

---

# Kapitel V

## Differentialrechnung in mehreren Variablen

### §1 Partielle Differenzierbarkeit

Wir haben schon beim Übergang von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{C}$  gesehen, daß die Lagebeziehungen der Punkte zueinander in der Ebene komplizierter sind als auf einer Geraden. Nun wollen wir sogar den Schritt in den  $n$ -dimensionalen Raum wagen.

Punkte des  $\mathbb{R}^n$  schreiben wir als Zeilenvektoren:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Wenn es nötig ist, Punkte zu numerieren ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ ), so schreiben wir die jeweilige Nummer oben an die Komponenten:

$$\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0), \mathbf{x}_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1), \dots$$

#### Definition.

Sei  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ . Dann heißt

$$B_r(\mathbf{x}_0) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < r \}$$

eine *offene Kugel* (oder ein *offener Ball*) um  $\mathbf{x}_0$  mit Radius  $r$ .

Häufig nennen wir  $B_r(\mathbf{x}_0)$  auch eine *r-Umgebung* von  $\mathbf{x}_0$ . Eine beliebige Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine *Umgebung* von  $\mathbf{x}_0$ , wenn es ein  $r > 0$  gibt, so daß  $B_r(\mathbf{x}_0)$  ganz in  $U$  enthalten ist.

Genau wie in  $\mathbb{C}$  definieren wir:

#### Definition.

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge.

1. Ein Punkt  $\mathbf{a} \in M$  heißt *innerer Punkt* von  $M$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß  $B_\varepsilon(\mathbf{a})$  ganz in  $M$  liegt.
2. Die Menge  $M$  heißt *offen*, falls jeder Punkt von  $M$  zugleich innerer Punkt von  $M$  ist.
3. Die Menge  $M$  heißt *abgeschlossen*, falls  $\mathbb{R}^n \setminus M$  offen ist.
4. Ein Punkt  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  heißt *Randpunkt* von  $M$ , falls jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\mathbf{a}$  sowohl Punkte von  $M$  als auch Punkte von  $\mathbb{R}^n \setminus M$  enthält.

Auch hier gilt: Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

**Definition.**

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge.

1. Die Menge **aller** Randpunkte von  $M$  bezeichnet man mit  $\partial M$ .
2. Die Menge  $\bar{M} := M \cup \partial M$  nennt man die *abgeschlossene Hülle* von  $M$ .

**Beispiel:**

$\partial B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$  ist die „Schale“ der Kugel.

$\overline{B_r(\mathbf{a})} = \{Vx \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$  ist die abgeschlossene Kugel, die sowohl das Innere als auch die Schale umfaßt.

Die Konvergenz von Folgen wird wie üblich definiert:

*Eine Folge von Punkten  $\mathbf{x}_\nu$  des  $\mathbb{R}^n$  konvergiert gegen  $\mathbf{x}_0$ , wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_0, \text{ so daß } \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \text{ für alle } \nu \geq \nu_0 \text{ ist.}$$

Die Art und Weise, wie sich eine Folge ihrem Grenzwert nähert, kann recht kompliziert sein. Es gilt aber:

$$\mathbf{x}_\nu \rightarrow \mathbf{x}_0 \iff x_i^\nu \rightarrow x_i^0 \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Auf diese Weise kann man den Konvergenzbegriff im  $\mathbb{R}^n$  auf den in  $\mathbb{R}$  zurückführen.

Sei nun  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Abbildung. Es gibt mehrere Stufen der Kompliziertheit:

- a)  $n = 1$  und  $k = 1$ . Das ist die Situation der *reellen Funktionen von einer Veränderlichen*, die wir in Kapitel III betrachtet haben.
- b)  $n = 1$  und  $k$  beliebig. Dann sprechen wir von einer *vektorwertigen Funktion* oder einer *parametrisierten Kurve* oder einem *parametrisierten Weg*.  $f = (f_1, \dots, f_k)$  ist genau dann stetig bzw. differenzierbar, wenn alle Komponenten es sind. Veranschaulicht wird ein Weg durch seine Spur im  $\mathbb{R}^k$ . Dabei geht allerdings Information verloren, wir können der Spur nicht ansehen, in welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit sie durchlaufen wird.
- c)  $n$  beliebig und  $k = 1$ . Das ist der Fall einer *reellen Funktion von  $n$  Veränderlichen*. Die Stetigkeit einer solchen Funktion definiert man wie üblich mit Hilfe von Folgen, aber die Differenzierbarkeit ist nicht so einfach zu beschreiben. Das wird im Wesentlichen der Inhalt dieses Paragraphen sein. Über die Veranschaulichung einer Funktion von mehreren Veränderlichen werden wir weiter unten sprechen. Allerdings darf man nicht zu sehr an geometrischen Vorstellungen kleben: das Bruttosozialprodukt ist z.B. eine Funktion von sehr vielen Variablen, und dieser funktionale Zusammenhang kann nicht mehr geometrisch dargestellt werden.

- d)  $n$  und  $k$  beliebig. Dann besteht  $f = (f_1, \dots, f_k)$  aus  $k$  Funktionen von  $n$  Veränderlichen. Vieles kann man daher auf den Fall (c) zurückführen. Man spricht auch von einem *Vektorfeld*, insbesondere, wenn  $k = n$  ist. In diesem Falle würde man versuchen, in jedem Punkt  $\mathbf{x}$  den Vektor  $f(\mathbf{x})$  zu zeichnen. Natürlich kann man das in der Praxis nur in endlich vielen Punkten tun. Ist  $f$  sogar konstant, so erhalten wir genau das Bild, das wir bei der Einführung des anschaulichen Vektorbegriffs (in Kapitel I) benutzt haben.

Der Übergang von „skalaren Größen“ ( $k = 1$ ) zu „vektoriellen Größen“ ( $k$  beliebig) bereitet i.a. keine großen Schwierigkeiten, wohl aber der Übergang von einer Veränderlichen ( $n = 1$ ) zu mehreren Veränderlichen ( $n$  beliebig). Deshalb beschäftigen wir uns zunächst mit (skalaren) reellen Funktionen von  $n$  Veränderlichen.

**Beispiel:**

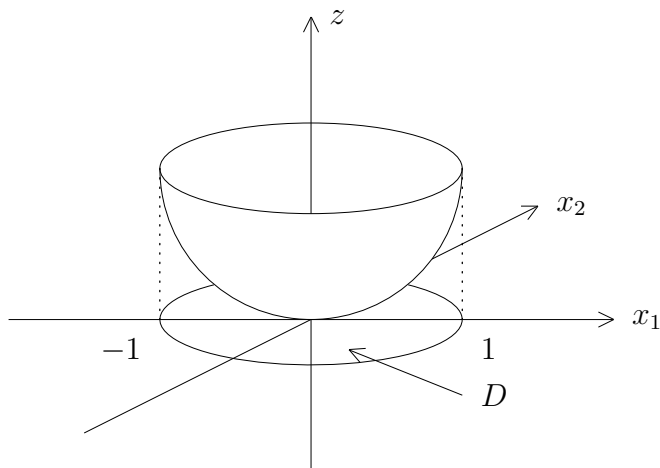
Sei  $D := B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2.$$

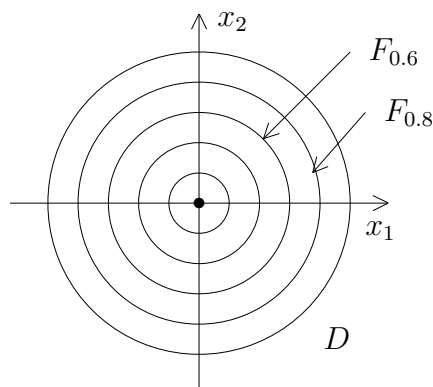
Wie kann man sich eine solche Funktion veranschaulichen? Der Graph

$$G_f := \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x_1, x_2)\}$$

ist ein Fläche über  $D$ :



Eine andere Möglichkeit der Darstellung ist die Benutzung von „Höhenlinien“. In  $D$  werden die *Niveaumengen*  $F_c := \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = c\}$  dargestellt, in unserem Beispiel sind das Kreislinien:



**V.1.1 Satz.** Die Funktionen  $p_i$  mit

$$p_i(\mathbf{x}) = p_i(x_1, \dots, x_n) := x_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

sind auf dem ganzen  $\mathbb{R}^n$  stetig.

BEWEIS: Eine Punktfolge  $\mathbf{x}_\nu = (x_1^\nu, \dots, x_n^\nu)$  konvergiert genau dann gegen einen Punkt  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , wenn für jedes  $i$  die Folge  $(x_i^\nu)$  gegen  $x_i^0$  konvergiert. Aber damit ist auch schon der Satz bewiesen.  $\square$

**V.1.2 Folgerung.** Polynome der Gestalt

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n \leq m} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \\ &= a_{00\dots 0} + a_{10\dots 0} x_1 + \dots + a_{0\dots 01} x_n + a_{20\dots 0} x_1^2 + \dots + a_{0\dots 0m} x_n^m \end{aligned}$$

sind stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ .

BEWEIS: Da man die Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$  über die Komponenten auf die Konvergenz in  $\mathbb{R}$  zurückführen kann, übertragen sich auch alle Grenzwertsätze. Summe und Produkt von konvergenten Folgen ist wieder konvergent. Damit folgt die Behauptung aus dem vorangegangenen Satz.  $\square$

Die Schreibweise von Polynomen von mehreren Veränderlichen bereitet vielleicht am Anfang etwas Schwierigkeiten. Hier ist ein Beispiel:

$$\sum_{i_1+i_2 \leq 2} a_{i_1 i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = a_{00} + a_{10} x_1 + a_{01} x_2 + a_{20} x_1^2 + a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2.$$

Die größte Zahl  $d$ , zu der es Indizes  $i_1, \dots, i_n$  mit  $i_1 + \dots + i_n = d$  und  $a_{i_1 \dots i_n} \neq 0$  gibt, nennt man den *Grad* des Polynoms.

Auch wenn die Konvergenz einer Folge im  $\mathbb{R}^n$  auf die Komponentenfolgen zurückgeführt werden kann, bei der Stetigkeit ist Vorsicht geboten:

Ist  $f(x, y)$  in der Nähe des Nullpunktes im  $\mathbb{R}^2$  definiert, und sind die Funktionen  $x \mapsto f(x, 0)$  und  $y \mapsto f(0, y)$  stetig in Null, so braucht  $f(x, y)$  noch lange nicht stetig im Nullpunkt zu sein!

**Beispiel:**

Sei

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann sind  $f(x, 0) \equiv 0$  und  $f(0, y) \equiv 0$  jeweils stetig.  $f$  ist aber nicht selbst in  $(0, 0)$  stetig: Sei  $(a_\nu)$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}$ . Dann konvergiert  $\mathbf{x}_\nu := (a_\nu, a_\nu)$  gegen  $(0, 0)$ , und es ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(a_\nu)^3}{(a_\nu)^2 + (a_\nu)^4} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_\nu}{1 + (a_\nu)^2} = 0.$$

Soweit sieht das noch gut aus. Aber wenn man  $\mathbf{y}_\nu := ((a_\nu)^2, a_\nu)$  setzt, so konvergiert auch diese Folge gegen  $(0, 0)$ , und es ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\mathbf{y}_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(a_\nu)^4}{2(a_\nu)^4} = \frac{1}{2}.$$

Das dürfte nicht passieren, wenn  $f$  im Nullpunkt stetig wäre.

**Definition.**

1. Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $R > 0$  gibt, so daß  $M$  in  $B_R(\mathbf{0})$  enthalten ist.
2. Die Menge  $M$  heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Abgeschlossene Bälle sind z.B. kompakt.

Funktionen auf kompakten Mengen verhalten sich so ähnlich wie die auf abgeschlossenen Intervallen. Insbesondere gilt:

**V.1.3 Satz.** *Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $f$  auf  $K$  sein Minimum und sein Maximum an.*

Den Beweis können wir hier nicht bringen. Er ist recht kompliziert, obwohl er letztlich aus dem entsprechenden Satz in  $\mathbb{R}$  folgt.

Analog zur Theorie einer Veränderlichen gilt auch hier:

Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{a} \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(\mathbf{a}) > 0$ , so gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset D$ , so daß  $f(\mathbf{x}) > 0$  für alle  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{a})$  ist.

Daraus folgt: Sind  $f_1, \dots, f_k$  stetige Funktionen auf einer offenen Menge  $D$ , so ist auch

$$M := \{\mathbf{x} \in D \mid f_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, f_k(\mathbf{x}) > 0\}$$

eine offene Menge. Und das gleiche gilt, wenn man überall „ $<$ “ statt „ $>$ “ schreibt.

**Definition.**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{a} \in B$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Für  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet man

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

als *Richtungsableitung von  $f$  in  $\mathbf{a}$  in Richtung  $\mathbf{v}$*  (sofern der Grenzwert existiert).

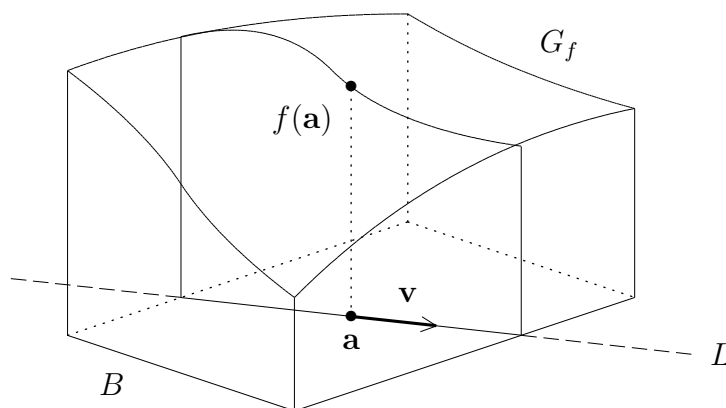
Was bedeutet das anschaulich?

$\alpha(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{v}$  definiert eine parametrisierte Gerade  $L \subset \mathbb{R}^n$ . Sie geht durch den Punkt  $\mathbf{a}$  und hat den Richtungsvektor  $\mathbf{v}$ . Die Funktion

$$f_L(t) := f \circ \alpha(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

ist eine gewöhnliche Funktion einer Veränderlichen, und die Richtungsableitung von  $f$  in  $\mathbf{a}$  mit Richtung  $\mathbf{v}$  ist nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung  $(f_L)'(0)$ .

Den Graphen von  $f_L$  erhält man, indem man den Graphen von  $f$  mit der über der Geraden  $L$  gelegenen Hyperebene  $\{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \in L\}$  schneidet.

**Beispiel:**

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) := 1 - x^2 - y^2$ . Ist  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  und  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , so ist

$$\begin{aligned} f_L(t) &= f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = 1 - (a_1 + tv_1)^2 - (a_2 + tv_2)^2 \\ &= (1 - a_1^2 - a_2^2) - 2t(a_1v_1 + a_2v_2) - t^2(v_1^2 + v_2^2). \end{aligned}$$

Also ist

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = (f_L)'(0) = (-2(a_1v_1 + a_2v_2) - 2t(v_1^2 + v_2^2)) \Big|_{t=0} = -2(a_1v_1 + a_2v_2).$$

Insbesondere ist  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = 0$  genau dann, wenn  $\mathbf{a} \bullet \mathbf{v} = 0$  ist, wenn also diese beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen. In  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  ist **jede** Richtungsableitung = 0.

Untersuchen wir nun die Eigenschaften der Richtungsableitung:

**V.1.4 Satz.**  $f$  und  $g$  seien in  $\mathbf{a}$  in Richtung  $\mathbf{v}$  differenzierbar,  $c$  sei eine Konstante. Dann sind auch  $c \cdot f$ ,  $f + g$  und  $f \cdot g$  in  $\mathbf{a}$  in Richtung  $\mathbf{v}$  differenzierbar, und es gilt:

1.  $D_{\mathbf{v}}(c \cdot f)(\mathbf{a}) = c \cdot D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ .
2.  $D_{\mathbf{v}}(f + g)(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{a})$ .
3.  $D_{\mathbf{v}}(f \cdot g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \cdot D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a})$ .

**BEWEIS:** Es ist  $(c \cdot f)_L = (c \cdot f) \circ \alpha = c \cdot (f \circ \alpha) = c \cdot f_L$ , und analog  $(f + g)_L = f_L + g_L$  und  $(f \cdot g)_L = (f_L) \cdot (g_L)$ . Mit der Definition der Richtungsableitung folgt nun ganz leicht die Behauptung.

Wir wollen das nur bei der Produktregel nachprüfen:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}(f \cdot g)(\mathbf{a}) &= ((f \cdot g)_L)'(0) \\ &= (f_L \cdot g_L)'(0) \\ &= f_L(0) \cdot (g_L)'(0) + (f_L)'(0) \cdot g_L(0) \\ &= f(\mathbf{a}) \cdot D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

□

Als nächstes wollen wir die Abhängigkeit vom Richtungsvektor anschauen:

**V.1.5 Satz.** Sei  $f$  in  $\mathbf{a}$  in Richtung  $\mathbf{v}$  differenzierbar,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  und  $\alpha$  eine Konstante. Dann ist  $f$  in  $\mathbf{a}$  auch in Richtung  $\alpha\mathbf{v}$  differenzierbar, und es gilt:

$$D_{\alpha\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \alpha \cdot D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}).$$

BEWEIS: Die Ableitung in Richtung des Nullvektors existiert immer und ist  $= 0$ . Also können wir voraussetzen, daß auch  $\alpha \neq 0$  ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t(\alpha\mathbf{v})) - f(\mathbf{a})}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \alpha \cdot \frac{f(\mathbf{a} + (t\alpha)\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t\alpha} \right) \\ &= \alpha \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{s} \\ &= \alpha \cdot D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

□

Es reicht daher, wenn man sich bei den Richtungsableitungen auf Einheitsvektoren beschränkt. Eine besondere Rolle spielen dabei die Standard-Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ :

**Definition.**

Die Funktion  $f$  sei in  $\mathbf{a}$  in Richtung des  $i$ -ten Standard-Einheits-Vektors  $\mathbf{e}_i$  differenzierbar. Dann heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) := D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{a})$$

die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $\mathbf{a}$ .

Wenn alle partiellen Ableitungen von  $f$  in  $\mathbf{a}$  existieren, dann heißt  $f$  in  $\mathbf{a}$  *partiell differenzierbar*.

Wie führt man die partielle Differentiation praktisch durch?

Sei  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)) \\ &= \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s - a_i} \\ &= \left. \frac{d}{ds} f(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_n) \right|_{s=a_i}. \end{aligned}$$

Um also die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $\mathbf{a}$  auszurechnen, muß man in  $f(x_1, \dots, x_n)$  die Variablen  $x_j$ ,  $j \neq i$  durch die entsprechenden Komponenten  $a_j$  von  $\mathbf{a}$  ersetzen. Danach hängt die Funktion nur noch von der einen verbliebenen Variablen  $x_i$  ab und kann im gewöhnlichen Sinne nach dieser Variablen an der Stelle  $a_i$  differenziert werden.

**Beispiel:**

Sei  $f(x, y, z) := x^2 \cdot \cos(yz)$ .

