Kapitel IV

Reihenentwicklungen

§1 Komplexe Funktionen

Wir untersuchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl, so heißt

$$D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |\, z - z_0 \,| < \varepsilon\}$$

eine ε–*Umgebung* von z_0. Es handelt sich dabei um eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius ε. Die Punkte, die auf dem Rand der Scheibe liegen, also auf der eigentlichen Kreislinie, gehören nicht dazu!

Definition.

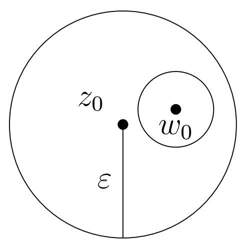
Sei $B \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge.

1. Ein Punkt $z_0 \in B$ heißt *innerer Punkt* von B, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß sogar noch $D_\varepsilon(z_0)$ ganz in B liegt.
2. Die Menge B heißt *offen*, falls jeder Punkt von B ein innerer Punkt von B ist.
3. Die Menge B heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{C} \setminus B$ offen ist.
4. Sei $B \subset \mathbb{C}$ beliebig. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *Randpunkt* von B, falls **jede** ε–Umgebung von z_0 sowohl Punkte von B als auch Punkte von $\mathbb{C} \setminus B$ enthält.

Beispiele :

1. Jede ε–Umgebung ist offen:

   Sei $w_0 \in D_\varepsilon(z_0)$, $d := |\, w_0 - z_0 \,|$. Dann ist $0 \le d < \varepsilon$. Wir wählen eine Zahl r mit
   $$0 < r < \varepsilon - d.$$
   Ist $z \in D_r(w_0)$, so ist

   $$\begin{aligned} |\, z - z_0 \,| &= |\,(z - w_0) + (w_0 - z_0)\,| \\ &\le |\, z - w_0 \,| + |\, w_0 - z_0 \,| \\ &< r + d \,<\, (\varepsilon - d) + d \,=\, \varepsilon. \end{aligned}$$

   Also liegt ganz $D_r(w_0)$ in $D_\varepsilon(z_0)$.

2. Ähnlich zeigt man, daß der vertikale Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ eine offene Menge ist.

3. Ganz $\mathbb{C}$ ist selbstverständlich offen.

4. Sind B_1, $B_2 \subset \mathbb{C}$ offen, so ist auch $B_1 \cup B_2$ offen:

   Ist $z_0 \in B_1 \cup B_2$, so liegt z_0 entweder in B_1 oder in B_2 oder in beiden Mengen gleichzeitig. Nach geeigneter Numerierung der Mengen können wir annehmen, daß z_0 etwa in B_1 liegt. Es gibt also eine ε–Umgebung von z_0, die noch in B_1 und damit erst recht in $B_1 \cup B_2$ liegt. Das heißt, daß z_0 innerer Punkt von $B_1 \cup B_2$ ist, und da z_0 beliebig war, ist $B_1 \cup B_2$ offen.

5. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + \mathbf{j}y_0$. Dann sind die Mengen

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) < x_0\}, \\ B_2 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > x_0\}, \\ B_3 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) < y_0\} \\ \text{und} \quad B_4 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > y_0\} \end{aligned}$$

   jeweils offen, und auch $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ ist offen. Also ist $\{z_0\} = \mathbb{C} \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)$ abgeschlossen!

6. Sind $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen, so beweist man wie eben, daß die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a \le \mathrm{Re}\,(z) \le b \text{ und } c \le \mathrm{Im}\,(z) \le d\}$$

   abgeschlossen ist. Hier gehört der Rand zu der Menge dazu!

IV.1.1 Satz. *Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.*

BEWEIS: 1) Zunächst sei $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, z_0 ein Randpunkt von A.

Angenommen, z_0 gehört nicht zu A. Dann liegt z_0 in der offenen Menge $U := \mathbb{C} \setminus A$, und es gibt eine ε–Umgebung von z_0, die noch ganz in U liegt, also A nicht trifft. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß z_0 ein Randpunkt ist.

2) Nun sei $A \subset \mathbb{C}$ eine Menge, die alle ihre Randpunkte enthält. Ist $z_0 \in U := \mathbb{C} \setminus A$, so ist z_0 kein Randpunkt von A. Es muß mindestens eine ε–Umgebung von z_0 geben, die A nicht trifft, also ganz in U liegt. Da man das bei jedem Punkt von U sagen kann, ist U offen und A abgeschlossen. □

Warnung! Die Menge $\mathbb{C}$ ist gleichzeitig offen und abgeschlossen (sie besitzt überhaupt keine Randpunkte), und andererseits gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind, z.B. die Vereinigung einer offenen und einer abgeschlossenen Kreisscheibe, etwa

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\, z - 1\,| < \frac{1}{2} \text{ oder } |\, z + 1\,| \le \frac{1}{2}\}.$$

Definition.

Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt ein *Gebiet*, falls gilt:

1. G ist offen.
2. Zu je zwei beliebigen Punkten $z_1, z_2 \in G$ gibt es einen stetigen Weg $\varphi : [0,1] \to G$ mit $\varphi(0) = z_1$ und $\varphi(1) = z_2$.

Eine Vereinigung von zwei disjunkten offenen Kreisscheiben ist zwar wieder offen, aber sie ist kein Gebiet, denn man kann nicht mit Hilfe eines stetigen Weges vom ersten in den zweiten Kreis gelangen, ohne die Kreise zu verlassen. Man nennt Gebiete auch *zusammenhängende* offene Mengen.

Definition.

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen *konvergiert* gegen die Zahl z_0, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \text{ s.d. für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } z_n \in D_\varepsilon(z_0).$$

(In Worten: In jeder ε–Umgebung von z_0 liegen fast alle Folgeglieder z_n.)

Man schreibt dann auch: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

IV.1.2 Satz. *Eine Folge $z_n = x_n + \mathbf{j}y_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann gegen $z_0 = x_0 + \mathbf{j}y_0$, wenn x_n gegen x_0 und y_n gegen y_0 konvergiert.*

Beweis:

$$\begin{aligned} z_n \to z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |\, z_0 - z_n \,| \to 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2 \to 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |\, x_0 - x_n \,| \to 0 \text{ und } |\, y_0 - y_n \,| \to 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_n \to x_0 \text{ und } y_n \to y_0. \end{aligned}$$

□

Definition.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine „komplexwertige" Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt.

f heißt *stetig* in z_0, falls gilt:

Für jede Folge $z_n \in G$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Bemerkung: Ist $f = g + \mathbf{j}h$ die Zerlegung von f in Real– und Imaginärteil, so gilt:

Ist f stetig in z_0, so sind auch g und h stetig in z_0, und auch $|\, f \,| := \sqrt{g^2 + h^2}$ ist stetig in z_0.

