir den *Durchmesser von $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$* .

Eine *Partition* \mathcal{P}_i des Intervalls $[a_i, b_i]$ ist eine Unterteilung

$$a_i = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{k_i}^{(i)} = b_i.$$

Ist für jedes i eine solche Partition gegeben, so nennt man $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ eine *Partition des Quaders Q* . Anschaulich verstehen wir darunter einfach die Menge aller Teilquader von Q , die durch die Unterteilung der Kanten $[a_i, b_i]$ entstehen.

Wählt man zu jedem i ein Teilintervall $I_{\nu_i}^{(i)} = [t_{\nu_i-1}^{(i)}, t_{\nu_i}^{(i)}]$, $i = 1, \dots, n$, so erhält man den Teilquader $Q_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = I_{\nu_1}^{(1)} \times I_{\nu_2}^{(2)} \times \dots \times I_{\nu_n}^{(n)}$.



Definition.

Eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine (*Jordan-*)*Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene Quader Q_1, \dots, Q_m gibt, so daß gilt:

1. $Z \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$.
2. $v_n(Q_1) + \dots + v_n(Q_m) < \varepsilon$.

Beispiele :

1. Ist $Q = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ein Quader im \mathbb{R}^n und $a_k = b_k$ für ein k , so ist $v_n(Q) = 0$ und damit Q eine Nullmenge.

Allgemeiner ist jede Menge, die in einer (affinen) Hyperebene des \mathbb{R}^n enthalten ist, eine n -dimensionale Nullmenge. Sie kann jedoch in einem geeigneten niederdimensionalen Raum durchaus positives Volumen haben.

2. Ist $Z = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ eine endliche Menge im \mathbb{R}^n , so ist Z offensichtlich eine Nullmenge.

(Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wähle man einfach Würfel mit einer Seitenlänge $< \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{m}}$ um die \mathbf{x}_i . Diese Würfel überdecken Z und haben ein Gesamtvolumen $< \varepsilon$.)

3. Endliche Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
4. Ist $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist der Graph $G_f = \{(\mathbf{x}, t) \in Q \times \mathbb{R} \mid t = f(\mathbf{x})\}$ eine Nullmenge. Der Beweis ist nicht ganz so einfach, man muß die „gleichmäßige Stetigkeit“ von f auf Q benutzen.
5. Liegt Z in der Vereinigung von endlich vielen Quadern, so liegt Z sogar in einem einzigen Quader. Daraus folgt: Eine unbeschränkte Menge kann keine Nullmenge sein.
6. Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ beide rational}\}$ ist keine Nullmenge, obwohl sie abzählbar ist. Wir werden das an späterer Stelle beweisen.
7. Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

Ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so wird $v_n(Z) := 0$ gesetzt. Eine Nullmenge soll per definitionem das Maß oder Volumen Null haben!

Nun wollen wir daran gehen, beliebigen Mengen ein Maß zuzuordnen:

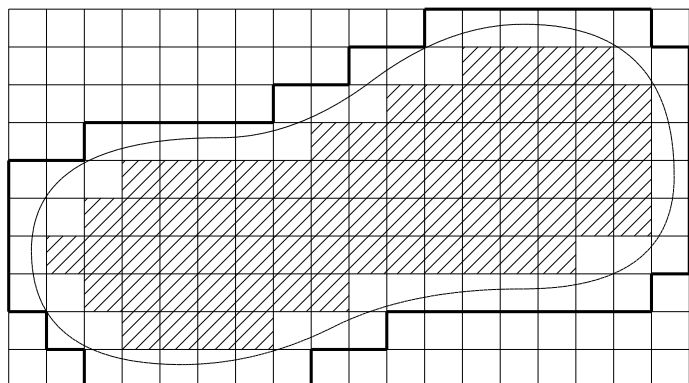
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine **beschränkte** Menge. Dann gibt es einen abgeschlossenen Quader Q_0 , in dem X enthalten ist, und wir können Partitionen \mathcal{P} von Q_0 betrachten. Die Menge aller Teilquader Q von \mathcal{P} mit $Q \cap X \neq \emptyset$ ist eine endliche Menge von Quadern, in deren Vereinigung X enthalten ist. Wir nennen so etwas eine *Quaderüberdeckung* von X .

Nun setzen wir

$$v_*(X, \mathcal{P}) := \sum_{Q \subset X} v_n(Q)$$

und

$$v^*(X, \mathcal{P}) := \sum_{Q \cap X \neq \emptyset} v_n(Q).$$



Definition.

$$v_*(X) := \sup_{\mathcal{P}} v_*(X, \mathcal{P}) \text{ heißt inneres Ma\ss von } X,$$

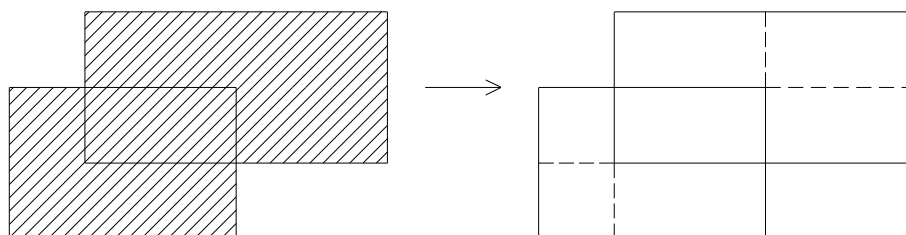
$$v^*(X) := \inf_{\mathcal{P}} v^*(X, \mathcal{P}) \text{ heißt \u00e4u\sseres Ma\ss von } X.$$

Die Menge X hei\ssst *(Jordan-)me\ssbar*, wenn $v_*(X) = v^*(X)$ ist. Der gemeinsame Wert hei\ssst *n -dimensionales Jordan-Ma\ss* oder *Inhalt* von X und wird mit $v_n(X)$ bezeichnet.

Bemerkung: Nur beschr\u00e4nkte Mengen k\u00f6nnen Jordan-me\ssbar sein. Man k\u00f6nnte auf die Idee kommen, da\ss Me\ssbarkeit und Ma\ss von dem zu Anfang gew\u00e4hlten Quader Q_0 abh\u00e4ngen. Es l\u00e4\ssst sich aber leicht zeigen, da\ss das nicht der Fall ist. Man kann z.B. den kleinsten Quader benutzen, in dem X enthalten ist.

Wir wollen den Me\ssbarkeitsbegriff noch etwas handlicher formulieren:

Unter einer *Quadersumme* verstehen wir eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Quadern. Jede Quadersumme kann so in Teilquader zerlegt werden, da\ss je zwei verschiedene Teilquader h\u00f6chstens Randpunkte gemeinsam haben.



Ist eine Quadersumme S in dieser Art in Teilquader zerlegt, so gewinnt man das Ma\ss $v_n(S)$ als Summe der Ma\sse aller Teilquader. Nun gilt:

I.3.1 Satz. Die Menge M ist genau dann me\ssbar, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Quadersummen S, T mit $S \subset M \subset T$ und

$$v_n(T) - v_n(S) < \varepsilon.$$

Der BEWEIS ergibt sich aus einer genauen Analyse aller benutzten Begriffe. □

Im Folgenden nehmen wir auf die Begriffe „innerer Punkt“ und „Randpunkt“ Bezug, die in Teil A, Kapitel V, §1, eingef\u00fchrt wurden.

Definition.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

1. Die Menge $\overset{\circ}{M}$ aller inneren Punkte von M nennt man ihren *offenen Kern*.
2. Die Menge aller Randpunkte von M bezeichnet man mit ∂M .
3. Die Menge $\bar{M} := M \cup \partial M$ nennt man die *abgeschlossene H\u00fclle* von M .

Man kann die abgeschlossene Hülle einer Menge auch auf andere Weise definieren:

Definition.

Ein Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder (Kugel-)Umgebung von \mathbf{a} unendlich viele Elemente von M liegen.

Ein Häufungspunkt einer Menge M braucht nicht zu M zu gehören, aber man kann immer eine Folge von Punkten in M finden, die gegen den Häufungspunkt konvergiert. Umgekehrt ist jeder Grenzwert einer konvergenten Folge von Punkten aus M zumindest ein Häufungspunkt von M .

Die abgeschlossene Hülle \bar{M} gewinnt man nun aus M , indem man zu M alle Häufungspunkte von M hinzufügt. Man erreicht dadurch, daß mit jeder konvergenten Folge von Punkten in M auch deren Grenzwert zu \bar{M} gehört.

Bemerkung: $\overset{\circ}{M}$ ist stets offen, \bar{M} und ∂M sind stets abgeschlossen. Außerdem ist

$$\overset{\circ}{M} \cap \partial M = \emptyset \quad \text{und} \quad \overset{\circ}{M} \subset M \subset \bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} M \text{ offen} &\iff \overset{\circ}{M} = M, \\ M \text{ abgeschlossen} &\iff \bar{M} = M. \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Sei $M := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$. Dann ist $\overset{\circ}{M} = (0, 1)$, $\bar{M} = [0, 1]$ und $\partial M = \{0, 1\}$.

2. Sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \text{ und } x \neq 0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1 \text{ und } x \neq 0\}, \\ \bar{M} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, \\ \text{und } \partial M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ und } (x = -1 \text{ oder } x = 0 \text{ oder } x = 1)\}. \end{aligned}$$

3. Sei $I := [0, 1]$ und $M := \{(x, y) \in I \times I \mid x, y \text{ rational}\}$. Dann ist $\overset{\circ}{M} = \emptyset$, $\bar{M} = I \times I$ und $\partial M = I \times I$.

Sind $M, N \subset \mathbb{R}^n$ zwei beschränkte Mengen mit $N \subset M$, so ist auch

$$v_*(N) \leq v_*(M) \quad \text{und} \quad v^*(N) \leq v^*(M).$$

Das ist anschaulich einigermaßen klar, aber darüber hinaus kann man zeigen:

I.3.2 Hilfssatz. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann gilt:

1. $v_*(\overset{\circ}{M}) = v_*(M)$ und $v^*(M) = v^*(\bar{M})$.

2. Es ist $v_*(M) + v^*(\partial M) = v^*(M)$.

BEWEIS:

Zu (1): Ist T eine Quadersumme, so ist T abgeschlossen, und daher gilt:

$$M \subset T \iff \bar{M} \subset T.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v^*(M) &= \inf\{v_n(T) \mid T \text{ Quadersumme, } M \subset T\} \\ &= \inf\{v_n(T) \mid T \text{ Quadersumme, } \bar{M} \subset T\} \\ &= v^*(\bar{M}). \end{aligned}$$

Die Aussage über $\overset{\circ}{M}$ ist etwas schwerer zu zeigen. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $v_*(M) > 0$ ist. Ist nun ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es eine Quadersumme S mit

$$S \subset M \quad \text{und} \quad v_*(M) - v_n(S) < \varepsilon.$$

Wenn wir alle an S beteiligten Quader ein wenig schrumpfen, so gewinnen wir eine Quadersumme $S' \subset \overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{M}$ mit $v_n(S) - v_n(S') < \varepsilon$. Aber dann ist

$$v_*(M) - 2\varepsilon < v_n(S) - \varepsilon < v_n(S') < v_*(\overset{\circ}{M}).$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, muß $v_*(M) \leq v_*(\overset{\circ}{M}) \leq v_*(M)$ sein.

Zu (2): Ist eine Quaderüberdeckung von \bar{M} gegeben, so ist

$$\sum_{Q \subset \overset{\circ}{M}} v_n(Q) + \sum_{Q \cap \partial M \neq \emptyset} v_n(Q) = \sum_{Q \cap \bar{M} \neq \emptyset} v_n(Q).$$

Läßt man die Überdeckungen feiner und feiner werden, so erhält man schließlich:

$$v_*(\overset{\circ}{M}) + v^*(\partial M) = v^*(\bar{M}).$$

Wegen (1) folgt die Behauptung. □

Nun ergibt sich:

I.3.3 Satz.

1. Ist M meßbar, so sind auch $\overset{\circ}{M}$ und \bar{M} meßbar, und es ist $v_n(M) = v_n(\overset{\circ}{M}) = v_n(\bar{M})$.
2. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann meßbar, wenn M beschränkt und ∂M eine Nullmenge ist.

BEWEIS:

1) Es ist $\overset{\circ}{M} \subset M \subset \bar{M}$, also

$$v_*(\overset{\circ}{M}) = v_*(M) \leq v_*(\bar{M}) \quad \text{und} \quad v^*(\overset{\circ}{M}) \leq v^*(M) = v^*(\bar{M}).$$

Da M meßbar ist, ist $v_*(M) = v^*(M)$. Setzt man das ein, so erhält man:

$$v^*(\overset{\circ}{M}) \leq v^*(M) = v_*(M) = v_*(\overset{\circ}{M})$$

und

$$v^*(\bar{M}) = v^*(M) = v_*(M) \leq v_*(\bar{M}),$$

also

$$v_*(\overset{\circ}{M}) = v^*(\overset{\circ}{M}) \quad \text{und} \quad v_*(\bar{M}) = v^*(\bar{M}).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

2) Ist M meßbar, so muß M beschränkt sein. Außerdem gilt nach Hilfssatz 3.2:

$$v^*(\partial M) = v^*(M) - v_*(M) = 0, \quad \text{also auch} \quad v_n(\partial M) = 0.$$

Ist umgekehrt M beschränkt und ∂M eine Nullmenge, so folgt wieder aus Hilfssatz 3.2, daß $v_*(M) = v^*(M)$ ist, also M meßbar. \square

Wir haben nun ein einfaches Kriterium für die Meßbarkeit gewonnen. Von den vorhin betrachteten Beispielen sind die ersten beiden Mengen meßbar, die dritte aber nicht!

Sind A, B zwei beliebige Mengen, so ist

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B, \quad \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B \quad \text{und} \quad \partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

Daraus folgt:

I.3.4 Satz. *Sind A, B meßbare Mengen, so sind auch $A \cap B, A \cup B$ und $A \setminus B$ meßbar. Insbesondere gilt:*

$$v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B).$$

Auf den BEWEIS der Formel verzichten wir hier. Man reduziert die Situation zunächst auf den Fall $A \cap B = \emptyset$. Dieser läßt sich dann sehr bequem mit Hilfe der im Folgenden zu besprechenden Integrationstheorie erledigen.

Schließlich kann man noch zeigen:

I.3.5 Satz. *Ist A meßbar im \mathbb{R}^n und B meßbar im \mathbb{R}^m , so ist $A \times B$ meßbar im \mathbb{R}^{n+m} , und es gilt:*

$$v_{n+m}(A \times B) = v_n(A) \cdot v_m(B).$$

Auch hier müssen wir auf den BEWEIS verzichten.

Wir haben jetzt gelernt, was eine meßbare Menge ist, aber wir wissen noch nicht, wie man das Maß einer Menge konkret berechnet. Zu diesem Zweck wollen wir den Begriff des Riemannsches Integrals auf den \mathbb{R}^n erweitern.

Sei zunächst $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion. Wir gehen so ähnlich wie im eindimensionalen Fall vor:

Ist \mathcal{P} eine Partition von Q , so soll $T \in \mathcal{P}$ bedeuten, daß T einer der durch \mathcal{P} bestimmten Teilquader von Q ist. Dann setzen wir

$$S_u(f, \mathcal{P}) := \sum_{T \in \mathcal{P}} \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T\} \cdot v_n(T)$$

und

$$S_o(f, \mathcal{P}) := \sum_{T \in \mathcal{P}} \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T\} \cdot v_n(T).$$

$S_u(f, \mathcal{P})$ heißt *Untersumme von f zur Partition \mathcal{P}* , und $S_o(f, \mathcal{P})$ heißt *Obersumme von f zur Partition \mathcal{P}* .

Definition.

Eine beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*im Riemannschen Sinne*) *integrierbar*, wenn gilt:

$$\sup\{S_u(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\} = \inf\{S_o(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\}.$$

Den gemeinsamen Wert nennen wir das (*Riemannsche*) *Integral von f über Q* , und wir benutzen dafür das Symbol

$$\int_Q f(\mathbf{x}) dv_n.$$

Beispiel:

Sei $f(\mathbf{x}) \equiv c$ auf Q . Dann ist

$$\inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T\} = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T\} = c$$

für alle Teilquader T von Q .

Also ist

$$S_u(f, \mathcal{P}) = \sum_{T \in \mathcal{P}} c \cdot v_n(T) = c \cdot v_n(Q)$$

und

$$S_o(f, \mathcal{P}) = \sum_{T \in \mathcal{P}} c \cdot v_n(T) = c \cdot v_n(Q)$$

für jede Zerlegung \mathcal{P} . Also ist f über Q integrierbar und

$$\int_Q f(\mathbf{x}) dv_n = c \cdot v_n(Q).$$

Das ist das Ergebnis, das wir erwarten. Das Integral ist der Inhalt des Quaders im \mathbb{R}^{n+1} , der über Q liegt und die Höhe c hat.

Häufig hat man es mit Funktionen zu tun, die nicht genau auf einem Quader definiert sind. Wir wollen nun versuchen, das Integral auch für solche Funktionen zu definieren.

Definition.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine (beliebige) Funktion. Unter dem *Träger von f* versteht man die Menge

$$\text{Tr}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Ist $\text{Tr}(f)$ eine beschränkte (und damit kompakte) Menge, so sagt man: *f ist eine Funktion mit kompaktem Träger*,

Beispiel:

$f(x, y) := \max(0, 1 - x^2 - y^2)$ ist eine Funktion mit kompaktem Träger.

I.3.6 Satz. Seien $P \subset Q$ zwei Quader im \mathbb{R}^n , $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $f|_{Q \setminus P} \equiv 0$. Dann gilt:

$$f \text{ integrierbar} \iff f|_P \text{ integrierbar},$$

und die beiden Integrale von f über P und Q sind gleich.

BEWEIS: Diejenigen Teilquader einer Quaderüberdeckung von Q , die P nicht treffen, leisten keinen Beitrag zu Ober- und Untersumme. \square

Definition.

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, Q ein Quader mit $\text{Tr}(f) \subset Q$. Ist $f|_Q$ integrierbar, so heißt auch f selbst *integrierbar*, und man setzt

$$\int f(\mathbf{x}) dv_n := \int_Q (f|_Q)(\mathbf{x}) dv_n.$$

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*über M*) *integrierbar*, falls die Funktion

$$\hat{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{falls } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_M f(\mathbf{x}) dv_n := \int \hat{f}(\mathbf{x}) dv_n.$$

Bemerkung: Daß die Definition in Teil (1) nicht von der Wahl des umgebenden Quaders abhängt, ergibt sich sofort aus dem vorigen Satz.

Ist $f(\mathbf{x}) \neq 0$ über einer unbeschränkten Menge M , so kann man f nicht über M integrieren.

I.3.7 Satz. Sei Q ein (abgeschlossener) Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die außerhalb einer Nullmenge stetig ist. Dann ist f integrierbar.

Dieser Satz entspricht der Aussage, daß eine stückweise stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall integrierbar ist (Teil A, Satz III.3.1 und Folgerung III.3.2,2). Allerdings ist die Aussage hier etwas allgemeiner: Eine Teilmenge eines abgeschlossenen Intervalls in \mathbb{R} ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie höchstens endlich viele Häufungspunkte hat. Sie darf demnach aber eine unendliche Menge sein. Unendlich viele Unstetigkeitsstellen hatten wir bisher nicht zugelassen.

Auf den BEWEIS des Satzes müssen wir hier wieder verzichten.

I.3.8 Folgerung. *Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über M integrierbar.*

BEWEIS: M ist beschränkt, liegt also in einem Quader Q . $\partial M \subset Q$ ist eine Nullmenge, und \hat{f} ist auf den Mengen $\overset{\circ}{M}$ und $Q \setminus \bar{M}$ stetig, also über Q integrierbar. Da $\text{Tr}(f) \subset Q$ ist, ist \hat{f} integrierbar, und damit auch f über M integrierbar. \square

Es folgen einige Integrationsregeln:

I.3.9 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar.*

1. Sind f und g über M integrierbar, so auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$, und es gilt:

$$\int_M (c_1 \cdot f(\mathbf{x}) + c_2 \cdot g(\mathbf{x})) dv_n = c_1 \cdot \int_M f(\mathbf{x}) dv_n + c_2 \cdot \int_M g(\mathbf{x}) dv_n.$$

2. Sind f und g über M integrierbar und ist $f \leq g$ auf M , so ist

$$\int_M f(\mathbf{x}) dv_n \leq \int_M g(\mathbf{x}) dv_n.$$

3. Mit f ist auch $|f|$ über M integrierbar, und es gilt:

$$\left| \int_M f(\mathbf{x}) dv_n \right| \leq \int_M |f(\mathbf{x})| dv_n \leq \sup_M |f| \cdot v_n(M).$$

4. Sei f auf M integrierbar und $N \subset M$ meßbar. Dann ist f auch über N integrierbar.

Ist N eine Nullmenge, so ist $\int_N f(\mathbf{x}) dv_n = 0$.

5. Sei $M = A \cup B$, mit $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$. Beide Mengen seien meßbar. Dann gilt:

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $f|_A$ und $f|_B$ integrierbar sind. Ist das der Fall, so ist

$$\int_M f(\mathbf{x}) dv_n = \int_A f(\mathbf{x}) dv_n + \int_B f(\mathbf{x}) dv_n.$$

Aus Zeitgründen müssen wir auf den Beweis verzichten.

Manchmal kann man die Integrierbarkeit einer Funktion auch durch Vergleich mit einer anderen Funktion testen:

I.3.10 Satz. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $N \subset M$ eine Nullmenge. Ist $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf $M \setminus N$ mit f übereinstimmt, so ist auch g integrierbar, und die Integrale über f und g sind gleich.

BEWEIS: $U := M \setminus N$ ist meßbar, und aus den Integrationsregeln folgt, daß $g|_U = f|_U$ integrierbar ist. Da g beschränkt ist, folgt über eine einfache Abschätzung der Obersummen, daß g über N integrierbar und $\int_N g(\mathbf{x}) dv_n = 0$ ist. Also ist g über $M = U \cup N$ integrierbar und

$$\int_M g(\mathbf{x}) dv_n = \int_U g(\mathbf{x}) dv_n + \int_N g(\mathbf{x}) dv_n = \int_U f(\mathbf{x}) dv_n + \int_N f(\mathbf{x}) dv_n = \int_M f(\mathbf{x}) dv_n.$$

□

Nun kommen wir zu dem Satz, der die praktische Berechnung von Integralen ermöglicht:

I.3.11 Satz von Fubini (für Riemann-Integrale).

Seien $P \subset \mathbb{R}^p$ und $Q \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader, $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Für $\mathbf{x} \in P$ sei $f_{\mathbf{x}} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Es gebe eine Nullmenge $N \subset P$ (die auch leer sein kann), so daß $f_{\mathbf{x}}$ für alle $\mathbf{x} \in P \setminus N$ integrierbar ist.