Um partiell nach  $x$  zu differenzieren, muß man die Variablen  $x$  und  $y$  festhalten und nur die Funktion  $x \mapsto x^2 \cdot \cos(yz)$  betrachten. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x \cdot \cos(yz).$$

Um partiell nach  $y$  zu differenzieren, muß man die Variablen  $x$  und  $z$  festhalten und nur die Funktion  $y \mapsto x^2 \cdot \cos(yz)$  betrachten. So erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 \cdot (-\sin(yz) \cdot z) = -x^2 z \sin(yz)$$

und analog

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -x^2 y \sin(yz).$$

Es sieht so aus, als hätte man die Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit auf mehrere Veränderliche gefunden. Aber leider ist die partielle Differenzierbarkeit eine zu schwache Eigenschaft. Sie hat noch nicht einmal die Stetigkeit der Funktion selbst zur Folge:

**Beispiel:**

Wir betrachten noch einmal die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktionen  $x \mapsto f(x, 0) \equiv 0$  und  $y \mapsto f(0, y) \equiv 0$  sind sicherlich im Nullpunkt differenzierbar. Also ist  $f$  in  $\mathbf{0} = (0, 0)$  partiell differenzierbar, und andererseits haben wir schon gesehen, daß  $f$  dort nicht stetig ist.

Eine weitere Schwäche der partiellen Differenzierbarkeit tritt auf, wenn man höhere Ableitungen betrachtet:

Ist  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  in allen Punkten von  $B$  partiell differenzierbar, so bilden die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$  wieder reellwertige Funktionen auf  $B$ . Sind sie alle stetig, so nennt man  $f$  *stetig partiell differenzierbar*.

**Definition.**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  überall partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in einem Punkt  $\mathbf{a} \in B$  wiederum partiell differenzierbar. Dann definiert man für  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\mathbf{a}).$$

Man nennt diesen Ausdruck auch die *2-te partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$  und  $x_j$  an der Stelle  $\mathbf{a}$* .



**Beispiel:**

Sei  $f(x_1, x_2) := e^{k \cdot x_1} \cdot \cos(x_2)$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = k \cdot e^{k \cdot x_1} \cdot \cos(x_2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = -e^{k \cdot x_1} \cdot \sin(x_2),$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) = -k e^{k a_1} \sin(a_2).$$

Man kann sich nun fragen, ob man die 2-ten Ableitungen immer miteinander vertauschen kann, ob es also bei höheren partiellen Ableitungen nicht auf die Reihenfolge ankommt. Leider ist das nicht generell der Fall:

**Beispiel:**

$$\text{Sei } f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann gilt für  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - y^3 x)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \quad (\text{für } y \neq 0).$$

Weiter ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

Also ist sogar  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$  für alle  $y$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \equiv -1$ .

Entsprechend erhalten wir für  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(x^3 - 3y^2 x)(x^2 + y^2) - (x^3 y - y^3 x)2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \quad \text{für } x \neq 0,$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Somit ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \equiv +1$ .

Zum Glück gilt folgendes hinreichende Kriterium für die Gleichheit der gemischten zweiten Ableitungen:

**V.1.6 Satz von Schwarz.** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und nach allen Variablen stetig partiell differenzierbar.

Wenn die gemischten zweiten Ableitungen  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$  auf ganz  $B$  existieren und in einem Punkt  $\mathbf{a} \in B$  außerdem stetig sind, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Auf den etwas technischen Beweis verzichten wir hier. Es genügt übrigens schon, daß **eine** der beiden gemischten Ableitungen in der Nähe von  $\mathbf{a}$  existiert und in  $\mathbf{a}$  stetig ist. Dann folgt bereits die Existenz der anderen Ableitung und die Gleichheit.

Die Bildung einer partiellen Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  kann man auch als Anwendung eines „linearen Operators“  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  auf die Funktion  $f$  auffassen. Ein linearer Operator ist nichts anderes als eine lineare Abbildung. Weil die Funktionenräume aber unendlich-dimensional sind, gibt es keine Beschreibung durch eine Matrix. In solchen Fällen benutzt man lieber die Bezeichnung „Operator“.

Man faßt nun gerne die  $n$  partiellen Ableitungs-Operatoren zu einem vektoriellen Operator zusammen:

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (\text{„Nabla“})$$

Die Wirkung dieses Operators sieht folgendermaßen aus:

**Definition.**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen.

1. Ist  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig partiell differenzierbare Funktion (also ein *skalares Feld*), so heißt das Vektorfeld

$$\mathbf{grad}(f) := \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

das *Gradientenfeld* von  $f$ . Der Wert  $\mathbf{grad}(f)(\mathbf{a})$  in einem Punkt  $\mathbf{a}$  wird als *Gradient von  $f$  in  $\mathbf{a}$*  bezeichnet.

2. Sei  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld, dessen sämtliche Komponenten  $v_i$  stetig partiell differenzierbar sind. Dann heißt die Funktion

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) := \nabla \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

die *Divergenz* von  $\mathbf{v}$ .

3. Sei jetzt speziell  $n = 3$  und  $\mathbf{v} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) := \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

die *Rotation* von  $\mathbf{v}$ . Das Ergebnis ist wieder ein Vektorfeld.

Man beachte, daß bei  $\nabla \bullet \mathbf{v}$  und  $\nabla \times \mathbf{v}$  nicht einfach nur Multiplikationen zwischen den Komponenten von  $\nabla$  und denen von  $\mathbf{v}$  durchgeführt werden, sondern daß die partiellen Ableitungen in  $\nabla$  als Operatoren auf den Komponenten von  $\mathbf{v}$  wirken! Die vereinfachte Schreibweise mit dem  $\nabla$  kann daher leicht zu Fehlern führen.

Divergenz und Rotation werden ausführlicher im Kapitel über Vektoranalysis in Teil B behandelt werden, mit dem Gradienten und seiner Bedeutung beschäftigen wir uns demnächst noch einmal.

## §2 Die totale Ableitung

Wir wollen den Differenzierbarkeitsbegriff noch einmal überdenken. Bei der partiellen Differenzierbarkeit haben wir folgende Mängel festgestellt:

- Eine partiell differenzierbare Funktion braucht nicht stetig zu sein.
- Ist eine Funktion  $2\times$  partiell differenzierbar, so hängen die Werte der zweiten Ableitungen von der Reihenfolge der Differentiation ab.

Erinnern wir uns an die Situation in einer Veränderlichen:

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $t_0 \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ist  $f$  in  $t_0$  differenzierbar, so existiert der Grenzwert

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Führen wir die lineare Funktion

$$L(h) := f'(t_0) \cdot h$$

und die Restfunktion

$$r(h) := f(t_0 + h) - f(t_0) - L(h)$$

ein, so gilt:

1.  $f(t) = f(t_0) + L(t - t_0) + r(t - t_0)$  für  $t = t_0 + h$  nahe  $t_0$ .
2.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ .
3. Der Graph der affin-linearen Funktion  $T(t) := f(t_0) + L(t - t_0)$  ist die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkte  $t_0$ .

Die erste Aussage folgt sofort aus den Definitionen.

Die zweite Aussage ergibt sich, weil

$$\frac{r(t - t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0)$$

ist und der rechte Ausdruck offensichtlich gegen 0 konvergiert.

Daß  $T(t) := f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$  die Tangente definiert, haben wir uns schon in Kapitel III überlegt.

Erfüllt  $f$  umgekehrt die Bedingungen (1) und (2), so ist  $f$  in  $t_0$  differenzierbar, und  $L(1)$  ist die Ableitung von  $f$  in  $t_0$ , denn es gilt:

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0) - L(h)}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - L(1).$$

Die Bedingungen (1) und (2) lassen sich nun verhältnismäßig leicht auf die Situation mehrerer Veränderlicher übertragen:

**Definition.**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $\mathbf{a} \in B$  ein Punkt.

$f$  heißt in  $\mathbf{a}$  (*total*) *differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte „Restfunktion“  $r$  gibt, so daß gilt:

1.  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  für  $\mathbf{x}$  nahe  $\mathbf{a}$ .
2.  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ .

Die (dadurch eindeutig bestimmte) lineare Abbildung  $L$  heißt die (*totale*) *Ableitung* oder das *totale Differential* von  $f$  in  $\mathbf{a}$ . Man bezeichnet sie auch mit

$$Df(\mathbf{a}), \quad df(\mathbf{a}) \quad \text{oder} \quad (df)_{\mathbf{a}}.$$

**Bemerkung:** Man kann die Bedingungen (1) und (2) für die totale Differenzierbarkeit in einem Punkt  $\mathbf{a}$  auch folgendermaßen zusammenfassen:

Es gibt eine lineare Abbildung  $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Wie kann man nun die totale Ableitung bestimmen?

**Beispiele:**

1. Sei  $f(\mathbf{x}) \equiv c$  konstant. Da die Ableitung einer konstanten Funktion in einer Veränderlichen gleich Null ist, raten wir hier:  $L = 0$  (also die Null-Abbildung). Tatsächlich ist dann

$$\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{c - c - 0}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

und das gilt dann erst recht im Grenzwert. Also ist  $D(c) = 0$ .

2. Sei  $f(\mathbf{x}) := \mathbf{u} \bullet \mathbf{x} = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$  selbst schon eine Linearform. Dann ist

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = (f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{h})) - f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{h}).$$

Also gilt mit  $L(\mathbf{h}) := f(\mathbf{h})$ :

$$\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad \text{für jedes } \mathbf{h}.$$

Die Ableitung einer Linearform ist in jedem Punkt  $\mathbf{a}$  des  $\mathbb{R}^n$  wieder diese Linearform.

3. Nun sei  $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix und

$$f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \circ A \circ \mathbf{x}^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

die zu  $A$  gehörige „quadratische Form“. Um die Ableitung zu bestimmen, bleiben wir besser bei der vektoriellen Schreibweise. Es ist

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{h}) \circ A \circ (\mathbf{a} + \mathbf{h})^\top - \mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{a}^\top \\ &= \mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{a}^\top + \mathbf{h} \circ A \circ \mathbf{a}^\top + \mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{h}^\top + \mathbf{h} \circ A \circ \mathbf{h}^\top \\ &\quad - \mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{a}^\top \\ &= 2\mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{h}^\top + \mathbf{h} \circ A \circ \mathbf{h}^\top. \end{aligned}$$

Jetzt sieht man schon etwas klarer: Wir versuchen es mit

$$L(\mathbf{h}) := 2\mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{h}^\top \quad \text{und} \quad r(\mathbf{h}) := \mathbf{h} \circ A \circ \mathbf{h}^\top.$$

Offensichtlich ist  $L$  eine Linearform, und wir brauchen nur noch eine gute Abschätzung für den Restterm. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist aber

$$|r(\mathbf{h})| = |(\mathbf{h} \circ A) \bullet \mathbf{h}| \leq \|\mathbf{h} \circ A\| \cdot \|\mathbf{h}\|,$$

also

$$\frac{|r(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \|\mathbf{h} \circ A\|.$$

Da  $\mathbf{h} \mapsto \|\mathbf{h} \circ A\|$  als Zusammensetzung stetiger Abbildungen selbst stetig ist, folgt:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Somit ist  $Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 2\mathbf{a} \circ A \circ \mathbf{h}^\top$ .

Selbst bei relativ einfachen Funktionen ist die Suche nach der Ableitung recht mühsam. Wir brauchen einen einfachen Kalkül, und zum Glück gibt es den:

**V.2.1 Satz.** *Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbf{a} \in B$  differenzierbar. Dann existieren in  $\mathbf{a}$  auch sämtliche Richtungsableitungen von  $f$ , und es gilt:*

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}).$$

*Insbesondere ist  $f$  in  $\mathbf{a}$  nach allen Variablen partiell differenzierbar, und es gilt:*

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

**BEWEIS:** Sei  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  ein Richtungsvektor  $\neq \mathbf{0}$  und  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ . Dann gilt:

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + t \cdot Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) + r(t \cdot \mathbf{v}),$$

mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t \cdot \mathbf{v})}{t} = \pm \|\mathbf{v}\| \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t \cdot \mathbf{v})}{\|t \cdot \mathbf{v}\|} = 0.$$

Also ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - t \cdot Df(\mathbf{a})(\mathbf{v})}{t} = 0$$

und damit

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}).$$

Insbesondere existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{a})$  für  $i = 1, \dots, n$ , und es gilt:

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = Df(\mathbf{a})\left(\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i Df(\mathbf{a})(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v_i D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \bullet \nabla f(\mathbf{a}).$$

□

Dieser Satz erlaubt es jetzt, totale Ableitungen mit Hilfe von partiellen Ableitungen auszurechnen, und für die letzteren brauchen wir ja nur den Kalkül aus der Theorie einer Veränderlichen zu übernehmen. Wir wollen das gleich einmal testen:

**Beispiel:**

Sei wieder

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \circ A \circ \mathbf{x}^\top = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i x_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \quad (\text{weil } A \text{ symmetrisch}). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) &= \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n h_k \cdot 2 \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \\ &= 2 \cdot \sum_{i,k=1}^n x_i a_{ik} h_k \\ &= 2\mathbf{x} \circ A \circ \mathbf{h}^\top. \end{aligned}$$

Das hatten wir schon auf anderem Wege herausbekommen.

Eine **Warnung** muß ausgesprochen werden! Der obige Satz ist nicht umkehrbar, es gibt Funktionen, die partiell, aber nicht total differenzierbar sind. Das ergibt sich aus folgender Feststellung:

**V.2.2 Satz.** Ist  $f$  in  $\mathbf{a}$  total differenzierbar, so ist  $f$  dort auch stetig.

BEWEIS: Wir können schreiben:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + r(\mathbf{h}),$$

mit  $L(\mathbf{h}) \rightarrow 0$  und  $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0$  für  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Daher ist  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ . □

Wir haben schon ein Beispiel einer Funktion gesehen, die im Nullpunkt partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist. Sie kann dann natürlich erst recht nicht total differenzierbar sein.

Wir stehen damit vor einem Dilemma: Berechnen wir die Ableitung einer Funktion  $f$  mit Hilfe der Definition der totalen Differenzierbarkeit, so haben wir damit automatisch auch die totale Differenzierbarkeit von  $f$  bewiesen. Aber dieser Weg ist meistens nicht durchführbar. Benutzen wir andererseits die besser handhabbaren partiellen Ableitungen, so müssen wir von Rechts wegen auch noch die totale Differenzierbarkeit beweisen. Also ist eigentlich nichts gewonnen. Zum Glück gibt es folgendes einfache Kriterium:

**V.2.3 Satz.** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $\mathbf{a} \in B$  ein Punkt.

Wenn es eine offene Umgebung  $U$  von  $\mathbf{a}$  in  $B$  gibt, so daß alle partiellen Ableitungen von  $f$  auf  $U$  existieren und in  $\mathbf{a}$  stetig sind, dann ist  $f$  in  $\mathbf{a}$  total differenzierbar.

Der Beweis ist nicht sehr schwer. Wie die totale Ableitung  $L = Df(\mathbf{a})$  aussehen soll, wissen wir ja schon, wir müssen nur den Ausdruck

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})$$

abschätzen. Zu dem Zweck verbindet man  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$  so durch eine Kette von Punkten, daß die Verbindungsstrecken immer achsenparallel sind. Die Differenzen der Funktionswerte von  $f$  an zwei aufeinanderfolgenden Punkten können jeweils mit Hilfe des Mittelwertsatzes durch partielle Ableitungen von  $f$  an geeigneten Zwischenpunkten ausgedrückt werden. Auf die Ausführung der technischen Einzelheiten verzichten wir hier.

Was ist die anschauliche Bedeutung der totalen Differenzierbarkeit?

In einer Veränderlichen gilt: Ist  $f$  in  $t_0$  differenzierbar, so gibt es genau eine affin-lineare Funktion  $T$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $T(t_0) = f(t_0)$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T(t)}{t - t_0} = 0$

Diese affin-lineare Funktion ist gegeben durch  $T(t) := f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ , und der Graph von  $T$  ist die Tangente an  $G_f$  in  $(t_0, f(t_0))$ .

In mehreren Veränderlichen gilt etwas Analoges:

**V.2.4 Satz.** Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbf{a} \in B \subset \mathbb{R}^n$  total differenzierbar.

1. Es gibt genau eine affin-lineare Funktion  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:



$$(a) T(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}).$$

$$(b) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

2. Die gemäß (1) eindeutig bestimmte affin-lineare Funktion ist gegeben durch

$$T(\mathbf{x}) := f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

3. Den Graphen von  $T$  nennt man die (affine) Tangential-(Hyper-)Ebene an  $G_f$  in  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Die Tangentialebene enthält insbesondere alle Tangenten an  $G_f$  in  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ , die sich aus den Richtungsableitungen ergeben.

BEWEIS: 1) Sei  $F$  irgend eine affin-lineare Funktion, die die Bedingungen a) und b) erfüllt. Dann hat  $F$  die Gestalt

$$F(\mathbf{x}) = \alpha + L(\mathbf{x}),$$

mit einer Linearform  $L$ . Wegen a) ist  $\alpha + L(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ , also

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Wegen b) folgt daraus:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Da  $f$  in  $\mathbf{a}$  differenzierbar ist, muß  $L = Df(\mathbf{a})$  sein.

Das zeigt die Eindeutigkeit von  $T$  und Aussage (2). Umgekehrt erfüllt die in (2) definierte Funktion  $T$  natürlich die Eigenschaften a) und b).

3) Sei  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $f_{\mathbf{v}}(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$  eine in  $t = 0$  differenzierbare Funktion, und die dadurch bestimmte Tangente  $\Lambda$  gewinnt man folgendermaßen: Über dem Punkt  $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$  liegt jeweils der Wert

$$f_{\mathbf{v}}(0) + f'_{\mathbf{v}}(0) \cdot t = f(\mathbf{a}) + t \cdot D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}).$$

Also ist die Gerade  $\Lambda$  gegeben durch

$$\Lambda := \{(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) + t \cdot (\mathbf{v}, Df(\mathbf{a})(\mathbf{v})) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

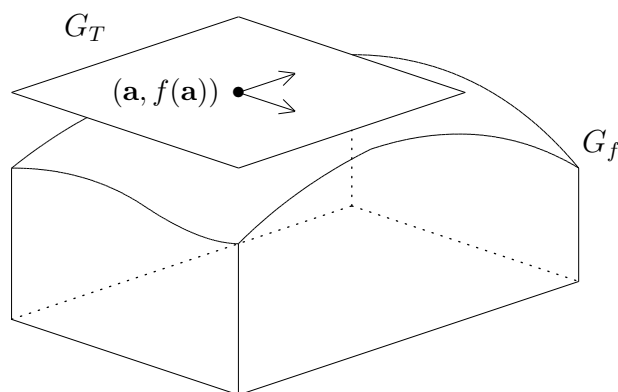
Zu zeigen ist nun:  $\Lambda$  liegt im Graphen von  $T$ , also in

$$G_T = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = T(\mathbf{x})\}.$$

Ist aber  $(\mathbf{x}, z) = (\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) + t \cdot (\mathbf{v}, Df(\mathbf{a})(\mathbf{v})) = (\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}, f(\mathbf{a}) + t \cdot Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}))$  ein Punkt von  $\Lambda$ , so gilt:

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(t\mathbf{v}) = z,$$

also liegt  $(\mathbf{x}, z)$  in der Tangentialebene. □

**Beispiele:**

1. Sei  $f(x, y) := x^2 + y^2$ .

Dann ist  $f(0, 0) = 0$  und  $Df(0, 0) = 0$ . Also ist  $T(x, y) \equiv 0$  und die Tangentialebene an den Graphen von  $f$  im Nullpunkt ist gegeben durch

$$G_T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

2. Sei  $f(x, y) := e^x \cos(y)$  und  $\mathbf{a} := (0, \frac{\pi}{4})$ .

Dann ist  $f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  und  $Df(\mathbf{a})(v, w) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(v - w)$ . Also ist

$$T(x, y) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(x, y - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + x - y + \frac{\pi}{4}).$$

Die Tangentialebene an den Graphen von  $f$  im Nullpunkt ist gegeben durch

$$G_T = \{(x, y, \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + x - y + \frac{\pi}{4})) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Sei  $f(x) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Wir zeigen zunächst, daß  $f$  im Nullpunkt stetig ist: Sei  $(\mathbf{x}_\nu)$  eine Nullfolge. Dann können wir schreiben:

$$\mathbf{x}_\nu = (r_\nu \cos(\varphi_\nu), r_\nu \sin(\varphi_\nu)), \text{ für } \nu \in \mathbb{N}.$$

Dabei konvergiert  $r_\nu = \|\mathbf{x}_\nu\|$  gegen Null, und unabhängig von  $\varphi_\nu$  ist

$$(\cos \varphi_\nu)^2 + (\sin \varphi_\nu)^2 = 1 \text{ und } 0 \leq |\cos \varphi_\nu|, |\sin \varphi_\nu| \leq 1.$$

Also konvergiert

$$|f(\mathbf{x}_\nu)| = \left| \frac{r_\nu^3 \cos \varphi_\nu (\sin \varphi_\nu)^2}{r_\nu^2} \right| \leq r_\nu$$

gegen Null.