Beispiele :

1. Konstante Funktionen $f(z) \equiv c$ sind überall stetig.
2. Die Funktion $f(z) \equiv z$ ist überall stetig.
3. Wie im Reellen zeigt man auch im Komplexen:
   (a) Summen und Produkte von stetigen Funktionen sind wieder stetig.
   (b) Ist f in z_0 stetig und $f(z) \neq 0$ für $z \in G$, z nahe bei z_0, so ist auch $\dfrac{1}{f}$ in der Nähe von z_0 definiert und in z_0 stetig.
4. Aus den obigen Bemerkungen folgt:

   Komplexe Polynome $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ sind überall stetig. Rationale Funktionen, also Quotienten von Polynomen $R(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, sind überall dort definiert und stetig, wo $q(z) \neq 0$ ist.

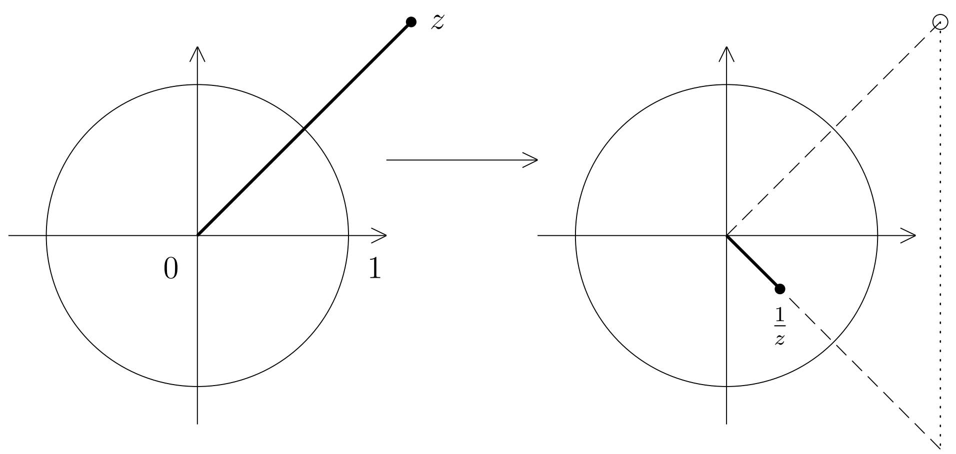
Wir wollen speziell die Funktion $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ untersuchen. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z}.$$

Schreibt man z in der Form $z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}$, mit reellem $r > 0$ und $t \in [0, 2\pi)$, so ist $z\bar{z} = r^2$ und $\bar{z} = r \cdot e^{-\mathbf{j}t}$. Also gilt:

$$\text{Ist } z = r \cdot e^{\mathbf{j}t}, \text{ so ist } \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-\mathbf{j}t}.$$

Der Übergang $r \mapsto \dfrac{1}{r}$ bedeutet eine Spiegelung am Einheitskreis, der Übergang $e^{\mathbf{j}t} \mapsto e^{-\mathbf{j}t}$ eine Spiegelung an der x–Achse.



Man nennt die Abbildung $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ auch die *Inversion*.

Eine besonders wichtige Rolle spielen die sogenannten *(gebrochen) linearen Transformationen*

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Warum sie „linear“ heißen, werden wir weiter unten sehen. Sie sind für alle $z \neq -\dfrac{d}{c}$ definiert und stetig.

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: $c = 0$.
Setzt man $A := \dfrac{a}{d}$ und $B := \dfrac{b}{d}$, so erhält man die *affin-lineare* Funktion

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

Ist $A = \alpha + \mathbf{j}\beta$, so entspricht die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ der linearen Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

der Ebene. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene. **2. Fall:** $c \neq 0$.
Setzt man diesmal $A := \dfrac{bc - ad}{c}$ und $B := \dfrac{a}{c}$, so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz+d} + B &= \frac{(a(cz+d) + (bc - ad)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{az+b}{cz+d} \quad = \quad T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen. Diese Information wird sich als sehr nützlich erweisen.

IV.1.3 Hilfssatz. *Jede Gerade und jeder Kreis kann durch eine Menge der Gestalt*

$$M = \{\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$ beschrieben werden.

Ist $\alpha = 0$, so liegt eine Gerade vor, andernfalls ein Kreis.

BEWEIS:
1) Ist $\alpha = 0$, so muß automatisch $c \neq 0$ sein, und die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

ist eine Gerade. Umgekehrt kann jede Gerade so geschrieben werden.

2) Ist $\alpha \neq 0$, so kann man dadurch dividieren, also o.B.d.A. annehmen, daß $\alpha = 1$ ist. Dann ist $r := \sqrt{c\bar{c} - \delta}$ eine positive reelle Zahl, und der Kreis um $u := -\bar{c}$ mit Radius r ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |\, z - u \,| = r \quad &\iff \quad (z-u)(\bar{z} - \bar{u}) = r^2 \\ &\iff \quad z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + (u\bar{u} - r^2) = 0 \\ &\iff \quad z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0. \end{aligned}$$

$\square$

IV.1.4 Satz. *Eine lineare Transformation* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *mit* $ac - bd \neq 0$ *bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.*

Zum Beweis betrachten wir eine Menge der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$. Wir müssen zeigen, daß $T(M)$ wieder eine solche Gestalt hat:

Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Sei $w = Az + B$. Dann gilt:

$$z = Cw + D, \text{ mit } C := \frac{1}{A} \text{ und } D := -\frac{B}{A}.$$

Liegt $z \in M$, dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(Cw+D)(\overline{Cw+D}) + c(Cw+D) + \bar{c}(\overline{Cw+D}) + \delta \\ &= (\alpha C\bar{D})w\bar{w} + (\alpha C\bar{D} + cC)w + (\alpha\bar{C}D + \bar{c}\bar{C})\bar{w} \\ &\quad + (\alpha D\bar{D} + cD + \bar{c}\bar{D} + \delta), \end{aligned}$$

Also liegt w wieder auf einer Menge vom gewünschten Typ.