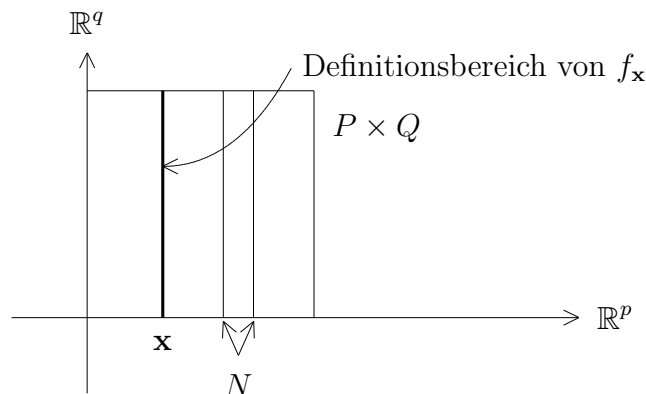
Dann ist die Funktion $I_Q f : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$I_Q f(\mathbf{x}) := \int_Q f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) dv_q$$

integrierbar, und es ist

$$\int_{P \times Q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dv_{p+q} = \int_P I_Q f(\mathbf{x}) dv_p = \int_P \left(\int_Q f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dv_q \right) dv_p.$$

BEWEIS: Wir beschränken uns im Beweis auf den Fall, daß $f_{\mathbf{x}}$ für **alle** $\mathbf{x} \in P$ integrierbar ist. Der allgemeine Fall ist technisch etwas aufwendiger zu zeigen. (Vorkommen kann er leider allemal, es könnte ja f entlang einer Menge vom Typ $\{\mathbf{x}\} \times Q$ unstetig sein.)



Wir werden bald zeigen, daß das n-dimensionale Riemannsche Integral durch ein n-fach iteriertes Integral ausgerechnet werden kann. Dann bekommt die Funktion I_Q die Gestalt

$$I_Q f(x_1, \dots, x_p) := \int_Q f(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) dy_1 \cdots dy_q.$$

Ist \mathcal{P}_P eine Partition von P und \mathcal{P}_Q eine Partition von Q , so ist

$$\mathcal{P} := \{S = S' \times S'' \mid S' \in \mathcal{P}_P \quad \text{und} \quad S'' \in \mathcal{P}_Q\}$$

eine Partition des Quaders $P \times Q$.

Aus der Integrierbarkeit von $f_{\mathbf{x}}$ folgt:

$$\begin{aligned} S_u(f_{\mathbf{x}}, \mathcal{P}_Q) &\leq \int_Q f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \, dv_q \leq S_o(f_{\mathbf{x}}, \mathcal{P}_Q). \\ &\quad \uparrow \\ &= I_Q f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Daher gilt (mit $n := p + q$):

$$\begin{aligned} S_u(f, \mathcal{P}) &= \sum_{S \in \mathcal{P}} \inf\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S\} \cdot v_n(S) \\ &= \sum_{\substack{S' \in \mathcal{P}_P \\ S'' \in \mathcal{P}_Q}} \inf\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S' \times S''\} \cdot v_p(S') v_q(S'') \\ &= \sum_{\substack{S' \in \mathcal{P}_P \\ S'' \in \mathcal{P}_Q}} \inf_{\mathbf{x} \in S'} \inf\{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in S''\} \cdot v_p(S') v_q(S'') \\ &\leq \sum_{S' \in \mathcal{P}_P} \inf_{\mathbf{x} \in S'} \left(\sum_{S'' \in \mathcal{P}_Q} \inf\{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in S''\} \cdot v_q(S'') \right) v_p(S') \quad (\text{siehe } ^3) \\ &= \sum_{S' \in \mathcal{P}_P} \inf_{\mathbf{x} \in S'} (S_u(f_{\mathbf{x}}, \mathcal{P}_Q)) \cdot v_p(S') \\ &\leq \sum_{S' \in \mathcal{P}_P} \inf_{\mathbf{x} \in S'} (I_Q f(\mathbf{x})) v_p(S') \\ &= S_u(I_Q f, \mathcal{P}_P). \end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß $S_o(I_Q f, \mathcal{P}_P) \leq S_o(f, \mathcal{P})$ ist. Da f integrierbar ist, kann man die Partitionen so fein wählen, daß die Differenz von $S_o(f, \mathcal{P})$ und $S_u(f, \mathcal{P})$ beliebig klein wird. Daraus folgt, daß auch die Differenz von $S_o(I_Q f, \mathcal{P}_P)$ und $S_u(I_Q f, \mathcal{P}_P)$ beliebig klein wird, daß also $I_Q f$ integrierbar ist, und daß

$$\int_P I_Q f(\mathbf{x}) \, dv_p = \int_{P \times Q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dv_n$$

ist. □

I.3.12 Folgerung. Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, dv_n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_n.$$

Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge der Integrationen an.

³Es wird folgender einfach zu beweisender Sachverhalt benutzt: Sind f_1, \dots, f_m Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall I , so ist

$$\sum_{i=1}^m \inf_x f_i(x) \leq \inf_x \sum_{i=1}^m f_i(x).$$

Die Formel ergibt sich durch sukzessive Anwendung des gerade bewiesenen Satzes von Fubini. Damit haben wir den gewünschten Zusammenhang zwischen dem n -dimensionalen Riemannschen Integral und dem n -fach iterierten 1-dimensionalen Integral hergestellt. Mehrfache Integrale haben wir aber schon in dem Abschnitt über Parameterintegrale behandelt, und von dort können wir die Erkenntnis übernehmen, daß es bei der mehrfachen Integration nicht auf die Reihenfolge ankommt.

Man beachte aber, daß wir die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen nur für **stetige** Integranden bewiesen haben!

Jetzt wollen wir die Verbindung zwischen Integration und Volumenmessung herstellen:

Definition.

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so heißt die durch

$$c_A(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $c_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die *charakteristische Funktion von A* .

Ist die Menge A beschränkt, so ist c_A eine Funktion mit kompaktem Träger. Auf den offenen Mengen $\overset{\circ}{A}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ ist c_A konstant und daher stetig. In den Punkten von ∂A ist c_A dagegen zwangsläufig unstetig.

I.3.13 Satz. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann meßbar, wenn die charakteristische Funktion c_M integrierbar ist. In dem Fall ist*

$$\int c_M(\mathbf{x}) dv_n = v_n(M).$$

BEWEIS: Ist M meßbar, so ist M beschränkt und ∂M eine Nullmenge. Dann ist c_M eine Funktion mit kompaktem Träger, die außerhalb der Nullmenge ∂M stetig ist. Also ist c_M integrierbar.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß c_M integrierbar ist, so muß M in einem Quader Q enthalten sein, und

$$\sup\{S_u(c_M, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\} = \inf\{S_o(c_M, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Partition von } Q\}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} S_u(c_M, \mathcal{P}) &= \sum_{T \in \mathcal{P}} \inf\{c_M(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T\} \cdot v_n(T) \\ &= \sum_{\substack{T \in \mathcal{P} \\ T \subset M}} v_n(T) = v_*(M, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_o(c_M, \mathcal{P}) &= \sum_{T \in \mathcal{P}} \sup\{c_M(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T\} \cdot v_n(T) \\ &= \sum_{\substack{T \in \mathcal{P} \\ T \cap M \neq \emptyset}} v_n(T) = v^*(M, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Also ist $v_*(M) = v^*(M) = \int_Q c_M(\mathbf{x}) dv_n$. □

Erst jetzt sind wir in der Lage, die bekannten Integrationsmethoden auf die Berechnung von Flächen und Volumina anzuwenden.

Beispiel:

Seien $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und für alle $x \in [a, b]$ sei

$$c \leq \varphi(x) < \psi(x) \leq C.$$

Dann liegt

$$M := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

in dem abgeschlossenen Quader $Q := [a, b] \times [c, C]$, ist also beschränkt. Der Rand von M setzt sich aus 4 Stücken zusammen. Der linke und der rechte Teil ist jeweils in einer Geraden parallel zur y-Achse enthalten und daher Nullmenge. Die obere und untere Abgrenzung ist jeweils Graph einer stetigen Funktion und deshalb auch Nullmenge. Also ist schließlich ∂M eine Nullmenge und M meßbar. Nun folgt:

$$\begin{aligned} v_2(M) &= \int_Q c_M(\mathbf{x}) dv_2 \\ &= \int_a^b \int_c^C c_M(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy dx \\ &= \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx, \end{aligned}$$

und das ist genau das Ergebnis, das wir erwartet haben.

Für spätere Anwendungen benötigen wir noch den

I.3.14 Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Ist f stetig auf dem (abgeschlossenen) Quader Q , so gibt es ein $\xi \in Q$ mit*

$$\int_Q f(\mathbf{x}) dv_n = f(\xi) \cdot v_n(Q).$$

Der BEWEIS kann fast wörtlich aus Teil A übernommen werden (III.3.5). Es geht die Monotonie des Integrals ein, die auf die Ungleichungskette

$$m \cdot c_Q(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq M \cdot c_Q(\mathbf{x})$$

angewandt wird. Dabei sind m und M das Minimum bzw. Maximum von f auf Q . Wird m in \mathbf{x}_1 und M in \mathbf{x}_2 angenommen, so kann man ξ auf der Verbindungsstrecke von \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 finden, die ja auf jeden Fall ganz in Q verläuft.

§4 Integrationsmethoden

Wir wollen jetzt verschiedene Verfahren zur praktischen Berechnung von Integralen und Inhalten kennenlernen.

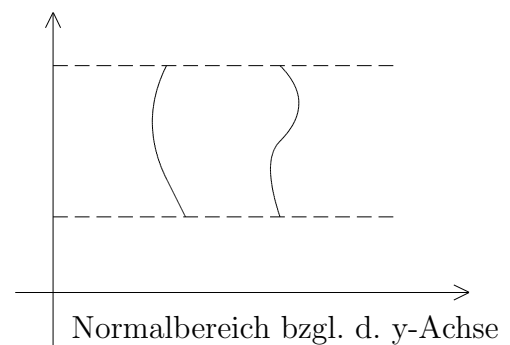
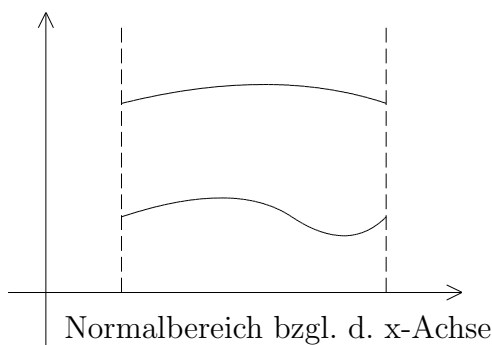
Definition.

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der x-Achse*, wenn es ein Intervall $[a, b]$ auf der x-Achse und stetige Funktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$) gibt, so daß gilt:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \quad \text{und} \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich bezüglich der y-Achse*, wenn es ein Intervall $[c, d]$ auf der y-Achse und stetige Funktionen $r, s : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $r(y) \leq s(y)$ für alle $y \in [c, d]$) gibt, so daß gilt:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r(y) \leq x \leq s(y) \quad \text{und} \quad c \leq y \leq d\}.$$



Normalbereiche sind abgeschlossene Mengen, und wie in dem Beispiel am Schluß des vorangegangenen Paragraphen kann man auch allgemein recht schnell schließen, daß sie meßbare Mengen sind. Also sind stetige Funktionen über Normalbereichen integrierbar.

I.4.1 Satz. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Mit den Notationen aus der vorangegangenen Definition gilt:

a) Ist B Normalbereich bezüglich der x-Achse, so ist

$$\int_B f(\mathbf{x}) \, dv_2 = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

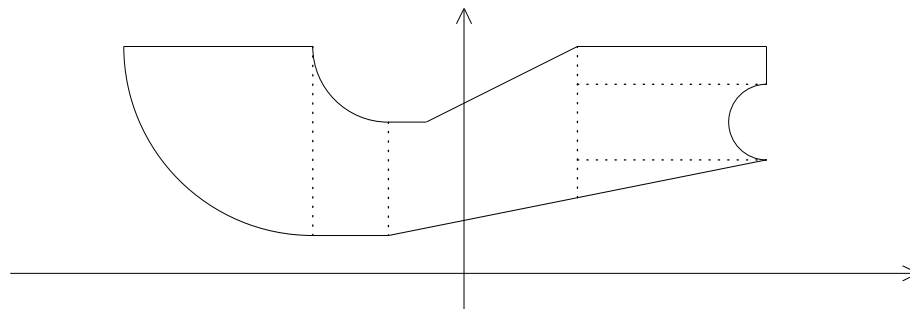
b) Ist B Normalbereich bezüglich der y-Achse, so ist

$$\int_B f(\mathbf{x}) \, dv_2 = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Der BEWEIS ergibt sich einfach aus dem Satz von Fubini.

Ein stückweise glatter stetiger Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *einfach geschlossen*, falls α geschlossen ist (also $\alpha(a) = \alpha(b)$) und keine Kreuzungspunkte besitzt (also $\alpha|_{(a,b)}$ injektiv).

Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte Teilmenge, deren Rand ein einfach geschlossener stückweise glatter stetiger Weg ist, so kann man B durch endlich viele achsenparallele Schnitte in Normalbereiche zerlegen und somit jede stetige Funktion über B integrieren.



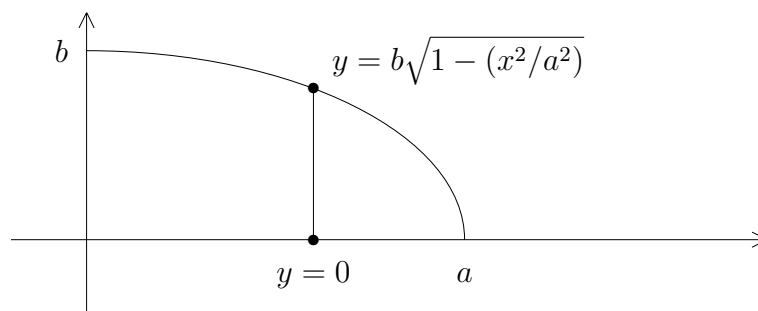
Beispiele:

1. Sei B derjenige Teil einer Ellipsenfläche um den Nullpunkt (mit den Halbachsen a und b , der im rechten oberen Quadranten liegt. Es soll das Integral $\int_B xy \, dv_2$ berechnet werden.

Der Rand von B ist durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

gegeben. Offensichtlich ist B ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_B xy \, dv_2 &= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \right) dx \\ &= \int_0^a \frac{x}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} \\ &= \frac{a^2 b^2}{8}. \end{aligned}$$

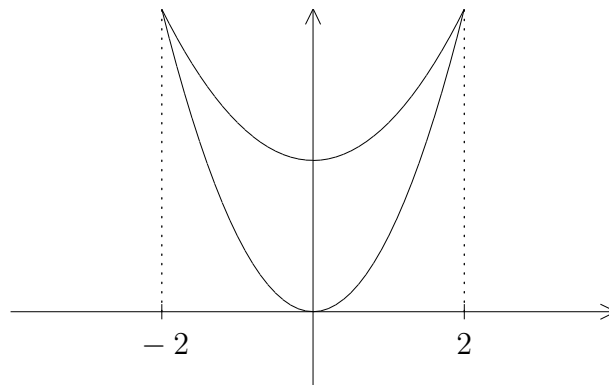
2. Sei $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := 2 + \frac{1}{2}x^2$. Dann ist

$$\varphi(-2) = \psi(-2) = 4 \quad \text{und} \quad \varphi(2) = \psi(2) = 4,$$

und für $|x| \leq 4$ ist $x^2 \leq 4$, also $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$. Daher ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:



Ist $Q = [-2, 2] \times [0, 4]$, so ist die Fläche von B gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_Q c_B(x, y) dv_2 &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{2+(x^2/2)} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(2x - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \left(4 - \frac{8}{6}\right) - \left(-4 + \frac{8}{6}\right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

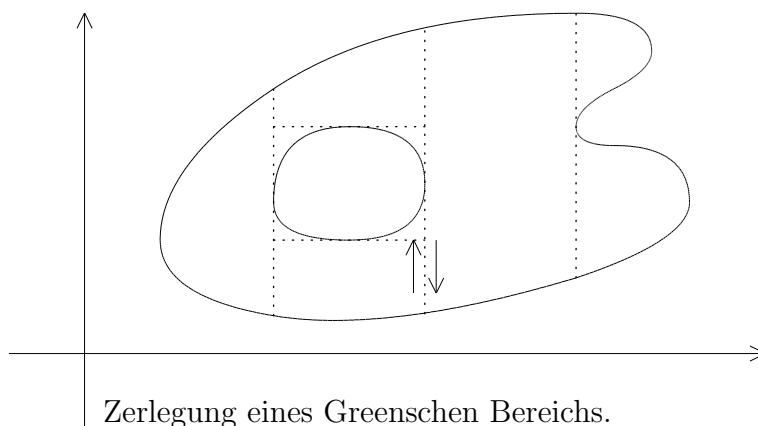
Definition.

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Standardbereich*, wenn sie Normalbereich bezüglich beider Achsen ist.

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ hat einen *stückweise glatten Rand*, wenn ∂B aus endlich vielen stückweise glatten und stetigen Kurvenstücken besteht.

B heißt *Greenscher Bereich*, wenn sich B in endlich viele Standardbereiche mit stückweise glattem Rand zerlegen läßt.

Dreiecke, Rechtecke, Kreisscheiben und Ellipsen sind Beispiele für Standardbereiche. Ist G ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, so ist \bar{G} meist ein Greenscher Bereich.



Es wird folgende Vereinbarung getroffen: Der Rand eines Greenschen Bereichs soll stets so durchlaufen werden, daß das Innere des Bereichs „links“ vom Wege liegt. Wir können den Rand übrigens immer als eine Kette von stückweise glatten stetigen einfach geschlossenen Wegen auffassen.

Definition.

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und f eine stetige Funktion auf $|\alpha|$. Dann definiert man für $i = 1, \dots, n$:

$$\int_{\alpha} f dx_i := \int_{\alpha} (f \cdot \mathbf{e}_i) \bullet d\mathbf{x} = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'_i(t) dt.$$

Wenn wir im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 dx , dy und dz an Stelle von dx_1 , dx_2 und dx_3 verwenden, ergibt sich folgende Schreibweise:

1. Ist $\mathbf{F} = (P, Q)$ ein stetiges Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^2 , so ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{\alpha} (P dx + Q dy).$$

2. Ist $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ ein stetiges Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^3 , so ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{\alpha} (P dx + Q dy + R dz).$$

I.4.2 Greenscher Integralsatz. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\mathbf{F} = (P, Q)$ ein stetiges Vektorfeld auf U und $B = \bar{B} \subset U$ ein Greenscher Bereich. Dann ist

$$\int_{\partial B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{x}) \right) dv_2.$$

BEWEIS: Wir führen den Beweis hier nur für Standardbereiche. Zerlegt man einen beliebigen Greenschen Bereich in Standardbereiche, so fallen die Integrale über alle diejenigen Rand-Wege, die doppelt durchlaufen werden, weg, da sie wegen der Vereinbarung über die Orientierung des Randes mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen sind.

Sei also

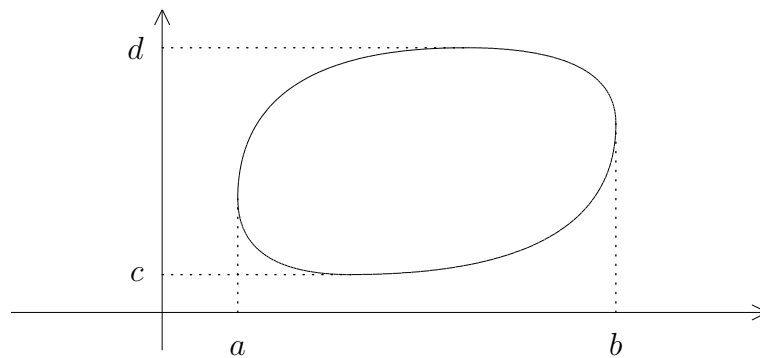
$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \\ &= \{(x, y) \mid c \leq y \leq d \text{ und } r(y) \leq x \leq s(y)\}, \end{aligned}$$

mit $\varphi(a) = \psi(a)$, $\varphi(b) = \psi(b)$, $r(c) = s(c)$ und $r(d) = s(d)$. Den Rand von B kann man dann entweder aus den Wegen

$$\alpha(t) := (a + b - t, \psi(a + b - t)) \quad \text{und} \quad \beta(t) := (t, \varphi(t)), \quad t \in [a, b],$$

zusammensetzen, oder aus den Wegen

$$\gamma(t) := (s(t), t) \quad \text{und} \quad \delta(t) := (r(c + d - t), c + d - t), \quad t \in [c, d].$$



Zunächst ist

$$\begin{aligned} - \int_B \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{x}) \, dv_2 &= - \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))] \, dx. \end{aligned}$$

Und andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} P \, dx &= \int_{\alpha} P \, dx + \int_{\beta} P \, dx \\ &= \int_a^b (-P(a + b - t, \psi(a + b - t)) + P(t, \varphi(t))) \, dt \\ &= \int_b^a P(x, \psi(x)) \, dx + \int_a^b P(x, \varphi(x)) \, dx \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))] \, dx. \end{aligned}$$

Das ergibt die Gleichung

$$\int_{\partial B} P \, dx = - \int_B \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{x}) \, dv_2.$$

Analog erhält man:

$$\int_{\partial B} Q \, dy = \int_B \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{x}) \, dv_2.$$

□

Beispiel:

Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} (2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy) &= \int_{\partial B} (2xy^3, 3x^2y^2) \bullet d\mathbf{x} \\ &= \int_B (6xy^2 - 6xy^2) dv_2 = 0. \end{aligned}$$

Man kann den Begriff des Normalbereichs auch auf höhere Dimensionen ausdehnen. Wir wollen das hier nicht im einzelnen durchführen, sondern uns auf einen Spezialfall beschränken:

Ein *Normalbereich* bezüglich der xy -Ebene im \mathbb{R}^3 ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q \text{ und } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

wobei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader ist und $\varphi, \psi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind. B ist abgeschlossen und meßbar, und für eine stetige Funktion f auf B gilt:

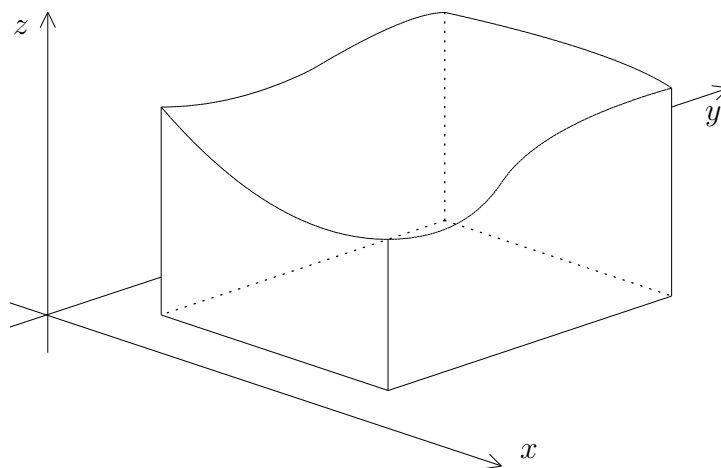
$$\int_B f(x, y, z) dv_3 = \int_Q \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dv_2.$$

Beispiel:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die sogenannte *Ordinatenmenge*

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

ein Normalbereich bezüglich der xy -Ebene.



$$\begin{aligned} \text{Dann ist} \quad v_3(B) &= \int_B 1 dv_3 \\ &= \int_Q \left(\int_0^{f(x, y)} dz \right) dv_2 \\ &= \int_Q f(x, y) dv_2. \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß das Integral über f mit dem Volumen der Ordinatenmenge übereinstimmt.