Weiter ist  $f(x, 0) \equiv 0$  und  $f(0, y) \equiv 0$ . Also ist  $f$  im Nullpunkt auch partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Es existieren sogar beliebige Richtungsableitungen:

Da  $f(tx, ty) = t \cdot f(x, y)$  für alle  $t$  und beliebiges  $(x, y)$  gilt,<sup>3</sup> ist

$$D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{h}) - f(\mathbf{0})}{t} = f(\mathbf{h}).$$

Man kann also an  $G_f$  im Nullpunkt in jeder beliebigen Richtung eine Tangente legen.

Wäre  $f$  in  $(0, 0)$  total differenzierbar, so müßte  $Df(0) = 0$  sein. Für  $\mathbf{h} := (r, r)$  ist aber

$$\frac{f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - 0}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{r^3}{2r^2 \cdot \sqrt{2}|r|} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

und das kann nicht gegen Null konvergieren.

Also ist  $f$  im Nullpunkt nicht total differenzierbar, und der Graph von  $f$  besitzt dort keine Tangentialebene. Wie soll man sich das vorstellen?

Da  $f$  homogen ist, gehört mit  $(\mathbf{x}, z)$  auch jeder Punkt  $(t\mathbf{x}, tz)$  zum Graphen von  $f$ , also die ganze Gerade durch  $(\mathbf{x}, z)$  und den Nullpunkt. Diese Geraden sind dann natürlich auch Tangenten, und sie müßten daher auch in einer etwa existierenden Tangentialebene enthalten sein. Das ist nicht möglich, weil die Geraden gar nicht alle in einer Ebene liegen. Tatsächlich hat  $G_f$  im Nullpunkt eine „Spitze“, und dieser Mangel an Glattheit verhindert die totale Differenzierbarkeit.

Wir wollen jetzt folgende Situation untersuchen:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{a} \in B$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  in der Nähe von  $\mathbf{a}$  differenzierbar. Weiter sei  $\alpha : I \rightarrow B$  ein differenzierbarer Weg, mit  $\alpha(t_0) = \mathbf{a}$ . Dann kann man  $f$  auf  $\alpha$  einschränken und erhält

$$g := f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R},$$

eine reellwertige Funktion von **einer** Veränderlichen! Wir würden erwarten, daß  $g$  in  $t_0$  differenzierbar ist, und daß man die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel gewinnen kann. Aber wie?

Wir schreiben  $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ . Jede einzelne Komponente von  $\alpha$  ist eine in  $t_0$  differenzierbare Funktion und besitzt daher eine Darstellung

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(t_0) + \Delta_i(t) \cdot (t - t_0),$$

<sup>3</sup>Man nennt  $f$  daher auch eine *homogene* Funktion.

mit einer in  $t_0$  stetigen Funktion  $\Delta_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Offensichtlich ist

$$\Delta_i(t) = \begin{cases} \frac{\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0)}{t - t_0} & \text{für } t \neq t_0, \\ \alpha_i'(t_0) & \text{in } t = t_0. \end{cases}$$

Weiter können wir wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  schreiben:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad \text{mit } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Um die beiden Teile zusammensetzen zu können, definieren wir:

$$\Delta(t) := (\Delta_1(t), \dots, \Delta_n(t)).$$

Dann ist  $\Delta$  eine Abbildung von  $I$  nach  $\mathbb{R}^n$  und stetig in  $t_0$ , mit  $\Delta(t_0) = \dot{\alpha}(t_0)$ . Außerdem gilt:

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \Delta(t) \cdot (t - t_0).$$

Das setzen wir jetzt ein:

$$\begin{aligned} g(t) &= f \circ \alpha(t) \\ &= f(\alpha(t_0)) + Df(\mathbf{a})(\alpha(t) - \alpha(t_0)) + r(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \\ &= g(t_0) + (t - t_0) \cdot \left[ Df(\mathbf{a})(\Delta(t)) + \frac{r(\Delta(t) \cdot (t - t_0))}{t - t_0} \right]. \end{aligned}$$

Der zweite Summand in der eckigen Klammer strebt für  $t \rightarrow t_0$  gegen Null, und der erste Summand kann in der Form  $Df(\mathbf{a})(\Delta(t)) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \Delta(t)$  geschrieben werden. Also stellt die eckige Klammer eine in  $t_0$  stetige Funktion dar, die bei  $t = t_0$  den Wert  $\nabla f(\mathbf{a}) \bullet \Delta(t_0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \dot{\alpha}(t_0)$  annimmt. Damit haben wir bewiesen:

**V.2.5 Spezielle Kettenregel.** Ist  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\alpha : I \rightarrow B$  in  $t_0 \in I$  differenzierbar und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbf{a} := \alpha(t_0)$  differenzierbar, so ist auch  $f \circ \alpha$  in  $t_0$  differenzierbar, und es gilt:

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \dot{\alpha}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t_0)) \cdot \frac{d\alpha_i}{dt}(t_0).$$

**Beispiele :**

1. Sei  $\alpha(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{v}$  eine Gerade. Dann ist  $\dot{\alpha}(t) \equiv \mathbf{v}$  und daher

$$(f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} = Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}).$$

2. Sei  $\alpha(t) := (\cos(t), \sin(t))$  und  $f(x, y) = x + y$ . Dann ist

$$(f \circ \alpha)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))\alpha_2'(t) = -\sin(t) + \cos(t).$$

Wir können jetzt das Wesen des Gradienten etwas besser ergründen:

Sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, und für jedes  $c \in \mathbb{R}$  sei

$$F_c := \{\mathbf{x} \in B \mid f(\mathbf{x}) = c\}$$

die entsprechende Niveau-Fläche von  $f$ . Wenn ein differenzierbarer Weg  $\alpha : I \rightarrow B$  mit  $\alpha(t_0) = \mathbf{a}$  in der Nähe von  $t_0 \in I$  ganz in  $F_c$  verläuft, so ist dort  $f \circ \alpha(t) \equiv c$ , also

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_0) = \mathbf{grad} f(\mathbf{a}) \bullet \dot{\alpha}(t_0).$$

Das bedeutet:

*Der Gradient steht auf der Niveaufläche senkrecht!*

Jetzt stehen noch zwei Richtungen im Raum zur Auswahl, in die der Gradient zeigen könnte. Wir ermitteln die Richtung, indem wir zeigen, wie sich  $f$  in Richtung des Gradienten verhält: Es ist

$$D_{\mathbf{grad} f(\mathbf{a})} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \nabla f(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 \geq 0,$$

und wenn der Gradient  $\neq \mathbf{0}$  ist, dann kommt sogar etwas Positives dabei heraus. Nun gilt für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{v}$ :  $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = f_{\mathbf{v}}'(0)$ , mit  $f_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ , und eine solche Ableitung ist genau dann positiv, wenn  $f_{\mathbf{v}}$  bei 0 steigt. Also kann man sagen:

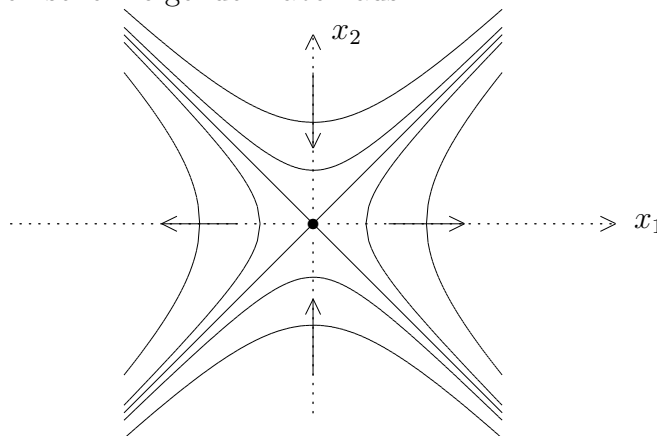
*Der Gradient zeigt in diejenige Richtung, in der die Werte von  $f$  (am stärksten) steigen.*

### Beispiele :

1. Sei  $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ . Dann ist der Graph von  $f$  eine Schale in Form einer Halbkugel, und der Gradient  $\mathbf{grad} f(a_1, a_2) = 2(a_1, a_2)$  zeigt stets nach außen.
2. Bei der Funktion  $f(x_1, x_2) := 1 - x_1^2 - x_2^2$  ist es genau umgekehrt. Der Graph ist eine umgestülpte Schale, und der Gradient  $\mathbf{grad} f(a_1, a_2) = -2(a_1, a_2)$  zeigt stets nach innen.

Wie im vorigen Beispiel verschwindet der Gradient im Nullpunkt. Dort hat er also auch keine Richtung, und das liegt daran, daß die Funktion im ersten Beispiel im Nullpunkt ein Minimum und im zweiten Beispiel ein Maximum besitzt.

3. Schließlich betrachten wir  $f(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2$ . Hier ist  $\mathbf{grad} f(a_1, a_2) = 2(a_1, -a_2)$ . Längs der  $x_1$ -Achse zeigt der Gradient nach außen, längs der  $x_2$ -Achse zeigt er nach innen, und im Nullpunkt verschwindet er. Dort liegt ein sogenannter „Sattelpunkt“ vor. Die Niveaulinien sehen folgendermaßen aus:



Setzt man  $u := x_1 - x_2$  und  $v := x_1 + x_2$ , so sind die Niveaulinien Hyperbeln der Gestalt  $u \cdot v = \text{const.}$ .

## §3 Nichtlineare Probleme

### Definition.

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_m) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt in  $\mathbf{a} \in B$  *differenzierbar*, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  in  $\mathbf{a}$  differenzierbar sind.

Die durch  $Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) := (Df_1(\mathbf{a})\mathbf{v}, \dots, Df_m(\mathbf{a})\mathbf{v})$  gegebene lineare Abbildung

$$Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heißt die *Ableitung von  $f$  in  $\mathbf{a}$* .

Bei entsprechend großen Dimensionen  $n$  und  $m$  versagt nun die Anschauung vollkommen. Wie können wir trotzdem eine Vorstellung von der Ableitung einer Funktion gewinnen? Erinnern wir uns daran, daß wir lineare Abbildungen mit Hilfe von Matrizen beschreiben können. Das geht folgendermaßen:

Ist  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung, so gibt es eine Matrix  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , so daß gilt:

$$L(\mathbf{x}) = (A \circ \mathbf{x}^\top)^\top.$$

Das zweifache Transponieren ist notwendig, weil wir den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen mit Hilfe von **Spaltenvektoren** beschrieben haben, hier aber **Zeilenvektoren** benutzen wollen.

Die Spalten  $\vec{a}_i$  der Matrix  $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  sind gegeben durch

$$\vec{a}_i = A \circ \vec{e}_i = A \circ (\mathbf{e}_i)^\top = L(\mathbf{e}_i)^\top.$$

Das wenden wir jetzt auf  $L = Df(\mathbf{a})$  an:

### Definition.

Die Matrix  $f'(\mathbf{a}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , die  $Df(\mathbf{a})$  beschreibt, nennt man *Funktionalmatrix* oder *Jacobische Matrix* von  $f$  in  $\mathbf{a}$ .

### V.3.1 Satz.

$$f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

BEWEIS: Sei  $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = f'(\mathbf{a})$  die Funktionalmatrix. Dann ist

$$\vec{a}_i = (Df(\mathbf{a})(\mathbf{e}_i))^\top = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right)^\top.$$

Das ergibt schon die Behauptung. □

**Definition.**

Ist  $n = m$ , also  $f'(\mathbf{x})$  stets eine quadratische Matrix, so heißt  $J_f(\mathbf{x}) := \det f'(\mathbf{x})$  die *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante* von  $f$  in  $\mathbf{x}$ .

**Beispiel:**

Sei  $f(x, y) := (e^{kx} \cos(y), e^{kx} \sin(y))$ . Dann gilt:

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} ke^{kx} \cos(y) & -e^{kx} \sin(y) \\ ke^{kx} \sin(y) & e^{kx} \cos(y) \end{pmatrix}$$

und

$$J_f(x, y) = ke^{2kx} \cos^2(y) + ke^{2kx} \sin^2(y) = ke^{2kx}.$$

Wir können jetzt auch die Kettenregel verallgemeinern:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Abbildung und  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Es reicht, wenn  $g$  auf der Bildmenge  $f(B) \subset \mathbb{R}^m$  definiert ist.

Setzen wir  $\alpha(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(\mathbf{a}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (g \circ f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)) \\ &= (g \circ \alpha)'(0) \\ &= \nabla g(\alpha(0)) \bullet \dot{\alpha}(0) \\ &= \nabla g(f(\mathbf{a})) \bullet \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_\mu}(f(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Ist  $f'(\mathbf{a}) = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ , so haben wir gezeigt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \nabla g(f(\mathbf{a})) \circ \vec{a}_i,$$

also

$$\boxed{\nabla(g \circ f)(\mathbf{a}) = \nabla g(f(\mathbf{a})) \circ f'(\mathbf{a}).}$$

**Beispiel:**

Sei  $f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ . Dann ist  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine differenzierbare Abbildung. Sie ordnet jedem Paar  $(r, \varphi)$  den Punkt  $(x, y)$  mit den Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  zu.

Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  irgendeine differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\varphi)$$

und

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial f}{\partial x} \sin(\varphi) + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\varphi).$$

Nun wollen wir die Kettenregel noch ein bißchen weiter verallgemeinern:

Ist  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine differenzierbare Abbildung, so ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} \nabla(g_1 \circ f)(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla(g_k \circ f)(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla g_1(f(\mathbf{a})) \circ f'(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla g_k(f(\mathbf{a})) \circ f'(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \\ &= g'(f(\mathbf{a})) \circ f'(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl der Notationen sieht die Kettenregel nun genauso wie in einer Veränderlichen aus:

**V.3.2 Allgemeine Kettenregel.** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar,  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f(B) \subset U$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar. Dann gilt in jedem  $\mathbf{x} \in B$ :

$$(g \circ f)'(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x})) \circ f'(\mathbf{x}).$$

**V.3.3 Folgerung.** Ist  $n = m = k$ , so ist  $J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x})) \cdot J_f(\mathbf{x})$ .

Wozu treiben wir einen solchen Aufwand mit den Funktionalmatrizen und Funktionaldeterminanten? Eine wichtige Anwendung ist die Lösung nichtlinearer Gleichungen:

Ist  $B \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Abbildung, so möchte man gerne die Gleichung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

lösen.

Ist  $B = \mathbb{R}^n$  und  $f$  linear, so ist das kein Problem, in der Linearen Algebra haben wir solche Gleichungen vollständig behandelt. Ist  $f$  aber nicht linear, so ist die Fragestellung ungleich schwieriger.

Wir beginnen mit dem Fall  $n = m$ .

Im Falle einer Veränderlichen haben wir also eine differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow J$  zwischen zwei Intervallen gegeben und wollen wissen, wann die Gleichung  $f(x) = y$  lösbar ist, und wann das eindeutig möglich ist. Ist  $f$  surjektiv, so gibt es immer eine Lösung. Ist  $f$  injektiv, so ist die Lösung stets eindeutig bestimmt. Beides ist z.B. dann erfüllt, wenn  $f$  streng monoton wachsend oder fallend ist, und das gilt wiederum, wenn  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  ist. Ist nur bekannt, daß  $f'(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0 \in I$  ist, so gilt das (wenn  $f$  sogar stetig differenzierbar ist) immerhin in einer ganzen Umgebung von  $t_0$ , und dort existiert auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ , durch die man die Gleichung lösen kann.

Sinngemäß läßt sich dieser Sachverhalt auf höhere Dimensionen übertragen:

**V.3.4 Satz von der Umkehrabbildung.** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Ist  $\mathbf{x}_0 \in B$ ,  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$  und  $J_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , so gibt es offene Umgebungen  $U(\mathbf{x}_0) \subset B$  und  $V(\mathbf{y}_0) \subset \mathbb{R}^n$ , so daß gilt:



1.  $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in U$ .
2.  $f : U \rightarrow V$  ist bijektiv.
3.  $f^{-1} : V \rightarrow U$  ist wieder differenzierbar.
4.  $D(f^{-1})(\mathbf{y}) = (Df(f^{-1}(\mathbf{y})))^{-1}$  für alle  $\mathbf{y} \in V$ .

**Bemerkung:** Ist  $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ , so sagt man auch,  $f$  ist *regulär* in  $\mathbf{x}$ . Das hat zur Folge, daß  $f'(\mathbf{x})$  eine invertierbare Matrix und die zugehörige lineare Abbildung  $Df(\mathbf{x})$  ein Isomorphismus ist. Also kann man die Umkehrabbildung  $(Df(\mathbf{x}))^{-1}$  bilden.