2) Nun sei $w = \dfrac{1}{z}$. Dann ist auch $z = \dfrac{1}{w}$, und es gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muß, können wir mit $w\bar{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Auch hier ist das Bild von M wieder eine Menge vom gewünschten Typ. □

Wir wollen nun ganz genau untersuchen, wie das Bild der reellen Achse aussieht:

Sei $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, mit $ad - bc \neq 0$.

1.Fall: Sei $c = 0$, also $T(z) = Az + B$.
Als Bild der reellen Achse erhält man die Gerade $\{z = A \cdot t + B \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2.Fall: Sei $c \neq 0$ und $d = 0$. Dann ist

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{z}.$$

Da die Inversion die reelle Achse (ohne den Nullpunkt) wieder auf sich abbildet, erhalten wir – bis auf einen Punkt – als Bild der reellen Achse die Gerade $\{z = \frac{b}{c} \cdot t + \frac{a}{c} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3.Fall: Sei $c \neq 0$ und $d = rc$ mit einer reellen Zahl $r \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{a}{c} + \frac{b-ar}{c(z+r)} \\ \text{und} \quad T(z) &= A \cdot \frac{1}{z+r} + B, \text{ mit } A := \frac{b-ar}{c} \text{ und } B := \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Das Bild von $\mathbb{R}$ ist die Gerade $\{z = A \cdot t + B \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4.Fall: c und d seien über $\mathbb{R}$ linear unabhängig. Wir zeigen, daß das genau dann gilt, wenn $c\overline{d} - \overline{c}d \neq 0$ ist:

a) Ist $d = rc$ mit $r \in \mathbb{R}$, so ist $c\overline{d} - \overline{c}d = r(c\overline{c} - \overline{c}c) = 0$.

b) Ist umgekehrt $c\overline{d} - \overline{c}d = 0$, so ist auch

$$c(d + \overline{d}) - d(c + \overline{c}) = 0,$$

also $c \cdot \operatorname{Re}(d) = d \cdot \operatorname{Re}(c)$. Ist einer der Realteile $\neq 0$, so sind c und d offensichtlich über $\mathbb{R}$ linear abhängig. Ist dagegen $c = \mathbf{j}\gamma$ und $d = \mathbf{j}\delta$ mit reellen Faktoren $\gamma, \delta \neq 0$, so sind c und d ebenfalls über $\mathbb{R}$ linear abhängig.

Es sei also $c = \alpha + \mathbf{j}\gamma$ und $d = \beta + \mathbf{j}\delta$, mit $c\overline{d} - \overline{c}d = 2\mathbf{j}(\gamma\beta - \alpha\delta) \neq 0$. Die Transformation T zerlegen wir in der üblichen Form

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

$g(z) := cz + d$ bildet $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}$ auf die Gerade

$$L := \{w \in \mathbb{C} \mid \overline{c}w - c\overline{w} + (c\overline{d} - \overline{c}d) = 0\}$$

ab, denn es ist ja $z = \dfrac{1}{c}(w - d)$.
In Normalform hat L die Gestalt

$$L = \{w \in \mathbb{C} \mid ew + \overline{e}\overline{w} + \varrho = 0\},$$

mit $e := -\mathbf{j}\overline{c}$ und $\varrho := -\mathbf{j}(c\overline{d} - \overline{c}d) = 2(\gamma\beta - \alpha\delta) \neq 0$.

Als nächstes erfolgt die Inversion $h(w) := \dfrac{1}{w}$. Es ist

$$h(L) = \{v \in \mathbb{C} \mid \frac{e}{v} + \frac{\overline{e}}{\overline{v}} + \varrho = 0\} = \{v \in \mathbb{C} \mid \varrho v\overline{v} + \overline{e}v + e\overline{v} = 0\},$$

und das ist (wegen $\varrho \neq 0$) ein Kreis. Wir teilen noch durch ϱ, und dann können wir ablesen:

$h(L)$ ist ein Kreis um $u := -\dfrac{e}{\varrho} = \dfrac{\mathbf{j}\overline{c}}{\varrho} = \dfrac{-\overline{c}}{c\overline{d} - \overline{c}d}$ mit Radius $r := \sqrt{\dfrac{e\overline{e}}{\varrho^2}} = \dfrac{1}{\varrho}\sqrt{c\overline{c}}$.

Da $z_n := n \in \mathbb{N}$ durch $h \circ g$ auf $\dfrac{1}{cn + d}$ abgebildet wird, geht der Kreis $h(L)$ durch den Nullpunkt!

Schließlich wird noch die affin-lineare Funktion $f(v) := \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} \cdot v$ auf $h(L)$ angewandt. Das ergibt wieder einen Kreis, mit Mittelpunkt

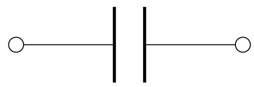
$$\begin{aligned} u^* &:= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot u \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{a(c\bar{d} - \bar{c}d) - \bar{c}(bc-ad)}{c\bar{d} - \bar{c}d} \\ &= \frac{a\bar{d} - b\bar{c}}{c\bar{d} - \bar{c}d} \end{aligned}$$

und dem Radius

$$\begin{aligned} r^* &:= |\, f(0) - u \,| \quad = \quad |\, \frac{a}{c} - \frac{a\bar{d} - b\bar{c}}{c\bar{d} - \bar{c}d} \,| \\ &= |\, \frac{a(c\bar{d} - \bar{c}d) - c(a\bar{d} - b\bar{c})}{c(c\bar{d} - \bar{c}d)} \,| \\ &= |\, \frac{\bar{c}}{c} \cdot \frac{bc - ad}{c\bar{d} - \bar{c}d} \,| \\ &= |\, \frac{ad - bc}{c\bar{d} - \bar{c}d} \,|. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun einige Anwendungen der komplexen Rechnung in der Elektrotechnik:

In Ergänzung zu den Betrachtungen in §6 im 1. Kapitel berechnen wir zunächst einige Widerstandsoperatoren im Wechselstromkreis.