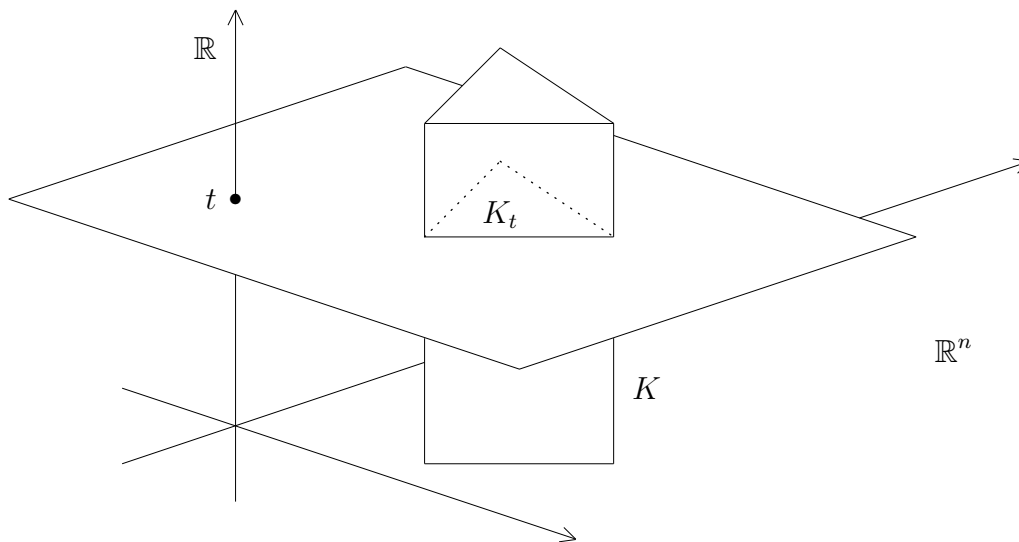
I.4.3 Prinzip von Cavalieri. Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ meßbar, und für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei

$$K_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}, t) \in K\}$$

leer oder eine meßbare Menge.

Ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid K_t \text{ nicht leer}\}$ ein Intervall $[a, b]$, so ist die durch $t \mapsto v_n(K_t)$ definierte Funktion über $[a, b]$ integrierbar, und es gilt:

$$v_{n+1}(K) = \int_a^b v_n(K_t) dt.$$



BEWEIS: Weil K meßbar ist, gibt es einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, so daß $K \subset Q \times [a, b]$ ist, und die charakteristische Funktion c_K ist integrierbar über $Q \times [a, b]$.

Weil außerdem die Mengen K_t für jedes $t \in [a, b]$ meßbar sind, ist für jedes solche t die Funktion $\mathbf{x} \mapsto c_{K_t}(\mathbf{x}) = c_K(\mathbf{x}, t)$ integrierbar. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt, und es gilt:

Die Funktion $t \mapsto \int_Q c_K(\mathbf{x}, t) dv_n = v_n(K_t)$ ist integrierbar über $[a, b]$, und es gilt:

$$v_{n+1}(K) = \int_{Q \times [a, b]} c_K(\mathbf{x}, t) dv_{n+1} = \int_a^b v_n(K_t) dt.$$

□

Das Prinzip von Cavalieri wird gerne in der Schule zur Volumenberechnung herangezogen.

I.4.4 Folgerung. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $r > 0$ eine feste reelle Zahl. Dann ist auch die Menge $r \cdot K := \{r \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K\}$ meßbar, und es ist

$$v_n(r \cdot K) = r^n \cdot v_n(K).$$

BEWEIS: Die Meßbarkeit wird in einer Übungsaufgabe gezeigt.

Die Formel zur Volumenberechnung gewinnen wir induktiv:

$n = 1$: Ist $K \subset [a, b]$, so ist $r \cdot K \subset [ra, rb]$. Also gilt:

$$\begin{aligned} v_1(r \cdot K) &= \int_{ra}^{rb} c_{r \cdot K}(t) dt \\ &= r \cdot \int_{ra}^{rb} c_K\left(\frac{1}{r} \cdot t\right) \frac{1}{r} dt \\ &= r \cdot \int_a^b c_K(s) ds = r \cdot v_1(K). \end{aligned}$$

$(n - 1) \implies (n)$: Es ist

$$\begin{aligned} (r \cdot K)_t &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\mathbf{x}, t) \in r \cdot K\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \left(\frac{1}{r}\mathbf{x}, \frac{t}{r}\right) \in K\} \\ &= r \cdot \left\{\frac{1}{r}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \left(\frac{1}{r}\mathbf{x}, \frac{t}{r}\right) \in K\right\} \\ &= r \cdot \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \left(\mathbf{y}, \frac{t}{r}\right) \in K\right\} = r \cdot K_{t/r}. \end{aligned}$$

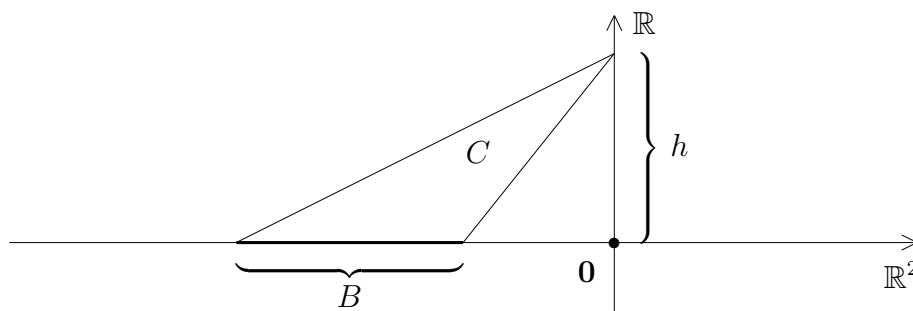
Jetzt können wir den Induktionsschritt vollziehen:

$$\begin{aligned} v_n(r \cdot K) &= \int_{ra}^{rb} v_{n-1}((r \cdot K)_t) dt \\ &= \int_{ra}^{rb} v_{n-1}(r \cdot K_{t/r}) dt \\ &= r^{n-1} \cdot \int_{ra}^{rb} v_{n-1}(K_{t/r}) dt \\ &= r^n \cdot \int_{ra}^{rb} v_{n-1}(K_{t/r}) \frac{1}{r} dt \\ &= r^n \cdot \int_a^b v_{n-1}(K_s) ds \\ &= r^n \cdot v_n(K). \end{aligned}$$

□

Beispiele:

1. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine meßbare Menge und $h > 0$. Dann nennt man die Menge $C := \{((1 - \lambda)\mathbf{x}, \lambda h) \mid \mathbf{x} \in B \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ den *Kegel über der Grundfläche B mit der Spitze in $(0, h)$* .



C ist beschränkt, und man kann nachweisen, daß ∂C eine Nullmenge ist. Also ist C meßbar, und für $t \in [0, h]$ ist

$$\begin{aligned} C_t &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{x}, t) \in C\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ mit } \frac{1}{1-\lambda} \mathbf{x} \in B, \lambda h = t\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \mathbf{y} \in B \text{ mit } \mathbf{x} = (1 - \frac{t}{h}) \mathbf{y}\} \\ &= (1 - \frac{t}{h}) \cdot B \end{aligned}$$

meßbar. Nach Cavalieri ist dann

$$\begin{aligned} v_3(C) &= \int_0^h v_2(C_t) dt \\ &= \int_0^h v_2((1 - \frac{t}{h}) \cdot B) dt \\ &= v_2(B) \cdot \int_0^h (1 - \frac{t}{h})^2 dt \\ &= v_2(B) \cdot (-h) \cdot \int_0^h \varphi(t)^2 \varphi'(t) dt \quad (\varphi(t) := 1 - \frac{t}{h}) \\ &= v_2(B) \cdot (-h) \cdot \int_1^0 x^2 dx \\ &= v_2(B) \cdot h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot v_2(B) \cdot h. \end{aligned}$$

2. Wir können jetzt auch das Volumen einer Kugel ausrechnen:

Allgemein ist $v_3(B_r(\mathbf{0})) = r^3 \cdot v_3(B_1(\mathbf{0}))$. Wir müssen also nur das Volumen der Einheitskugel bestimmen:

Es ist

$$(B_1(\mathbf{0}))_t = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } |t| > 1 \\ B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2 & \text{falls } |t| \leq 1, \end{cases}$$

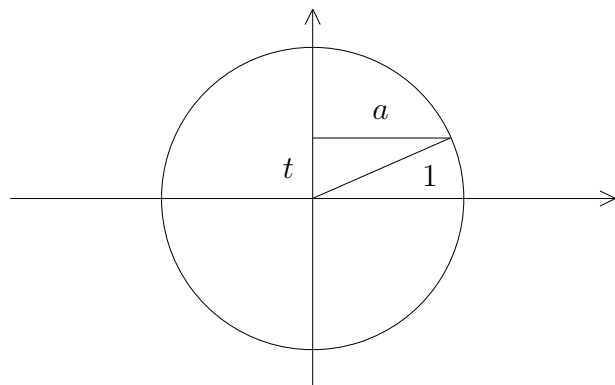
wobei

$$a^2 + t^2 = 1,$$

also

$$a = \sqrt{1 - t^2}$$

ist.



$$\text{Also ist} \quad v_3(B_1(\mathbf{0})) = \int_{-1}^1 v_2(B_{\sqrt{1-t^2}}(\mathbf{0})) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 (1-t^2) \cdot v_2(B_1(\mathbf{0})) dt \\
&= \pi \cdot \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \\
&= \pi \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-1}^1 \\
&= \pi \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

3. Leicht läßt sich nun auch das Volumen von Rotationskörpern bestimmen: Es seien zwei stetige Funktionen f, g auf $[a, b]$ gegeben, mit $0 \leq g \leq f$. Dann ist

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(z) \leq x^2 + y^2 \leq f(z), z \in [a, b]\}$$

der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den durch g und f bestimmten Normalbereich um die z -Achse rotieren läßt.

Behauptung: $v_3(R) = \pi \cdot \int_a^b (f(z)^2 - g(z)^2) dz$.

Zum BEWEIS genügt es, den Fall $g(z) \equiv 0$ zu betrachten. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
v_3(R) &= \int_a^b v_2(R_t) dt \\
&= \int_a^b v_2(B_{f(t)}(\mathbf{0})) dt \\
&= \int_a^b f(t)^2 \pi dt.
\end{aligned}$$

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir die Substitutionsregel auf mehrere Variablen verallgemeinern.

Wir beginnen mit folgendem Spezialfall:

$$\begin{aligned}
\text{Sei } P &:= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \\
\text{und } Q &:= [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n].
\end{aligned}$$

Außerdem seien $\varphi_i : [c_i, d_i] \rightarrow [a_i, b_i]$ Parametertransformationen, $i = 1, \dots, n$.

Ist φ_i streng monoton wachsend, so ist $\varphi_i(c_i) = a_i$ und $\varphi_i(d_i) = b_i$, andernfalls ist $\varphi_i(c_i) = b_i$ und $\varphi_i(d_i) = a_i$. Setzen wir

$$F(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)),$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{F(Q)} f(\mathbf{y}) dv_n &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \\
&= \int_{c_n}^{d_n} \dots \int_{c_1}^{d_1} f(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)) \cdot |\varphi_1'(x_1)| \cdot \dots \cdot |\varphi_n'(x_n)| dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_Q f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det F'(\mathbf{x})| dv_n.
\end{aligned}$$

Durch Einführung der Betragsstriche wird vermieden, daß die Integrationsrichtung umgekehrt werden muß.

Beispiel:

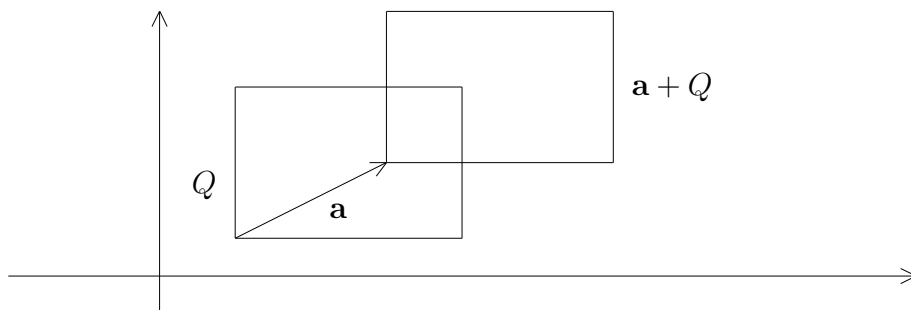
Ist $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor, so wird durch

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a} = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

die Translation $T_{\mathbf{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Es ist

$$J_{T_{\mathbf{a}}}(\mathbf{x}) = \det T'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so bezeichnen wir mit $\mathbf{a} + Q$ den um den Vektor \mathbf{a} verschobenen Quader.



Offensichtlich gilt für eine stetige Funktion f auf $\mathbf{a} + Q$:

$$\int_{\mathbf{a}+Q} f(\mathbf{x}) dv_n = \int_Q f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) dv_n.$$

Man spricht von der *Translationsinvarianz des Integrals*.

Wie weit läßt sich die gewonnene Substitutionsregel verallgemeinern? Wir beginnen mit linearen Transformationen $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dazu müssen wir uns an einige Details aus der Linearen Algebra erinnern: Ist $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n (in Spaltenschreibweise), so wird L gerade durch diejenige Matrix A beschrieben, die aus den Spalten

$$\vec{a}_1 := L(\vec{e}_1), \dots, \vec{a}_n := L(\vec{e}_n)$$

gebildet wird. Es ist $\det A = 0$ genau dann, wenn die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ linear abhängig sind. Da diese Vektoren das Bild von L aufspannen, liegt $\text{Im}(L)$ dann in einer Hyperebene und ist eine Nullmenge. Andererseits ist die Funktionalmatrix einer linearen Abbildung einfach deren Matrix bezüglich der Standardbasen. Also stimmt die oben gewonnene Formel für alle linearen Abbildungen L mit $\det L = 0$. Sie ist dann jedoch völlig uninteressant, denn beide Seiten sind $= 0$.

Wir beschäftigen uns daher nur noch mit der Situation, daß $J_F \neq 0$ ist. Bleiben wir bei linearen Abbildungen. Für linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ im \mathbb{R}^n ist

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

das von den Vektoren aufgespannte *Parallelotop*. Im Falle $n = 2$ ergibt sich ein Parallelogramm, im Falle $n = 3$ ein „Spat“ (vgl. A, Kapitel I, §5). Wir wissen schon:

1. Sind $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ zwei ebene Vektoren im \mathbb{R}^3 , so ist $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ der Flächeninhalt des von (a_1, a_2) und (b_1, b_2) im \mathbb{R}^2 aufgespannten Parallelogramms. Und aus der Definition des Vektorproduktes folgt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Setzen wir $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, so folgt:

Für zwei Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ ist

$$v_2(P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) = |\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|.$$

2. Sind $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$v_3(P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)) = |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]| = |\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|.$$

(vgl. dazu A, Kapitel I, §5).

Ohne Beweis nehmen wir zur Kenntnis, daß für beliebiges n gilt:

$$v_n(P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) = |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|.$$

Daraus folgt nun:

I.4.5 Satz. Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, so ist

$$v_n(L(Q)) = |\det L| \cdot v_n(Q), \quad \text{also} \quad \int_{L(Q)} 1 \, dv_n = \int_Q (1 \circ L) |\det L| \, dv_n.$$

BEWEIS: Der Quader Q ist durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte festgelegt, etwa $Q = Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Setzen wir $\mathbf{c} := \mathbf{b} - \mathbf{a}$, so können wir auch schreiben:

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} + Q(\mathbf{0}, \mathbf{c}).$$

Da das Integral translationsinvariant und L linear ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß schon $Q = Q(\mathbf{0}, \mathbf{c})$ ist, mit einem Vektor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Aber dann ist

$$Q = P(c_1 \mathbf{e}_1, \dots, c_n \mathbf{e}_n),$$

also

$$\begin{aligned} v_n(Q) &= |\det(c_1 \mathbf{e}_1, \dots, c_n \mathbf{e}_n)| \\ &= |c_1 \cdot \dots \cdot c_n| \cdot |\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)| \\ &= |c_1 \cdot \dots \cdot c_n|. \end{aligned}$$

Ist $L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$ für $i = 1, \dots, n$, so ist

$$L(Q) = P(c_1 \mathbf{a}_1, \dots, c_n \mathbf{a}_n),$$

also

$$\begin{aligned}
 v_n(L(Q)) &= |\det(c_1 \mathbf{a}_1, \dots, c_n \mathbf{a}_n)| \\
 &= |c_1 \cdot \dots \cdot c_n| \cdot |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)| \\
 &= v_n(Q) \cdot |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)| \\
 &= v_n(Q) \cdot |\det L|.
 \end{aligned}$$

□

Schließlich gehen wir zum nichtlinearen Fall über, beschränken uns aber auf eine sehr einfache Situation:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Standardbereich mit stückweise glattem Rand. Es gebe eine offene Umgebung U von \bar{B} und eine stetig differenzierbare Transformation $F : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ (mit $J_F(\mathbf{x}) \neq 0$ für $\mathbf{x} \in \bar{B}$). Dann ist

$$\int_{F(B)} 1 \, dv_2 = \int_B 1 |\det F'(\mathbf{x})| \, dv_2.$$

BEWEIS: Da $\det F'(\mathbf{x})$ stetig und ohne Nullstellen auf \bar{B} ist, muß entweder stets $J_F(\mathbf{x}) > 0$ oder stets < 0 sein. Wir beginnen mit dem ersten Fall (man nennt F dann orientierungserhaltend).

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung des Randes von B , so ergibt $F \circ \alpha$ eine Parametrisierung des Randes von $F(B)$. Sei $P(x, y) := 0$ und $Q(x, y) := x$. Wir wollen den Greenschen Satz auf $\mathbf{V}(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$ anwenden:

$$\begin{aligned}
 \int_{F(B)} 1 \, dv_2 &= \int_{F(B)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{y}) \right) \, dv_2 \\
 &= \int_{\partial F(B)} \mathbf{V} \bullet d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\partial F(B)} x \, dy \\
 &= \int_a^b F_1(\alpha(t)) (F_2 \circ \alpha)'(t) \, dt \\
 &= \int_a^b (F_1 \cdot \nabla F_2)(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) \, dt \\
 &= \int_{\partial B} (F_1 \cdot \nabla F_2) \bullet d\mathbf{x} \\
 &= \int_B \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_1 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x}) \right] \, dv_2 \\
 &= \int_B \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \, dv_2 \\
 &= \int_B \det F'(x, y) \, dv_2.
 \end{aligned}$$

Ist $J_F(\mathbf{x})$ stets < 0 (z.B. $F(x, y) := (x, -y)$), so ändert F die Orientierung des Randes, macht z.B. aus $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$ den Weg $F \circ \alpha(t) := (\cos t, -\sin t)$. Um den Greenschen Satz aber anwenden zu können, müssen wir die Orientierung des Randes wieder so wählen, daß das Innere von B links vom Wege liegt. Das erfordert ein zusätzliches

Minuszeichen, und deshalb muß am Schluß unter dem Integralzeichen der Betrag der Funktionaldeterminante stehen. \square

Nachdem wir so viele Einzelfälle behandelt haben, kommen wir nun zum allgemeinen Satz:

I.4.6 Transformationsformel. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein (offenes) Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare injektive Transformation und $J_F(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in G$.

Weiter sei $K \subset G$ eine kompakte meßbare Menge und $f : F(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{F(K)} f(\mathbf{y}) dv_n = \int_K f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det F'(\mathbf{x})| dv_n.$$

Der BEWEIS der allgemeinen Transformationsformel ist zu schwer für uns.

Wir kommen also gleich zu den Anwendungen:

Beispiele :

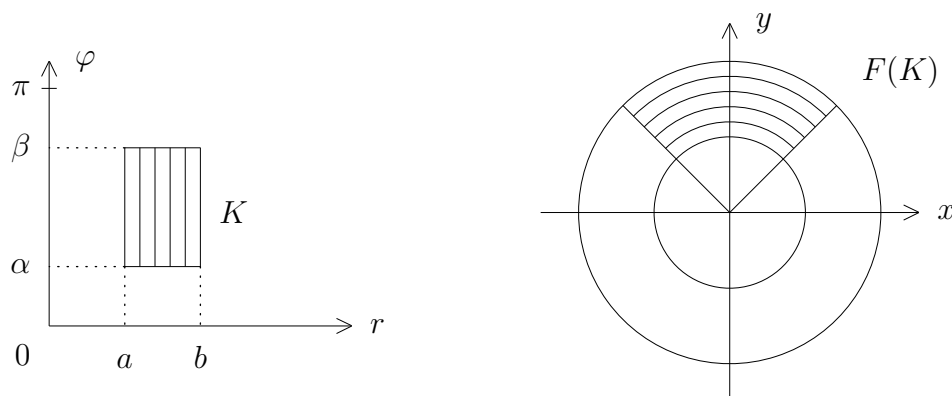
1. Ebene Polarkoordinaten

Sei $G := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < 2\pi\}$. Das ist ein Gebiet, und die Transformation auf Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$F(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi).$$

Dann ist $J_F(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$.

Nun sei z.B. $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a \leq r \leq b \text{ und } \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$, mit $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Dann ergibt sich für $F(K)$ folgendes Bild:



Nach der Transformationsformel ist

$$\int_{F(K)} f(x, y) dv_2 = \int_K f(F(r, \varphi)) r dv_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Das bleibt auch dann noch richtig, wenn die Menge K an den Rand von G heranrückt. Man kann dann K durch etwas kleinere Mengen approximieren, die noch ganz in G liegen, auf diese Mengen die Transformationsformel anwenden und schließlich

zum Grenzwert übergehen. In der Praxis verwendet man jedoch die Transformationsformel direkt. Man muß nur aufpassen, daß sich φ in keinem Intervall bewegt, dessen Länge 2π übersteigt.

2. Zylinderkoordinaten

Hier ist $G = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } z \text{ beliebig}\}$ und

$$F(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

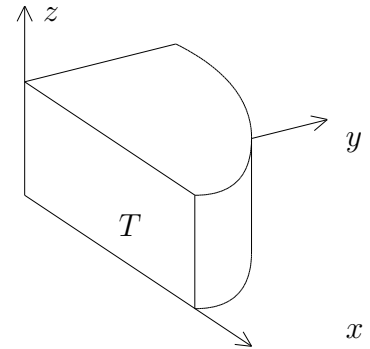
Für die Funktionaldeterminante ergibt sich wieder $J_F(r, \varphi, z) = r$.