Der Satz von der Umkehrabbildung nimmt einen zentralen Platz in der Theorie der Funktionen von mehreren Veränderlichen ein! Sein Beweis ist nicht ganz einfach, wir wollen aber doch die entscheidenden Teile dieses Beweises besprechen. Zwei weitere wichtige Sätze gehen als Hilfsmittel in den Beweis ein, wir wollen sie vorweg behandeln:

**V.3.5 Mittelwertsatz.** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$  zwei Punkte mit der Eigenschaft, daß ihre Verbindungsstrecke

$$L := \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

ganz in  $B$  enthalten ist, so gibt es ein  $t \in (0, 1)$  mit

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

**BEWEIS:** Wir setzen  $\alpha(t) := \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  und  $h(t) := f \circ \alpha(t)$ . Dies ist eine auf  $[0, 1]$  stetige und auf  $(0, 1)$  differenzierbare Funktion. Nach dem Mittelwertsatz aus Kapitel 1 gibt es ein  $t \in (0, 1)$ , so daß

$$h(1) - h(0) = h'(t) \cdot (1 - 0) = h'(t)$$

ist. Es ist aber  $h(1) - h(0) = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$  und

$$\begin{aligned} h'(t) &= \nabla f(\alpha(t)) \bullet \dot{\alpha}(t) \\ &= \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

□

Der nächste Satz hat ein sehr allgemeines Prinzip zum Inhalt. Wir formulieren ihn nur für einen Spezialfall:

**V.3.6 Banach'scher Fixpunktsatz.** Sei  $K = \overline{B_r(0)}$  eine abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt,  $F : K \rightarrow K$  eine stetige Abbildung. Wenn es ein  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  gibt, so daß

$$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| \leq \lambda \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$  ist, so besitzt  $F$  einen „Fixpunkt“, d.h. es gibt ein  $\mathbf{x} \in K$  mit  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

**Bemerkung:** Man nennt die Abbildung  $F$  *kontrahierend*. Daß  $\lambda < 1$  ist, ist entscheidend.

**BEWEIS:** Wir geben mit dem Beweis zugleich ein Konstruktionsverfahren an:

Sei  $\mathbf{x}_0 \in K$  beliebig gewählt. Die Punktfolge  $(\mathbf{x}_n)$  sei induktiv durch

$$\mathbf{x}_{n+1} := F(\mathbf{x}_n)$$

definiert. Wir wollen zeigen, daß  $(\mathbf{x}_n)$  gegen einen Fixpunkt konvergiert. Dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\| &= \|F(\mathbf{x}_{n-1}) - F(\mathbf{x}_n)\| \\ &\leq \lambda \cdot \|\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \lambda^n \cdot \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|. \end{aligned}$$

Da  $0 < \lambda < 1$  ist, strebt der letzte Ausdruck gegen Null. Also kommen sich die Folgeglieder immer näher, die  $(\mathbf{x}_n)$  bilden eine Cauchyfolge. Indem wir die einzelnen Komponenten betrachten, erhalten wir, daß  $(\mathbf{x}_n)$  gegen einen Punkt  $\mathbf{x}$  konvergiert, und der muß wieder in  $K$  liegen.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| &\leq \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_n)\| + \|F(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}\| \\ &\leq \lambda \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein. Das ist nur möglich, wenn  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  ist.  $\square$

Nun sind wir in der Lage, die wichtigsten Schritte des Beweises zum Satz von der Umkehrabbildung durchzuführen:

Gefordert wird nur die lokale Umkehrbarkeit von  $f$ . Wir beginnen mit der lokalen Injektivität. Dazu schreiben wir  $f$  in der Form  $f = (f_1, \dots, f_m)$  und setzen

$$A(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{u}_n) \end{pmatrix}.$$

Das ergibt eine stetige Abbildung  $A : B \times \dots \times B \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ .

Da  $\det A(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0) = \det f'(\mathbf{x}_0) = J_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist, gibt es eine kleine offene Kugel  $B_r(\mathbf{x}_0) \subset B$ , so daß

$$\det A(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \neq 0 \text{ für } (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \in U \times \dots \times U$$

ist. Insbesondere ist dann  $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$  für  $\mathbf{x} \in U$ .

Für  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$  wollen wir zeigen, daß gilt:

$$f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}) \implies \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Zu diesem Zweck wenden wir den Mittelwertsatz auf die Komponentenfunktionen von  $f$  an. Es gibt Zahlen  $t_\nu \in (0, 1)$ , so daß für  $\mathbf{a}_\nu := \mathbf{a} + t_\nu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  gilt:

$$f_\nu(\mathbf{b}) - f_\nu(\mathbf{a}) = \nabla f_\nu(\mathbf{a}_\nu) \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Fassen wir die  $n$  skalaren Gleichungen zu einer Matrixgleichung zusammen, so erhalten wir:

$$[f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})]^\top = A(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \circ (\mathbf{b} - \mathbf{a})^\top.$$

Da die Matrix  $A(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  invertierbar ist (s.o.), gilt:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Als nächstes zeigen wir die lokale Surjektivität: Wir müssen eine offene Umgebung  $V(\mathbf{y}_0)$  finden, so daß  $f : U \rightarrow V$  surjektiv ist. Dann ist  $U' := \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) \in V\}$  auch offen und  $f : U' \rightarrow V$  bijektiv.

Es erweist sich hier als nützlich, einige Vereinfachungen vorzunehmen.

- Ersetzt man  $f$  durch  $\tilde{f}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ , so ist auch  $\tilde{f}$  stetig differenzierbar, und wenn eine der beiden Abbildungen umkehrbar ist, so ist es auch die andere. Es ist aber  $\tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  und  $J_{\tilde{f}}(\mathbf{0}) = J_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

Also können wir o.B.d.A. gleich voraussetzen, daß  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ist.

- Die lineare Abbildung  $L := Df(\mathbf{0})$  ist ein Isomorphismus. Ersetzt man  $f$  durch  $\tilde{f} := f \circ L^{-1}$ , so ist wiederum  $\tilde{f}$  stetig differenzierbar,  $\tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  und außerdem  $D\tilde{f}(\mathbf{0}) = Df(\mathbf{0}) \circ L^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Also können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß schon  $Df(\mathbf{0}) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  ist.

Sei jetzt also  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ,  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  und  $Df(\mathbf{0}) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ .

Die Ableitung ist eine lineare Approximation der Funktion nahe dem Ursprung. Da  $(Df)^{-1}(\mathbf{0})(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$  ist, können wir hoffen, daß  $f^{-1}(\mathbf{y}) \approx \mathbf{y}$  ist, wenn man sich nicht zu weit vom Ursprung entfernt.

Wir können das aber auch exakt formulieren:

$$\text{Ist } \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \text{ so ist } \mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - f(\mathbf{x})).$$

Der Korrekturterm  $\mathbf{x} - f(\mathbf{x})$  wird in der Nähe des Ursprungs recht klein sein, und zwar um so kleiner, je mehr man sich dem Nullpunkt nähert. Leider ist er (bei gegebenem  $\mathbf{y}$ ) nicht bekannt. Hier kommt nun der entscheidende **Trick!**

Wir definieren zu jedem  $\mathbf{y}$  eine neue Abbildung  $\varphi_{\mathbf{y}} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \mathbf{y} + \mathbf{x} - f(\mathbf{x}).$$

Dann gilt:  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \iff \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Die Suche nach einem Urbild zu  $\mathbf{y}$  haben wir damit auf die Suche nach einem Fixpunkt von  $\varphi_{\mathbf{y}}$  zurückgeführt. Es bleibt also nur noch festzustellen, daß die Voraussetzungen

des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt werden können. Wir müssen zeigen, daß  $\varphi_{\mathbf{y}}$  eine kleine abgeschlossene Kugel um  $\mathbf{0}$  in sich abbildet und dabei kontrahierend ist.

Wegen  $\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{b}) - \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) = \varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{b}) - \varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{a})$  genügt es zu zeigen, daß  $\varphi_{\mathbf{0}}$  kontrahierend ist. Daß das tatsächlich der Fall ist, lehrt uns wieder der Mittelwertsatz:

Sei  $\varphi_{\mathbf{0}} = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0)$ . Da  $\varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - f(\mathbf{x})$  ist, ist  $D\varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ . Da  $f$  stetig differenzierbar ist, ist  $|\nabla\varphi_{\nu}^0(\mathbf{x})|$  in der Nähe des Nullpunktes beliebig klein. Mit dem Mittelwertsatz und der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} (\varphi_{\nu}^0(\mathbf{b}) - \varphi_{\nu}^0(\mathbf{a}))^2 &= |\nabla\varphi_{\nu}^0(\mathbf{a} + t_{\nu} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a})|^2 \\ &\leq C^2 \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2, \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $C$ , die beliebig klein gewählt werden kann, wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  nahe genug bei  $\mathbf{0}$  bleiben. Es gibt daher ein  $r > 0$ , so daß

$$\|\varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{b}) - \varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{a})\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \text{ für } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overline{B_r(\mathbf{0})}$$

ist.

Dann ist insbesondere  $\|\varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{x}\|$ , und für  $\|\mathbf{y}\| \leq \frac{r}{2}$  und  $\|\mathbf{x}\| \leq r$  ist

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| &= \|\mathbf{y} + \varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{x})\| \\ &\leq \|\mathbf{y}\| + \|\varphi_{\mathbf{0}}(\mathbf{x})\| \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß  $\varphi_{\mathbf{y}}$  auf  $\overline{B_r(\mathbf{0})}$  die Bedingungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Wie wir uns oben überlegt haben, gibt es dann zu jedem  $\mathbf{y}$  mit  $\|\mathbf{y}\| \leq \frac{r}{2}$  ein  $\mathbf{x}$  mit  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ .

Die lokale Bijektivität wäre damit gezeigt. Die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung und die Formel für ihre Ableitung fehlen noch. Betrachten wir also Punkte  $\mathbf{y}_0$  und  $\mathbf{y}$  in  $V$ . Dann gibt es Punkte  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}$  in  $U$  mit  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$  und  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  existiert eine lineare Funktion  $L$  und eine Restfunktion  $r$ , so daß gilt:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

$L = Df(\mathbf{x}_0)$  ist invertierbar, also kann man auch schreiben:

$$L^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + L^{-1}(r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

und damit

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{y}_0) + L^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) - L^{-1}(r(f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{y}_0))).$$

Die Abschätzung des Restterms ist technisch etwas aufwendiger und soll hier fortgelassen werden. Ansonsten ist aber alles gezeigt.  $\square$

### Beispiele:

1. Die Polarkoordinaten  $(x, y) = f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$  haben wir schon an früherer Stelle betrachtet. Es ist

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

also  $J_f(r, \varphi) = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r$ . In jedem Punkt  $(r, \varphi)$  mit  $r > 0$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist  $f$  damit lokal umkehrbar.

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ist sogar global umkehrbar.

2. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy).$$

Dann gilt:

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \text{ also } J_f(x, y) = 4(x^2 + y^2).$$

Damit ist  $J_f(x, y) \neq 0$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$  und  $f$  überall außerhalb des Nullpunktes lokal umkehrbar.

$f$  ist aber nicht global umkehrbar, denn es ist ja  $f(-x, -y) = f(x, y)$

Wie sieht es nun mit einer nichtlinearen Gleichung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

aus, wenn  $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar und  $m < n$  ist. Dann hat man  $m$  skalare Gleichungen für  $n = m + k$  Variable, also ein „unterbestimmtes System“. In der Linearen Algebra führte das zu einem mindestens 1-dimensionalen Lösungsraum. Wie ein solcher Lösungsraum im nichtlinearen Fall aussehen könnte, ahnen wir noch nicht. Also betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel:

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ . Dann ist

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} =: S^1$$

der Einheitskreis.

Ist  $(a, b) \in S^1$ ,  $a \neq \pm 1$ . Dann gilt in der Nähe von  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff y^2 = 1 - x^2 \\ &\iff y = g(x) := \pm\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge sieht also in der Nähe von  $(a, b)$  wie ein Graph aus. Es gibt eine Umgebung  $U = V \times W$  von  $(a, b)$ , so daß gilt:

$$\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}.$$

Man kann übrigens sehr leicht die Ableitung von  $g$  berechnen. Da  $f(x, g(x)) \equiv 0$  ist, folgt mit der Kettenregel:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x),$$

also

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{2x}{2g(x)} = -\frac{x}{g(x)}.$$

Bei dieser Umformung hätten wir natürlich erst einmal überprüfen müssen, ob  $f_y(x, g(x))$  in der Nähe von  $x = a$  nicht verschwindet. Tatsächlich ist  $f_y(a, b) = 2b = 0$  für ein  $(a, b) \in S^1$  genau dann, wenn  $a^2 = 1$  ist, also  $a = \pm 1$ . Das ist gerade die Bedingung für die Auflösbarkeit nach  $y$ .

Der Kreis  $S^1$  ist eine so symmetrische Figur, daß nicht einzusehen ist, warum die Punkte  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$  eine Ausnahme bilden sollten. Wie können wir uns da behelfen? Wenn wir das Koordinatensystem um  $90^\circ$  drehen, dann sieht der Kreis auch dort lokal wie ein Graph aus, allerdings wie der Graph einer Funktion  $x = h(y)$ . Tatsächlich ist dort  $h(y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$ .

Wie kann man erkennen, nach welcher Variablen aufgelöst werden kann? Der Kreis kann überall dort als Graph einer Funktion  $y = g(x)$  aufgefaßt werden, wo er keine vertikale Tangente besitzt, und er kann überall dort als Graph einer Funktion  $x = h(y)$  aufgefaßt werden, wo er keine horizontale Tangente besitzt. Nun ist  $S^1$  eine Niveaulinie von  $f$ , und der Gradient von  $f$  steht jeweils auf der Tangenten senkrecht. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} S^1 \text{ Graph von } y = g(x) &\iff \text{Tangente nicht vertikal} \\ &\iff \mathbf{grad} f \text{ nicht horizontal} \\ &\iff \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S^1 \text{ Graph von } x = h(y) &\iff \text{Tangente nicht horizontal} \\ &\iff \mathbf{grad} f \text{ nicht vertikal} \\ &\iff \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0. \end{aligned}$$

Durch eine nichtlineare Gleichung  $f(x, y) = 0$  wird also unter geeigneten Voraussetzungen „implizit“ eine Funktion  $y = g(x)$  oder eine Funktion  $x = h(y)$  gegeben. Das wollen wir allgemein und für höhere Dimensionen beweisen. Dazu sind noch einige neue Notationen erforderlich:

Wir betrachten eine offene Menge  $B \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ , also ein System von  $m$  nichtlinearen Gleichungen für  $k + m$  Variable. Den Satz der ersten  $k$  Variablen  $x_1, \dots, x_k$  fassen wir zu einem Vektor  $\mathbf{x}$ , den der folgenden  $m$  Variablen  $x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$  zu einem Vektor  $\mathbf{y}$  zusammen. Dann definiert man:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{k+m}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$f'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right).$$

### V.3.7 Satz über implizite Funktionen.

Ist  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$  und die Matrix  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$  regulär, so gibt es Umgebungen  $U(\mathbf{x}_0), V(\mathbf{y}_0)$  mit  $U \times V \subset B$  und genau eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : U \rightarrow V$ , so daß gilt:

1.  $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ .
2.  $f(x, g(x)) \equiv \mathbf{0}$  auf  $U$ .
3.  $g'(\mathbf{x}) = - \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  auf  $U$ .

BEWEIS: Sei  $n := k + m$ . Der Trick besteht darin, den Raum um  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  herum so differenzierbar zu verbiegen, daß aus der Nullstellenmenge

$$f^{-1}(\mathbf{0}) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

ein Ebenenstück wird. Zu diesem Zweck definieren wir  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Dann ist

$$F'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{array} \right),$$

und daher

$$\det F'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Das bedeutet, daß  $F$  in  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  lokal umkehrbar ist. Wir setzen  $H := F^{-1}$  (in der Nähe von  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ).

Schreiben wir  $H$  in der Form  $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (h_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), h_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ , so folgt:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F \circ H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(h_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), h_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (h_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), f(h_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), h_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}))).$$

Setzen wir also  $h := h_2$ , so ist  $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, h(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ .

Ist nun  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , so ist  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$ .  $F$  biegt also tatsächlich die Menge  $f^{-1}(\mathbf{0})$  gerade. Die Umkehrabbildung  $H = F^{-1}$  sollte – wenn alles gut geht –  $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$  auf  $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  abbilden. Also setzen wir

$$g(\mathbf{x}) := h(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Daß  $g$  eindeutig bestimmt ist, ergibt sich aus den vorangegangenen Betrachtungen. Wir müssen nur noch überprüfen, daß  $g$  alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

Es ist

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))) = F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = F \circ H(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Daraus folgt:  $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ .

Außerdem gilt für  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in f^{-1}(\mathbf{0})$ :

$$F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$$

und daher

$$(\mathbf{x}_0, g(\mathbf{x}_0)) = H(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = H \circ F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0),$$

also  $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ .

Schließlich folgt mit der Kettenregel:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \circ \mathbf{1} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \circ g'(\mathbf{x}),$$

also

$$g'(\mathbf{x}) = - \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})).$$

Man beachte hier die Reihenfolge bei der Matrizenmultiplikation!

Das Ganze gilt in der Nähe von  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Wählt man die Umgebungen  $U$  und  $V$  klein genug, so ist alles gezeigt.  $\square$

### Beispiele:

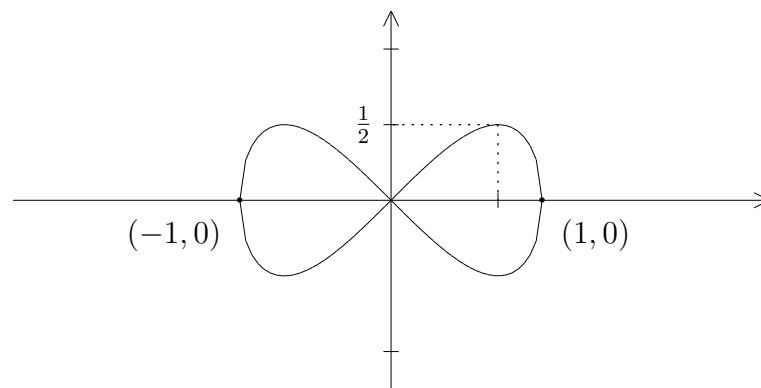
1. Betrachten wir noch einmal den Kreis  $S^1 = f^{-1}(0)$  mit  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Für  $y \neq 0$  (also  $x \neq \pm 1$ ) ist  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \neq 0$ . Also kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden und die Gleichung  $f(x, y) = 0$  lokal nach  $y$  auflösen:  $y = g(x)$ . Die Formel für die Ableitung von  $g$  ergibt hier:

$$g'(x) = - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = - \frac{x}{g(x)} = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Leider ist die Auflösung nicht immer so schön konkret durchführbar!

2. Sei  $f(x, y) := x^2(1-x^2) - y^2$ . Die Kurve  $C := \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$  ist eine sogenannte „Lemniskate“:





Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2), \\ f_y(x, y) &= -2y. \end{aligned}$$

Im Nullpunkt ist die Gleichung überhaupt nicht auflösbar. Das liegt anschaulich daran, daß der dort auftretende Kreuzungspunkt aus keiner Richtung wie ein Graph aussieht.

In den Punkten  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$  ist jeweils  $f_y(x, y) = 0$ , also keine Auflösung nach  $y$  möglich. Allerdings ist dort  $f_x(x, y) \neq 0$ , wir können also lokal nach  $x$  auflösen. Das ist hier sogar konkret möglich, die Gleichung  $x^4 - x^2 + y^2 = 0$  führt auf

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \pm 2\sqrt{1 - 4y^2}}.$$

Läßt man  $y$  gegen Null gehen, so muß  $x^2$  gegen 1 streben. Das schließt unter der ersten Wurzel das Minus-Zeichen aus, und man bekommt:

$$\begin{aligned} x &= +\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 4y^2}} \quad \text{bei } (1, 0) \\ \text{und } x &= -\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 4y^2}} \quad \text{bei } (-1, 0). \end{aligned}$$

In allen anderen Punkten ist  $f_y(x, y) \neq 0$ , denn wenn  $y = 0$  und  $f(x, y) = 0$  ist, dann kann nur  $x = 0$  oder  $x = \pm 1$  sein. Dann ist

$$y = \pm \sqrt{x^2(1 - x^2)},$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob man sich gerade in der oberen oder in der unteren Halbebene befindet.