1. **Kondensator mit Kapazität** C :

   Die Ladung q und die Spannung u sind zeitabhängig, zwischen ihnen besteht die Beziehung

   $$q = C \cdot u \,.$$

   Die Stromstärke i ist gegeben durch

   $$i = \dot{q} = C \cdot \dot{u}.$$

   Nun schreiben wir u und i als harmonische Schwingungen:

   $$\begin{aligned} u(t) &= \widehat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \\ \text{und} \quad i(t) &= \widehat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i). \end{aligned}$$

   Unter Verwendung der komplexen Zeiger $\underline{U} := \widehat{u} \cdot e^{\mathbf{j}\varphi_u}$ und $\underline{I} := \widehat{\imath} \cdot e^{\mathbf{j}\varphi_i}$ erhalten wir Spannung und Stromstärke in komplexer Schreibweise:

   $$\underline{u}(t) := \underline{U} \cdot e^{\mathbf{j}\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{i}(t) := \underline{I} \cdot e^{\mathbf{j}\omega t}$$

   Ist $f(t) = g(t) + \mathbf{j}h(t)$ eine komplexwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, so definiert man $f'(t) := g'(t) + \mathbf{j}h'(t)$. Speziell gilt:

(a) Ist $f(t) = c \cdot t$ für ein $c \in \mathbb{C}$, so ist $f'(t) \equiv c$.

(b) Es ist $(f_1 + f_2)'(t) = (f_1)'(t) + (f_2)'(t)$.

(c) Ist $f(t) = e^{\mathbf{j}\omega t}$, so ist $f'(t) = \mathbf{j}\omega \cdot e^{\mathbf{j}\omega t}$.

Beweis: a) Ist $c = \alpha + \mathbf{j}\beta$, so ist

$$f(t) = \alpha t + \mathbf{j}\beta t, \text{ also } f'(t) = \alpha + \mathbf{j}\beta.$$

b) ist trivial.

c) Ist $f(t) = \cos(\omega t) + \mathbf{j}\sin(\omega t)$, so ist

$$f'(t) = -\omega\sin(\omega t) + \mathbf{j}\omega\cos(\omega t) = \mathbf{j}\omega(\cos(\omega t) + \mathbf{j}\sin(\omega t)). \qquad \square$$

Da $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist, gilt die Beziehung $i = C \cdot \dot{u}$ auch für die komplexen Größen:

$$\underline{i}(t) = C \cdot \underline{u}'(t).$$

Nach den gerade erwähnten Ableitungsregeln bedeutet das:

$$\boxed{\underline{I} = C \cdot \mathbf{j}\omega \cdot \underline{U}.}$$

Für den Widerstandsoperator $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ folgt dann:

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{C\mathbf{j}\omega} = -\mathbf{j}\,\frac{1}{\omega C}\,.}$$

Das ist eine rein imaginäre Größe. Aus der Darstellung $\underline{Z} = \dfrac{\widehat{u}}{\widehat{\imath}}e^{\mathbf{j}\varphi}$ ergibt sich:

$$e^{\mathbf{j}\varphi} = -\mathbf{j}, \text{ also } \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Das bedeutet, daß $\varphi_u = \varphi_i - \dfrac{\pi}{2}$ ist, der Spannungszeiger läuft dem Stromzeiger in der Phase um 90° hinterher.

2. **Induktivität** L :

Hier gilt das Induktionsgesetz: $\quad u = L \cdot \dfrac{di}{dt}\,,$
oder in komplexer Schreibweise:

$$\underline{u}(t) = L \cdot \underline{i}'(t).$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \cdot e^{\mathbf{j}\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{i}(t) = \underline{I} \cdot e^{\mathbf{j}\omega t}$$

ergibt das

$$\boxed{\underline{U} = L \cdot \mathbf{j}\omega \cdot \underline{I}.}$$

So erhält man den Widerstandsoperator

$$\boxed{\underline{Z} = L \cdot \mathbf{j}\omega\,.}$$

Hier ist die Phasendifferenz $\varphi = \frac{\pi}{2}$, der Spannungszeiger läuft dem Stromzeiger in der Phase um 90° voraus.

Abhängigkeiten wie $t \mapsto \underline{u}(t)$ oder $t \mapsto \underline{i}(t)$ führen zu parametrisierten Kurven in der komplexen Ebene. In der Elektrotechnik bezeichnet man solche Kurven als *Ortskurven.* Dabei braucht der Parameter nicht unbedingt die Zeit zu sein! Manchmal bezeichnet man die Abhängigkeit einer komplexen elektrischen Größe von einem reellen Parameter auch als *Netzwerkfunktion.*

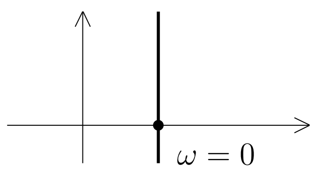
Schaltet man etwa einen Ohmschen Widerstand und eine Induktivität in Reihe, so addieren sich nach den Kirchhoffschen Regeln die Widerstandsoperatoren:

Man kann in diesem Fall den Gesamtwiderstand

$$\underline{Z} = \underline{Z}(\omega) = R + \mathbf{j}\omega L$$

als Funktion der Frequenz ω auffassen.

Die Spur der Ortskurve sieht folgendermaßen aus:



In der Gleichstromlehre bezeichnet man den Kehrwert des (Ohmschen) Widerstandes als *Leitwert.* Analog nennt man

$$\underline{Y} := \frac{1}{\underline{Z}}$$

den *Leitwertoperator.* Man schreibt $\underline{Y} = G + \mathbf{j}B$ und nennt G den *Wirkleitwert* und B den *Blindleitwert.*

Beispiele:

1. Bei einem Ohmschen Widerstand R ist auch $\underline{Z} = R$, und daher ergibt sich $\underline{Y} = \dfrac{1}{R}$.
2. Bei einer Kapazität C ist $\underline{Z} = -\mathbf{j}\dfrac{1}{\omega C}$ und daher $\underline{Y} = \mathbf{j}\omega C$.
3. Bei einer Induktivität L ist $\underline{Z} = L \cdot \mathbf{j}\omega$ und $\underline{Y} = -\mathbf{j}\dfrac{1}{\omega L}$.

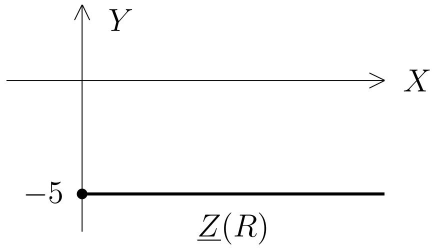
Ist der Widerstandsoperator eines Wechselstromkreises als Ortskurve gegeben, so können wir nun auch die Ortskurve des Leitwertes bestimmen.