Ist etwa $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$, so ist

$$T = F(Q), \text{ mit } Q := \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}.$$

Also ist z.B.

$$\begin{aligned} \int_T x^2 y \, dv_3 &= \int_Q (r \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \cdot r \, dv_3 \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$



3. Räumliche Polarkoordinaten

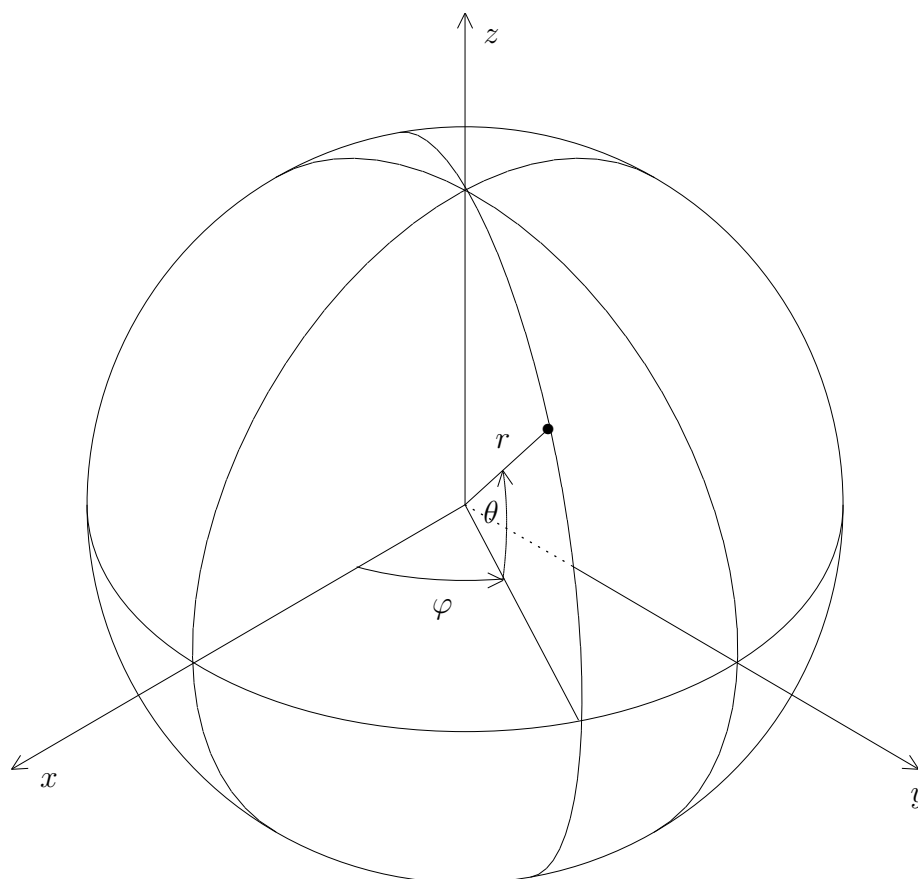
Hier ist $G = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, und

$$F(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} J_F(r, \varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \sin \theta \cdot r^2 (\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r \cos \theta \cdot r (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\ &= r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta \\ &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $J_F(r, \varphi, \theta) > 0$ in G . Man beachte, daß die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden!



Wir können jetzt das Volumen der Einheitskugel ein zweites Mal berechnen:

$$\begin{aligned}v_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 \, dv_3 \\&= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\&= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, dr \\&= 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

§5 Flächenintegrale

In diesem Abschnitt wollen wir lernen, wie man den Inhalt einer gekrümmten Fläche bestimmt und wie man eine Funktion über eine solche Fläche integriert.

Aber was ist überhaupt eine Fläche?

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Situation im \mathbb{R}^3 und versuchen, den Flächenbegriff aus bekannten Begriffen herzuleiten.

1. Versuch: Wir verallgemeinern den Kurvenbegriff auf höhere Dimensionen. Unter einer *Fläche* verstehen wir dann eine stetige (oder stetig differenzierbare) Abbildung $\varphi = (x, y, z) : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $Q = [a, b] \times [c, d]$ ein Quader im \mathbb{R}^2 ist.

Bezeichnen wir die Koordinaten im Definitionsbereich Q mit u und v , so ist die Fläche also gegeben durch eine Zuordnung

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Genaugenommen müßten wir von der *Parametrisierung* der Fläche sprechen, während die eigentliche Fläche die Menge der Bildpunkte

$$F = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in Q\}$$

ist. Das verhält sich so wie bei den Wegen, wo wir auch zwischen der Parametrisierung und der Spur eines Weges unterscheiden.

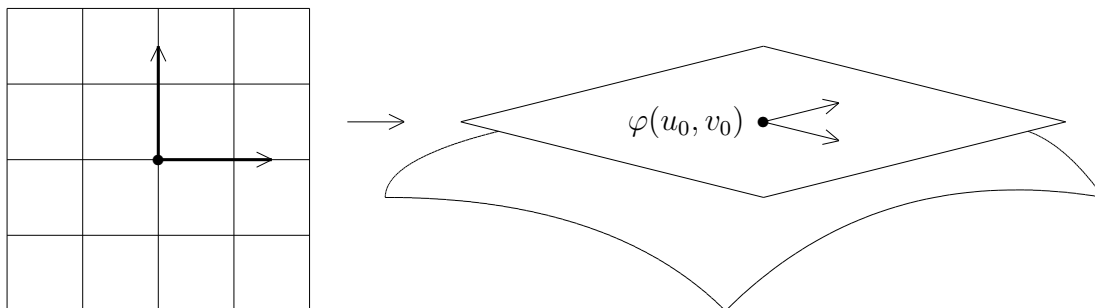
Ist $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{Q}$ fest gewählt, so sind durch φ zwei Wege bestimmt:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &:= \varphi(u_0 + s, v_0) \\ \text{und } \beta(t) &:= \varphi(u_0, v_0 + t). \end{aligned}$$

Die beiden Tangentialvektoren

$$\dot{\alpha}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{und} \quad \dot{\beta}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

spannen (hoffentlich!) die *Tangentialebene* an die Fläche F in $\varphi(u_0, v_0)$ auf.



Beispiele :

1. Sei $0 < a < b < 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} < c < d < \frac{\pi}{2}$, $Q := [a, b] \times [c, d]$ und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v) := (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)).$$

Dann stellt das Bild F von Q unter φ einen Teil der Oberfläche der Einheitskugel dar.

Sei $(u_0, v_0) = (\pi, 0) \in Q$. Dann ist $\mathbf{x}_0 := \varphi(u_0, v_0) = (-1, 0, 0)$ ein Punkt auf der Fläche F . Als Tangentialvektoren in \mathbf{x}_0 erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = (0, -1, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = (0, 0, 1).$$

Das sind die Geschwindigkeitsvektoren zu den Wegen

$$\alpha(s) = \varphi(\pi + s, 0) = (\cos(\pi + s), \sin(\pi + s), 0) = (-\cos(s), -\sin(s), 0)$$

und

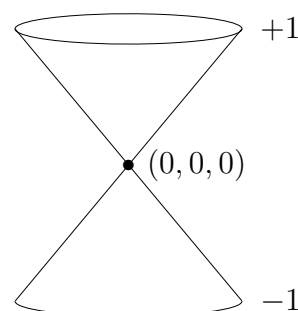
$$\beta(t) = \varphi(\pi, t) = (-\cos(t), 0, \sin(t)).$$

Tatsächlich spannen $(0, -1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ die yz -Ebene auf, die (verschoben nach $(-1, 0, 0)$) als Tangentialebene an die Kugel im Punkt $(-1, 0, 0)$ auftritt.

2. Sei $Q = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v).$$

Das Bild von Q unter φ ist eine Fläche, und zwar ein Kegel mit einer Spitze in $(0, 0, 0)$.



Es ist $\varphi(0, 0) = (0, 0, 0)$, und dort ist $\alpha(s) = \varphi(s, 0) = (0, 0, 0)$ ein konstanter Weg und $\beta(t) = \varphi(0, t) = (t, 0, t)$. Die Tangentialvektoren in 0 spannen keine Ebene auf, und tatsächlich besitzt die Fläche im Nullpunkt überhaupt keine Tangentialebene.

2. Versuch: Wir spezialisieren den Begriff der d -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n auf die Situation $n = 3$ und $d = 2$. Das führt uns zu folgender Begriffsbildung:

Eine *Fläche* ist eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^3$, so daß es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in F$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

- $U \cap F = \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$.
- $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in U$.

(vgl. A, Kapitel V, §3, Definition auf Seite 102. Dort war (b) so formuliert: $\text{rg } f'(\mathbf{x}) = 1$ für $\mathbf{x} \in U$.)

Etwas weniger abstrakt ausgedrückt: Eine Fläche kann so aussehen wie eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Und das ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 , die lokal die Nullstellenmenge einer stetig differenzierbaren Funktion ist, also die Lösungsmenge einer nichtlinearen Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$. Eine solche Fläche ist immer „glatt“, denn es wird zusätzlich

verlangt, daß der Gradient der definierenden Funktion nicht verschwindet. Das bedeutet, daß es in jedem Punkt der Fläche eine wohldefinierte Normalenrichtung und dann auch – dazu senkrecht – eine wohldefinierte Tangentialebene gibt.

Daß die abstrakte Definition zu dieser anschaulichen Deutung führt, ergibt sich aus dem Satz über implizite Funktionen. Wir wollen darauf aber nicht näher eingehen, sondern über die Konsequenzen nachdenken:

Die 2. Definition liefert als Fläche ein schönes glattes Gebilde, mit dem man gut arbeiten kann. Der Nachteil ist aber, daß Flächen wie der oben betrachtete Kegel nicht mehr betrachtet werden können. Weitere Nachteile zeigt das folgende

Beispiel:

Sei $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 = 1\}$.

Das ist eine einfache zylindrische Fläche, die trotzdem einige Schwierigkeiten bereitet. Im Punkt $\mathbf{y}_0 := (1, 0, 1)$ kann F nicht einmal lokal als Nullstellenmenge einer Funktion geschrieben werden, und schon gar nicht als Untermannigfaltigkeit. Randpunkte sind bei der 2. Flächendefinition ebenfalls nicht vorgesehen!

In der Nähe des Punktes $\mathbf{x}_0 := (1, 0, 0)$ kann F zwar als Nullstellenmenge der (von z unabhängigen) Funktion $f(x, y, z) := 1 - x^2 - y^2$ geschrieben werden, und es ist sogar $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (-2x, -2y, 0) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (-2, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich die Gleichung $f = 0$ lokal nach x auflösen. Wir schreiben in der Nähe von \mathbf{x}_0 die Fläche in der Form $\{(x, y, z) \mid x = \sqrt{1 - y^2}\}$, und bekommen die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (\sqrt{1 - u^2}, u, v).$$

Das liefert die Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 0) = \left(\frac{-u}{\sqrt{1 - u^2}}, 1, 0 \right) \Big|_{u=0} = (0, 1, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 0) = (0, 0, 1).$$

So weit, so schön! Leider liefert diese Parametrisierung nur Punkte (x, y, z) mit $x > 0$, es wird also nicht die ganze Fläche parametrisiert. Und es wird einem auch nicht gelingen, eine schöne Parametrisierung für die gesamte Fläche zu finden, die auf einem offenen Quader definiert und umkehrbar differenzierbar ist.

Andererseits kann man sofort eine Parametrisierung für die ganze Fläche angeben:

$$\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v), \quad \text{für } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ und } -1 \leq v \leq 1.$$

Sie erfaßt auch die Randpunkte, nur sitzt $\mathbf{x}_0 = \varphi(0, 0)$ gerade auf einer „Klebestelle“.

Wir verarbeiten jetzt unsere Erkenntnisse in einer endgültigen Flächen-Definition. Die Parametrisierungs-Methode scheint etwas flexibler zu sein. Ränder, Spitzen und Klebestellen sollte man in Kauf nehmen, um einen möglichst großen Vorrat an Flächen zu bekommen. Um mit diesen Flächen auch gut arbeiten zu können, sollte man versuchen, möglichst viel von dem Untermannigfaltigkeits-Konzept beizubehalten. Und im Extremfall wird es erforderlich sein, komplizierte Flächen aus einfachen Bausteinen zusammenzusetzen.

Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader. Der Rand von Q besteht aus 4 glatten Kurvenstücken:

$$\begin{aligned}\partial_u Q &:= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq u \leq b \text{ und } v = c\}, \\ \partial_r Q &:= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = b \text{ und } c \leq v \leq d\}, \\ \partial_o Q &:= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq u \leq b \text{ und } v = d\}, \\ \text{und } \partial_l Q &:= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = a \text{ und } c \leq v \leq d\}.\end{aligned}$$

Die Randstücke werden durch folgende Wege parametrisiert:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &:= (t, c), & a \leq t \leq b, \\ \alpha_2(t) &:= (b, t), & c \leq t \leq d, \\ \alpha_3(t) &:= (a + b - t, d), & a \leq t \leq b, \\ \text{und } \alpha_4(t) &:= (a, c + d - t), & c \leq t \leq d.\end{aligned}$$

Die Wege sind jeweils so orientiert, daß das Innere des Quaders $\overset{\circ}{Q}$ stets links vom Wege liegt.

Unter einem *Randabschnitt* C von Q verstehen wir eine Seite oder eine zusammenhängende Vereinigung von Seiten von Q . Mit C^* sei der Randabschnitt ohne seine beiden Endpunkte bezeichnet.

Definition.

Ein *reguläres Flächenstück* ist eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

1. G ist ein konvexes Gebiet im \mathbb{R}^2 .
2. φ ist injektiv.
3. $\text{rg } \varphi'(u, v) \equiv 2$ auf G .

Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, wird auch $S := \varphi(G)$ als Flächenstück bezeichnet. Da $\varphi : G \rightarrow S$ bijektiv ist, bestimmt ein Punkt $(x, y, z) \in S$ stets eindeutig ein Parameterpaar (u, v) . Wegen der Rangbedingung besitzt S in jedem Punkt eine wohldefinierte Tangentialebene.

In der sogenannten „Differentialgeometrie“ werden meistens solche regulären Flächenstücke betrachtet. Manchmal verzichtet man noch auf die Injektivität und läßt Selbstdurchdringungen zu, aber das wollen wir hier nicht tun.

Um nun auch Ränder, Spitzen und Klebestellen zu ermöglichen, erweitern wir die Definition des Flächenstücks:

Definition.

Ein *abgeschlossenes Flächenstück* oder *Pflaster* ist gegeben durch einen Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$ und eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi \Big|_{\overset{\circ}{Q}}$ ist ein reguläres Flächenstück.

2. $\varphi(\overset{\circ}{Q}) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$.
3. Man kann ∂Q so in Randabschnitte zerlegen, daß je zwei Abschnitte höchstens Endpunkte gemeinsam haben und für das Verhalten von φ auf einem Randabschnitt C genau eine der drei folgenden Aussagen zutrifft:
 - (a) φ ist stückweise glatt auf C und injektiv auf C^* , und es ist $\varphi(C^*) \cap \varphi(\partial Q \setminus C^*) = \emptyset$.
 - (b) $\varphi(C)$ ist ein Punkt.
 - (c) Es gibt einen weiteren Randabschnitt $C' \neq C$ von Q , so daß gilt:
 - α) $\varphi(C) = \varphi(C')$.
 - β) φ ist stückweise glatt auf C und C' und injektiv auf C^* und $(C')^*$.
 - γ) Die natürlichen Orientierungen auf C bzw. C' induzieren **entgegengesetzte** Orientierungen auf $\varphi(C) = \varphi(C')$.

Die Menge $S := \varphi(Q)$ heißt *Spur* des Pflasters. Wenn klar ist, um welche Parametrisierung es geht, wird einfach von dem Flächenstück oder Pflaster S gesprochen.

Das Bild $\varphi(C)$ eines Randabschnittes von Q heißt

reguläres Randstück von S im Falle (a),
Spitze von S im Falle (b)
 und *Kante* (oder *Klebestelle*) im Falle (c).

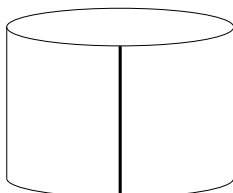
Die Vereinigung bS (für *boundary*) aller regulären Randstücke nennt man den *Rand von S*. Die Menge $S^\circ := S \setminus bS$ nennt man das *Innere von S*.

Der Rand eines Pflasters ist eine Kette von stückweise glatten stetigen Wegen. Ein Punkt im Inneren von S heißt *regulär*, wenn S in einer Umgebung dieses Punktes wie eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 aussieht. Andernfalls nennt man den Punkt *singulär*.

Beispiele :

1. $Q = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ und $\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v)$.

Es ist



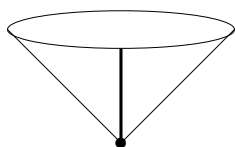
$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\text{rg } \varphi'(u, v) = 2$ überall und φ injektiv auf $\overset{\circ}{Q}$.

Die Zylinderfläche S entsteht durch Zusammenkleben von $\partial_t Q$ und $\partial_r Q$, enthält also eine Kante. Die Punkte der Kante, die im Inneren von S liegen, sind aber alle regulär. Der Rand von S besteht aus zwei regulären Randstücken, den Bildern von $\partial_u Q$ und $\partial_o Q$.

2. Sei $Q := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ und $\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v)$.

Hier ist

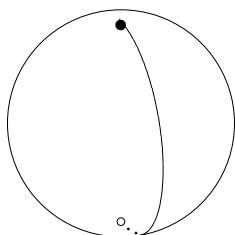


$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -v \sin(u) & \cos(u) \\ v \cos(u) & \sin(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\operatorname{rg} \varphi'(u, v) = 2$ für $v \neq 0$ und φ injektiv auf $\overset{\circ}{Q}$.

Die untere Seite $\partial_u Q$ wird auf eine Spitze abgebildet, die Seiten $\partial_l Q$ und $\partial_r Q$ werden zusammengeklebt und die obere Seite $\partial_o Q$ ergibt ein reguläres Randstück. Die Spitze ist ein singulärer Punkt, alle anderen Punkte im Inneren der Fläche sind regulär.

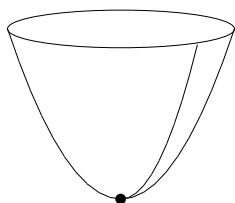
3. Sei $Q := [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\varphi(u, v) := (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$. Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung der Oberfläche der Einheitskugel.



Die linke und die rechte Seite von Q werden zusammengeklebt (zu einer „Kante“), die untere und die obere Seite von Q ergeben jeweils eine „Spitze“ (Südpol und Nordpol).

Man nennt $S = \varphi(Q)$ auch die *Sphäre*. Sie ist eine in jedem Punkt glatte Fläche ohne Rand. Wie man sieht, sind sie Wörter „Kante“ und „Spitze“ nicht ganz wörtlich zu nehmen.

4. Sei $Q := [0, 2\pi] \times [0, h]$, $h > 0$, und $\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v^2)$. Das Bild ist ein Paraboloid:



Auch hier ergibt sich eine glatte Fläche mit einer Spitze, einer Kante und einem regulären Randstück.

Definition.

$U, V \subset \mathbb{R}^2$ seien offene Mengen oder abgeschlossene Quader. Eine bijektive und zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : U \rightarrow V$ heißt *Parametertransformation*, falls $J_\Phi(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$ ist.

Ist $J_\Phi(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$, so heißt Φ *orientierungserhaltend*. Ist stets $J_\Phi(\mathbf{x}) < 0$, so heißt Φ *orientierungsumkehrend*.

Zwei Parametrisierungen $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines Flächenstückes $S = \varphi(U) = \psi(V)$ heißen *äquivalent*, wenn es eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\Phi : U \rightarrow V$ gibt, so daß $\psi \circ \Phi = \varphi$ ist.

Bemerkung: Der Begriff der „Äquivalenz“ ist in der höheren Mathematik von grundlegender Bedeutung. Erstes und wichtigstes Beispiel einer sogenannten *Äquivalenzrelation* ist die Gleichheit. Aber es kommt auch sehr oft vor, daß man gewisse Objekte, die nicht gleich sind, dennoch nicht voneinander unterscheiden möchte, weil sie in allen relevanten Eigenschaften gleich sind. Hat man sich auf einen Äquivalenzbegriff festgelegt, so schreibt man $A \sim B$, um auszudrücken, daß die Objekte A und B äquivalent sind. Und ein gültiger Äquivalenzbegriff liegt nur dann vor, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Reflexivität: $A \sim A$ (jedes Objekt ist zu sich selbst äquivalent).
2. Symmetrie: $A \sim B \implies B \sim A$.
3. Transitivität: $A \sim B \wedge B \sim C \implies A \sim C$.

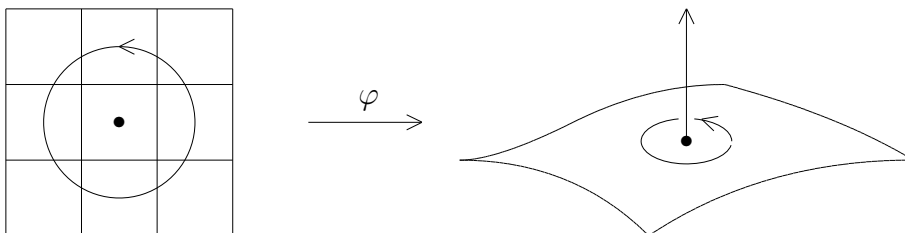
Zum Beispiel könnte man zwei elektrische Netzwerke äquivalent nennen, wenn gleiche Eingangswerte auch stets zu gleichen Ausgangswerten führen. Wie die Verdrahtung dann im Inneren aussieht, ist für viele Betrachtungen irrelevant.

Jede Äquivalenzrelation führt automatisch zu einer Klasseneinteilung unter den betrachteten Objekten. Eine einzelne Klasse wird aus allen Objekten gebildet, die untereinander äquivalent sind. Ohne sich dessen bewußt zu sein, kennt jeder aus dem täglichen Leben Beispiele für Klassenbildungen: Die Zahl 5 ist z.B. eine abstrakte Umschreibung derjenigen Eigenschaft, die alle Mengen mit fünf Elementen gemeinsam haben. Die Farbe „Blau“ ist nur dadurch zu einem klaren Begriff geworden, daß jeder angeben kann, welche Objekte zur Äquivalenzklasse der blauen Dinge gehören.

In diesem Sinne verstehen wir unter einer „Orientierung eines Flächenstückes oder Pflasters“ eine Äquivalenzklasse von gleich-orientierten (also äquivalenten) Parametrisierungen. Wir wollen das noch etwas genauer untersuchen und plausibel machen, daß es genau zwei Orientierungen gibt.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung mit $\varphi(U) = S$. Ist $(u_0, v_0) \in U$, so kann man einen kleinen Kreis um (u_0, v_0) finden, der ganz in U verläuft. $\alpha(t) := (u_0 + r \cos(t), v_0 + r \sin(t))$ mit passendem r ist eine Parametrisierung dieses Kreises, die so orientiert ist, daß (u_0, v_0) stets „links“ vom Weg liegt.