Rechnen wir noch im Falle der oberen Halbebene die Ableitung von  $y = g(x)$  aus:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \\ &= -\frac{2x - 4x^3}{-2g(x)} \\ &= \frac{x(1 - 2x^2)}{\sqrt{x^2(1 - x^2)}}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt natürlich nicht bei  $x = 0$ . Für  $0 < x < 1$  ist  $g'(x) = 0$  genau dann erfüllt, wenn  $1 - 2x^2 = 0$  ist, also  $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Dort ist  $y = \frac{1}{2}$ . Offensichtlich liegt ein Maximum vor, und mit dieser Information kann man schon eine recht gute Skizze der Lemniskate erstellen.

**Bemerkung:** Eine bijektive differenzierbare Abbildung  $F$ , bei der auch  $F^{-1}$  differenzierbar ist, nennt man eine *differenzierbare (Koordinaten-)Transformation* oder auch einen *Diffeomorphismus*. Wir haben im Beweis gesehen: Sind die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, so kann man die Nullstellenmenge  $f^{-1}(\mathbf{0})$  lokal mit Hilfe einer differenzierbaren Transformation auf ein Ebenenstück abbilden.

### Definition.

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $0 \leq d < n$ . Eine Teilmenge  $M \subset B$  heißt *d-dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt  $\mathbf{x} \in B$  eine offene Umgebung  $U(\mathbf{x}) \subset B$  gibt, so daß gilt:

1. Entweder ist  $U \cap M = \emptyset$ ,
2. oder es gibt eine stetig differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ , so daß gilt:
  - (a)  $U \cap M = \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ .
  - (b)  $\text{rg } f'(\mathbf{x}) = n - d$  für alle  $\mathbf{x} \in U$ .

Was bedeutet das?

Lokal ist eine Untermannigfaltigkeit die Lösungsmenge eines unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystems. Zusätzlich muß die Rang-Bedingung erfüllt sein:

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

besitzt  $n - d$  linear unabhängige Spalten. Das bedeutet, daß es unter den  $n$  Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  eine Auswahl von  $n - d$  Koordinaten  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-d}}$  gibt, bezüglich derer die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt sind.

Wenn dies etwa die Koordinaten  $x_{d+1}, \dots, x_n$  sind, so kann man eine differenzierbare Abbildung  $g = g(x_1, \dots, x_d)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{n-d}$  finden, so daß  $M$  lokal der Graph von  $g$  ist und damit durch die  $d$  unabhängigen Parameter  $x_1, \dots, x_d$  beschrieben wird. Das rechtfertigt die Bezeichnung „ $d$ -dimensional“. Die anderen denkbaren Fälle gehen aus diesem durch eine Vertauschung der Koordinatenachsen hervor.

Aus dem Beweis des Satzes über implizite Funktionen folgt somit:

**V.3.8 Satz.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Teilmenge. Dann sind die folgenden drei Aussagen über  $M$  äquivalent:

1.  $M$  ist eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

2.  $M$  sieht lokal wie der Graph einer differenzierbaren Abbildung von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{R}^{n-d}$  aus.
3.  $M$  kann lokal mit Hilfe einer differenzierbaren Koordinatentransformation auf ein  $d$ -dimensionales Ebenenstück abgebildet werden.

Wir verzichten auf eine genaue Ausführung des Beweises.

Zum Schluß noch einige

**Beispiele :**

1. Die Kreislinie  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  ist eine Untermannigfaltigkeit, die Lemniskate ist es nicht.
2. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x_1, \dots, x_n) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ . Dann ist

$$f^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} =: S^{n-1}$$

die sogenannte  $(n - 1)$ -Sphäre.

$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$  ist auf  $S^{n-1}$  überall  $\neq 0$ , hat also den Rang 1. Damit ist  $n - d = 1$ , und  $S^{n-1}$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

3. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) := (x - 1)^3 - y^2$ . Dann nennt man  $N := f^{-1}(0)$  eine Neilsche Parabel.

Es ist  $f'(x, y) = (3(x - 1)^2, 2y)$ , und das verschwindet in dem Punkt  $(1, 0)$ , der leider auf  $N$  liegt. Also ist  $N$  keine Untermannigfaltigkeit. Das liegt daran, daß  $N$  in  $(1, 0)$  eine Spitze besitzt und dort deshalb nicht geradegebogen werden kann.

## §4 Extremwerte

### Definition.

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\mathbf{a} \in B$  ein Punkt.

$f$  hat in  $\mathbf{a}$  ein *relatives Maximum* (bzw. ein *relatives Minimum*, wenn es eine offene Umgebung  $U(\mathbf{a}) \subset B$  gibt, so daß

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad (\text{bzw.} \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}))$$

für alle  $\mathbf{x} \in U$  ist. In beiden Fällen spricht man von einem *relativen Extremum*.

Gilt die Ungleichung sogar für alle  $\mathbf{x} \in B$ , so spricht man von einem *absoluten Maximum* oder *Minimum*.

### V.4.1 Notwendiges Kriterium für relative Extremwerte.

Die Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $\mathbf{a}$  sogar differenzierbar.

Besitzt  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbf{a}$  ein relatives Extremum, so ist  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

BEWEIS: Für  $i = 1, \dots, n$  besitzt auch  $g_i(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)$  in  $t = 0$  ein lokales Extremum. Nach dem notwendigen Kriterium aus der Differentialrechnung einer Veränderlichen muß dann  $(g_i)'(0) = 0$  sein, also

$$\begin{aligned} 0 &= (g_i)'(0) \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Daraus folgt die Behauptung. □

### Definition.

Ist  $f$  in  $\mathbf{a}$  differenzierbar und  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , so heißt  $\mathbf{a}$  ein *stationärer Punkt* von  $f$ .

Ein stationärer Punkt  $\mathbf{a}$  von  $f$  heißt *Sattelpunkt* von  $f$ , falls es in jeder Umgebung  $U(\mathbf{a})$  Punkte  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  gibt, so daß

$$f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{c})$$

ist.

Beispiele dazu werden wir später betrachten. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremwertes erhält man in einer Veränderlichen durch Untersuchung der höheren Ableitungen, insbesondere der zweiten Ableitung.

Wir kommen nun nicht umhin, die Taylorformel in  $n$  Veränderlichen zu beweisen, zumindest bis zur Ordnung 2.

**Definition.**

Eine Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $B$   $k$ -mal stetig differenzierbar, wenn  $f$  partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  besitzt, und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$  auf  $B$  noch stetig sind.

Die Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $B$  wird mit dem Symbol  $\mathcal{C}^k(B)$  bezeichnet.

**Bemerkung:** Ist  $k \geq 1$  und  $f \in \mathcal{C}^k(B)$ , so ist  $f$  insbesondere in jedem Punkt von  $B$  total differenzierbar.

$f$  ist dann sogar „ $k$ -mal total differenzierbar“, aber diesen Begriff haben wir hier nicht definiert.

Wir betrachten nun eine Funktion  $f \in \mathcal{C}^2(B)$  und einen Punkt  $\mathbf{a} \in B$ . Für eine beliebige Richtung  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  sei  $\alpha_{\mathbf{h}}(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{h}$  und  $g(t) := f \circ \alpha_{\mathbf{h}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\alpha_{\mathbf{h}}(t)) \circ \mathbf{h}^\top \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot h_i. \end{aligned}$$

Da  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$  nach Voraussetzung auf ganz  $B$  stetige partielle Ableitungen besitzt, also insbesondere total differenzierbar ist, ist auch  $g'(t)$  ein weiteres Mal differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \alpha_{\mathbf{h}} \right)'(t) \cdot h_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\alpha_{\mathbf{h}}(t)) \cdot h_j \right) \cdot h_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n h_i \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot h_j. \end{aligned}$$

**Definition.**

Sei  $f$  in der Nähe von  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \mid i, j = 1, \dots, n \right)$$

die *Hesse-Matrix* von  $f$  in  $\mathbf{x}$ .

Wir haben gerade ausgerechnet, daß  $g''(t) = \mathbf{h} \circ H_f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \circ \mathbf{h}^\top$  ist.

**Bemerkung:** Die Symmetrie der Hesse-Matrix folgt aus der Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen, und die ist nur gegeben, weil  $f$  in einer ganzen Umgebung von  $\mathbf{a}$  zweimal stetig differenzierbar ist. Diese Voraussetzung ist also wichtig!

Im Falle  $n = 2$  ist  $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$ .

Nun können wir die Taylorformel formulieren und beweisen:

**V.4.2 Taylorformel 2.Ordnung.** Sei  $B = B_r(\mathbf{a})$  eine offene Kugel um  $\mathbf{a}$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Dann gibt es eine auf  $B_r(\mathbf{0})$  definierte Funktion  $R$  mit

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0,$$

so daß für  $\|\mathbf{h}\| < r$  gilt:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \circ \mathbf{h}^\top + \frac{1}{2} \mathbf{h} \circ H_f(\mathbf{a}) \circ \mathbf{h}^\top + R(\mathbf{h}).$$

BEWEIS: Ist  $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$ , dann liegt  $\alpha_{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h}$  für  $t \in [-1, 1]$  in  $B_r(\mathbf{a})$ , und deshalb ist  $g(t) := f \circ \alpha_{\mathbf{h}}(t)$  auf  $[-1, 1]$  definiert und zweimal stetig differenzierbar. Wir wenden auf  $g$  in  $t = 0$  den Satz von der Taylorentwicklung in einer Veränderlichen an:

Es gibt eine Funktion  $\eta(t)$  mit  $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$ , so daß gilt:

$$g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 + \eta(t) \cdot t^2.$$

Dabei ist

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \cdot (g''(c) - g''(0)),$$

mit einer geeigneten (von  $t$  abhängigen) Zahl  $c$  mit  $0 < c < t$ . Setzen wir  $t = 1$ , so folgt die gewünschte Taylorformel, mit

$$\begin{aligned} R(\mathbf{h}) &:= \eta(1) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{h} \circ (H_f(\mathbf{a} + \mathbf{ch}) - H_f(\mathbf{a})) \circ \mathbf{h}^\top \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + \mathbf{ch}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right) h_i h_j \end{aligned}$$

und  $0 < c < 1$ . Diesen Ausdruck müssen wir noch abschätzen, um herauszubekommen, daß

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0$$

ist.

Zunächst ist  $|h_i| = |\mathbf{h} \bullet \mathbf{e}_i| \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \|\mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{h}\|$ .

Die Summe enthält  $n^2$  Summanden, und da  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, die zweiten partiellen Ableitungen also stetig sind, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + \mathbf{ch}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right| < \varepsilon$$

für  $\mathbf{h} \in B_\delta(\mathbf{0})$  ist. Für solche  $\mathbf{h}$  ist dann

$$|R(\mathbf{h})| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot n^2 \cdot \|\mathbf{h}\|^2.$$

Daraus ergibt sich die gewünschte Limesbeziehung.  $\square$

Es gibt selbstverständlich auch Taylorformeln höherer Ordnung, aber mit denen werden wir uns hier nicht beschäftigen.

Ist nun  $f$  in  $\mathbf{a}$  stationär, also

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{h} \circ H_f(\mathbf{a}) \circ \mathbf{h}^\top + R(\mathbf{h}),$$

so hängt das Verhalten von  $f$  in der Nähe von  $\mathbf{a}$  im Wesentlichen von der Hesse-Matrix ab, denn  $R(\mathbf{h})$  verschwindet ja in  $\mathbf{a}$  von höherer Ordnung. Das führt uns zu einem ähnlichen hinreichenden Kriterium für Extremwerte, wie wir es aus der eindimensionalen Theorie kennen. Allerdings ist die Lage hier doch noch etwas komplizierter.

Ist  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix, so nennt man die Funktion

$$q(\mathbf{h}) := \mathbf{h} \circ A \circ \mathbf{h}^\top$$

eine *quadratische Form*. Es ist

$$q(t\mathbf{h}) = t^2 \cdot q(\mathbf{h}) \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist natürlich  $q(\mathbf{0}) = 0$ .

### Definition.

Eine quadratische Form  $q(\mathbf{h})$  heißt

$$\begin{aligned} \text{positiv semidefinit} & : \iff q(\mathbf{h}) \geq 0 \text{ für alle } \mathbf{h}, \\ \text{positiv definit} & : \iff q(\mathbf{h}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \\ \text{negativ semidefinit} & : \iff q(\mathbf{h}) \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{h}, \\ \text{negativ definit} & : \iff q(\mathbf{h}) < 0 \text{ für alle } \mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \\ \text{indefinit} & : \iff \exists \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \text{ mit } q(\mathbf{h}_1) < 0 < q(\mathbf{h}_2). \end{aligned}$$

Erinnern wir uns an die Lineare Algebra! Da wurde gezeigt:

Ist  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix, so gibt es eine orthogonale Matrix  $S \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , so daß  $S^{-1} \circ A \circ S$  eine Diagonalmatrix ist. Die Einträge in der Diagonalmatrix sind die Eigenwerte von  $A$ . (Das war der Satz von der Hauptachsentransformation).

Daß  $S$  orthogonal ist, bedeutet, daß  $S^\top S = \mathbf{1}$ , also  $S^{-1} = S^\top$  ist. Damit ist

$$\mathbf{h} \circ (S^{-1} \circ A \circ S) \circ \mathbf{h}^\top = (\mathbf{h} \circ S^\top) \circ A \circ (\mathbf{h} \circ S^\top)^\top.$$

Andererseits ist

$$S^{-1} \circ A \circ S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wenn  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$  sind. Ist  $q_A(\mathbf{h}) = \mathbf{h} \circ A \circ \mathbf{h}^\top$ , so folgt:

$$\begin{aligned} q_A \text{ positiv definit} &\iff \mathbf{v} \circ A \circ \mathbf{v}^\top > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ &\iff (\mathbf{h} \circ S^\top) \circ A \circ (\mathbf{h} \circ S^\top)^\top > 0 \text{ für alle } \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \\ &\iff \sum_{i=1}^n \lambda_i (h_i)^2 > 0 \text{ für alle } \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \\ &\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0. \end{aligned}$$

Genauso ist  $q_A$  negativ definit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativ sind. Und  $q_A$  ist positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit), wenn alle Eigenwerte von  $A \geq 0$  (bzw.  $\leq 0$ ) sind. Gibt es wenigstens einen negativen und einen positiven Eigenwert, so ist  $q_A$  indefinit.

Im Falle  $n = 2$  gibt es noch ein einfacheres Kriterium:

#### V.4.3 Satz.

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix. Dann ist

$$q_A(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + dh_2^2,$$

und es gilt:

1. Ist  $\det(A) < 0$ , so ist  $q_A$  indefinit.
2. Ist  $\det(A) > 0$  und  $a > 0$ , so ist  $q_A$  positiv definit.
3. Ist  $\det(A) > 0$  und  $a < 0$ , so ist  $q_A$  negativ definit.

BEWEIS: Sei  $\Delta := \det(A) = ad - b^2$ . Zur Berechnung der Eigenwerte brauchen wir noch das charakteristische Polynom:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ b & d-x \end{pmatrix} = (a-x)(d-x) - b^2 = x^2 - (a+d)x + \Delta.$$

Die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $A$  sind die beiden Nullstellen dieses quadratischen Polynoms. Nach dem Satz von Vieta ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad \text{und} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta.$$

Ist  $\Delta < 0$ , so haben die beiden Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen, und  $q_A$  ist indefinit. Ist  $\Delta > 0$ , so haben  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  das gleiche Vorzeichen. Außerdem ist  $ad = \Delta + b^2 > 0$ . Ist nun  $a > 0$ , so ist auch  $d > 0$  und damit  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ . In diesem Fall ist  $q_A$  positiv definit. Genauso folgt aus  $a < 0$ , daß  $q_A$  negativ definit ist.  $\square$

Nun haben wir endlich alles beisammen.

#### V.4.4 Hinreichendes Kriterium für Extremwerte.

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in \mathcal{C}^2(B)$ . Weiter sei  $\mathbf{a} \in B$  ein stationärer Punkt von  $f$ , also  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

1. Ist  $H_f(\mathbf{a})$  positiv definit, so besitzt  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein relatives Minimum.



2. Ist  $H_f(\mathbf{a})$  negativ definit, so besitzt  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein relatives Maximum.

3. Ist  $H_f(\mathbf{a})$  indefinit, so liegt in  $\mathbf{a}$  ein Sattelpunkt vor.

BEWEIS:

1) Sei  $q(\mathbf{h}) := \mathbf{h} \circ H_f(\mathbf{a}) \circ \mathbf{h}^\top$ . Da  $f$  in  $\mathbf{a}$  stationär ist, ergibt die Taylorformel:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}q(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}).$$

Die Funktion  $q$  ist stetig und nach Voraussetzung  $> 0$  außerhalb des Nullpunktes. Insbesondere nimmt sie auf der kompakten Menge

$$S^{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

ein Minimum  $m > 0$  an. Daher gilt für beliebiges  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ :

$$q(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2 \cdot q\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) \geq m \cdot \|\mathbf{h}\|^2.$$

Ist jetzt ein  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \frac{m}{2}$  vorgegeben und dazu ein  $r = r(\varepsilon)$  so gewählt, daß

$$|R(\mathbf{h})| \leq \varepsilon \cdot \|\mathbf{h}\|^2 \text{ für } \mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$$

ist. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}q(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}) \\ &\geq \left(\frac{m}{2} - \varepsilon\right) \cdot \|\mathbf{h}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$ .

Also ist  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{a})$  für kleines  $\mathbf{h}$ , und es liegt ein relatives Minimum in  $\mathbf{a}$  vor.

2) Der Fall des Maximums kann durch Übergang von  $f$  zu  $-f$  auf (1) zurückgeführt werden.

3) Ist  $q$  indefinit, so gibt es genügend nahe bei  $\mathbf{0}$  Vektoren  $\mathbf{h}_1$  und  $\mathbf{h}_2$  mit  $q(\mathbf{h}_1) < 0 < q(\mathbf{h}_2)$ . Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}_1) \\ \text{und } f_2(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}_2) \end{aligned}$$

sind dann definiert, zweimal differenzierbar, und es gilt:

$$(f_1)'(0) = (f_2)'(0) = 0, \quad (f_1)''(0) = q(\mathbf{h}_1) < 0 \quad \text{und} \quad (f_2)''(0) = q(\mathbf{h}_2) > 0.$$

Also besitzt  $f_1$  in  $t = 0$  ein isoliertes Maximum und  $f_2$  in  $t = 0$  ein isoliertes Minimum. Das bedeutet, daß  $f$  beliebig nahe bei  $\mathbf{a}$  sowohl Werte  $< f(\mathbf{a})$  als auch Werte  $> f(\mathbf{a})$  annimmt. Damit liegt ein Sattelpunkt vor.  $\square$

**Bemerkung:** Ist  $H_f(\mathbf{a})$  nur semidefinit, so kann man keine genaue Aussage machen!

**Beispiele:**

1. Sei  $f(x, y) := x^2 + y^2$ . Dann ist  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ , also  $(0, 0)$  der einzige stationäre Punkt von  $f$ . Da  $f(0, 0) = 0$  und allgemein  $f(x, y) \geq 0$  ist, liegt ein absolutes Minimum vor. Tatsächlich ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da  $2 > 0$  und  $\det H_f(x, y) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$  ist, ist die Matrix positiv definit. (Das ist übrigens jede Diagonalmatrix mit nur positiven Einträgen). Das Hinreichende Kriterium sagt also auch, daß  $f$  im Nullpunkt ein lokales Minimum besitzt.