Beispiele:

1. Wir betrachten die Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes und einer Kapazität:

Hier sei $R \geq 0$ variabel und $\dfrac{1}{\omega C} = 5$ konstant. Dann sieht die Ortskurve von

$$\underline{Z} = \underline{Z}(R) = R - \mathbf{j}\frac{1}{\omega C} = R - 5\mathbf{j} \qquad \text{folgendermaßen aus:}$$



Der Leitwert ist $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{R - 5\mathbf{j}}$. Wir berechnen einige spezielle Werte:

R	0	5	∞
$\underline{Y} = \underline{Y}(R)$	$\frac{1}{5}\mathbf{j}$	$\frac{1}{10}(1+\mathbf{j})$	0

(Es ist $\underline{Z}(5) = 5(1 - \mathbf{j})$, also $\underline{Y}(5) = \frac{1}{50} \cdot 5(1 + \mathbf{j}) = \frac{1}{10}(1 + \mathbf{j})$.)

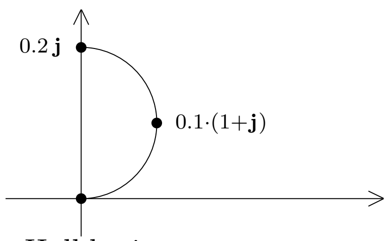
Das Bild der Geraden $Y = -5$ unter der Inversion muß also ein Kreis sein (es ist ein Kreis oder eine Gerade, und es enthält drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen). Wir können diesen Kreis genau bestimmen, indem wir das Bild der reellen Achse unter der linearen Transformation

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{z - 5\mathbf{j}}$$

ermitteln. Es ist $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ und $d = -5\mathbf{j}$, also $c\bar{d} = 5\mathbf{j}$ und $\varrho = -\mathbf{j}(c\bar{d} - \bar{c}d) = 10$. Der Bildkreis hat also

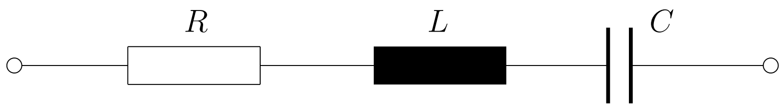
$$\begin{array}{lcl} \text{den Mittelpunkt} \quad u^* & = & \dfrac{a\bar{d} - b\bar{c}}{c\bar{d} - \bar{c}d} = \dfrac{-1}{\mathbf{j}\varrho} = \dfrac{1}{10}\mathbf{j} \\[2ex] \text{und den Radius} \quad r^* & = & \left|\dfrac{ad - bc}{c\bar{d} - \bar{c}d}\right| = \dfrac{1}{10}\,. \end{array}$$

Das ergibt folgende Ortskurve $\underline{Y} = \underline{Y}(R)$:



Da nur der Fall $R \geq 0$ interessiert, ist die Ortskurve ein Halbkreis.

2. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Reihenschaltung eines Widerstandes R, einer Induktivität L und einer Kapazität C:



Sind R, L und C fest, so kann man $\underline{Z}$ als Funktion von ω auffassen:

$$\underline{Z}(\omega) = R + \mathbf{j}\omega L - \mathbf{j}\frac{1}{\omega C} = R + \mathbf{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})\,.$$

Ist $k := \dfrac{1}{\omega C}$ konstant und $X := \omega L$, so ist $\underline{Z} = \underline{Z}(X) = R + \mathbf{j}(X - k)$, und die Ortskurve von $\underline{Z}(X)$ ist die vertikale Gerade

$$\{R + \mathbf{j}(X - k) \mid X \in \mathbb{R}\}.$$

Wir wollen die Ortskurve von

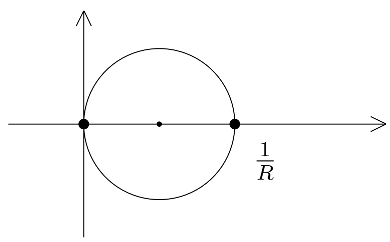
$$\underline{Y}(X) = \frac{1}{R + \mathbf{j}(X - k)} = \frac{1}{\mathbf{j}X + (R - \mathbf{j}k)}$$

bestimmen. Wieder geschieht das mit Hilfe der linearen Transformationen:

Es ist $a = 0$, $b = 1$, $c = \mathbf{j}$ und $d = R - \mathbf{j}k$. Also ist $c\bar{d} - \bar{c}d = 2\mathbf{j}R$ und $\varrho = 2R$. Das ergibt als Bild einen Kreis mit

$$\text{Mittelpunkt} \quad u^* = \frac{\mathbf{j}}{2\mathbf{j}R} = \frac{1}{2R}$$

$$\text{und Radius} \quad r^* = \left|\frac{-\mathbf{j}}{2\mathbf{j}R}\right| = \frac{1}{2R}\,.$$



Für die mathematisch Interessierten soll zum Schluß noch gezeigt werden, wie die linearen Transformationen mit echten linearen Abbildungen zusammenhängen:

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ mit $\det(A) \neq 0$ kennen wir einerseits die lineare Transformation

$$T_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

und andererseits die lineare Abbildung $F_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit

$$F_A : \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + bw \\ cz + dw \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$F_A(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = (cz + d) \cdot \begin{pmatrix} T_A(z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $B := \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix}$ eine weitere Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_A \circ F_B \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} &= F_A((uz + v) \cdot \begin{pmatrix} T_B(z) \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= (uz + v) \cdot F_A(\begin{pmatrix} T_B(z) \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= (uz + v) \cdot (c \cdot T_B(z) + d) \cdot \begin{pmatrix} T_A(T_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (uz + v)(c \cdot \frac{rz + s}{uz + v} + d) \cdot \begin{pmatrix} T_A(T_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (c(rz + s) + d(uz + v)) \cdot \begin{pmatrix} T_A(T_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$A \circ B = \begin{pmatrix} ar + bu & as + bv \\ cr + du & cs + dv \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} F_A \cdot F_B \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} &= F_{A \circ B} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ((cr + du)z + (cs + dv)) \cdot \begin{pmatrix} T_{A \circ B}(z) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (c(rz + s) + d(uz + v)) \cdot \begin{pmatrix} T_{A \circ B}(z) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{T_A \circ T_B(z) = T_{A \circ B}(z)\,.}$$

Außerdem ist

$$\boxed{T_{\mathbf{1}}(z) = z} \quad \text{und daher} \quad \boxed{(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}\,.}$$

§2 Reihen von Zahlen

Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen. Mit

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$$

bezeichnet man die *N-te Partialsumme* der a_n. Die Folge (S_N) der Partialsummen nennt man eine *unendliche Reihe* und bezeichnet sie mit

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.}$$

Die Reihe heißt *konvergent* (bzw. *divergent*), falls die Folge (S_N) konvergent (bzw. divergent) ist. Der Grenzwert wird gegebenenfalls auch mit dem Reihen–Symbol bezeichnet. Hier findet also der gleiche Notationsmißbrauch wie bei den uneigentlichen Integralen statt.