$\tilde{\alpha}(t) := \varphi(\alpha(t))$ ist nun die Parametrisierung eines Weges auf der Fläche S , der dort um den Punkt $\mathbf{x}_0 := \varphi(u_0, v_0)$ herumläuft. Das kann man für jeden Punkt aus S durchführen. Der Umlaufsinn der Wege auf S bestimmt die Orientierung von S .



Wir betrachten einen Punkt $(u_0, v_0) \in U$ und die spezielle Parametertransformation

$$\Phi(u, v) := (u, 2v_0 - v).$$

Dann ist $\Phi(u_0, v_0) = (u_0, v_0)$, $\Phi \circ \Phi = \text{id}$, also $\Phi^{-1} = \Phi$. Außerdem ist $J_\Phi(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$. Φ ist also orientierungsumkehrend.

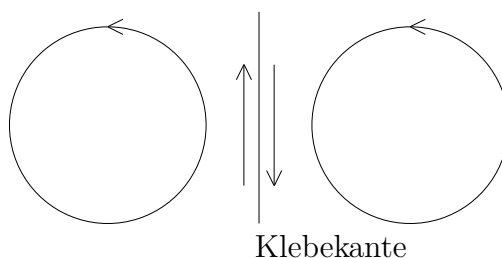
Ist nun $\alpha(t) := (u_0 + r \cos(t), v_0 + r \sin(t))$ wieder die Parametrisierung eines kleinen Kreises, der „linksherum“, also im „mathematisch positiven Sinne“ um (u_0, v_0) in U herumläuft, so ist

$$\beta(t) := \Phi \circ \alpha(t) = (u_0 + r \cos(t), v_0 - r \sin(t))$$

die Parametrisierung eines Kreises um (u_0, v_0) , der im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird. Deshalb definiert $\varphi \circ \Phi$ eine andere Orientierung auf S als φ .

Orientierungserhaltende Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante bewahren dagegen stets den Umlaufsinn. Da es in der Ebene genau zwei Orientierungen gibt – bestimmt durch die beiden möglichen Orientierungen (= Anordnungen) der Standard-Basis – überträgt sich das auch auf reguläre Flächenstücke.

Etwas problematischer wird es beim Übergang zu Pflastern $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$: Der Rand ∂Q trägt eine natürliche Orientierung. Er soll so durchlaufen werden, daß das Gebiet $\overset{\circ}{Q}$ links vom Wege liegt. Durch die Parametrisierung φ wird dadurch eine Orientierung auf den regulären Randstücken des Pflasters $S = \varphi(Q)$ induziert. Wird ein glattes Randstück von Q durch φ auf einen einzigen Punkt abgebildet, so braucht ein solcher Punkt natürlich nicht orientiert zu werden. Aber was passiert an den Klebekanten? In dem Fall sorgt die Bedingung, daß die induzierten Orientierungen entgegengesetzt sein sollen, für einen kontinuierlichen Übergang:



Damit sind nicht orientierbare Flächen wie das Möbiusband in unserer Theorie ausgeschlossen.

Neben der bisher betrachteten inneren Orientierung eines Flächenstückes gibt es auch noch eine davon induzierte sogenannte *transversale Orientierung*. Ist $\varphi : Q \rightarrow S$ die Parametrisierung eines Pflasters und $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{Q}$, so ist $\text{rg } \varphi'(u_0, v_0) = 2$. Also sind die beiden Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ linear unabhängig, und das bedeutet, daß der Vektor

$$n_S(u_0, v_0) := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

nicht der Nullvektor ist. Er heißt *die Flächennormale* zu S und steht in $\mathbf{x}_0 := \varphi(u_0, v_0)$ senkrecht auf der Tangentialebene. Die Richtung der Flächennormalen liefert die transversale Orientierung. Sie ist durch die Reihenfolge der Tangentialvektoren (und damit durch die innere Orientierung) festgelegt. Es ist nun möglich, bei der Fläche von „oben“ und „unten“ zu sprechen. Ändert sich die innere Orientierung, so ändert sich auch die Reihenfolge der Tangentialvektoren und damit die transversale Orientierung. Die Flächennormale

zeigt dann in die andere Richtung.

Definition.

Eine (*stückweise glatte*) *Fläche* (im \mathbb{R}^3) ist entweder ein reguläres Flächenstück oder ein Pflaster oder eine Vereinigung S von endlich vielen Pflastern S_1, \dots, S_k , so daß für jeden Punkt $\mathbf{x} \in S$ gilt:

Entweder ist \mathbf{x} Spitze eines Flächenstücks S_i ,

oder es gibt ein Flächenstück S_i , so daß \mathbf{x} auf einer Kante oder einem regulären Randstück von S_i liegt

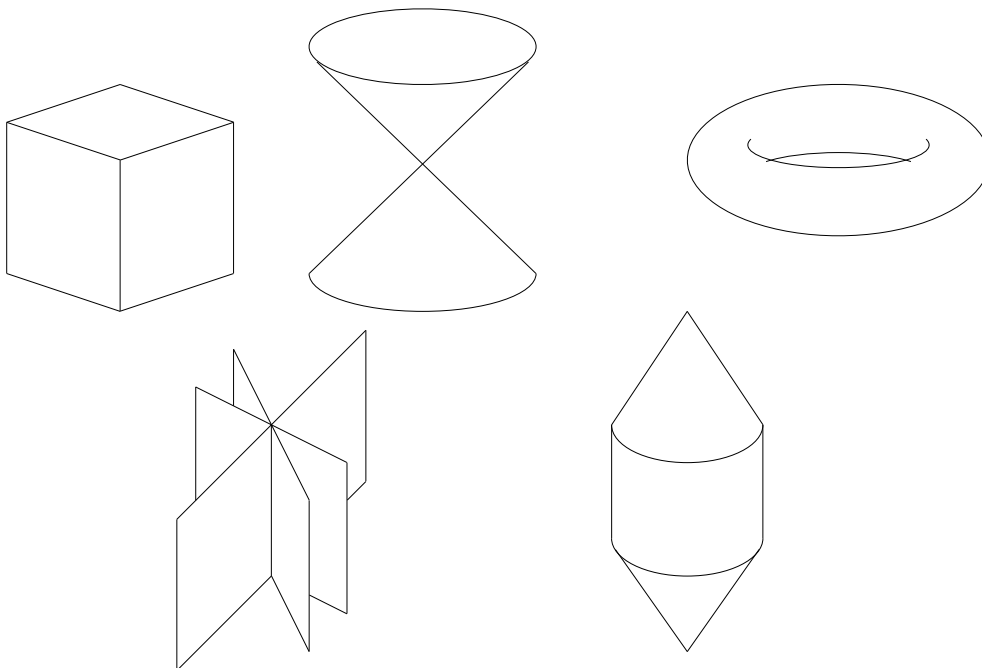
oder \mathbf{x} liegt im Inneren von genau einem Flächenstück S_i .

Das „oder“ ist jeweils ausschließend gemeint.

Ein *Randstück* von S ist ein reguläres Randstück eines der S_i , das nicht zugleich Teil eines S_j , $j \neq i$, ist. Unter dem *Rand* von S (in Zeichen bS) versteht man die Vereinigung aller Randstücke von S .

Ein Fläche heißt *regulär*, wenn sie keinen Rand besitzt und überall wie eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit aussieht. Besitzt S einen Rand und ist $S \setminus bS$ regulär, so spricht man von einer *regulären Fläche mit Rand*.

Flächen werden also aus Pflastern zusammgebaut. Dabei dürfen keine inneren Punkte miteinander verklebt werden! Hier sind einige Beispiele:



Bevor wir nun Integrale über Flächen bilden, müssen wir noch einige Hilfsmittel aus der Linearen Algebra bereitstellen:

I.5.1 Satz. $A \in M_{3,2}$ sei eine aus zwei Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ gebildete Matrix. Außerdem sei $E := \vec{a}_1 \bullet \vec{a}_1$, $F := \vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2$ und $G := \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2$. Dann ist $A^\top \circ A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ und

$$\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|^2 = EG - F^2 = \det(A^\top \circ A).$$

Die Quadratwurzel aus dieser Größe ist die Fläche des von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 aufgespannten Parallelogramms.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \det(A^\top \circ A) &= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \circ (\vec{a}_1, \vec{a}_2)\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

Andererseits wissen wir aus Teil A, Satz I.5.12, daß folgendes gilt:

$$\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|^2 = \|\vec{a}_1\|^2 \cdot \|\vec{a}_2\|^2 - (\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2)^2 = E \cdot G - F^2.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Definition.

Ist $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, so heißt

$$G_A := \det(A^\top \circ A) = \det\left(\vec{a}_i \bullet \vec{a}_j \mid \begin{matrix} i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, k \end{matrix}\right)$$

die *Gramsche Determinante* von A .

Bemerkung: Es ist $G_{A \circ B} = \det(B)^2 \cdot G_A$.

BEWEIS dafür:

$$\begin{aligned} G_{A \circ B} &= \det((AB)^\top \circ (AB)) \\ &= \det(B^\top \circ (A^\top \circ A) \circ B) \\ &= \det(B) \cdot \det(A^\top \circ A) \cdot \det(B) \\ &= \det(B)^2 \cdot G_A. \end{aligned}$$

Eine auf einem Flächenstück S definierte Funktion ist *stetig*, wenn für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ gilt: Ist \mathbf{x}_n eine Folge von Punkten von S mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$, so ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0)$.

f heißt *differenzierbar* in $\mathbf{x}_0 = \varphi(u_0, v_0)$, wenn $f \circ \varphi$ in (u_0, v_0) differenzierbar ist. Diese Eigenschaft hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab, da sich je zwei Parametrisierungen um einen Diffeomorphismus unterscheiden.

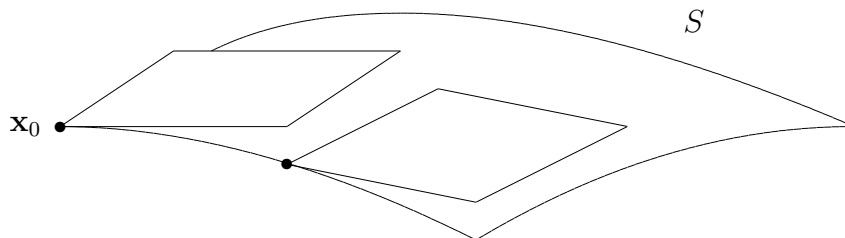
Wir können nun überlegen, was unter dem Integral über eine Funktion f auf S zu verstehen sein soll.

Aus der Sicht des \mathbb{R}^3 ist ein Flächenstück S eine Nullmenge und daher für die Integrationstheorie völlig uninteressant. Aber andererseits hat S natürlich einen gewissen Flächeninhalt, und der sollte auch zu berechnen sein.

Wir müssen mit einem „2-dimensionalen Maß“ an die Sache herangehen. Versuchen wir es wieder einmal mit Approximation! Es sei ein Pflaster $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ gegeben, sowie eine stetige Funktion f auf S . Wir zerlegen Q in viele kleine Teilquader. $(u_0, v_0) \in Q$ sei ein Gitterpunkt. Dann gibt es Zahlen s und t , so daß

$$\mathbf{x}_0 = (u_0, v_0), \quad \mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_1 = (u_0 + s, v_0), \quad \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_2 = (u_0, v_0 + t) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 = (u_0 + s, v_0 + t)$$

die Ecken eines Teilquaders sind. Die Bilder dieser Ecken auf der Fläche brauchen nicht unbedingt in einer Ebene zu liegen!!



Wir können Genaueres über die Lage der Bilder der Ecken herausbekommen, wenn wir die Differenzierbarkeit von φ in (u_0, v_0) ausnutzen: Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte (vektorwertige) Funktion r , so daß für (u, v) nahe (u_0, v_0) gilt:

$$1. \quad \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + L(u - u_0, v - v_0) + r(u - u_0, v - v_0).$$

$$2. \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Dabei ist

$$L(h_1, h_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)h_2.$$

Näherungsweise ist also

$$\varphi(u_0 + s, v_0 + t) - \varphi(u_0, v_0) \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)s + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)t.$$

Setzen wir $\mathbf{a} := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ und $\mathbf{b} := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$, so werden die Ecken auf die Punkte \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 + s\mathbf{a}$, $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ abgebildet, also auf die Ecken eines Parallelogramms. Wie gesagt, das gilt nur näherungsweise und nur für kleines s und t !

Die Fläche des Parallelogramms ist durch $\|s\mathbf{a} \times t\mathbf{b}\| = st\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ gegeben. Nun gehen wir bei der Integraldefinition wieder so ähnlich wie bei der Einführung des Riemannsches Integrals vor:

Wie üblich zerlegen wir Q in Teilquader $Q_{ij} = [t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}] \times [t_j^{(2)}, t_{j+1}^{(2)}]$. Zusätzlich setzen wir $t_{ij} := (t_i^{(1)}, t_j^{(2)})$ (= linke untere Ecke von Q_{ij}) und wählen in jedem Teilquader Q_{ij}

ein Element ξ_{ij} . Ist \mathcal{P} die Zerlegung und ξ die Gesamtheit aller ξ_{ij} , so erklären wir die *Riemannsche Summe* $\Sigma(f, \mathcal{P}, \xi)$ durch

$$\Sigma(f, \mathcal{P}, \xi) := \sum_{i,j} f(\varphi(\xi_{ij})) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t_{ij}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t_{ij}) \right\| \cdot (t_{i+1}^{(1)} - t_i^{(1)})(t_{j+1}^{(2)} - t_j^{(2)}).$$

Wir überlassen es den Mathematikern, zu zeigen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Riemannschen Summen gegen einen vernünftigen Wert konvergieren, der in Fällen, die man kontrollieren kann, mit dem erwarteten Flächeninhalt übereinstimmt.

In Wirklichkeit brauchen wir diese heuristischen Betrachtungen gar nicht, denn sie führen uns auf ein Integral, das wir mit den vorhandenen Mitteln schon hinschreiben können:

Definition.

Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader, $\varphi : Q \rightarrow S$ ein Pflaster und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_S f \, do := \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv$$

das *Flächenintegral (1. Art)* von f über S .

Insbesondere nennt man $A(S) := \int_S 1 \, do$ den *Flächeninhalt* von S .

Ist $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ eine Fläche, so setzt man

$$\int_S f \, do := \int_{S_1} f \, do + \dots + \int_{S_k} f \, do.$$

Bemerkung :

$$do := \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv$$

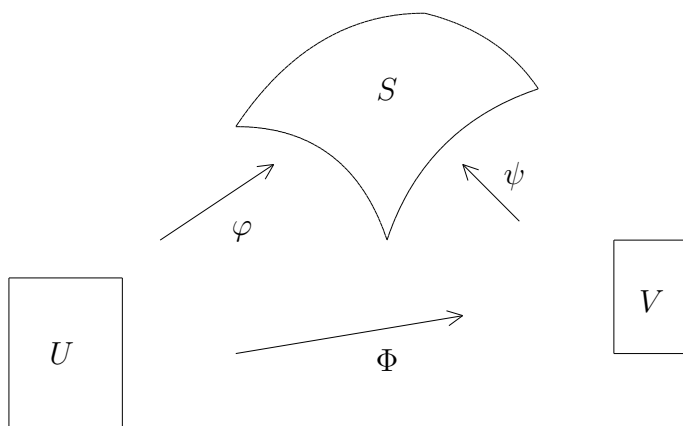
nennt man das *Flächenelement*. Man stellt sich darunter die Fläche eines infinitesimal kleinen Parallelogramms vor, das beliebig genau den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen den Ecken des Parallelogramms approximiert.

Das Flächenintegral erfüllt die üblichen Regeln (wie Linearität usw.). Der Rand des Flächenstücks spielt bei der Integration keine Rolle, weil der Rand von Q eine Nullmenge für das Doppelintegral ist.

Wie verhält sich das Flächenintegral gegenüber Parametertransformationen?

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^2$ Gebiete und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei zweimal stetig differenzierbare Abbildungen, die das gleiche Flächenstück $S = \varphi(U) = \psi(V)$ parametrisieren. $\Phi : U \rightarrow V$ sei eine Parametertransformation, es gelte also insbesondere

$$\psi \circ \Phi = \varphi.$$



Wir rechnen zunächst einmal aus, wie sich die Tangentialvektoren zueinander verhalten:

Wir bezeichnen die Koordinaten in U mit u, v und die in V mit s, t . Ist $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, so folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial(\psi \circ \Phi)}{\partial u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \circ \Phi \right) \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \circ \Phi \right) \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial(\psi \circ \Phi)}{\partial v} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \circ \Phi \right) \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \circ \Phi \right) \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial v},$$

also

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \circ \Phi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \circ \Phi \right) \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Die Matrix, die hier auftritt, ist die Funktionalmatrix Φ' .

Setzen wir nun zur Abkürzung $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, mit

$$\vec{a}_1 := \frac{\partial \psi}{\partial s} \circ \Phi \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 := \frac{\partial \psi}{\partial t} \circ \Phi,$$

sowie

$$B := A \circ \Phi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right),$$

so ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| &= \sqrt{G_B} = \sqrt{G_{A \circ \Phi'}} \\ &= |\det \Phi'| \cdot \sqrt{G_A} \\ &= |J_\Phi| \cdot \left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \circ \Phi \right) \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \circ \Phi \right) \right\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Transformationsformel:

$$\int_K f(\varphi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

$$\begin{aligned}
&= \int_K f(\psi \circ \Phi(u, v)) \cdot \left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \circ \Phi(u, v) \right) \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \circ \Phi(u, v) \right) \right\| \cdot |J_\Phi(u, v)| \, du \, dv \\
&= \int_L f(\psi(s, t)) \cdot \left\| \frac{\partial \psi}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \psi}{\partial t}(s, t) \right\| \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

Das Flächenintegral ist also unabhängig von der Parametrisierung, und damit insbesondere unabhängig von der Orientierung. Das rechtfertigt die Bezeichnung „Flächenintegral 1. Art“.

Beispiele:

- Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Gehen wir von der Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v)$$

aus. Der Zylinder entsteht, indem man das Rechteck zusammenrollt und entlang einer Seite verklebt. Daher erwarten wir, daß der Flächeninhalt $2 \cdot 2\pi = 4\pi$ beträgt.

Nun ist $\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also

$$(\varphi'(u, v))^T \circ (\varphi'(u, v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante = 1, und es gilt für $S := \varphi([0, 2\pi] \times [-1, 1])$:

$$A(S) = \int_S 1 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 dv \, du = 2 \cdot \int_0^{2\pi} du = 4\pi,$$

ganz so, wie wir es erwartet haben.

- Wir wollen den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \cos(u) \cos(v), r \sin(u) \cos(v), r \sin(v)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die Tangentialvektoren sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= (-r \sin(u) \cos(v), r \cos(u) \cos(v), 0) \\
\text{und } \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= (-r \cos(u) \sin(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(v)).
\end{aligned}$$

Mit der Formel

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (r^2 \cos(u) \cos^2(v), r^2 \sin(u) \cos^2(v), r^2 \sin(v) \cos(v)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 &= r^4 \cdot [\cos^2(u) \cos^4(v) + \sin^2(u) \cos^4(v) + \sin^2(v) \cos^2(v)] \\ &= r^4 \cdot [\cos^4(v) + \sin^2(v) \cos^2(v)] = r^4 \cos^2(v). \end{aligned}$$

Da $\cos(v)$ im Parameterbereich immer ≥ 0 ist, folgt für $S := \varphi([0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \partial B_r(\mathbf{0})$:

$$\begin{aligned} A(S) &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(v) \, dv \, du \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin(v) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) du \\ &= 2r^2 \int_0^{2\pi} du = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

3. Ist $f : Q := [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so wird der Graph von f parametrisiert durch

$$\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right), & \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right), \end{aligned}$$

also

$$A(G_f) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \, du \, dv.$$

Beachte: Beim Integrieren über ein Flächenstück spielt der Rand des Parameter-Quaders keine Rolle, er ist ja eine Nullmenge. Deshalb braucht man hierfür auch nicht die komplizierten Vorschriften für das Verhalten der Parametrisierung φ auf dem Rande zu beachten. (Gott sei Dank!)

Manchmal benötigen wir Flächenintegrale in folgender verallgemeinerten Form:

Ist $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ ein Flächenstück oder Pflaster, $M \subset Q$ eine meßbare Teilmenge, $S' := \varphi(M)$ und $f : S' \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so setzt man

$$\int_{S'} f \, do := \int_M f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \, dv_2.$$

Beispiel:

Sei $f : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(u, v) := 2 - u^2 - v^2$, $S := G_f$. Wir wollen die Fläche von S ausrechnen. Der Definitionsbereich $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 2\}$ von f ist selbst kein Quader, wohl aber Bild des Quaders

$$Q = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2} \text{ und } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

unter der Polarkoordinaten–Abbildung $\Phi(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, du \, dv \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} r \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (2r)^2} \cdot 2r \cdot 2 \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{2\sqrt{2}} t \sqrt{1 + t^2} \, dt \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot (1 + t^2)^{3/2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot (27 - 1) = \frac{13}{3}\pi. \end{aligned}$$

Wie bei den Kurven gibt es auch bei den Flächen ein Kurvenintegral 2. Art:

Definition.

Es sei $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Pflaster, $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von S und \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf U . Dann nennt man

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} &:= \int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_S \, do \\ &= \int_Q \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) \, du \, dv \\ &= \int_Q \left[\mathbf{F}(\varphi(u, v)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right] \, du \, dv \end{aligned}$$

das *Flächenintegral (2. Art) von \mathbf{F} über φ* (bzw. über S , wenn klar ist, um welche Parametrisierung es geht).

Bemerkung :

$$\mathbf{n}_S = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

ist die orientierungsabhängige Flächennormale. Multipliziert man sie mit

$$do = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \, du \, dv,$$

so erhält man

$$d\mathbf{O} = \mathbf{n}_S \, do = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

Man nennt $d\mathbf{O}$ das *vektorielle Flächenelement*. Man kann es sich z.B. als infinitesimal kleines transversal orientiertes Flächenstück vorstellen. Das Skalarprodukt $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ mißt, wieviele Feldlinien durch dieses Flächenstück hindurchgehen. Man nennt daher das Integral

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} := \int_{\varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$$

auch den *Fluß von \mathbf{F} durch S* .

Will man den Einfluß einer Parametertransformation untersuchen, so führt das auf die gleiche Rechnung wie beim Flächenintegral 1. Art. Aber weil diesmal die Normale selbst und nicht ihr Betrag unter dem Integral steht, ändert sich das Vorzeichen des Integrals, wenn man die Orientierung vertauscht. Deshalb sollte man auch wirklich nur dann $\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ statt $\int_{\varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ schreiben, wenn die Parametrisierung (oder wenigstens die Orientierung) feststeht.

In der Definition haben wir unter anderem das Spatprodukt verwendet. Das war möglich, weil folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Das Spatprodukt ermöglicht uns noch eine andere Interpretation des Flächenintegrals 2. Art: Ist nämlich \mathbf{F} das Strömungsfeld einer Flüssigkeit, so kann man das Integral auch als diejenige Flüssigkeitsmenge (Volumen) interpretieren, die pro Zeiteinheit durch die Fläche S dringt.