2. Sei  $f(x, y) := 1 - x^2 - y^2$ . Dann ist  $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$  und  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  negativ definit. Hier liegt im Nullpunkt ein Maximum vor.

3. Sei  $f(x, y) := x^2 - y^2$ . Nun ist  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$  und  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Da  $\det H_f(x, y) < 0$  ist, liegt im Nullpunkt ein Sattelpunkt vor.

4. Sei  $f(x, y) := e^{xy} + x^2 + \frac{1}{9}y^2$ .

Dann ist  $\nabla f(x, y) = (ye^{xy} + 2x, xe^{xy} + \frac{2}{9}y)$ . Für die Hesse-Matrix ergibt sich:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + y^2 e^{xy} & (1 + xy)e^{xy} \\ (1 + xy)e^{xy} & \frac{2}{9} + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}.$$

Der Nullpunkt ist sicher ein stationärer Punkt. Ist  $(x, y)$  irgendein anderer stationärer Punkt, so muß gelten:

$$xye^{xy} = -2x^2 \quad \text{und} \quad xye^{xy} = -\frac{2}{9}y^2,$$

also  $x = \pm \frac{1}{3}y$ .

Wäre  $x = \frac{1}{3}y$ , so wäre  $0 = f_y(x, y) = \frac{y}{3}(e^{xy} + \frac{2}{3})$ , also  $y = 0$  (und damit auch  $x = 0$ ) oder  $e^{xy} = -\frac{2}{3}$ , was nicht möglich ist. So bleibt nur die Gleichung  $x = -\frac{1}{3}y$ . Wegen der Bedingung  $f_x(x, y) = 0$  muß dann  $e^{xy} = \frac{2}{3}$  sein, also  $e^{-y^2/3} = \frac{2}{3}$ .

Das führt auf die Gleichung  $y^2 = -3 \ln(\frac{2}{3})$ . Setzen wir  $p := \sqrt{-3 \ln(\frac{2}{3})}$  (der Radikand ist positiv!), so sind die Punkte

$$(x, y) = \pm(-\frac{1}{3}p, p)$$

weitere Kandidaten für stationäre Punkte, und mehr kann es nicht geben. Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 \\ \text{und } f\left(\pm\left(-\frac{1}{3}p, p\right)\right) &= e^{-p^2/3} + \frac{2}{9}p^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Da  $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$  ist, also  $\det H_f(0,0) = \frac{4}{9} - 1 < 0$ , liegt im Nullpunkt ein Sattelpunkt vor! Und da  $f(x,y) > \frac{1}{9}(x^2 + y^2)$  ist, gilt für  $\|(x,y)\| \geq 3$ , daß  $f(x,y) > 1$  ist. Auf der kompakten Menge  $\overline{B_3((0,0))}$  muß  $f$  als stetige Funktion ein Minimum  $\leq 1$  annehmen. Dort muß  $f$  einen stationären Punkt besitzen, und wir können somit schließen:

$f$  besitzt in  $(-\frac{1}{3}p, p)$  und in  $(\frac{1}{3}p, -p)$  jeweils ein Minimum. Beides sind auch globale Minima.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch mit einem etwas schwierigeren, aber für die Anwendungen wichtigen Problem befassen, nämlich der Suche nach Extremwerten unter gewissen Nebenbedingungen.

Zunächst ein

### Beispiel:

Sei  $f(x,y) := y$ . Diese auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definierte Funktion mißt die Höhe über der  $x$ -Achse, und sie besitzt weder einen globalen noch einen lokalen Extremwert. Der Gradient  $\nabla f(x,y) = (0,1)$  verschwindet nirgends.

Wenn wir  $f$  allerdings auf die Parabel  $P := \{(x,y) \mid y = x^2 + 1\}$  einschränken, so sehen wir:

$$f(x,y) = f(x, x^2 + 1) = x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{und} \quad f(0,1) = 1.$$

Also nimmt  $f$  auf  $P$  in  $(0,1)$  ein Minimum an. Setzt man  $g(x,y) := y - x^2 - 1$ , so kann man sagen:

*$f(x,y)$  nimmt unter der Nebenbedingung  $g(x,y) = 0$  in  $(0,1)$  ein Minimum an.*

Wir wollen das Beispiel verallgemeinern. Theoretisch sind beliebig unangenehme Nebenbedingungen denkbar. Um uns das Leben nicht allzu schwer zu machen, betrachten wir aber nur solche Nebenbedingungen, die durch stetig differenzierbare Gleichungen gegeben sind und zusätzlich die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllen, also eine Untermannigfaltigkeit bilden:

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar und  $\text{rg } g'(\mathbf{x}) = m$  für alle  $x \in B$ .

Weiter sei  $\mathbf{a} \in M := g^{-1}(\mathbf{0})$ ,  $U(\mathbf{a}) \subset B$  eine offene Umgebung und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion.

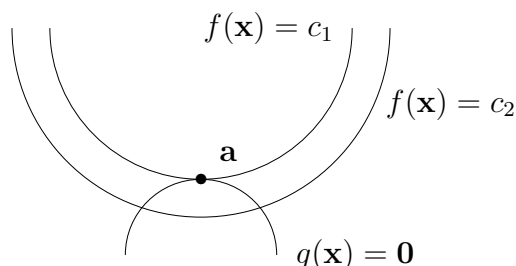
**Definition.**

$f$  hat in  $\mathbf{a}$  ein *relatives Maximum* (bzw. *relatives Minimum*) unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

falls  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  (bzw.  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ ) für alle  $\mathbf{x} \in U \cap M$ .

Wie kann man solche Extrema unter Nebenbedingungen finden? Wir sind hier nicht in der Lage, ein hinreichendes Kriterium anzugeben. Aber zumindest können wir mit Hilfe eines notwendigen Kriteriums mögliche Kandidaten für Extremwerte finden. Die Idee ist die folgende:



Damit die Werte von  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein Maximum oder Minimum annehmen, müssen sich bei  $\mathbf{a}$  eine Niveaufläche von  $f$  und die Menge  $M$  berühren. Also muß die Tangentialebene an  $M$  in  $\mathbf{a}$  in der Tangentialebene an die Niveaufläche von  $f$  enthalten sein. Da die Gradienten auf den Tangentialebenen senkrecht stehen, muß dann der Gradient von  $f$  in die gleiche Richtung wie die Gradienten der Funktionen  $g_1, \dots, g_m$  zeigen. Wir benutzen dabei folgenden

**V.4.5 Hilfssatz.** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  zwei Untervektorräume.

Ist  $U \subset V$ , so ist  $V^\perp \subset U^\perp$ .

BEWEIS: Sei  $\mathbf{v} \in V^\perp$  festgehalten,  $\mathbf{u} \in U$  beliebig. Dann ist  $\mathbf{u} \in V$ , nach Voraussetzung, und daher  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Also ist auch  $\mathbf{v} \in U^\perp$ .  $\square$

Das führt zu folgendem Kriterium:

**V.4.6 Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.** Hat  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

so gibt es Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , so daß gilt:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\mathbf{a}).$$

Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  nennt man Lagrangesche Multiplikatoren. Man beachte, daß es sich hier nur um ein notwendiges Kriterium handelt! Die Punkte, die die angegebene Bedingung erfüllen, können Extremwerte sein. Ob sie es wirklich sind, muß man mit anderen Mitteln feststellen.

BEWEIS: Es sei  $d := n - m$  und  $g := (g_1, \dots, g_m)$ . Dann ist  $\mathbf{a} \in M := g^{-1}(\mathbf{0})$  und  $\text{rg } g'(\mathbf{a}) = n - d$ . O.B.d.A. können wir annehmen, daß die letzten  $m$  Spalten der Funktionalmatrix linear unabhängig sind. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über

implizite Funktionen erfüllt. Schreibt man  $\mathbf{a}$  in der Form

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}^*, \mathbf{a}^{**}) = (a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n),$$

so gibt es offene Umgebungen  $U(\mathbf{a}^*)$  und  $V(\mathbf{a}^{**})$ , sowie eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$ , so daß gilt:

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \mid g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in U\}.$$

Außerdem ist  $\varphi'(\mathbf{a}^*) = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a})^{-1} \circ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ .

Der Satz ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß

$$\nabla f(\mathbf{a}) \in \langle \nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a}) \rangle$$

ist. Da für einen Unterraum  $U \subset \mathbb{R}^n$  stets die Beziehung  $(U^\perp)^\perp = U$  gilt, reicht es wegen des Hilfssatzes zu zeigen:

$$\langle \nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a}) \rangle^\perp \subset \langle \nabla f(\mathbf{a}) \rangle^\perp.$$

Das wollen wir nun tun!

Sei  $\mathbf{v} \in \langle \nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{a}) \rangle^\perp$ . Das bedeutet:

$$Dg(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = (\nabla g_1(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}, \dots, \nabla g_m(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0},$$

oder mit Hilfe der Funktionalmatrix  $g'(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}), \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}) \right)$

und  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^{**}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$  ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = g'(\mathbf{a}) \circ \mathbf{v}^\top &= \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \mid \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}) \right) \circ \begin{pmatrix} (\mathbf{v}^*)^\top \\ (\mathbf{v}^{**})^\top \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \circ (\mathbf{v}^*)^\top + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}) \circ (\mathbf{v}^{**})^\top, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \circ (\mathbf{v}^*)^\top = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}) \circ (\mathbf{v}^{**})^\top.$$

Bis jetzt haben wir nur die Voraussetzungen interpretiert und umgeformt. Nun kommt der entscheidende Schritt:

Durch  $\alpha(t) := (\mathbf{a}^* + t\mathbf{v}^*, \varphi(\mathbf{a}^* + t\mathbf{v}^*))$  wird ein Weg definiert, der ganz in der Fläche  $M$  verläuft. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (\mathbf{a}^*, \varphi(\mathbf{a}^*)) = \mathbf{a} \\ \text{und } \dot{\alpha}(0) &= (\mathbf{v}^*, (\varphi'(\mathbf{a}^*) \circ (\mathbf{v}^*)^\top)^\top) \\ &= (\mathbf{v}^*, (-\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a})^{-1} \circ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \circ (\mathbf{v}^*)^\top)^\top) \\ &= (\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^{**}) = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Jetzt haben wir nahezu alle Voraussetzungen ausgeschlachtet. Wir müssen aber noch benutzen, daß  $f$  auf  $M$  in  $\mathbf{a}$  ein lokales Extremum hat. Dann hat auch  $f \circ \alpha$  in 0 ein lokales Extremum, und es muß gelten:

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}.$$

Also ist  $\mathbf{v} \in \langle \nabla f(\mathbf{a}) \rangle^\perp$ , und wir sind fertig!  $\square$

### Beispiele :

1. Wir untersuchen die Funktion

$$f(x, y, z) := 3x^2 + 3y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung  $g(x, y, z) = 0$ , mit

$$g(x, y, z) := x + y + z - 1.$$

Hat  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = 0$  in  $\mathbf{a}$  ein lokales Extremum, so muß es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  geben, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{a}) \\ \text{und } g(\mathbf{a}) &= 0. \end{aligned}$$

Das führt zu folgendem Gleichungssystem für  $\mathbf{a} = (a, b, c)$ :

$$\begin{aligned} 6a &= \lambda, \\ 6b &= \lambda, \\ 2c &= \lambda \\ \text{und } a + b + c &= 1. \end{aligned}$$

Es muß also  $\frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{2} = 1$  sein. Damit ist  $5\lambda = 6$  und  $\lambda = \frac{6}{5}$ . Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{a} = (a, b, c) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Man überprüft sofort, daß  $\mathbf{a}$  tatsächlich auf  $M := g^{-1}(0)$  ist. Außerdem ist

$$f(\mathbf{a}) = \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Jetzt fängt der schwierige Teil an. Man muß irgendwie herausfinden, ob  $f$  in  $\mathbf{a}$  wirklich ein Extremum besitzt, und wenn ja, was für eins. Zu dem Zweck berechnen wir  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$  für kleines  $\mathbf{h}$ . Es ist

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= f\left(\frac{1}{5} + h_1, \frac{1}{5} + h_2, \frac{3}{5} + h_3\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{5} + h_1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{5} + h_2\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + h_3\right)^2 \\ &= 3\left(\frac{1}{25} + \frac{2h_1}{5} + (h_1)^2\right) + 3\left(\frac{1}{25} + \frac{2h_2}{5} + (h_2)^2\right) + \left(\frac{9}{25} + \frac{6h_3}{5} + (h_3)^2\right) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{6}{5}(h_1 + h_2 + h_3) + 3(h_1)^2 + 3(h_2)^2 + (h_3)^2 \\ &\geq \frac{3}{5} + \frac{6}{5}(h_1 + h_2 + h_3) \\ &= \frac{3}{5} = f(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

denn da  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$  auf  $M$  liegen soll, ist

$$1 = (a + h_1) + (b + h_2) + (c + h_3) = 1 + h_1 + h_2 + h_3,$$

also  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ .

Damit ist klar, daß  $f$  in  $\mathbf{a}$  ein Minimum unter der Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = 0$  besitzt. Für den Beweis wurde der Lagrangesche Multiplikator nicht gebraucht, er diene lediglich zum Auffinden des richtigen Punktes.

2. Sei  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \circ A \circ \mathbf{x}^\top$ . Da  $f$  stetig und

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

eine kompakte Menge ist, nimmt  $f$  auf  $S^{n-1}$  ein Maximum an. Dieses Maximum wollen wir suchen.

Die Nebenbedingung wird hier durch die Funktion  $g(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^\top - 1$  definiert. Offensichtlich ist  $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  auf  $S^{n-1}$ , und es ist  $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \circ A$ .

Wenn  $f$  in  $\mathbf{x}$  ein Maximum unter der Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = 0$  besitzt, so muß gelten:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{x}) \\ \text{und } g(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Das führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x} \circ A &= 2\lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^\top &= 1. \end{aligned}$$

Insbesondere muß  $(A - \lambda \cdot \mathbf{1}) \circ \mathbf{x}^\top = 0$  sein, also  $\mathbf{x}^\top$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

Weiter kann man sagen:

$$\lambda = \lambda \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^\top) = \mathbf{x} \circ (\lambda\mathbf{x})^\top = \mathbf{x} \circ (A \circ \mathbf{x}^\top) = f(\mathbf{x}).$$

Da die Existenz eines Maximums gesichert ist, haben wir gezeigt:

$A$  besitzt wenigstens einen reellen Eigenwert.

Das ist ein neuer Beweis eines schon bekannten Resultats.

## §5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion  $y = y(x)$  und ihre Ableitungen  $y', y'' \dots$  vorkommen.

Hat die Gleichung die Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

so spricht man von einer *impliziten Differentialgleichung*.

Hat sie die Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung*.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung.

**Beispiele :**

1.  $y'' = -\omega^2 y$  ist eine explizite DGL 2. Ordnung.
2.  $(yy^{(5)})^2 + xy'' + \ln y = 0$  ist eine implizite DGL 5. Ordnung.

Wir werden hier im Wesentlichen mit expliziten DGLn arbeiten, die auch in der Form

$$cy^{(n)} + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

vorkommen können, mit einer Konstanten  $c$ .

**Definition.**

Sei  $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.

Unter einer *Lösung* der DGL  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  versteht man eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\{(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) \mid t \in I\} \subset B$ .
2. Für alle  $t \in I$  ist  $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ .

Für implizite DGLn definiert man Lösungen analog.

Die Kurve  $\Phi : I \rightarrow B$  mit  $\Phi(t) := (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$  heißt *Lösungskurve*.

**Definition.**

Ist zu der DGL zusätzlich ein Punkt  $\mathbf{A}_0 = (t_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in (I \times \mathbb{R}^n) \cap B$  gegeben, so versteht man unter dem zugehörigen *Anfangswertproblem* die Suche nach einer Lösung  $\varphi$  der DGL, die folgende *Anfangsbedingungen* erfüllt:

$$\varphi(t_0) = a_0, \varphi'(t_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

Man nennt ein Anfangswertproblem *sachgemäß gestellt*, wenn es eine eindeutig bestimmte lokale Lösung gibt, die außerdem stetig von den Anfangsbedingungen abhängt (so daß das System bei kleinen Störungen stabil bleibt).



**Beispiele :**

1. Wir betrachten die DGL  $y' = ky$  mit einer Konstanten  $k \neq 0$ . Als Anfangsbedingung sei  $y(0) = 1$  gefordert.

Wir nehmen an, es gäbe in der Nähe von  $t = 0$  eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi(t)$  mit  $\varphi'(t) = k\varphi(t)$  und  $\varphi(0) = 1$ . Wir können dann voraussetzen, daß  $\varphi$  auf seinem Definitionsintervall  $\neq 0$  ist. Also gilt:

$$(\ln \circ |\varphi|)'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = k.$$

Jetzt kann man integrieren:

$$\ln |\varphi(t)| = kt + c,$$

mit einer geeigneten Konstanten  $c$ . Das führt auf die Gleichung

$$|\varphi(t)| = C \cdot e^{kt}, \quad \text{mit } C := e^c > 0.$$

Läßt man für die Integrationskonstante  $C$  beliebige reelle (also auch negative) Zahlen zu, so kann man sogar schreiben:

$$\varphi(t) = C \cdot e^{kt}, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung muß so aussehen, und die Probe zeigt, daß  $\varphi$  wirklich eine Lösung ist. Tatsächlich erhält man eine ganze Schar von Lösungen  $\varphi_C(t) = C \cdot e^{kt}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Die Lösungskurven

$$\Phi_C(t) := (t, C \cdot e^{kt})$$

sind alle disjunkt!

Zu jeder Anfangsbedingung  $(0, a_0)$  gibt es genau eine Lösung  $\varphi_C$  mit  $\varphi_C(0) = a_0$ , nämlich die mit  $C = a_0$ . Insbesondere ist die gesuchte Lösung  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = 1$  gegeben durch  $\varphi(t) = e^{kt}$ . Da die Lösungen vom Parameter  $C$  (und damit von der Anfangsbedingung) stetig abhängen, ist das Problem sachgemäß gestellt.

2. Die DGL  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$  verhält sich nicht so angenehm. Offensichtlich ist die Nullfunktion  $\varphi_0(t) \equiv 0$  eine Lösung, aber auch jede Funktion  $\varphi_c(t) := (t - c)^3$  löst die DGL. Also gehen durch jeden Punkt der x-Achse mindestens zwei Lösungskurven. Ein schlecht gestelltes Problem!
3. Die DGL  $|y'| + |y| = 0$  besitzt nur die Nullfunktion als Lösung. Allgemeine Anfangswertprobleme sind dann überhaupt nicht mehr lösbar.

Unter einem *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung* versteht man ein System von  $n$  Gleichungen, in dem  $n$  unbekannte Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  und ihre ersten Ableitungen vorkommen. In der expliziten Version sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Eine Lösung ist dann ein System von Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  mit

$$\varphi'_i(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Wir schreiben ein solches System auch kurz in der Form

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}).$$

Diese Schreibweise erweist sich als besonders praktisch, wenn man mit *linearen Systemen* arbeitet:

$$\vec{y}' = A(x) \circ \vec{y},$$

wobei  $A(x) = (a_{ij}(x) \mid i, j = 1, \dots, n)$  eine Matrizenwertige Funktion ist.