Einige **Beispiele** kennen wir schon:

1. Ist $0 < q < 1$, so konvergiert die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

2. Die *Eulersche Zahl* kann durch eine Reihe dargestellt werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Aus den Regeln für die Konvergenz von Folgen ergeben sich analoge Regeln für Reihen:

1. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegen a bzw. b, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$, und zwar gegen $a + b$.

2. Ist c eine feste Zahl, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot a$.

Ein erstes notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe ist schnell gefunden:

IV.2.1 Satz. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge (also eine gegen 0 konvergente Folge) .*

Beweis: Die Folgen S_N und $T_N := S_{N-1}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert, eine Zahl a. Aber dann konvergiert $a_N := S_N - T_N$ gegen $a - a = 0$. □

Daß dieses Kriterium nicht hinreicht, zeigt das Beispiel der „harmonischen Reihe“:

Beispiel:

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$? Die Anschauung hilft hier nicht viel weiter.

Es ist aber leicht, die Partialsummen nach unten abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^N} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^N} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \qquad (1 + N \text{ Summanden}) \\
&= 1 + \frac{N}{2} \quad \to \quad +\infty\,.
\end{aligned}$$

Also ist die Reihe divergent!

In einem besonderen Spezialfall kommt man fast mit dem notwendigen Kriterium aus:

IV.2.2 Leibniz-Kriterium. *(a_n) sei eine* **monoton fallende** *Nullfolge reeller Zahlen.*

Dann ist die „alternierende Reihe“ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.

Beweis: Wir betrachten die Folgen $u_N := S_{2N-1}$ und $v_N := S_{2N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
u_{N+1} &= S_{2N+1} \\
&= S_{2N-1} + a_{2N} - a_{2N+1} \\
&\geq S_{2N-1} \quad = \quad u_N\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{N+1} &= S_{2N+2} \\
&= S_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2} \\
&\leq S_{2N} \quad = \quad v_N\,.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$v_N = S_{2N} = S_{2N-1} + a_{2N} \geq u_N,$$

und $v_N - u_N = a_{2N}$ konvergiert gegen Null.

Also ist $I_N := [u_N, v_N]$ eine Intervallschachtelung, die gegen einen Grenzwert konvergieren muß. $\square$

Beispiel:

Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert! Über den Grenzwert können wir allerdings im Augenblick noch nichts aussagen.

Es besteht eine große Ähnlichkeit zwischen der Theorie der Reihen und der Theorie der uneigentlichen Integrale. Insbesondere spielt auch bei den Reihen das Cauchy-Kriterium eine wichtige Rolle:

IV.2.3 Cauchy-Kriterium. *Die Reihe (reeller oder komplexer Zahlen)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0, \text{ so daß } \forall\, N \geq N_0 \text{ gilt: } \quad \left|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\right| < \varepsilon.$$

Beweis: Da $\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n = S_N - S_{N_0}$ ist, folgt das Cauchy-Kriterium für Reihen unmittelbar aus dem für Folgen (vgl. Kap. III, §5). □

Der Vorteil des Kriteriums besteht darin, daß man es mit **endlichen** Summen zu tun hat!

Definition.

Eine Reihe (reeller oder komplexer Zahlen) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n\,|$ konvergiert.

Auch dieser Begriff ist analog zur absoluten Konvergenz uneigentlicher Integrale gebildet, und es gilt entsprechend:

IV.2.4 Satz.

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Zum Beweis verwendet man das Cauchy–Kriterium. Es ist

$$\left|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=N_0+1}^{N} |\, a_n\,|\,.$$

Konvergiert die Reihe der Absolutbeträge, so wird die rechte Seite bei großem N_0 beliebig klein, und das gilt dann erst recht für die linke Seite. □

Besonders häufig wird das folgende Vergleichskriterium benutzt:

IV.2.5 Majoranten–Kriterium.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen, und ist* (c_n) *eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, so daß* $|\, c_n\,| \leq a_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut!*

Auch hier wird der *Beweis* mit Hilfe des Cauchy–Kriteriums geführt.

Wenn nun eine Reihe nicht zufällig das Leibniz–Kriterium erfüllt, wird man i.a. versuchen, die Konvergenz mit Hilfe des Majoranten–Kriteriums auf die Konvergenz einer Vergleichsreihe mit positiven Gliedern zurückzuführen. Für letztere gibt es zahlreiche Untersuchungsmethoden, von denen wir hier nur die populärste betrachten können:

IV.2.6 Quotienten–Kriterium. *Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen $\neq 0$. Außerdem gebe es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, so daß*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \textit{für fast alle } n \textit{ gilt.}$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

BEWEIS: „Für fast alle“ bedeutet:

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}, \text{ so daß für } n \geq N_0 \text{ gilt:} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1.$$

Dann ist

$$|\,a_{N_0+k}\,| \leq q \cdot |\,a_{N_0+k-1}\,| \leq \ \ldots, \leq q^k \cdot |\,a_{N_0}\,|\,.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot |\,a_{N_0}\,|$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{N_0+n}$. Die erstere konvergiert, es handelt sich ja um eine geometrische Reihe. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann die zweite Reihe absolut, und damit auch die Ausgangsreihe, die lediglich ein paar Anfangsterme mehr besitzt. □

Bemerkung: In der Praxis geht man meist folgendermaßen vor:

Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Das ist aus folgendem Grund richtig: Wenn die Quotienten $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gegen ein $q^* < 1$ konvergieren, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q^* + \varepsilon < 1 \text{ für } n \geq n_0.$$

Setzt man nun $q := q^* + \varepsilon$, so ist das Quotientenkriterium mit diesem q erfüllt.

Beispiele:

1. Bei der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist

$$a_n = \frac{1}{n}, \text{ also } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1},$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen 1. Er bleibt also nicht unterhalb einer festen Schranke $q < 1$, und man kann das Quotientenkriterium nicht anwenden. Kein Wunder, die Reihe ist ja divergent!

2. Ist sogar $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so bilden die Glieder a_n keine Nullfolge, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Bei der harmonischen Reihe kann man die Divergenz aber nicht auf diesem Wege ermitteln.