Beispiel:

Das elektrische Feld einer Punktladung q im Ursprung hat die Gestalt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = cq \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Ist $S = \partial B_R(\mathbf{0})$ die (transversal von innen nach außen orientierte) Sphäre, so ist $\mathbf{n}_S = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, also

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \bullet d\mathbf{O} &= \int_S \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}_S \, do = cq \cdot \int_S \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \, do \\ &= \frac{cq}{R^2} \cdot \int_S \, do = \frac{cq}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4cq\pi. \end{aligned}$$

Wir wollen noch ein ähnliches Beispiel betrachten. Es sei S die Oberfläche des Einheitswürfels. Dann ist S eine Fläche, die sich aus 6 Pflastern zusammensetzt. Das Besondere an dieser Situation – wie auch schon im Falle der Sphäre – ist:

- S hat keinen Rand ($bS = \emptyset$).
- S ist selbst Rand eines Gebietes im \mathbb{R}^3 .

Es erweist sich als sinnvoll, die Seiten des Würfels so zu orientieren, daß die Flächennormale stets nach „außen“ zeigt. Wir geben also die dadurch eindeutig bestimmte transversale Orientierung vor. Wenn nötig, können wir daraus die innere Orientierung der Seiten ermitteln.

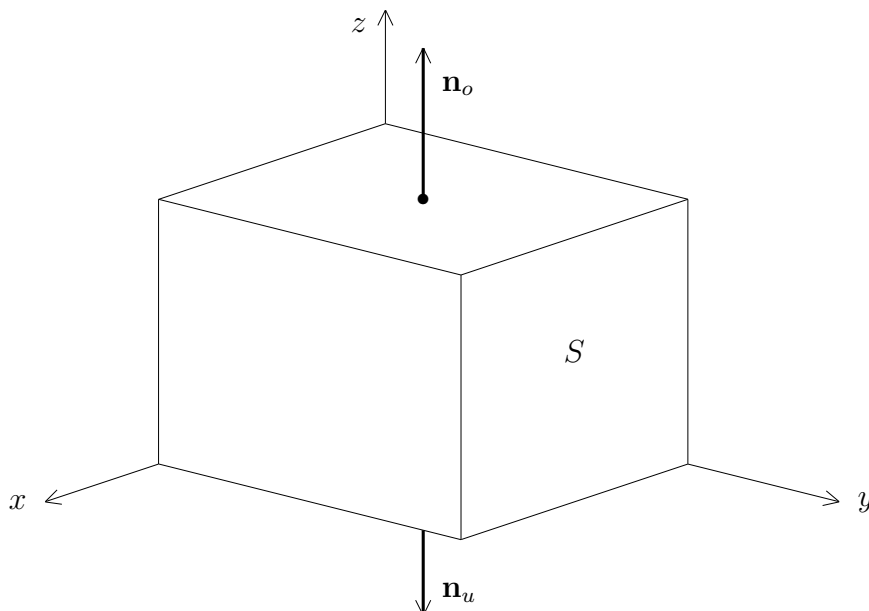
Etwa sei $\varphi_u(u, v) := (u, 1 - v, 0)$ eine Parametrisierung des „Bodens“ und $\varphi_o(u, v) := (u, v, 1)$ eine Parametrisierung des „Deckels“ (die Parametrisierungen sind keineswegs eindeutig bestimmt, nur die Orientierungen haben wir vorher festgelegt). Ist $Q := [0, 1] \times [0, 1]$

und $S_u := \varphi_u(Q)$, $S_o := \varphi_o(Q)$, so ergibt sich:

$$\mathbf{n}_u := \mathbf{n}_{S_u} = (1, 0, 0) \times (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$$

und

$$\mathbf{n}_o := \mathbf{n}_{S_o} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$



Sei nun $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein **konstantes** Vektorfeld in der Nähe des Würfels. Dann gilt:

$$\int_{\varphi_u} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{S_u} \mathbf{F} \bullet (0, 0, -1) do = -F_3 \cdot \int_{S_u} do = -F_3$$

und

$$\int_{\varphi_o} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{S_o} \mathbf{F} \bullet (0, 0, 1) do = F_3 \cdot \int_{S_o} do = F_3.$$

Der gleiche Effekt stellt sich bei den anderen Seiten des Würfels ein, so daß schließlich folgt:

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0$$

für jedes konstante Vektorfeld \mathbf{F} .

Eine *geschlossene Fläche* ist eine Fläche, die ein Gebiet des \mathbb{R}^3 berandet. Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß das Flächenintegral eines konstanten Vektorfeldes über eine geschlossene Fläche stets = 0 ist. Warum das so ist, ist anschaulich jetzt schon klar: Alles, was in das Gebiet hineinfließt, muß auch wieder herausfließen.

Zum Schluß möchte ich noch die „Differentialformen“-Schreibweise des Flächenintegrals einführen:

Definition.

Sei $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück oder Pflaster, f eine auf S definierte stetige Funktion. Ist $\sigma = (i, j, k)$ eine Permutation von $(1, 2, 3)$, so setzt man

$$\int_{\varphi} f dx_i \wedge dx_j := \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \int_{\varphi} f \cdot \mathbf{e}_k \bullet d\mathbf{O}.$$

(Die Indizes i, j und k müssen dabei in genau dieser Reihenfolge verwendet werden).

I.5.2 Satz.

$$1. \int_{\varphi} f dx_j \wedge dx_i = - \int_{\varphi} f dx_i \wedge dx_j.$$

$$2. \int_{\varphi} f dx_i \wedge dx_i = 0.$$

3. Berechnet werden die Integrale folgendermaßen:

$$\int_{\varphi} f dx_i \wedge dx_j = \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \end{pmatrix} du dv.$$

BEWEIS:

1) ist klar, da $\text{sgn}(j, i, k) = -\text{sgn}(i, j, k)$ ist.

2) folgt sofort aus (1)

3) Nach Definition des Vektorproduktes (A, Kap. I, §5) ist

$$\mathbf{e}_k \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \text{sgn}(i, j, k) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

(Man probiere die 3 Möglichkeiten $k = 1, 2, 3$ aus!) □

Schreibt man $\varphi = (x, y, z)$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f dx \wedge dy &= \int_{\varphi} (0, 0, f) \bullet d\mathbf{O} = \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv, \\ \int_{\varphi} f dy \wedge dz &= \int_{\varphi} (f, 0, 0) \bullet d\mathbf{O} = \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du dv, \\ \int_{\varphi} f dz \wedge dx &= \int_{\varphi} (0, f, 0) \bullet d\mathbf{O} = \int_Q f(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv. \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein Vektorfeld, so folgt:

$$\int_{\varphi} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\varphi} F_3 dx \wedge dy + \int_{\varphi} F_1 dy \wedge dz + \int_{\varphi} F_2 dz \wedge dx.$$

§6 Die Sätze von Gauß und Stokes

Definition.

Eine *stückweise glatte orientierte Fläche* ist eine Fläche $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

1. Die S_i , $i = 1, \dots, k$, sind orientierte Pflaster.
2. Für $i \neq j$ ist $S_i \cap S_j$ leer oder besteht aus regulären Randstücken von S_i , die zugleich reguläre Randstücke von S_j sind. Dabei induzieren S_i und S_j jeweils entgegengesetzte Orientierungen auf diesen Randstücken.
3. Für paarweise verschiedene Indizes i, j, k ist $S_i \cap S_j \cap S_k$ leer oder besteht aus einem einzigen Punkt.

Durch die Zusatzbedingungen wird die Möglichkeit, aus Pflastern Flächen zusammenzubauen, weiter eingeschränkt. Von den auf Seite 66 abgebildeten Flächen ist eine nicht erlaubt. (Welche?)

Definition.

Ein *reguläres Gebiet* ist ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$, dessen Rand als stückweise glatte orientierte Fläche $\partial G = S_1 \cup \dots \cup S_k$ dargestellt werden kann, so daß außerdem gilt:

Ist $\mathbf{x} \in S_i^\circ$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{n}_{S_i}(\mathbf{x}) \notin G$ für $0 < t < \varepsilon$ ist. Die Flächennormale zeigt stets nach „außen“.

Meistens ist es schon anschaulich klar, daß die Normalen-Bedingung erfüllt ist. Wir verzichten dann auf einen sauberen mathematischen Beweis.

I.6.1 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $\mathbf{x}_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$ sei Q_ε der abgeschlossene achsenparallele Würfel um \mathbf{x}_0 mit Kantenlänge 2ε . Dann ist

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_n(Q_\varepsilon)} \int_{Q_\varepsilon} f(\mathbf{x}) dv_n.$$

BEWEIS: Ist $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, so ist $Q_\varepsilon = [x_1^{(0)} - \varepsilon, x_1^{(0)} + \varepsilon] \times \dots \times [x_n^{(0)} - \varepsilon, x_n^{(0)} + \varepsilon]$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in Q_\varepsilon$, so daß gilt:

$$\int_{Q_\varepsilon} f(\mathbf{x}) dv_n = f(\xi) \cdot v_n(Q_\varepsilon).$$

Strebt ε gegen Null, so strebt ξ gegen \mathbf{x}_0 . Daraus folgt die Behauptung. □

Mit den gleichen Bezeichnungen definieren wir:

Definition.

Ist \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$, so wird die *Quelldichte* von \mathbf{F} in $\mathbf{x}_0 \in U$ definiert als

$$\delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(Q_\varepsilon)} \int_{\partial Q_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.$$

Der Punkt \mathbf{x}_0 heißt *Quelle* bzw. *Senke* von \mathbf{F} , falls $\delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) > 0$ bzw. < 0 ist.

Ist \mathbf{F} das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, so mißt die Quelldichte, wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit aus einem kleinen Würfel um \mathbf{x}_0 herausfließt, bzw. wieviel darin verschwindet.

I.6.2 Satz. Ist $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in der Nähe von \mathbf{x}_0 , so gilt:

$$\delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\mathbf{x}_0).$$

BEWEIS: Wir parametrisieren die 6 Seiten des Würfels durch φ_u (unten), φ_o (oben), φ_l (links), φ_r (rechts), φ_v (vorne) und φ_h (hinten), z.B. mit

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &:= (u, 2x_2^{(0)} - v, x_3^{(0)} - \varepsilon) \\ \text{und } \varphi_o(u, v) &:= (u, v, x_3^{(0)} + \varepsilon) \end{aligned}$$

für $x_1^{(0)} - \varepsilon \leq u \leq x_1^{(0)} + \varepsilon$ und $x_2^{(0)} - \varepsilon \leq v \leq x_2^{(0)} + \varepsilon$.

φ_l , φ_r , φ_v und φ_h werden entsprechend definiert.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \mathbf{n}_u &:= \frac{\partial \varphi_u}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_u}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, -1, 0) = (0, 0, -1) \\ \text{und } \mathbf{n}_o &:= \frac{\partial \varphi_o}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_o}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Daraus folgt (mit $P(\varepsilon) := [x_1^{(0)} - \varepsilon, x_1^{(0)} + \varepsilon] \times [x_2^{(0)} - \varepsilon, x_2^{(0)} + \varepsilon]$):

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi_u} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} + \int_{\varphi_o} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \\ &= \int_{P(\varepsilon)} [F_3(\varphi_o(u, v)) - F_3(\varphi_u(u, v))] dv_2 \\ &= \int_{x_2^{(0)} - \varepsilon}^{x_2^{(0)} + \varepsilon} \int_{x_1^{(0)} - \varepsilon}^{x_1^{(0)} + \varepsilon} [F_3(u, v, x_3^{(0)} + \varepsilon) - F_3(u, 2x_2^{(0)} - v, x_3^{(0)} - \varepsilon)] du dv \\ &= \int_{x_2^{(0)} - \varepsilon}^{x_2^{(0)} + \varepsilon} \int_{x_1^{(0)} - \varepsilon}^{x_1^{(0)} + \varepsilon} [F_3(u, v, x_3^{(0)} + \varepsilon) - F_3(u, v, x_3^{(0)} - \varepsilon)] du dv \quad 4 \\ &= \int_{x_2^{(0)} - \varepsilon}^{x_2^{(0)} + \varepsilon} \int_{x_1^{(0)} - \varepsilon}^{x_1^{(0)} + \varepsilon} \int_{x_3^{(0)} - \varepsilon}^{x_3^{(0)} + \varepsilon} \frac{\partial F_3}{\partial z}(u, v, z) dz du dv \\ &= \int_{Q_\varepsilon} \frac{\partial F_3}{\partial z}(\mathbf{x}) dv_3. \end{aligned}$$

Analog bekommt man heraus:

$$\int_{\varphi_l} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} + \int_{\varphi_r} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{Q_\varepsilon} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}) dv_3$$

und

$$\int_{\varphi_v} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} + \int_{\varphi_h} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{Q_\varepsilon} \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}) dv_3.$$

Alle drei Ergebnisse zusammen ergeben die Formel

$$\int_{\partial Q_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{Q_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv_3.$$

Nach Satz I.6.1. ist dann

$$\delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(Q_\varepsilon)} \cdot \int_{Q_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv_3 = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0).$$

□

Die Bedeutung der *Divergenz* ist damit geklärt, und außerdem haben wir für beliebige Würfel Q und Vektorfelder \mathbf{F} die folgende Beziehung erhalten:

$$\int_{\partial Q} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_Q \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv_3.$$

Ist jetzt T eine Quadersumme, die sich in lauter gleiche Würfel zerlegen läßt, so stoßen nur entgegengesetzt orientierte Seiten aneinander, und die Flächenintegrale darüber heben sich weg. Daher bleibt die Formel auch für solche Gebiete richtig.

Ein beliebiges reguläres Gebiet kann man durch solche Quadersummen approximieren. Daher erscheint es plausibel, daß die gefundene Formel dann noch immer richtig bleibt. Tatsächlich gilt:

I.6.3 Gaußscher Integralsatz. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $G \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Gebiet mit $\bar{G} \subset U$ und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann ist

$$\boxed{\int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv_3.}$$

Der exakte *Beweis* ist recht kompliziert, wir müssen hier auf ihn verzichten.

Beispiel:

Gesucht ist der Fluß des Vektorfeldes $\mathbf{F}(x, y, z) := (2z, x+y, 0)$ durch die Oberfläche S einer Kugel B vom Radius r um $\mathbf{0}$ (von innen nach außen). Nach Gauß ist

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv_3 \\ &= \int_B 1 dv_3 \\ &= \frac{4}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

⁴Wegen der Formel $\int_a^b t dt = \int_a^b (a+b-t) dt$.

I.6.4 Folgerung. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G . Hat G die Eigenschaft, daß mit jeder geschlossenen Fläche $S = \partial B \subset G$ auch das Innere B zu G gehört, so gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \iff \int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0 \text{ für jede geschlossene Fläche } S \subset G.$$

BEWEIS:

1) Sei $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ und $S = \partial B$ eine geschlossene Fläche. Dann gilt nach dem Gaußschen Satz:

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv_3 = 0.$$

2) Wenn das Integral über \mathbf{F} und jede geschlossene Fläche S verschwindet, dann gilt für $\mathbf{x}_0 \in G$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(Q_\varepsilon)} \int_{\partial Q_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0.$$

□

Definition.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ heißt *asphärisch*, wenn für jedes Gebiet $B \subset \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\partial B \subset G \implies B \subset G.$$

Kugeln und Quader sind asphärische Gebiete, eine Kugelschale ist es nicht.

Der Integralsatz von Gauß stellt die Verbindung zwischen dem Integral über ein Vektorfeld und den Rand (die Oberfläche) eines Bereiches einerseits und dem Integral über eine Ableitung des Vektorfeldes und den gesamten Bereich selbst andererseits her. Etwas ähnliches haben wir nicht nur beim Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (der dem Gaußschen Satz letztlich zu Grunde liegt) sondern auch beim Greenschen Satz gesehen. Dort war

$$\int_{\partial G} (P, Q) \bullet \mathbf{T} d\sigma = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dv_2,$$

wobei $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ der Tangenteneinheitsvektor ist. Die äußere Normale ist $\mathbf{N} = (T_2, -T_1)$. Daher ist

$$\int_{\partial G} (P, Q) \bullet \mathbf{N} d\sigma = \int_{\partial G} (-Q, P) \bullet \mathbf{T} d\sigma = \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dv_2.$$

Das ist der Gaußsche Integralsatz in 2 Veränderlichen.

Tatsächlich läßt sich der Gaußsche Satz auf beliebige Dimensionen übertragen, man muß nur ein geeignetes Analogon zum Flächenintegral finden.

Es gibt auch noch eine andere Verbindung zu früheren Inhalten:

Im zweiten Paragraph haben wir gelernt: Besitzt ein Vektorfeld \mathbf{F} ein Potential, so ist das Integral über \mathbf{F} und jeden geschlossenen Weg = 0. Notwendig dafür, daß \mathbf{F} ein Potential besitzt, ist $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Auf gewissen besonders einfachen Gebieten ist diese Bedingung auch hinreichend. Wir definieren nun analog:

Definition.

Sei \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld \mathbf{A} auf U heißt *Vektorpotential* für \mathbf{F} , wenn $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$ ist.

I.6.5 Satz. *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld kann höchstens dann ein Vektorpotential besitzen, wenn $\mathbf{div} \mathbf{F} = 0$ ist.*

BEWEIS: Es sei $\mathbf{F} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$. Wir wollen $\mathbf{div} \mathbf{F} = \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{A}$ berechnen. Zur Abkürzung setzen wir $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ usw. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} &= \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \bullet (\partial_y A_3 - \partial_z A_2, \partial_z A_1 - \partial_x A_3, \partial_x A_2 - \partial_y A_1) \\ &= \partial_x \partial_y A_3 - \partial_x \partial_z A_2 + \partial_y \partial_z A_1 - \partial_y \partial_x A_3 + \partial_z \partial_x A_2 - \partial_z \partial_y A_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Damit haben wir auch eine *Integrabilitätsbedingung* für die Existenz eines Vektorpotentials gefunden. Und wie bei den skalaren Potentialen gilt auch hier:

I.6.6 Satz. *Ist $B = B_r(\mathbf{0})$ eine Kugel um den Nullpunkt und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B , so besitzt \mathbf{F} genau dann ein Vektorpotential, wenn $\mathbf{div} \mathbf{F} = 0$ ist.*

Je zwei Vektorpotentiale von \mathbf{F} unterscheiden sich um ein Gradientenfeld.

BEWEIS: Ist $\mathbf{div} \mathbf{F} = 0$, so setzt man

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \int_0^1 t \cdot \mathbf{F}(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x} dt.$$

Es ist eine nicht allzu schwere Übungsaufgabe, nachzurechnen, daß $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$ ist.

Sind $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ zwei Vektorpotentiale von \mathbf{F} , so ist $\mathbf{rot}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = \mathbf{0}$, und es gibt eine Funktion f auf B mit $\mathbf{grad} f = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$. □

Zur Erinnerung: Zwei skalare Potentiale eines Vektorfeldes auf B unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Man kann sich fragen, wie weit Satz 6.6. verallgemeinert werden kann. Das Problem ist invariant unter Translationen, daher kann man als Gebiete auch Kugeln mit beliebigem Mittelpunkt zulassen. Analysiert man die Beweise für die Existenz von Potentialen genauer, so sieht man, daß von den Eigenschaften des Gebietes nur folgende benutzt wird: Die Strecke zwischen zwei Punkten des Gebietes liegt selbst ganz im Gebiet.

Wir haben den dafür relevanten Begriff schon mehrfach verwendet:

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten von M auch immer die gesamte Verbindungsstrecke in M enthalten ist.

Konvexität begegnet einem nicht nur in der Mathematik, sondern auch im täglichen Leben, man denke nur an die konvex geschliffenen Linsen in Brillen und Fernrohren.

Auf Grund der vorhin gemachten Beobachtungen gilt:

Ist G ein konvexes Gebiet, \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G und $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, so besitzt \mathbf{F} ein skalares Potential. Ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, so besitzt \mathbf{F} ein Vektorpotential.

Analysiert man die Beweise noch genauer, so sieht man, daß es nur auf folgendes ankommt: Es muß einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in G$ geben, so daß mit jedem anderen Punkt $\mathbf{x} \in G$ auch die Verbindungsstrecke von \mathbf{x} und \mathbf{x}_0 zu G gehört.

Definition.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ gibt, so daß mit jedem anderen Punkt $\mathbf{x} \in M$ auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen \mathbf{x}_0 und \mathbf{x} in M enthalten ist.

Jede konvexe Menge ist auch sternförmig, aber die Umkehrung gilt natürlich nicht. Hingegen kann man zeigen, daß jede sternförmige Menge asphärisch ist.

Auch auf sternförmigen Gebieten sind die Integrabilitätsbedingungen jeweils hinreichend für die Existenz von Potentialen.

Wir kommen nun zu einem anderen Problem:

Es sei $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ ein Pflaster. Zusätzlich sei φ auf ganz Q injektiv, so daß $bS = \varphi(\partial Q)$ ist. Wir sprechen dann kurz von einem *einfachen Flächenstück*. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial Q \subset \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung des Quaderrandes, so ist $\beta := \varphi \circ \alpha : [a, b] \rightarrow bS \subset \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Randes von S .

Das Flächenstück S liege in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$, und \mathbf{F} sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann nennen wir das Integral

$$Z(\mathbf{F}, bS) := \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$$

die *Zirkulation von \mathbf{F} auf bS* . Ist \mathbf{F} ein Kraftfeld, so ergibt die Zirkulation von \mathbf{F} auf bS die Arbeit, die geleistet wird, wenn man einen Punkt einmal längs bS herumführt.

Nun sei $\mathbf{x}_0 \in U$ ein fester Punkt und \mathbf{n} ein Einheitsvektor in \mathbf{x}_0 . Das Flächenstück stehe in \mathbf{x}_0 auf dem Einheitsvektor senkrecht. Wir können o.B.d.A. sogar annehmen, daß das Flächenstück *eben* ist, also Teil einer affinen Ebene.

Der Parameterbereich Q habe die Gestalt $Q = [-a, a] \times [-b, b]$, und es sei $\varphi(0, 0) = \mathbf{x}_0$. Für $\varepsilon > 0$ sei $Q_\varepsilon := [-\varepsilon a, \varepsilon a] \times [-\varepsilon b, \varepsilon b]$. Dann ist auch $S_\varepsilon := \varphi(Q_\varepsilon)$ ein passendes Flächenstück, das in \mathbf{x}_0 auf \mathbf{n} senkrecht steht. Speziell ist $S_1 = S$, und für $\varepsilon \rightarrow 0$ wird S_ε immer kleiner und strebt schließlich gegen $S_0 = \{\mathbf{x}_0\}$.

Definition.

Unter den obigen Voraussetzungen wird die *Wirbeldichte von \mathbf{F} in \mathbf{x}_0 bezüglich \mathbf{n}* definiert durch

$$w_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{bS_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

(Zur Existenz des Grenzwertes kommen wir später).