### Beispiel:

Das System

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -y_1 \end{aligned}$$

kann in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Wir kennen übrigens schon die Lösung dieses Systems unter der Anfangsbedingung  $y'_1(0) = 0$  und  $y'_2(0) = 1$ , nämlich

$$\varphi_1(t) = \sin(t) \text{ und } \varphi_2(t) = \cos(t).$$

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen einfachen DGLn n-ter Ordnung und den Systemen von DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System zu:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= y_n \\ y'_n &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Ist  $\varphi$  eine Lösung der DGL (\*), so setzen wir

$$\varphi_1 := \varphi, \varphi_2 := \varphi', \dots, \varphi_n := \varphi^{(n-1)}.$$

Dann ist  $\varphi'_1 = \varphi_2, \dots, \varphi'_{n-1} = \varphi_n$  und  $\varphi'_n = \varphi^{(n)} = f(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , d.h.,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ist eine Lösung des Systems.

Ist umgekehrt eine Lösung  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  des Systems gegeben, so setze man  $\varphi := \varphi_1$ . Dann ist  $\varphi' = \varphi_2, \dots, \varphi^{(n-1)} = \varphi_n$  und  $\varphi^{(n)} = \varphi'_n = f(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ .

Also kann man die Theorie der DGLn n-ter Ordnung auf die der Systeme 1. Ordnung zurückführen.

Wir betrachten nun ein System  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$ , mit einer stetigen Abbildung  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$  eine Lösung, also

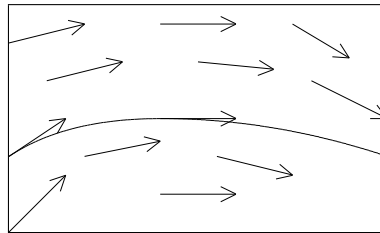
$$\dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

so gilt für die zugehörige Lösungskurve  $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ :

$$\dot{\Phi}(t) = (1, \dot{\varphi}(t)) = (1, F(t, \varphi(t))).$$

$F(t_0, \vec{y}_0)$  ist demnach die „Steigung“ derjenigen Lösungskurve, die den Anfangsbedingungen  $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$  genügt.

Die Zuordnung  $(t, \vec{y}) \mapsto F(t, \vec{y})$  liefert ein *Richtungsfeld*, das den Verlauf der Lösungskurven schon ahnen läßt.



Unter welchen Voraussetzungen Lösungskurven existieren und eindeutig bestimmt sind, sagt der folgende Satz:

**V.5.1 Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz.** Sei  $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und nach den Variablen  $y_1, \dots, y_n$  stetig differenzierbar.

Sind  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in B$  und  $r, \varepsilon > 0$  so gewählt, daß

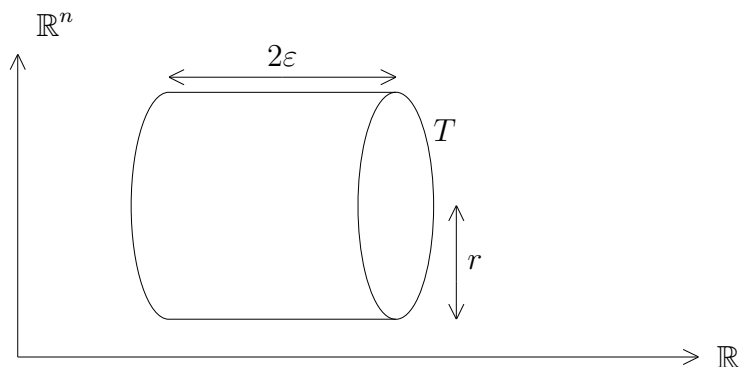
$$T := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| < \varepsilon \text{ und } \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < r\} \subset B$$

ist, so gibt es ein  $\varepsilon^*$  mit  $0 < \varepsilon^* \leq \varepsilon$  und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : [t_0 - \varepsilon^*, t_0 + \varepsilon^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so daß gilt:

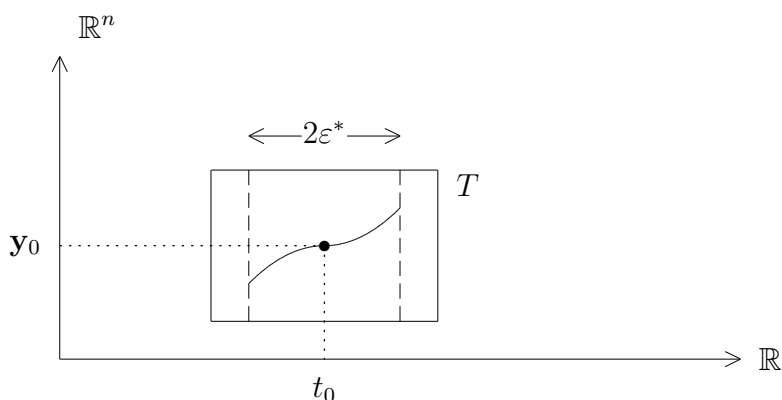
1.  $\|\varphi(t) - \mathbf{y}_0\| < r$  für  $|t - t_0| < \varepsilon^*$ .
2.  $\varphi$  ist Lösung der DGL  $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$ .
3.  $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$ .

Hier ist schon die Formulierung des Satzes nicht ganz einfach. Bei den Bedingungen, die an  $F$  zu stellen sind, war ich etwas großzügig. Normalerweise fordert man die sogenannte „Lipschitz-Stetigkeit“, aber diesen neuen Begriff wollte ich vermeiden. Die stärkere partielle Differenzierbarkeit nach  $y_1, \dots, y_n$  ist ja viel vertrauter und auch leichter zu verifizieren.

Es handelt sich um eine lokale Situation in der Nähe von  $(t_0, \mathbf{y}_0)$ . Deshalb braucht uns die womöglich komplizierte Gestalt von  $B$  hier nicht zu interessieren, wir ersetzen vielmehr  $B$  durch eine „Tonne“  $T$ , ein Produkt aus einem Intervall der Länge  $2\varepsilon$  und einer Kugel vom Radius  $r$ .



Die gesuchte Lösungskurve durch  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  kann nur innerhalb einer kleineren Tonne der Höhe  $2\varepsilon^*$  konstruiert werden. Darin läuft sie allerdings vom Boden bis zur Decke, und sie ist eindeutig bestimmt.



Vom BEWEIS (nach Picard-Lindelöf) können wir hier nur die Idee angeben :

Sei  $I := [t_0 - \varepsilon^*, t_0 + \varepsilon^*]$ . Wie dabei das  $\varepsilon^* < \varepsilon$  zu wählen ist, damit hinterher alles gut geht, sei den Mathematikern überlassen.

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \{\varphi : I \rightarrow \overline{B_r(\mathbf{y}_0)} \mid \varphi \text{ stetig, und } \varphi(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Eine Folge von Funktionen aus  $\mathcal{F}$ , die gleichmäßig konvergiert, hat als Grenzwert wieder ein Element von  $\mathcal{F}$ . Und jede Cauchyfolge in  $\mathcal{F}$  ist gleichmäßig konvergent.<sup>4</sup>

Nun definiert man einen Operator  $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  durch

$$(S\varphi)(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t F(u, \varphi(u)) du.$$

Man kann ziemlich leicht zeigen, daß  $S$  kontrahierend ist, und mit einer verallgemeinerten Form des Banachschen Fixpunktsatzes folgt dann, daß  $S$  einen Fixpunkt  $\varphi_0$  besitzt. Dieser Fixpunkt erweist sich als die gesuchte Lösung.  $\square$

<sup>4</sup>Der Begriff der „Cauchyfolge“ in einem Funktionenraum wie der Menge  $\mathcal{F}$  muß genau wie die gleichmäßige Konvergenz mit Hilfe von  $\varepsilon$ -Schläuchen definiert werden. Wir führen das hier aber nicht weiter aus.

Man kann das Verfahren so verfeinern, daß man es zu einer Konstruktion der Lösung gebrauchen kann. Wer allerdings ernsthaft numerisch rechnen möchte, wird eine andere Methode benutzen, z.B. das „Runge-Kutta-Verfahren“.

Der Satz von Picard-Lindelöf sagt nur etwas über die Existenz lokaler Lösungen aus. Wendet man ihn iteriert an, so kann man die lokalen Lösungen zu globaleren fortsetzen. Man kann zeigen, daß die Lösungskurven nicht irgendwo im Sande verlaufen. Sie lassen sich vielmehr so weit fortsetzen, daß sie in einem Gebiet (also in einer zusammenhängenden offenen Menge) von Rand zu Rand laufen. Wir werden das künftig verwenden, auch wenn wir das Ergebnis hier nicht ausdrücklich als Satz formulieren.

### Beispiele :

1. Die Theorie der Differentialgleichungen ist eigentlich eine Sammlung unzähliger Spezialfälle, und man braucht fast jedesmal einen neuen trickreichen Ansatz, um die Lösung zu finden.

Wir wollen hier zwei Typen von DGLn 1. Ordnung behandeln, für die es jeweils ein Kochrezept gibt.

Wir beginnen mit separablen (oder separierbaren) DGLn. Man spricht auch von DGLn mit getrennten Variablen:

$$y' = f(x)g(y),$$

mit stetigen Funktionen  $f$  und  $g$ . Und wir setzen noch voraus, daß  $g$  keine Nullstellen hat.

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$ .

Da  $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$  für alle  $x$  ist, ist  $G$  eine streng monotone Funktion, insbesondere also umkehrbar. Ist  $\varphi$  eine Lösung, so ist  $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t))$ , also

$$\frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} - f(t) \equiv 0.$$

Die Integration liefert nun:

$$G \circ \varphi(t) - F(t) \equiv c \text{ konstant,}$$

also

$$\varphi(t) = G^{-1}(F(t) + c).$$

Die Physiker schreiben diesen Vorgang recht suggestiv, aber mathematisch schwach begründet, in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) &\implies \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \\ &\implies G(y) - F(x) = c \\ &\quad (\text{für } G(y) := \int \frac{dy}{g(y)} \text{ und } F(x) := \int f(x) dx), \\ &\implies y = G^{-1}(F(x) + c). \end{aligned}$$

Als konkretes Beispiel nehmen wir die DGL  $y' = xy$ .

Dann ist  $f(x) = x$  und  $g(y) = y$ , und wir können für die Stammfunktionen die Funktionen

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \text{ und } G(y) := \ln |y|$$

nehmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \\ &= k \cdot \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right), \text{ mit } k > 0. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\varphi(x) = k \cdot \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right), \quad k > 0.$$

2. Eine lineare DGL 1. Ordnung hat allgemein folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x).$$

- (a) Ist  $r(x) \equiv 0$ , so spricht man vom *homogenen* Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion  $y(x) \equiv 0$  eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, daß  $y(x) \neq 0$  für alle  $x$  ist. Dann gilt:

$$(\ln \circ |y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$ , so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten  $c$ , die auch  $\leq 0$  sein darf.

- (b) Nun betrachten wir den *inhomogenen* Fall ( $r(x) \not\equiv 0$ ): Sind  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei Lösungen, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'(t) + a(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = r(t) - r(t) = 0,$$

also unterscheiden sich je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat also die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung“  $\varphi_p(t)$  der inhomogenen Gleichung. Die müssen wir noch finden.

Meistens findet man spezielle Lösungen über einen geeigneten Ansatz. So geht man auch hier vor. Man spricht von der *Variation der Konstanten*, wenn man ansetzt:

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL versucht man, Bedingungen für  $c(x)$  zu erhalten:

$$y'_p(x) = (c'(x) - c(x) \cdot A'(x)) \cdot e^{-A(x)} = (c'(x) - c(x)a(x)) \cdot e^{-A(x)}.$$

Da  $y'_p(x) + a(x)y_p(x) = r(x)$  sein soll, erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = r(x),$$

und setzt daher

$$c(x) := \int_{x_0}^x r(t)e^{A(t)} dt.$$

Die Probe zeigt, daß  $y_p$  tatsächlich die inhomogene DGL löst.

Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = \left( \int_{x_0}^x r(t)e^{A(t)} dt + c \right) \cdot e^{-A(x)}.$$

## §6 Lineare Differentialgleichungen

Unter einer *Linearen DGL n-ter Ordnung* versteht man eine DGL

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = r(x), \quad (*)$$

mit stetigen Funktionen  $a_1, \dots, a_n, r$ . Die Funktion  $r(x)$  nennt man *Störglied* oder *Inhomogenität*.

Das zugehörige System 1. Ordnung hat die Gestalt

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 \\ y'_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-2} &= y_{n-1} \\ y'_{n-1} &= -a_1(x)y_{n-1} - \dots - a_n(x)y_0 + r(x). \end{aligned}$$

Das kann man auch in Matrixschreibweise ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Bezeichnung „linear“ eigentlich schon gerechtfertigt. Es gibt aber noch eine andere Betrachtungsweise:

Für  $0 \leq k \leq n$  sei der Operator  $D^k : \mathcal{C}^k(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$  definiert durch

$$D^k(f) := f^{(k)}.$$

Dann ist  $D^k(D^l(f)) = D^l(D^k(f)) = D^{k+l}(f)$ . Unter einem *linearen Differentialoperator n-ter Ordnung* versteht man einen Operator der Gestalt

$$L = D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_n(x)D^0.$$

Er operiert auf den Elementen von  $\mathcal{C}^n(I)$  durch

$$L[f] := f^{(n)} + a_1 \cdot f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot f' + a_n \cdot f.$$

Man rechnet leicht nach:

$$\begin{aligned} L[f_1 + f_2] &= L[f_1] + L[f_2] \\ \text{und } L[c \cdot f] &= c \cdot L[f]. \end{aligned}$$

Also ist  $L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen, und die DGL (\*) wird zu einer linearen Gleichung

$$L[f] = r.$$



Insbesondere ist der Lösungsraum der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\mathcal{L} := \{f \in \mathcal{C}^k(I) \mid L[f] = 0\} = \text{Ker}(L)$$

ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Damit wird auch im allgemeinen Fall die Struktur der Lösungsgesamtheit klar:

Ist  $y_p$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x), \quad y_h(x) \in \mathcal{L},$$

die allgemeine Lösung des Systems (\*).

Wir wollen zunächst den Lösungsraum der homogenen Gleichung näher bestimmen. Besonders einfach ist folgendes zu zeigen:

**V.6.1 Satz.** *Der Lösungsraum  $\mathcal{L}$  einer homogenen linearen DGL  $n$ -ter Ordnung ist  $n$ -dimensional.*

BEWEIS: Zu den  $n$  Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gibt es  $n$  Lösungen  $f_1, \dots, f_n$ .

Wir definieren nun eine lineare Abbildung  $T : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$T(f) := (f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)).$$

Ist  $T(f) = 0$ , so muß  $f = 0$  sein, wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems. Also ist  $T$  injektiv.

Da  $T(f_i) = \mathbf{e}_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ist, ist  $T$  auch surjektiv und damit ein Isomorphismus.  $\square$

Etwas schwieriger ist die explizite Bestimmung einer Basis des Lösungsraumes.

Dazu sei für Funktionen  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}$  die Matrix

$$\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n; x) := \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

definiert, die sogenannte *Wronski-Matrix der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  in  $x$* .

$W(x) := \det \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n; x)$  heißt die *Wronski-Determinante* des Systems.

**V.6.2 Satz.** Die Wronski-Determinante  $W(x)$  hängt differenzierbar von  $x$  ab, und es gilt:

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-2)}(x) & \cdots & f_n^{(n-2)}(x) \\ f_1^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}.$$

BEWEIS: Alle Einträge in der Wronski-Matrix sind wenigstens einmal stetig differenzierbar, und daher ist auch die Wronski-Determinante stetig differenzierbar. Um ihre Ableitung berechnen zu können, muß man wissen, wie man die Determinante einer Matrix partiell nach den Einträgen der Matrix differenziert. Da ist es von Vorteil, wenn man sich an den Laplaceschen Entwicklungssatz erinnert:

Ist  $A = (a_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n) = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , so ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

mit den Cofaktoren  $A_{ij} := \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n)$ . Offensichtlich hängt  $A_{kj}$  nicht von  $a_{kj}$  ab. Daher ist

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{kj}} = A_{kj}.$$

In Zeilenschreibweise ist

$$A_{ij} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{e}_j \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für eine Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x) \mid i, j = 1, \dots, n)$  und ihre Determinante  $F(x) := \det A(x)$ :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(a_{ij}(x)) \cdot a'_{ij}(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \cdot a'_{ij}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a'_{ij}(x) \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(x) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n(x) \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(x) \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i(x) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die Wronski-Matrix an, so verschwinden alle Summanden, mit Ausnahme des letzten, weil man sonst jedesmal zwei gleiche Zeilen erhält. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**V.6.3 Satz.** Sind  $f_1, \dots, f_n$  Lösungen der homogenen linearen DGL

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

so erfüllt ihre Wronski-Determinante  $W(x) = \det \mathcal{W}(f_1, \dots, f_n; x)$  die DGL

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0.$$

BEWEIS: Sei  $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_n)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} W'(x) + a_1(x)W(x) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n-2)}(x) \\ \mathbf{f}^{(n)}(x) \end{pmatrix} + a_1(x) \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n-2)}(x) \\ \mathbf{f}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n-2)}(x) \\ \mathbf{f}^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot \mathbf{f}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n-2)}(x) \\ \sum_{i=2}^n (-a_i(x))\mathbf{f}^{(n-i)}(x) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

weil die letzte Zeile Linearkombination der ersten  $n - 1$  Zeilen ist.  $\square$

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz für die Lösungen von DGLn folgt jetzt, daß entweder  $W(x) \equiv 0$  oder  $W(x) \neq 0$  für alle  $x$  ist. Daraus folgt:

**V.6.4 Satz.**  $f_1, \dots, f_n$  seien Lösungen der homogenen linearen DGL

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0.$$

Dann gilt:

$f_1, \dots, f_n$  sind genau dann linear unabhängig (über  $\mathbb{R}$ ), wenn für wenigstens ein  $x_0$  die zugehörige Wronski-Determinante  $W(x_0) \neq 0$  ist.

BEWEIS:

1) Ist  $W(x) \equiv 0$ , so kann man zu beliebig vorgegebenem  $x_0$  ein  $\vec{c} \neq \vec{0}$  finden, so daß

$$\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n; x_0) \circ \vec{c} = \vec{0}$$

ist, denn  $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n; x_0)$  ist ja singular.

$f(x) := c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$  ist nun eine Lösung der homogenen DGL mit

$$f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, n - 1.$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems muß dann  $f(x) \equiv 0$  sein. Also sind  $f_1, \dots, f_n$  linear abhängig.

2) Sei  $W(x_0) \neq 0$  für ein  $x_0$ .

Angenommen, es gibt ein  $\vec{c} \neq \vec{0}$  mit  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0$ . Dann ist auch  $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_n; x_0) \circ \vec{c} = \vec{0}$ .

Das ist aber unmöglich! Also sind die Funktionen linear unabhängig.  $\square$

### Definition.

Ein System  $\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  von linear unabhängigen Lösungen einer homogenen linearen DGL n-ter Ordnung heißt ein *Fundamentalsystem*.

Wir wissen jetzt, daß man ein solches Fundamentalsystem mit Hilfe der Wronski-Determinante leicht erkennen kann. Aber wie soll man es finden? Das ist i.a. immer noch recht schwierig. Wir machen daher eine weitere einschränkende Annahme:

Wir betrachten im Folgenden nur noch *lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten*.