3. Betrachten wir die (schon bekannte) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Hier ist $a_n = \frac{1}{n!}$, und

$$| \frac{a_{n+1}}{a_n} | = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

konvergiert gegen Null. Insbesondere bleibt der Quotient irgendwann unter jeder vorgegebenen Schranke q mit $0 < q < 1$. Also konvergiert die Reihe! Das wußten wir schon, aber der vorliegende Beweis ist erheblich einfacher als der im 1. Kapitel angegebene.

4. Wie steht es mit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Der Quotient

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

konvergiert gegen 1, also sagt das Quotientenkriterium nichts aus – weder im positiven noch im negativen Sinne. Die Situation ist hier aber anders als bei der harmonischen Reihe. Man kann nämlich abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} &\leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1}) - (\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{N} \leq 2. \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Über den Grenzwert können wir leider noch nichts aussagen.

5. Bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ hilft das Quotientenkriterium: Für $n \geq 3$ ist

$$\begin{aligned} | \frac{a_{n+1}}{a_n} | &= \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{8}{9} < 1. \end{aligned}$$

Also ist die Reihe konvergent.

Absolut konvergente Reihen verhalten sich sehr gutartig, die anderen Reihen hingegen ausgesprochen bösartig. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis zitieren:

IV.2.7 Umordnungssatz.

1. *Ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ *absolut konvergent, so konvergiert jede Umordnung der Reihe gegen den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe.*

2. *Ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ nicht *absolut konvergent, so gibt es zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *eine Umordnung der Reihe, die gegen* x *konvergiert.*

Probleme bereitet oft das Produkt von Reihen:

IV.2.8 Satz. *Die Reihen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien absolut konvergent und im gewöhnlichen Sinne jeweils gegen* a *bzw.* b *konvergent.*

Für $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $c_n := \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. *Dann ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent und im gewöhnlichen Sinne konvergent gegen* $a \cdot b$.

Der BEWEIS ist etwas technisch:

Nach Voraussetzung konvergiert $A_N := \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ gegen a und $B_N := \sum\limits_{n=0}^{N} b_n$ gegen b. Wir setzen noch $C_N := \sum\limits_{n=0}^{N} c_n$ und $a^* := \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\, a_n \,|$. Hier nutzen wir die absolute Konvergenz aus.

Setzen wir noch $\beta_N := B_N - b$, so ist $B_N = b + \beta_N$, und es gilt:

$$\begin{aligned} C_N &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_N + \cdots + a_N b_0) \\ &= a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \cdots + a_N B_0 \\ &= a_0 (b + \beta_N) + \cdots + a_N (b + \beta_0) \\ &= A_N \cdot b + (a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0). \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß (C_N) gegen $a \cdot b$ konvergiert. Das ist offensichtlich der Fall, wenn

$$\gamma_N := a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0$$

gegen Null konvergiert. Letzteres können wir tatsächlich beweisen:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen ein δ mit $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2a^*}$. Es gibt dann ein N_0, so daß $|\, \beta_N \,| \le \delta$ für $N \ge N_0$ ist (denn $\beta_N = B_N - b$ konvergiert ja gegen 0). Dieses N_0 halten wir fest. Außerdem wählen wir ein $C > 0$, so daß $|\, \beta_N \,| \le C$ für alle N ist. Dann gilt für $N \ge N_0$:

$$\begin{aligned} |\, \gamma_N \,| &\le |\, \beta_0 a_N + \cdots + \beta_{N_0} a_{N-N_0} \,| + |\, \beta_{N_0+1} a_{N-N_0-1} + \cdots + \beta_N a_0 \,| \\ &\le C \cdot (|\, a_N \,| + \cdots + |\, a_{N-N_0} \,|) + \delta \cdot a^* \\ &< C \cdot (|\, a_N \,| + \cdots + |\, a_{N-N_0} \,|) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Der linke Summand wird bei festem N_0 und wachsendem N beliebig klein (Cauchy-Kriterium für die absolute Konvergenz der Reihe über die a_n). Also ist $\lvert \gamma_N \rvert$ bei hinreichend großem N kleiner als ε. Das war zu zeigen.

Für die absolute Konvergenz der Produktreihe benutzt man die Tatsache, daß

$$\sum_{n=0}^{N} \lvert c_n \rvert \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} \lvert a_i \rvert \cdot \lvert b_j \rvert \leq \left(\sum_{i=0}^{N} \lvert a_i \rvert \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} \lvert b_j \rvert \right)$$

ist. Die rechte Seite ist durch das Produkt der absoluten Reihen beschränkt. □

Zum Schluß ein Überblick zur Untersuchung von Reihen:

Es sei eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegeben.

$\swarrow$		
Ist a_n Nullfolge?	$\xrightarrow{\text{nein}}$	Die Reihe divergiert!
ja $\downarrow$		
Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $\lvert q \rvert < 1$?	$\xrightarrow{\text{ja}}$	Reihe konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$.
nein $\downarrow$		
Reihe alternierend?	$\xrightarrow{\text{ja}}$	a_n monoton fallend?
$\downarrow$		$\downarrow$ ja
nein $\downarrow$	nein $\swarrow$	konvergent nach Leibniz
$\downarrow$		
Quotientenkriterium erfüllt?	$\xrightarrow{\text{ja}}$	Konvergenz!
nein $\downarrow$		
$\exists$ konvergente Majorante?	$\xrightarrow{\text{weiß nicht}}$	Schwieriger Fall. Mathematiker fragen!
ja $\downarrow$		
Konvergenz gesichert!		
$\downarrow$		
Im Falle von Konvergenz:	Grenzwert suchen:	1. Kopf? 2. Skript? 3. Bronstein? 4. Experten fragen!

§3 Folgen und Reihen von Funktionen

Es sei I entweder ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Im zweiten Fall beschränken wir uns darauf, daß I entweder ein Gebiet (und damit offen) oder ein Gebiet mit all seinen Randpunkten (und damit abgeschlossen) ist. Weiter sei (f_n) eine Folge von (reell– oder komplexwertigen) Funktionen auf I.

Definition.

Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert auf I punktweise* gegen die Funktion f, falls gilt:

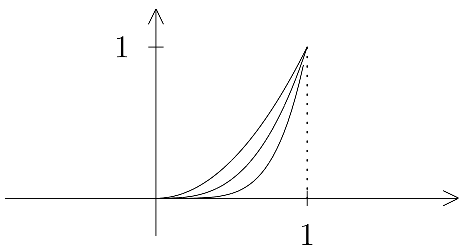
$$\forall\, x \in I \;:\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Das Konvergenzverhalten wird also für jeden einzelnen Punkt $x \in I$ gesondert behandelt. Das globale Verhalten der beteiligten Funktionen spielt dabei keine Rolle.