Beispiel:

Wir betrachten eine waagrecht aufgehängte rotierende Scheibe, der Mittelpunkt der Scheibe liege im Ursprung. Ein Massenpunkt der Scheibe dreht sich dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die z -Achse. Das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{F} , das die Momentangeschwindigkeit aller Punkte auf der Scheibe beschreibt, hat die Gestalt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-\omega_0 y, \omega_0 x, 0).$$

Wir wollen die Wirbeldichte von \mathbf{F} in $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ bezüglich $\mathbf{n} := (0, 0, 1)$ berechnen:

Dazu betrachten wir die Parametrisierung $\varphi(u, v) := (u, v, 0)$ auf $Q_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Das Bild ist das in der xy -Ebene gegebene Quadrat S_ε mit den Ecken $(-\varepsilon, -\varepsilon, 0)$ und $(\varepsilon, \varepsilon, 0)$. Der Rand ∂S_ε wird z.B. durch die Wege

$$\beta_1(t) := (\varepsilon, \varepsilon t, 0), \beta_2(t) := (-\varepsilon t, \varepsilon, 0), \beta_3(t) := (-\varepsilon, -\varepsilon t, 0), \beta_4(t) := (\varepsilon t, -\varepsilon, 0)$$

parametrisiert, die alle auf $[-1, 1]$ definiert sind. Dann ist z.B.

$$\begin{aligned} \int_{\beta_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\beta_1(t)) \bullet \dot{\beta}_1(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (-\omega_0 \varepsilon t, \omega_0 \varepsilon, 0) \bullet (0, \varepsilon, 0) dt \\ &= \int_{-1}^1 \omega_0 \varepsilon^2 dt \\ &= 2\varepsilon^2 \omega_0. \end{aligned}$$

Das Integral über die anderen Seiten ergibt auch jeweils $2\varepsilon^2 \omega_0$.

Andererseits ist $A(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon^2$. Damit ergibt sich für jedes ε :

$$\frac{1}{A(S_\varepsilon)} \cdot \int_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \frac{4 \cdot 2\varepsilon^2 \omega_0}{4\varepsilon^2 \omega_0} = 2\omega_0.$$

Die Wirbeldichte von \mathbf{F} in \mathbf{x}_0 bezüglich \mathbf{n} ist das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit.

Wir versuchen es noch beim Punkt $\mathbf{y}_0 := (1, 0, 0)$. Hier benutzen wir die Parametrisierung $\varphi(u, v) := ((1+u) \cos(v), (1+u) \sin(v), 0)$. Das Bild von Q_ε unter φ ist ein Kreisringsektor T_ε . Die beiden geraden Begrenzungslinien stehen überall senkrecht auf \mathbf{F} , deshalb ergibt das Linienintegral über \mathbf{F} und diese Seiten keinen Beitrag.

Ist $\alpha(t) := (r \cos t, r \sin t, 0)$ auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{F}(r \cos t, r \sin t, 0) \bullet (-r \sin t, r \cos t, 0) dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (-\omega_0 r \sin t, \omega_0 r \cos t, 0) \bullet (-r \sin t, r \cos t, 0) dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\omega_0 r^2 \sin^2 t + \omega_0 r^2 \cos^2 t) dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_0 r^2 dt \\ &= 2\omega_0 r^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir müssen über zwei solche Kreisbögen integrieren, und zwar für $r = 1 + \varepsilon$ und für $r = 1 - \varepsilon$, wobei letzterer umgekehrt orientiert werden muß. Das ergibt:

$$\int_{bT_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 2\omega_0\varepsilon((1 + \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2) = 8\varepsilon^2\omega_0.$$

Die Fläche von T_ε berechnen wir mit der Transformationsformel:

Ist $\Phi(u, v) := ((1 + u) \cos v, (1 + u) \sin v) \in \mathbb{R}^2$, so haben $\Phi(Q_\varepsilon)$ und $\varphi(Q_\varepsilon)$ natürlich den gleichen Flächeninhalt. Es ist

$$\Phi'(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -(1 + u) \sin v \\ \sin v & (1 + u) \cos v \end{pmatrix} \quad \text{und daher} \quad J_\Phi(u, v) = 1 + u.$$

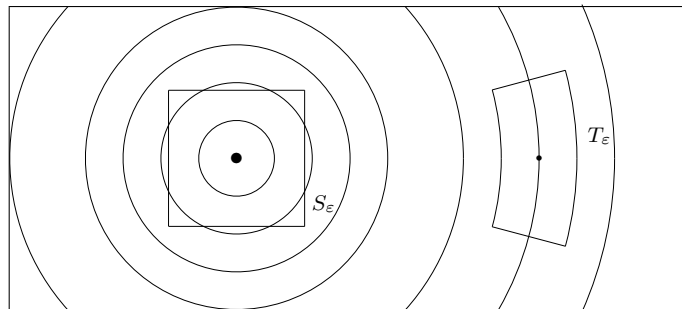
Für kleines $\varepsilon > 0$ und $(u, v) \in Q_\varepsilon$ ist $J_\Phi(u, v) > 0$. Also ist

$$A(T_\varepsilon) = \int_{\Phi(Q_\varepsilon)} 1 \, dv_2 = \int_{Q_\varepsilon} 1 \cdot J_\Phi(u, v) \, dv_2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1 + u) \, du \, dv = 4\varepsilon^2.$$

Damit ist auch in \mathbf{y}_0

$$\frac{1}{A(T_\varepsilon)} \cdot \int_{bT_\varepsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \frac{8\varepsilon^2\omega_0}{4\varepsilon^2} = 2\omega_0.$$

Man kann den Wirbel, den das Vektorfeld im Ursprung aufweist, mit Hilfe der Wirbel-dichte überall aufspüren. Die Form der Flächenstücke und ihrer Ränder spielen dabei keine Rolle, wie wir gleich sehen werden.



Wir wollen nun den Beweis für die Existenz des Grenzwertes in der Definition der Wirbel-dichte führen. Es wird sich lohnen, denn wir werden zugleich eine bequemere Methode zu ihrer Berechnung finden. Zunächst können wir o.B.d.A. annehmen, daß der betrachtete Punkt \mathbf{x}_0 der Ursprung ist (der **betrachtete** Punkt, nicht das Zentrum des Wirbels!).

Wir beginnen mit dem Spezialfall $\mathbf{n} = \mathbf{n}_z = (0, 0, 1)$.

Wir betrachten eine Folge von einfachen ebenen Flächenstücken

$$\varphi_k : Q_{\varepsilon_k} \rightarrow S_k \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

so daß $A(S_k)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Wir nehmen außerdem an, daß es Greensche Bereiche $B_k \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so daß jeweils $S_k = B_k \times \{0\}$ ist. Ansonsten sei die Gestalt von S_k beliebig.

Sei nun k festgehalten und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von bS_k . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{bS_k} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\alpha(t))\alpha'_1(t) + F_2(\alpha(t))\alpha'_2(t)) dt \\ &= \int_{\partial B_k} (F_1 dx + F_2 dy) \\ &= \int_{B_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, 0) \right) dx dy \\ &= v_2(B_k) \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\xi_k) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\xi_k) \right), \end{aligned}$$

mit einem geeigneten $\xi_k \in S_k$. Für $k \rightarrow \infty$ strebt ξ_k gegen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$, und da $v_2(B_k) = A(S_k)$ ist, folgt:

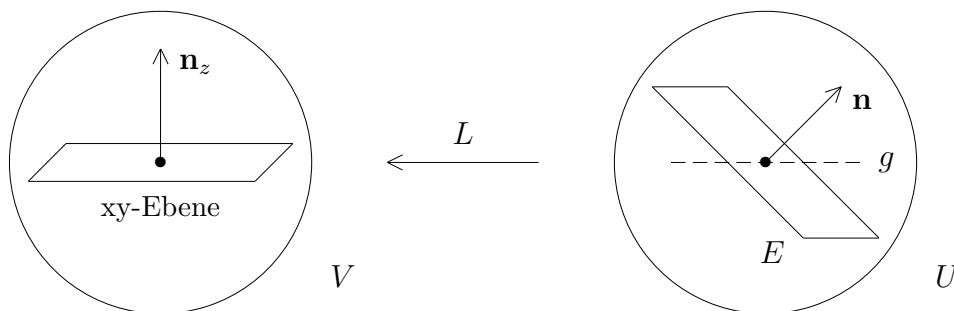
$$\frac{1}{A(S_k)} \int_{bS_k} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(\xi_k) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\xi_k)$$

strebt für $k \rightarrow \infty$ gegen

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0, 0, 0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(0, 0, 0) = \mathbf{n}_z \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{0}).$$

Analoge Aussagen erhält man für $\mathbf{n}_x = (1, 0, 0)$ und $\mathbf{n}_y = (0, 1, 0)$.

Sei jetzt \mathbf{n} ein beliebiger Einheitsvektor. Die Ebene E , die in $\mathbf{0}$ auf \mathbf{n} senkrecht steht, schneidet die xy -Ebene längs einer Geraden g . Dann gibt es eine Drehung L des \mathbb{R}^3 um g als Achse, welche E in die xy -Ebene dreht. L ist eine orthogonale lineare Abbildung, erhält also Normen und Skalarprodukte. Insbesondere wird \mathbf{n} durch L auf $\mathbf{n}_z = (0, 0, 1)$ abgebildet.⁵ Sei $J := L'(0)$ die Funktionalmatrix von L in $\mathbf{0}$. Sie ist zugleich diejenige Matrix, die L (bezüglich der Standardbasis) als lineare Abbildung beschreibt.



Sei $Q := Q_{\varepsilon_k}$, $\varphi = \varphi_k$ und $S = S_k = \varphi(Q)$ für ein bestimmtes k . Wir setzen $\psi := L \circ \varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $S^* := \psi(Q) = L(S)$. Nun müssen wir wieder einmal mit der Gramschen Determinante rechnen: Die Matrix J liegt in $M_{3,3}(\mathbb{R})$. Ist $A = \varphi'(u, v) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ bilden und $B = \psi'(u, v)$ die Matrix,

⁵In Wirklichkeit gibt es zwei Drehungen, welche die Ebenen aufeinander abbilden. Sie unterscheiden sich um eine Drehung um 180° , also eine Spiegelung. Nur eine von ihnen bildet \mathbf{n} auf \mathbf{n}_z ab.

deren Spalten die Vektoren $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ bilden, so ist

$$J \circ A = B,$$

also $G_B = \det(B^\top \circ B) = \det(A^\top \circ J^\top \circ J \circ A) = \det(A^\top \circ \mathbf{1} \circ A) = G_A$. Daß $J^\top \circ J = \mathbf{1}$ ist, liegt daran, daß J orthogonal ist. Nun folgt:

$$A(S^*) = \int_Q \sqrt{G_B} \, du \, dv = \int_Q \sqrt{G_A} \, du \, dv = A(S).$$

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial Q$ eine Parametrisierung, so ist $\varphi \circ \alpha$ eine Parametrisierung von bS und $\psi \circ \alpha = L \circ \varphi \circ \alpha$ eine Parametrisierung von bS^* .

Ist \mathbf{F} auf der Umgebung U von S definiert und $V := L(U)$, so sei das Vektorfeld \mathbf{F}^* (in der Nähe von S^*) definiert durch

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{y}) := L \circ \mathbf{F}(L^{-1}(\mathbf{y})).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{bS^*} \mathbf{F}^* \bullet d\mathbf{y} &= \int_a^b L \circ \mathbf{F}(L^{-1}(\psi \circ \alpha(t))) \bullet (\psi \circ \alpha)'(t) \, dt \\ &= \int_a^b L \circ \mathbf{F}(L^{-1} \circ L \circ \varphi \circ \alpha(t)) \bullet (L \circ \varphi \circ \alpha)'(t) \, dt \\ &= \int_a^b L(\mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t))) \bullet L((\varphi \circ \alpha)'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t)) \bullet (\varphi \circ \alpha)'(t) \, dt \\ &= \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

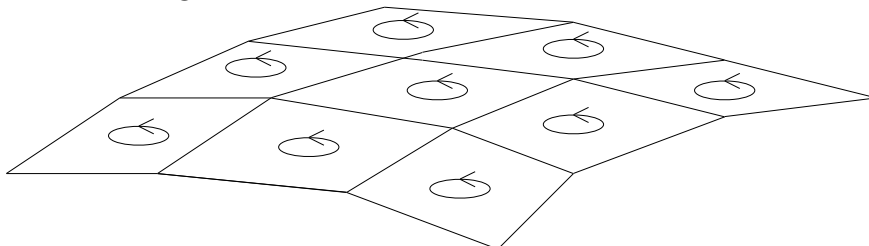
Also ist für beliebiges k und $S_k^* := L(S_k)$

$$\frac{1}{A(S_k)} \int_{bS_k} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \frac{1}{A(S_k^*)} \int_{bS_k^*} \mathbf{F}^* \bullet d\mathbf{y},$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gegen den endlichen Grenzwert $\mathbf{n}_z \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}^*(\mathbf{0})$.

Damit ist die Existenz der Wirbeldichte als Grenzwert in jedem Fall gesichert. Es wird sich weiter unten zeigen, daß immer $w_{\mathbf{F}}(\mathbf{0}, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{0})$ ist. Wir könnten das auch hier direkt sehen, wenn wir zeigen könnten, daß $L(\mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{0})) = \mathbf{rot} \mathbf{F}^*(\mathbf{0})$ ist, aber das ist nicht so einfach.

Unter der Annahme, daß wir die Beziehung schon gezeigt hätten, können wir folgende heuristische Betrachtung anstellen:



Wir zerlegen ein Flächenstück S in viele kleine Flächenstücke: $S = S_1 \cup \dots \cup S_N$. Wenn wir alle Ränder richtig orientieren und in jeder Teilfläche S_i einen Punkt ξ_i auswählen, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^N \int_{bS_i} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} \\ &\approx \sum_{i=1}^N \mathbf{rot} \mathbf{F}(\xi_i) \bullet \mathbf{n}_{S_i}(\xi_i) \cdot A(S_i), \end{aligned}$$

und diese Summe konvergiert – wenn man die Zerlegung feiner und feiner werden läßt – gegen

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{n}_S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.$$

Wir werden gleich mit einem ordentlichen Beweis zeigen, daß die gewonnene Formel tatsächlich richtig ist:

Die Zirkulation $\int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ ist gleich dem Integral über die Wirbeldichte $\int_S w_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_S(\mathbf{x})) \, d\mathbf{o}$.

I.6.7 Satz von Stokes. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U und $S \subset U$ eine stückweise glatte orientierte Fläche. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.}$$

BEWEIS: Da wir eine beliebige orientierte Fläche aus einfachen Flächenstücken zusammensetzen können, nehmen wir von vornherein an, daß S ein solches einfaches Flächenstück mit einer (zweimal stetig differenzierbaren) Parametrisierung $\varphi : Q \rightarrow S$ ist.

1) **Behauptung:** Ist $\mathbf{A} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, so gilt:

$$(\mathbf{A}'(\mathbf{x}) - (\mathbf{A}'(\mathbf{x}))^\top) \circ \mathbf{a}^\top = (\mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \times \mathbf{a})^\top.$$

Beweis dafür: Wir lassen das Argument \mathbf{x} weg. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' - (\mathbf{A}')^\top &= \begin{pmatrix} \partial_x A_1 & \partial_y A_1 & \partial_z A_1 \\ \partial_x A_2 & \partial_y A_2 & \partial_z A_2 \\ \partial_x A_3 & \partial_y A_3 & \partial_z A_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x A_1 & \partial_x A_2 & \partial_x A_3 \\ \partial_y A_1 & \partial_y A_2 & \partial_y A_3 \\ \partial_z A_1 & \partial_z A_2 & \partial_z A_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_y A_1 - \partial_x A_2 & \partial_z A_1 - \partial_x A_3 \\ \partial_x A_2 - \partial_y A_1 & 0 & \partial_z A_2 - \partial_y A_3 \\ \partial_x A_3 - \partial_z A_1 & \partial_y A_3 - \partial_z A_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\mathbf{rot} \mathbf{A})_3 & (\mathbf{rot} \mathbf{A})_2 \\ (\mathbf{rot} \mathbf{A})_3 & 0 & -(\mathbf{rot} \mathbf{A})_1 \\ -(\mathbf{rot} \mathbf{A})_2 & (\mathbf{rot} \mathbf{A})_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und daher

$$[\mathbf{A}' - (\mathbf{A}')^\top] \circ \mathbf{a}^\top = \begin{pmatrix} 0 & -(\mathbf{rot} \mathbf{A})_3 & (\mathbf{rot} \mathbf{A})_2 \\ (\mathbf{rot} \mathbf{A})_3 & 0 & -(\mathbf{rot} \mathbf{A})_1 \\ -(\mathbf{rot} \mathbf{A})_2 & (\mathbf{rot} \mathbf{A})_1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{rot} \mathbf{A})_2 a_3 - (\mathbf{rot} \mathbf{A})_3 a_2 \\ (\mathbf{rot} \mathbf{A})_3 a_1 - (\mathbf{rot} \mathbf{A})_1 a_3 \\ (\mathbf{rot} \mathbf{A})_1 a_2 - (\mathbf{rot} \mathbf{A})_2 a_1 \end{pmatrix} \\
&= ((\mathbf{rot} \mathbf{A}) \times \mathbf{a})^\top.
\end{aligned}$$

2) Ist $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ein weiterer Vektor, so ist $\mathbf{a} \circ (\mathbf{A}')^\top \circ \mathbf{b}^\top$ ein Skalar, also

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{A}')^\top \circ \mathbf{b}^\top = (\mathbf{a} \circ (\mathbf{A}')^\top \circ \mathbf{b}^\top)^\top = \mathbf{b} \circ \mathbf{A}' \circ \mathbf{a}^\top.$$

Mit (1) folgt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \circ (\mathbf{A}')^\top \circ \mathbf{b}^\top - \mathbf{b} \circ (\mathbf{A}')^\top \circ \mathbf{a}^\top &= \mathbf{b} \circ (\mathbf{A}' - (\mathbf{A}')^\top) \circ \mathbf{a}^\top \\
&= \mathbf{b} \circ (\mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{a})^\top \\
&= \mathbf{b} \bullet (\mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{a}) \\
&= \det(\mathbf{b}, \mathbf{rot} \mathbf{A}, \mathbf{a}) \\
&= \det(\mathbf{rot} \mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).
\end{aligned}$$

3) Es sei jetzt $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial Q$ eine Parametrisierung des Randes des Parameter-Rechtecks. Dann ist $\beta := \varphi \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von bS . Bei der folgenden Rechnung verwenden wir noch einmal den Greenschen Satz:

$$\begin{aligned}
\int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\beta(t)) \bullet \dot{\beta}(t) dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t)) \circ [\varphi'(\alpha(t)) \circ \dot{\alpha}(t)^\top] dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t)) \circ \left[\alpha'_1(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\alpha(t)) + \alpha'_2(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\alpha(t)) \right]^\top dt \\
&= \int_{\partial Q} (X du + Y dv) \\
&\quad (\text{mit } X(u, v) := (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \\
&\quad \text{und } Y(u, v) := (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)) \\
&= \int_Q \left(\frac{\partial Y}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right) dv_2,
\end{aligned}$$

wobei allgemein für vektorwertige Funktionen \mathbf{A} und \mathbf{B} , die unter anderem von einer Variablen t abhängen, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}\right) \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}\right).$$

Diese verallgemeinerte Produktregel kann man ganz leicht herleiten (vgl. auch das Beispiel $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \circ A \circ \mathbf{x}^\top$ in Teil A, Kap. V, §2). Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{\partial(\mathbf{F} \circ \varphi)}{\partial u} \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial v} + (\mathbf{F} \circ \varphi) \bullet \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \\
\text{und } \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\partial(\mathbf{F} \circ \varphi)}{\partial v} \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (\mathbf{F} \circ \varphi) \bullet \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v},
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial Y}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial(\mathbf{F} \circ \varphi)}{\partial u} \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial(\mathbf{F} \circ \varphi)}{\partial v} \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Weil

$$\frac{\partial(\mathbf{F} \circ \varphi)}{\partial u} = \left[(\mathbf{F}' \circ \varphi) \circ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^\top \right]^\top = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ (\mathbf{F}' \circ \varphi)^\top$$

ist und Analoges für die Ableitung nach v gilt, folgt:

$$\begin{aligned} \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} &= \int_Q \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ (\mathbf{F}' \circ \varphi)^\top \circ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^\top - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ (\mathbf{F}' \circ \varphi)^\top \circ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^\top \right] dv_2 \\ &= \int_Q \det \left(\mathbf{rot} \mathbf{F} \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dv_2 \quad (\text{nach (2)}) \\ &= \int_Q (\mathbf{rot} \mathbf{F} \circ \varphi) \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dv_2 \\ &= \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt! □

Nun sind wir auch endlich in der Lage, die Wirbeldichte auszurechnen:

I.6.8 Folgerung. Für beliebige Einheitsvektoren \mathbf{n} ist

$$w_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

BEWEIS: Nach dem Stokesschen Satz stimmt die Zirkulation $Z(\mathbf{F}, bS) = \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ mit dem Fluß $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ überein. Da wir S als eben voraussetzen, ist $\mathbf{n}_S(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}$ konstant auf S . Die Funktion $f(\mathbf{x}) := \mathbf{n} \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist stetig auf der kompakten Menge S und nimmt dort daher ein Minimum m_S und ein Maximum M_S an. Also ist

$$m_S \leq \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_S \leq M_S \quad \text{auf ganz } S.$$

Daraus folgt:

$$m_S \cdot A(S) \leq \int_S (\mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_S) do \leq M_S \cdot A(S),$$

also

$$m_s \leq \frac{1}{A(S)} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} \leq M_S.$$

Läßt man nun S immer kleiner werden und gegen \mathbf{x}_0 konvergieren, so streben die linke Seite und die rechte Seite beide gegen $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$, während der mittlere Term (wegen der Anfangsbemerkung) gegen $w_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n})$ konvergiert (was wir schon früher nachgewiesen hatten). □

I.6.9 Folgerung. Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U und S eine geschlossene Fläche in U , so ist

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0.$$

BEWEIS: Wir wählen auf S eine kleine zusammenhängende offene Teilfläche X_1 mit stückweise glattem Rand C und setzen $S_1 := X_1 \cup C$ und $S_2 := S \setminus X_1$. Dann sind S_1, S_2 zwei Flächen mit $S_1 \cup S_2 = S$ und $S_1 \cap S_2 = bS_1 = bS_2 = C$. Orientieren wir C so, daß X_1 wirklich das Innere von C ist, so ist C von S_2 aus gesehen falsch herum orientiert. Daher folgt:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{S_1} \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} \quad \text{und} \quad \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = - \int_{S_2} \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.$$

Daher ist

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{S_1} \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} + \int_{S_2} \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0.$$

□

Bemerkung: Ist U sphärisch, so ist $S = \partial B$, mit einem Gebiet $B \subset U$. Dann folgt:

$$\int_{\partial B} \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_B \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{F} \, dv_3 = 0.$$

Das Besondere an Folgerung 6.9. ist, daß U gar nicht sphärisch zu sein braucht.

Beispiel:

Wir betrachten noch einmal das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) := (-\omega_0 y, \omega_0 x, 0)$. Offensichtlich ist

$$\mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, \omega_0 + \omega_0) = (0, 0, 2\omega_0)$$

und $(0, 0, 1) \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = 2\omega_0$. Diesen Wert hatten wir schon als Wirbeldichte identifiziert.