Der Differentialoperator  $L$  habe jetzt die Form

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n D^0.$$

Das Polynom  $p_L(x) := x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  wird als *charakteristisches Polynom von  $L$*  bezeichnet. Es gilt:

**V.6.5 Satz.** Sind  $L_1, L_2$  zwei Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, so ist

$$L_1[f] = L_2[f] \text{ für alle } f \iff p_{L_1}(x) \equiv p_{L_2}(x).$$

BEWEIS: 1) Zwei Polynome stimmen genau dann überein, wenn ihre Koeffizienten gleich sind.

Ist aber  $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  und  $L := p(D) := D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n D^0$ , so ist

$$D[f] = f^{(n)} + a_1 \cdot f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} f + a_n$$

allein durch  $f$  und die Koeffizienten  $a_i$  bestimmt.

Also gilt:  $p_{L_1} = p_{L_2} \implies L_1[f] = L_2[f]$  für alle  $f$ .

2) Nun sei  $L_1 = L_2$ , d.h.  $L_1[f] = L_2[f]$  für alle Funktionen  $f$ . Setzt man speziell  $f(x) := e^{cx}$ , so ist  $D^k[f] = c^k \cdot f$ , also

$$L_1[f] = p_{L_1}(c) \cdot f \text{ und } L_2[f] = p_{L_2}(c) \cdot f.$$

Da  $f$  nirgends verschwindet und  $c \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt werden kann, ist  $p_{L_1} = p_{L_2}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Alle Überlegungen lassen sich auf Differentialoperatoren mit komplexen Koeffizienten übertragen. Außerdem gilt:

Ist  $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$ ,  $L := p(D)$ ,  $L_1 = p_1(D)$  und  $L_2 = p_2(D)$ . Dann ist

$$L = L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1.$$

Daß die Operatoren vertauschbar sind, liegt an der Formel  $D^p D^q = D^q D^p = D^{p+q}$  und der Tatsache, daß die Koeffizienten konstant sind. Bei nicht-konstanten Koeffizienten geht's schief:

Ist  $L_1 = \sin(x)D^1$  und  $L_2 = e^{cx}D^1$ , so ist

$$L_1 \circ L_2 = \sin(x)e^{cx}D^2 + c \sin(x)e^{cx}D^1 \quad \text{und} \quad L_2 \circ L_1 = \sin(x)e^{cx}D^2 + \cos(x)e^{cx}D^1.$$

**V.6.6 Satz.** Sei  $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n D^0$  ein linearer Differentialoperator  $n$ -ter Ordnung mit konstanten (reellen) Koeffizienten. Das charakteristische Polynom  $p_L(x)$  zerfalle (über  $\mathbb{C}$ ) folgendermaßen in Linearfaktoren:

$$p_L(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_r)^{m_r}.$$

Dann gilt:

1. Für alle (reell- oder komplexwertigen) Funktionen  $f$  ist

$$L[f] = (D - \lambda_1)^{m_1} \circ (D - \lambda_2)^{m_2} \circ \dots \circ (D - \lambda_r)^{m_r} [f].$$

Die Reihenfolge der Operatoren spielt dabei keine Rolle.

2. Ist  $(D - \lambda_i)^{m_i} [f] = 0$  für ein  $i$ , so ist auch  $L[f] = 0$ .
3. Ist  $f = g + \mathbf{j}h$  eine komplexwertige Lösung der DGL  $L[f] = 0$ , so sind auch  $g$  und  $h$  Lösungen der DGL.

BEWEIS: 1) ist klar, auf Grund der obigen Bemerkungen.

2) Da es in (1) nicht auf die Reihenfolge ankommt, können wir schreiben:

$$L = L^* \circ (D - \lambda_i)^{m_i}.$$

Ist schon  $(D - \lambda_i)^{m_i} [f] = 0$ , so ist erst recht  $L[f] = 0$ .

3) Ist  $0 = L[f] = L[g + \mathbf{j}h] = L[g] + \mathbf{j} \cdot L[h]$ , so ist  $L[g] = 0$  und  $L[h] = 0$ . □

Wir sind jetzt in der Lage, ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL  $L[f] = 0$  zu konstruieren:

**1. Fall:**  $p_L(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$ , mit paarweise verschiedenen Nullstellen  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

Ist  $(D - \lambda_k)[f] = 0$ , so ist auch  $L[f] = 0$ . Es gilt aber:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_k)[f] = 0 &\iff f = 0 \text{ oder } \frac{f'}{f} = \lambda_k \\ &\iff f(x) = c \cdot e^{\lambda_k x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tatsächlich bilden die Funktionen

$$f_1(x) := e^{\lambda_1 x}, \dots, f_n(x) := e^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen.

**2. Fall:**  $p_L(x)$  enthält einen mehrfachen Faktor  $(x - \lambda)^m$ . Dann versuchen wir die DGL  $(D - \lambda)^m[f] = 0$  zu lösen.  $f(x) = e^{\lambda x}$  ist natürlich eine Lösung, aber eben leider nur **eine**! Wir brauchen aber  $m$  linear unabhängige Lösungen.

Wir versuchen es mit dem Ansatz  $f(x) = q(x)e^{\lambda x}$ :

$$\begin{aligned}(D - \lambda)[q(x)e^{\lambda x}] &= q'(x)e^{\lambda x} + q(x) \cdot \lambda e^{\lambda x} - \lambda \cdot (q(x)e^{\lambda x}) \\ &= q'(x)e^{\lambda x},\end{aligned}$$

und nach endlich vielen Schritten

$$(D - \lambda)^m[f(x)] = q^{(m)}(x) \cdot e^{\lambda x}.$$

Soll nun  $(D - \lambda)^m[f] = 0$  sein, so muß  $q^{(m)}(x) \equiv 0$  sein. Das ist nur möglich, wenn  $q(x)$  ein Polynom vom Grad  $\leq m - 1$  ist. Speziell kommen

$$q(x) = 1 \text{ oder } q(x) = x \text{ oder } q(x) = x^2 \text{ oder } \dots \text{ oder } q(x) = x^{m-1}$$

in Frage. Das liefert uns die  $m$  linear unabhängigen Lösungen

$$f_1(x) := e^{\lambda x}, f_2(x) := xe^{\lambda x}, \dots, f_m(x) = x^{m-1}e^{\lambda x}.$$

**3. Fall:**  $p_L(x)$  besitzt eine komplexe Nullstelle  $\lambda$ . Dann ist auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle. Man sieht sofort, daß  $f_1(x) = e^{\lambda x}$  und  $f_2(x) = e^{\bar{\lambda}x}$  komplexwertige Lösungen von  $(D - \lambda)[f] = 0$  bzw.  $(D - \bar{\lambda})[f] = 0$  sind. Ist  $\lambda = \alpha + \mathbf{j}\beta$ , so gilt:

$$\begin{aligned}e^{\lambda x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathbf{j} \sin(\beta x)), \\ e^{\bar{\lambda}x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - \mathbf{j} \sin(\beta x)).\end{aligned}$$

Also sind die linear unabhängigen (reellen) Funktionen

$$f_1(x) := e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ und } f_2(x) := e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

auch Lösungen der DGL  $L[f] = 0$ .

**4. Fall:** Ist  $\lambda$  sogar eine mehrfache komplexe Nullstelle von  $p_L(x)$ , etwa von der Vielfachheit  $m$ , so hat auch  $\bar{\lambda}$  die Vielfachheit  $m$ . Dann bilden die Funktionen

$$\begin{aligned}e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x)\end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen von  $L[f] = 0$ .

Damit sind alle denkbaren Fälle erledigt. Im Prinzip können wir immer ein Fundamentalsystem bestimmen. Einziges Hindernis bleibt – wie üblich – der Fundamentalsatz der Algebra.

**Beispiel:**

Wir betrachten die homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + 2ay' + by = 0,$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$ .

Das charakteristische Polynom ist  $p(x) = x^2 + 2ax + b$ . Die Nullstellen der Gleichung  $p(x) = 0$  sind gegeben durch

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = -a \pm \sqrt{\Delta},$$

mit  $\Delta := a^2 - b$ .

1.  $\Delta > 0$ .

Dann ist  $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ , mit  $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-a \pm \sqrt{\Delta}\}$ . Die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

und dann ist  $y'(x) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$ . Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$c_1 + c_2 = 1 \text{ und } c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0.$$

Also ist  $c_2 = 1 - c_1$  und  $c_1 \lambda_1 + (1 - c_1) \lambda_2 = 0$ . Die gesuchte Lösung hat deshalb die Gestalt

$$y(x) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}).$$

2.  $\Delta = 0$ .

Dann besitzt  $p(x)$  die zweifache reelle Nullstelle  $-a$ . Also hat die allgemeine Lösung die Gestalt

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-ax}.$$

Wegen  $y'(x) = (c_2 - a(c_1 + c_2 x)) e^{-ax}$  ergeben die Anfangsbedingungen:

$$c_1 = 1 \text{ und } c_2 - ac_1 = 0, \text{ also } c_2 = a.$$

Die gesuchte Lösung hat die Gestalt

$$y(x) = (1 + ax) e^{-ax}.$$

3.  $\Delta < 0$ .

Setzt man  $\omega := \sqrt{-\Delta}$  und  $\lambda := -a + \mathbf{j}\omega$ , so hat  $p(x)$  die komplexen Nullstellen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$ . In diesem Fall hat die allgemeine Lösung die Gestalt

$$y(x) = e^{-ax} (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= -ae^{-ax}(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)) \\ &\quad + e^{-ax}(-\omega c_1 \sin(\omega x) + \omega c_2 \cos(\omega x)) \\ &= e^{-ax}[(c_2\omega - ac_1) \cos(\omega x) - (ac_2 + \omega c_1) \sin(\omega x)]. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen ergeben

$$c_1 = 1 \text{ und } c_2\omega - ac_1 = 0, \text{ also } c_2 = \frac{a}{\omega}.$$

Das führt zu der Lösung

$$y(x) = e^{-ax}(\cos(\omega x) + \frac{a}{\omega} \sin(\omega x)).$$

Man kann sie umformen zu einer gedämpften Schwingung

$$y(x) = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi).$$

Es bleibt noch das Problem, eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = r(x)$$

zu finden.

Sei  $y_1, \dots, y_n$  ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems. Als Ansatz für eine partikuläre Lösung wählen wir die Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x).$$

Dann ist  $y'_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y'_k(x) + \sum_{k=1}^n C'_k(x)y_k(x)$ . Wir wollen einfache Bedingungsgleichungen für die  $C_i$  aufstellen, in denen höchstens erste Ableitungen von den  $C_i$  vorkommen. Dabei können wir relativ willkürlich vorgehen.

Als erste Bedingung setzen wir

$$\boxed{\sum_{k=1}^n C'_k(x)y_k(x) = 0.} \quad (B_1)$$

Dann ergibt sich:  $y'_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y'_k(x)$ , also

$$y''_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y''_k(x) + \sum_{k=1}^n C'_k(x)y'_k(x).$$

Deshalb setzen wir als zweite Bedingung

$$\boxed{\sum_{k=1}^n C'_k(x)y'_k(x) = 0.} \quad (B_2)$$



Daraus folgt:  $y_p''(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k''(x)$ . So fährt man fort und erhält schließlich:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k^{(n-2)} = 0,} \quad (B_{n-1})$$

also  $y_p^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k^{(n-1)}(x)$  und

$$y_p^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k^{(n)}(x).$$

Jetzt stellen wir noch die Bedingung

$$\boxed{\sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) = r(x).} \quad (B_n)$$

Wenn wir Funktionen  $C_1, \dots, C_n$  finden können, die alle Bedingungen  $(B_1) - (B_n)$  erfüllen, dann ist jedenfalls

$$y_p^{(n)}(x) = r(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k^{(n)}(x)$$

und

$$y_p^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k^{(i)}(x) \text{ für } i = 1, \dots, n-1.$$

Weil die  $y_k$  Lösungen des homogenen Systems sind, folgt daraus:

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n a_i y_p^{(n-i)}(x) &= \\ &= r(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x) \cdot \left( y_k^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n a_i y_k^{(n-i)}(x) \right) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

Also ist  $y_p$  dann tatsächlich eine Lösung des inhomogenen Systems. Um zu sehen, ob wir die Bedingungen  $(B_1) - (B_n)$  erfüllen können, formulieren wir sie in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{pmatrix},$$

oder kürzer:

$$\mathcal{W}(y_1, \dots, y_n; x) \circ \vec{C}'(x) = r(x) \cdot \vec{e}_n.$$

Diese Gleichung kann man auflösen:

$$\vec{C}'(x) = r(x) \cdot \mathcal{W}(y_1, \dots, y_n; x)^{-1} \circ \vec{e}_n.$$

Wir setzen

$$\vec{z}(x) := \int_0^x r(t) \mathcal{W}(y_1, \dots, y_n; t)^{-1} \circ \vec{e}_1 dt.$$

Dann ist

$$\vec{C}(x) = \vec{C}(0) + \vec{z}(x),$$

also

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (y_1(x), \dots, y_n(x)) \circ \vec{C}(x) \\ &= (y_1(x), \dots, y_n(x)) \circ \vec{C}(0) + (y_1(x), \dots, y_n(x)) \circ \vec{z}(x). \end{aligned}$$

Da  $(y_1(x), \dots, y_n(x)) \circ \vec{C}(0) = C_1(0)y_1(x) + \dots + C_n(0)y_n(x)$  eine Lösung des homogenen Systems ist, reicht es, wenn wir als partikuläre Lösung des inhomogenen Systems den zweiten Summanden nehmen:

$$y_p(x) = \vec{y}(x) \bullet \vec{z}(x) = \vec{y}(x) \bullet \int_0^x r(t) \mathcal{W}(y_1, \dots, y_n; t)^{-1} \circ \vec{e}_1 dt.$$

Besonders einfach wird die Situation im Falle  $n = 2$ . Sind  $a, b, c, d$  und  $r$  irgendwelche Zahlen, sowie  $\Delta := ad - bc \neq 0$ , so ist

$$\begin{aligned} r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \circ \vec{e}_1 &= \frac{r}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{r}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenden wir das auf die Situation der zweireihigen Wronski-Matrix

$$\mathcal{W}(y_1, y_2; x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

an, so ist  $a = y_1$  und  $b = y_2$ , also

$$y_p(x) = y_1(x) \cdot \int_0^x \frac{-y_2(t)r(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \cdot \int_0^x \frac{y_1(t)r(t)}{W(t)} dt.$$

Die Integration kann statt bei 0 auch bei einer beliebigen anderen Zahl beginnen.

### Beispiel:

Wir betrachten die DGL  $y'' + y' - 2y = e^x$ .

Das charakteristische Polynom  $p(x) = x^2 + x - 2$  hat die beiden reellen Nullstellen  $x = 1$  und  $x = -2$ . Also erhalten wir als Fundamentalsystem für die homogene DGL:

$$y_1(x) = e^x \text{ und } y_2(x) = e^{-2x}.$$

Als nächstes berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}.$$

Dann ist

$$\int \frac{-y_2(t)r(t)}{W(t)} dt = \int \frac{-e^{-t}}{-3e^{-t}} dt = \int \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}x$$

und

$$\int \frac{y_1(t)r(t)}{W(t)} dt = \int \frac{e^{2t}}{-3e^{-t}} dt = -\frac{1}{3} \int e^{3t} dt = -\frac{1}{9}e^{3x}.$$

Also erhalten wir als partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x.$$

Die Methode der Variation der Konstanten führt zwar theoretisch immer zum Ziel, aber in der Praxis ist sie mühsam und oft schwer durchführbar. In gewissen Fällen kann man stattdessen die partikuläre Lösung durch einen *direkten Ansatz* finden:

**V.6.7 Satz.** Die DGL  $L[f] = r(x)e^{\lambda x}$  mit einem Polynom  $r(x)$  vom Grad  $s$  besitzt eine partikuläre Lösung  $y(x) = q(x)e^{\lambda x}$ , mit einem Polynom  $q(x)$ .

1. Ist  $\lambda$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p_L(x)$ , so hat auch  $q(x)$  den Grad  $s$ .
2. Ist  $\lambda$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $p_L(x)$ , so hat  $q(x)$  den Grad  $s + m$ .

BEWEIS: Es ist

$$(D - \lambda_k)[q(x)e^{\lambda x}] = (q'(x) + \lambda \cdot q(x) - \lambda_k \cdot q(x)) \cdot e^{\lambda x}.$$

Ist  $\lambda = \lambda_k$ , so wähle man  $q(x)$  so, daß  $q'(x) = r(x)$  ist. Der Grad von  $q$  muß dann  $s + 1$  betragen. Ist  $\lambda$  sogar eine  $m$ -fache Nullstelle, so iteriert man das Verfahren.

Ist  $\lambda \neq \lambda_k$ , so muß man  $q(x)$  so wählen, daß

$$q'(x) + (\lambda - \lambda_k) \cdot q(x) = r(x)$$

ist. Zur Abkürzung setzen wir  $\mu := \lambda - \lambda_k$ . Ist  $r(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i$ , so setzen wir  $q(x)$  mit unbestimmten Koeffizienten an:

$$q(x) = \sum_{i=0}^s \alpha_i x^i.$$

Damit  $q'(x) + \mu \cdot q(x) = r(x)$  ist, muß gelten:

$$\begin{aligned} (i+1)\alpha_{i+1} + \mu \cdot \alpha_i &= b_i \text{ für } i = 0, \dots, s-1 \\ \text{und} \quad \mu \cdot \alpha_s &= b_s. \end{aligned}$$

Das führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu & s \\ 0 & \cdots & & 0 & \mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{s-1} \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{s-1} \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Das System ist offensichtlich auflösbar.

Ist

$$L = (D - \lambda_1)^{m_1} \circ (D - \lambda_2)^{m_2} \circ \dots \circ (D - \lambda_k)^{m_k},$$

so wende man das gewonnene Ergebnis mehrfach an. □

### Beispiel:

Zur DGL  $y'' - y = (3 + 2x + x^2)e^x$  gehört das charakteristische Polynom  $p(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ . Dann ist

$$(D - 1)\left[\left(3x + x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)e^x\right] = (3 + 2x + x^2)e^x,$$

und wir müssen noch ein  $q(x)$  finden, so daß  $(D + 1)[q(x)e^x] = (3x + x^2 + \frac{1}{3}x^3)e^x$  ist. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 \\ 3 &= 2 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \\ 1 &= 2 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot \alpha_3 \\ \frac{1}{3} &= 2 \cdot \alpha_3 \end{aligned}$$

für die Koeffizienten von  $q$ :

$$q(x) = -\frac{5}{8} + \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Einsetzen zeigt, daß  $q(x) \cdot e^x$  tatsächlich die DGL löst:

Sei  $f(x) := q(x) \cdot e^x = \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x \\ \text{und } f''(x) &= f(x) + 2\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x + \left(\frac{1}{2} + x\right)e^x \\ &= f(x) + (3 + 2x + x^2)e^x. \end{aligned}$$

Eine andere Methode besteht darin,  $q(x)$  mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen und sofort in die DGL einzusetzen. Koeffizientenvergleich führt dann zum gewünschten Ergebnis.

**Bemerkung:** Hat die rechte Seite die Gestalt  $r(x)e^{\lambda x} \cos(\omega x)$  oder  $r(x)e^{\lambda x} \sin(\omega x)$ , so klappt es meist mit einem Ansatz der Form

$$y(x) = q_1(x)e^{\lambda x} \cos(\omega x) + q_2(x)e^{\lambda x} \sin(\omega x).$$