Wenn $C \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach geschlossene stückweise glatte Kurve ist und man ein Randintegral $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}$ in ein Flächenintegral umwandeln will, dann muß es erst mal eine Fläche S mit $bS = C$ geben, in deren Nähe \mathbf{F} definiert ist. Dazu sind zwei Probleme zu lösen:

1. Es muß eine Fläche (ein Flächenstück) S im \mathbb{R}^3 mit $bS = C$ gefunden werden.
2. Es muß sichergestellt werden, daß diese Fläche sogar im Definitionsbereich von \mathbf{F} liegt.

Zum ersten Problem ist folgender Ansatz denkbar: Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von C mit $\alpha(0) = \alpha(1) = \mathbf{x}_0$, so kann man eine bijektive und stückweise glatte Abbildung $h : S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow C$ definieren, durch

$$h(\cos(t), \sin(t)) := \alpha\left(a + \frac{b-a}{2\pi} \cdot t\right).$$

Dabei wird dem Punkt auf dem Kreis zunächst sein zugehöriger (eindeutig bestimmter) Winkel t mit $0 \leq t < 2\pi$ zugeordnet, dann das Intervall $[0, 2\pi]$ auf $[a, b]$ umparametrisiert und schließlich α angewandt. Da der Weg geschlossen ist, ist h auch in $(1, 0)$ stetig.

Unter einem geschlossenen Weg kann man sich also stets eine solche Abbildung $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vorstellen. Diese Abbildung läßt sich nun auf das Innere von S^1 , also auf die Kreisscheibe $D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ fortsetzen: Für $(x, y) = (r \cos(t), r \sin(t)) \in D$ sei

$$\hat{h}(x, y) := r \cdot h(\cos(t), \sin(t)).$$

Die Fläche, die als Bild von \hat{h} auftritt, ist eventuell nicht regulär, läßt sich aber leicht glätten.

Das zweite Problem ist nicht immer lösbar. Ist der Definitionsbereich U von \mathbf{F} etwa die Menge $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, also der \mathbb{R}^3 ohne die z-Achse, dann gibt es in U keine Fläche, die den Einheitskreis als Rand besitzt. Hier geht es also um eine spezielle Eigenschaft des Gebietes.

Definition.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn es zu jeder einfach geschlossenen stückweise glatten Kurve C in G eine Fläche S in G mit $bS = C$ gibt.

Sternförmige Gebiete sind einfach zusammenhängend, aber z.B. auch eine Kugelschale, die ja offensichtlich nicht asphärisch ist. Hingegen ist der \mathbb{R}^3 ohne die z-Achse nicht einfach zusammenhängend.

I.6.10 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G mit $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, so gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf G mit $\text{grad } f = \mathbf{F}$.*

BEWEIS: Ist $C \subset G$ ein einfach geschlossener stückweise glatter Weg, so gibt es eine stückweise glatte Fläche $S \subset G$ mit $C = bS$. Nach Stokes gilt dann:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0.$$

Daraus folgt, daß auch das Integral über \mathbf{F} und einen beliebigen stückweise glatten geschlossenen Weg verschwindet. Und in dem Falle haben wir schon bewiesen, daß \mathbf{F} ein Gradientenfeld ist. (Hauptsatz über Kurvenintegrale!) \square

Das ist der allgemeinste Existenzsatz für skalare Potentiale. Zur Erinnerung: Die allgemeinste Bedingung für die Existenz von Vektorpotentialen beinhaltet, daß das Gebiet asphärisch sein muß. Sternförmige Gebiete sind asphärisch und einfach zusammenhängend.

Zum Schluß dieses Abschnittes möchte ich eine etwas unkonventionelle Einführung in die Begriffswelt der *Differentialformen* geben:

Differentialformen sind allgemeinere Objekte als die uns bekannten Funktionen und Vektorfelder. In einem n -dimensionalen Raum gibt es Differentialformen der Dimensionen $0, 1, 2, \dots, n$. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 3$ und bezeichnen k -dimensionale Differentialformen auf einem Gebiet G kurz als *k-Formen auf G* .

1. Eine 0-Form auf G ist eine stetig differenzierbare Funktion auf G . Sie ordnet jedem Punkt von G eine reelle Zahl zu.
2. Eine 1-Form ω auf G ordnet jedem stückweise glatten Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ eine reelle Zahl zu, und zwar so, daß es ein stetig differenzierbares Vektorfeld \mathbf{F} auf G gibt, mit

$$\omega(\alpha) = \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x}.$$

Wir schreiben dann auch $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$. Speziell definiert man die 1-Formen dx , dy und dz durch

$$\begin{aligned} dx(\alpha) &:= \int_{\alpha} \mathbf{e}_1 \bullet d\mathbf{x} = \int_a^b \alpha'_1(t) dt, \\ dy(\alpha) &:= \int_{\alpha} \mathbf{e}_2 \bullet d\mathbf{x} = \int_a^b \alpha'_2(t) dt, \\ \text{und } dz(\alpha) &:= \int_{\alpha} \mathbf{e}_3 \bullet d\mathbf{x} = \int_a^b \alpha'_3(t) dt. \end{aligned}$$

Setzt man noch $f \cdot \omega_{\mathbf{F}} := \omega_{f \cdot \mathbf{F}}$, so erhält man für $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ die Beziehung

$$\omega_{\mathbf{F}} = \omega_{F_1 \cdot \mathbf{e}_1 + F_2 \cdot \mathbf{e}_2 + F_3 \cdot \mathbf{e}_3} = F_1 \cdot \omega_{\mathbf{e}_1} + F_2 \cdot \omega_{\mathbf{e}_2} + F_3 \cdot \omega_{\mathbf{e}_3} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

3. Eine 2-Form σ auf G ordnet jeder stückweise glatten Fläche $\varphi : Q \rightarrow S \subset G$ eine reelle Zahl zu, und zwar so, daß es ein stetig differenzierbares Vektorfeld \mathbf{A} auf G gibt, mit

$$\sigma(S) = \int_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O}.$$

Wir schreiben dann $\sigma = \sigma_{\mathbf{A}}$.

4. Eine 3-Form ν auf G ordnet jedem Teilgebiet $B \subset G$ mit stückweise glattem Rand eine Zahl zu, und zwar so, daß es eine Funktion ϱ auf G gibt, mit

$$\nu(B) = \int_B \varrho(\mathbf{x}) dv_3.$$

Wir schreiben dann $\nu = \nu_{\varrho}$.

Es sind auch folgende Schreibweisen üblich:

$$\omega(\alpha) = \int_{\alpha} \omega, \quad \sigma(S) = \int_S \sigma, \quad \text{und } \nu(B) = \int_B \nu.$$

Die Vektorfelder zu 1-Formen und 2-Formen, sowie die Dichtefunktion ϱ zu einer 3-Form sind jeweils eindeutig bestimmt. Letzteres folgt aus Satz 6.1., die anderen Aussagen aus dem folgenden Satz:

I.6.11 Satz. *Sei \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G .*

1. Ist $\int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = 0$ für jeden stückweise glatten Weg α in G , so ist $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$.
2. Ist $\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0$ für jede stückweise glatte Fläche S in G , so ist auch $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$.

BEWEIS:

- 1) Sei $B \subset G$ eine kleine Kugel. Nach Voraussetzung gilt für jede Fläche $S \subset B$:

$$0 = \int_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.$$

Wenn wir annehmen, daß (2) schon bewiesen sei, dann folgt: $\mathbf{rot} \mathbf{F}|_B \equiv \mathbf{0}$. Aber das bedeutet, daß es auf B eine Funktion f mit $\nabla f = \mathbf{F}$ gibt. Ist α ein Weg in B mit Anfangspunkt A und Endpunkt E , so ist

$$0 = \int_{\alpha} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{\alpha} \nabla f \bullet d\mathbf{x} = f(E) - f(A).$$

Das ist nur möglich, wenn f auf B konstant ist, also $\mathbf{F}|_B \equiv \mathbf{0}$. Da man zu jedem Punkt von G eine solche Kugel um den Punkt in G finden kann, ist alles bewiesen.

2) Sei $U \subset G$ ein kleines sternförmiges Teilgebiet. Nach Voraussetzung und mit Hilfe des Gaußschen Satzes folgt für jedes reguläre Gebiet $B \subset U$:

$$0 = \int_{\partial B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_B (\mathbf{div} \mathbf{F}) dv_3.$$

Mit Satz 6.1 ergibt sich daraus, daß $\mathbf{div} \mathbf{F} \equiv 0$ auf U sein muß. Da U sternförmig ist, gibt es ein Vektorpotential \mathbf{A} auf U mit $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

Ist $C \subset U$ die Spur eines einfach geschlossenen Weges α , so gibt es – weil U auch einfach zusammenhängend ist – eine Fläche $S \subset U$ mit $\partial S = C$, und dann gilt:

$$\int_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O} = \int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = 0.$$

Damit kann man aber ein skalares Potential f für \mathbf{A} konstruieren, und es ist $\mathbf{F} = \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{rot} \mathbf{grad} f = \mathbf{0}$ auf U . \square

Definition.

Sind ω_1, ω_2 und ω_3 1-Formen auf G , mit zugehörigen Vektorfeldern $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und \mathbf{F}_3 , so definiert man

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &:= \sigma_{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2} \\ \text{und } \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &:= \nu_{\det(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)}. \end{aligned}$$

Man spricht vom *Dachprodukt*.

Dann kann man leicht zeigen:

I.6.12 Satz.

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$.
2. $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$, insbesondere $\omega \wedge \omega = 0$.
3. $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0$, falls zwei der 1-Formen übereinstimmen.
4. Definiert man $f \cdot \sigma_{\mathbf{A}} := \sigma_{f \cdot \mathbf{A}}$, so folgt:

$$f \cdot (\omega_1 \wedge \omega_2) = (f \cdot \omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (f \cdot \omega_2).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \sigma_{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2} = \sigma_{\mathbf{e}_3}, \\ dy \wedge dz &= \sigma_{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3} = \sigma_{\mathbf{e}_1}, \\ dz \wedge dx &= \sigma_{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1} = \sigma_{\mathbf{e}_2}. \end{aligned}$$

Ist also $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, so folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{A}} &= \sigma_{A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3} \\ &= A_1 \cdot \sigma_{\mathbf{e}_1} + A_2 \cdot \sigma_{\mathbf{e}_2} + A_3 \cdot \sigma_{\mathbf{e}_3} \\ &= A_1 dy \wedge dz + A_2 dz \wedge dx + A_3 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Zu bemerken ist, daß dies mit den früher gegebenen Definitionen übereinstimmt!

Definition.

Sei $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$ eine 1-Form und $\sigma = \sigma_{\mathbf{A}}$ eine 2-Form. Dann setzt man

$$\omega_{\mathbf{F}} \wedge \sigma_{\mathbf{A}} = \sigma_{\mathbf{A}} \wedge \omega_{\mathbf{F}} := \nu_{\mathbf{F} \bullet \mathbf{A}}.$$

Das ist verträglich mit den früheren Definitionen:

$$\omega_{\mathbf{F}_1} \wedge (\omega_{\mathbf{F}_2} \wedge \omega_{\mathbf{F}_3}) = \omega_{\mathbf{F}_1} \wedge \sigma_{\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_3} = \nu_{\mathbf{F}_1 \bullet (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_3)} = \nu_{\det(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)}.$$

Bemerkung: Sei α eine k -Form und β eine l -Form. Ist $k + l > 3$, so setzt man $\alpha \wedge \beta := 0$. Ist $k + l \leq 3$, so gilt:

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{k \cdot l} \alpha \wedge \beta.$$

Außerdem gilt für beliebige Differentialformen ω_1, ω_2 und ω_3 :

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

I.6.13 Hilfssatz. f sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, \mathbf{F} , \mathbf{A} und \mathbf{B} seien zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder. Dann gilt:

1. $\text{rot grad } f = \mathbf{0}$.
2. $\text{div rot } \mathbf{F} = 0$.
3. $\text{rot}(f \cdot \mathbf{F}) = f \cdot \text{rot}(\mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$.
4. $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} - \mathbf{A} \bullet \text{rot } \mathbf{B}$.

BEWEIS:

1) Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{rot\ grad\ } f &= \nabla \times (\nabla f) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \\ &= (\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f, \dots) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

2) wurde in Satz 6.5. gezeigt.

3) Mit ein wenig Intuition ist

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(f \cdot \mathbf{F}) &= \nabla \times (f \cdot \mathbf{F}) \\ &= (f \nabla + \nabla f) \times \mathbf{F} \\ &= f \cdot \mathbf{rot\ F} + \nabla f \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

4) Hier ist

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \bullet (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1) \\ &= \partial_x(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \partial_y(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \partial_z(A_1 B_2 - A_2 B_1) \\ &= (\partial_x A_2 - \partial_y A_1) B_3 + (\partial_z A_1 - \partial_x A_3) B_2 + (\partial_y A_3 - \partial_z A_2) B_1 \\ &\quad - A_2(\partial_z B_1 - \partial_x B_3) - A_3(\partial_x B_2 - \partial_y B_1) - A_1(\partial_y B_3 - \partial_z B_2) \\ &= \mathbf{B} \bullet \mathbf{rot\ A} - \mathbf{A} \bullet \mathbf{rot\ B}. \end{aligned}$$

□

Ist $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, so sei mit $\Omega^k(G)$ die Menge aller k -Formen auf G bezeichnet. $\Omega^k(G)$ trägt auf natürliche Weise die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraumes. Außerdem können k -Formen mit stetig differenzierbaren Funktionen multipliziert werden.

I.6.14 Satz. *Es gibt \mathbb{R} -lineare Abbildungen*

$$\Omega^0(G) \xrightarrow{d} \Omega^1(G) \xrightarrow{d} \Omega^2(G) \xrightarrow{d} \Omega^3(G)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Für eine Funktion $f \in \Omega^0(G)$ ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

2. $d \circ d = 0$.

3. Ist f eine Funktion und ω eine 1-Form, so ist

$$d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega.$$

4. Sind ω_1 und ω_2 zwei 1-Formen, so ist

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

BEWEIS: Wir setzen

$$\begin{aligned} df &:= \omega_{\nabla f}, \\ d\omega_{\mathbf{F}} &:= \sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{F}} \\ \text{und } d\sigma_{\mathbf{A}} &:= \nu_{\mathbf{div} \mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Es ist klar, daß alle drei Abbildungen d \mathbb{R} -linear sind, und daß (1) gilt. Weiter folgt:

$$2) \quad ddf = d\omega_{\nabla f} = \sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{grad} f} = 0 \quad \text{und} \quad dd\omega_{\mathbf{F}} = d\sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{F}} = \nu_{\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{F}} = 0.$$

3) Es ist

$$\begin{aligned} d(f \cdot \omega_{\mathbf{F}}) &= d(\omega_{f \cdot \mathbf{F}}) = \sigma_{\mathbf{rot}(f \cdot \mathbf{F})} \\ &= \sigma_{f \cdot \mathbf{rot} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}} \\ &= f \cdot \sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{F}} + \omega_{\nabla f} \wedge \omega_{\mathbf{F}} \\ &= f \cdot d\omega_{\mathbf{F}} + df \wedge \omega_{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

4) Weiter gilt:

$$\begin{aligned} d(\omega_{\mathbf{F}_1} \wedge \omega_{\mathbf{F}_2}) &= d\sigma_{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2} = \nu_{\mathbf{div}(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)} \\ &= \nu_{\mathbf{F}_2 \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}_1} - \nu_{\mathbf{F}_1 \bullet \mathbf{rot} \mathbf{F}_2} \\ &= \omega_{\mathbf{F}_2} \wedge \sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{F}_1} - \omega_{\mathbf{F}_1} \wedge \sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{F}_2} \\ &= d\omega_{\mathbf{F}_1} \wedge \omega_{\mathbf{F}_2} - \omega_{\mathbf{F}_1} \wedge d\omega_{\mathbf{F}_2}. \end{aligned}$$

□

Nun kann man die Integralsätze in einheitlicher Form präsentieren:

I.6.15 Allgemeiner Stokesscher Satz.

1. Ist C eine stückweise glatte Kurve mit Anfangspunkt A und Endpunkt E , so ist

$$\int_C df = f(E) - f(A).$$

2. Ist S eine stückweise glatte Fläche, so ist

$$\int_S d\omega = \int_{bS} \omega.$$

3. Ist B ein reguläres Gebiet, so ist

$$\int_B d\sigma = \int_{\partial B} \sigma.$$

BEWEIS: 1) es ist

$$\int_C df = \int_C \omega_{\nabla f} = \int_C \nabla f \bullet d\mathbf{x} = f(E) - f(A).$$

2) Mit Stokes folgt:

$$\int_S d\omega_{\mathbf{F}} = \int_S \sigma_{\mathbf{rot} \mathbf{F}} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{bS} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{x} = \int_{bS} \omega_{\mathbf{F}}.$$

3) Mit Gauß gilt:

$$\int_B d\sigma_{\mathbf{A}} = \int_B \nu_{\mathbf{div} \mathbf{A}} = \int_B \mathbf{div} \mathbf{A} dv_3 = \int_{\partial B} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\partial B} \sigma_{\mathbf{A}}.$$

□

Zum Schluß wollen wir als Anwendung die *Maxwellschen Gleichungen* betrachten:

Das *Coulombsche Gesetz* besagt: Eine Ladungsverteilung erzeugt ein *elektrisches Feld* und verändert damit die Struktur des Raumes (Fernwirkung). Wird eine Probeladung q in das elektrische Feld gebracht, so wirkt auf q eine zu q proportionale Kraft in Richtung der Feldlinien. Daher ordnet das elektrische Feld jeder stückweise glatten Kurve C die Arbeit

$$\varepsilon(C) := \int_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{x}$$

zu, die verrichtet wird, wenn q den Weg C entlang geführt wird. Also wird das elektrische Feld durch eine 1-Form

$$\varepsilon = \omega_{\mathbf{E}} = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$

beschrieben.

Die durch das elektrische Feld veränderte Struktur des Raumes wird durch die *elektrische Verschiebungsdichte* beschrieben, die unmittelbar das Verhalten von geladenen Objekten beeinflußt (Nahwirkung). Man beobachtet ihren Fluß durch Flächenstücke, die senkrecht zu den Feldlinien gedacht sind. Daher ordnet die elektrische Verschiebungsdichte jedem stückweise glatten Flächenstück S den Fluß

$$\delta(S) := \int_S \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O}$$

durch dieses Flächenstück zu. Sie ist also eine 2-Form

$$\delta = \sigma_{\mathbf{D}} = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy.$$

Ist in einem Gebiet G eine Ladungsverteilung durch eine Dichtefunktion ϱ gegeben, so besagt das sogenannte Gaußsche Gesetz:

$$\boxed{\int_{\partial B} \mathbf{D} \bullet d\mathbf{O} = \int_B \varrho dv_3.}$$

Zusammen mit dem Gaußschen Satz ergibt das für beliebige Gebiete G :

$$\int_B (\mathbf{div} \mathbf{D} - \varrho) dv_3 = 0.$$

Daraus folgt die *1. Maxwellsche Gleichung*:

$$\boxed{\mathbf{div} \mathbf{D} = \varrho.}$$

Als nächstes nehmen wir an, daß ein Magnetfeld vorliegt. Man interessiert sich für den Fluß

$$\beta(S) := \int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{O}$$

der magnetischen Feldlinien durch Flächenstücke S . Daher kann man das *magnetische Feld* (oder die *magnetische Induktion*) als eine 2-Form auffassen:

$$\beta = \sigma_{\mathbf{B}} = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy.$$

Bewegt man eine Leiterschleife im Magnetfeld, so beobachtet man einen Spannungsstoß, der nach Faraday der negativen zeitlichen Änderung des Flusses durch diejenige Fläche entspricht, die von der Leiterschleife berandet wird. Auf Grund der Spannung fließt Strom, werden Ladungen entlang der Leiterschleife bewegt und es entsteht ein elektrisches Feld. Da man die Spannung auch als die beim Ladungstransport verrichtete Arbeit auffassen kann, gilt:

$$\int_{bS} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{O}.$$

Nach Stokes und wegen der eindeutigen Rekonstruierbarkeit der Vektorfelder aus ihren Flächenintegralen folgt das *Induktionsgesetz* (die *2. Maxwell'sche Gleichung*):

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

Da man außerdem noch nie magnetische Monopole (also magnetische Quellen) entdeckt hat, fordert man zusätzlich als *3. Maxwell'sche Gleichung*):

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0.$$

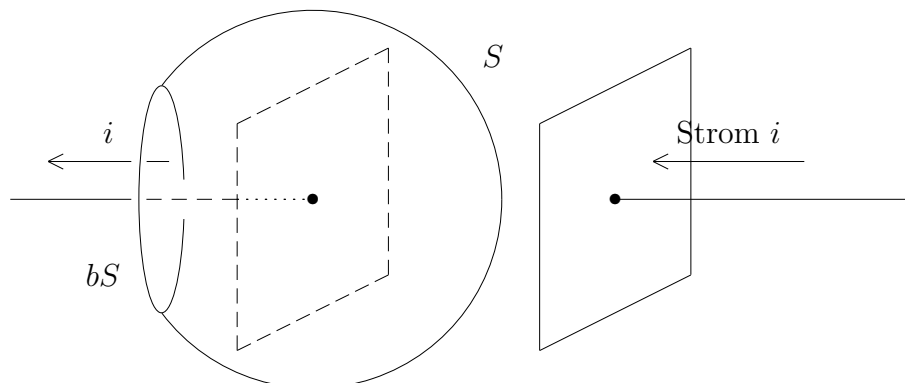
Fließt Strom durch eine Leiterschleife, so kann man beobachten, daß sich ein Magnetfeld um die Stromlinien herum aufbaut. Die *magnetische Erregung* ergibt durch Integration über geschlossene Wege den Gesamtstrom durch die eingeschlossene Fläche, ist also eine 1-Form

$$\eta = \eta_{\mathbf{H}} = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz.$$

Ist die Stromverteilung durch eine (vektorielle) Dichtefunktion \mathbf{J} gegeben, die sogenannte *Stromdichte*, so ergibt sich der Gesamtstrom als Integral über die Stromdichte und damit das *Durchflutungsgesetz*

$$\int_{bS} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{O}.$$

Maxwell entdeckte als erster, daß das Gesetz so unvollständig ist und in gewissen Situationen zu Widersprüchen führt.



Wählt man die Fläche S wie im Bild, so ergibt das Integral $\int_{bS} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{x}$ den Gesamtstrom i , der durch den Leiter fließt. Aber das Integral auf der rechten Seite der Gleichung, $\int_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{O}$, verschwindet, denn zwischen den Kondensatorplatten fließt kein Strom.

Maxwell fand heraus, daß zur Stromdichte als Korrekturterm noch die zeitliche Änderung der elektrischen Verschiebungsdichte addiert werden muß:

$$\int_{bS} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{x} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \bullet d\mathbf{O}.$$

Mit dem Stokesschen Satz führt das zur 4. *Maxwellschen Gleichung*:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$