Beispiel:

Sei $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ und $f_n : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^n$. Dann konvergiert diese Funktionenfolge punktweise gegen die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1\,, \\ 1 & \text{für } x = 1\,. \end{cases}$$



Obwohl alle Funktionen f_n stetig sind, ist die Grenzfunktion f nicht stetig. Das ist ein Verhalten, das nicht den Erwartungen entspricht, und auch andere wünschenswerte Eigenschaften sind nicht gegeben. So ist z.B. im allgemeinen bei punktweiser Konvergenz

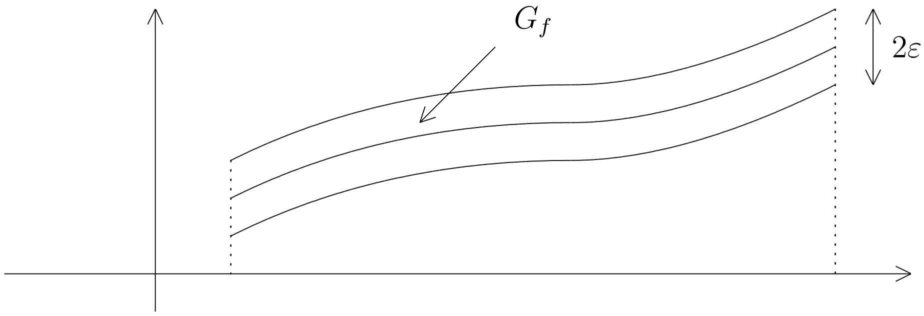
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Wir brauchen also einen besseren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen!

Erinnern wir uns an die Konvergenz von Zahlenfolgen: Eine Folge (z_n) konvergiert gegen z_0, wenn in jeder ε–Umgebung von z_0 fast alle Folgeglieder z_n liegen.

Es geht also darum, herauszufinden, was eine ε–Umgebung einer Funktion sein könnte. Nun sind Funktionen relativ komplizierte Gebilde. Am besten kann man sich eine reelle Funktion f auf einem Intervall I vorstellen, und zwar in Gestalt des Graphen G_f. Eine andere Funktion g auf I werden wir dann als „nahe bei f liegend" bezeichnen, wenn sich ihr Graph nur wenig von G_f unterscheidet. Dazu definieren wir einen ε–Schlauch um G_f:

$$S_\varepsilon(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ und } f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$



Eine ε–Umgebung von f soll nun aus allen Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ bestehen, deren Graph ganz in $S_\varepsilon(f)$ liegt:

$$\mathcal{U}_\varepsilon(f) := \{g : I \to \mathbb{R} \mid \forall x \in I : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}.$$

Da $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für **alle** $x \in I$ sein soll, hängt das ε nicht von einem einzelnen x ab. Das ist der entscheidende Punkt bei dem neuen Konvergenzbegriff:

Es sei wieder I ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine Menge in $\mathbb{C}$, und f_n eine Folge von (reell– oder komplexwertigen) Funktionen auf I.

Definition.

Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig auf I gegen eine Funktion f*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \quad (\text{unabhängig von } x \in I),$$

$$\text{so daß für } n \geq N \text{ und } \textbf{alle } x \in I \text{ gilt:} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(f_n) konvergiert also genau dann gleichmäßig gegen f, wenn in jedem ε–Schlauch um f fast alle f_n liegen.

Daß wir nun den richtigen Konvergenzbegriff gefunden haben, zeigt der folgende Satz:

IV.3.1 Satz. *(f_n) konvergiere auf I gleichmäßig gegen f, alle f_n seien stetig. Dann ist auch die Grenzfunktion f auf I stetig.*

BEWEIS: Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, die nur in der Nähe eines (beliebigen) Punktes $x_0 \in I$ gezeigt werden muß.

Sei $x_k \in I$ eine Folge von Punkten mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Wir müssen zeigen, daß dann auch $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig auf I gegen f konvergiert, gibt es ein N, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n \geq N \text{ und alle } x \in I$$

ist. Wir wählen **ein** solches $n \geq N$. Da f_n stetig ist, gibt es ein k_0, so daß

$$|f_n(x_k) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } k \geq k_0$$

ist. Für solche k gilt dann:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &\leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß $(f(x_k))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. □

Beispiel:

Die Folge $f_n(x) := x^n$ kann auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergent sein, weil die Grenzfunktion nicht stetig ist. Aber wie steht es mit der Konvergenz auf $I_r := [0,r]$, mit $0 < r < 1$?

Die Folge r^n konvergiert gegen Null, und für $0 \le x \le r$ ist $0 \le x^n \le r^n$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein N, so daß für $n \ge N$ gilt:

$$|\, f_n(x) - 0\,| = x^n \le r^n \le r^N < \varepsilon.$$

Also konvergiert (f_n) auf dem kleineren Intervall $[0,r]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

IV.3.2 Satz. *Wenn (f_n) auf I gleichmäßig gegen f und (g_n) auf I gleichmäßig gegen g konvergiert, dann konvergiert auch $f_n \pm g_n$ gleichmäßig auf I gegen $f \pm g$ und $(c \cdot f_n)$ gleichmäßig auf I gegen $c \cdot f$.*

Auf den Beweis verzichten wir hier.

Ist (f_n) eine Folge von Funktionen auf I, so kann man auch die Folge der Partialsummen $F_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$ betrachten. Diese Folge nennt man eine *Reihe von Funktionen* und schreibt dafür: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Wie bei den Folgen unterscheidet man auch bei den Reihen von Funktionen zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz. Besonders nützlich ist folgendes Konvergenzkriterium:

IV.3.3 Weierstraß–Kriterium.

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen und (f_n) eine Folge von Funktionen auf I, so daß gilt:

$$|\, f_n(x)\,| \le a_n \quad \textit{für fast alle } n \textit{ und } \textbf{alle } x \in I.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf I.

BEWEIS: Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in jedem $x \in I$ absolut konvergent. Also können wir (punktweise) die Grenzfunktion $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ bilden. Ist andererseits $F_N(x) := \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$ die N–te Partialsumme, so ist

$$F(x) - F_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x).$$

Für beliebiges, aber festes x und $M > N$ ist stets

$$|\sum_{n=N+1}^{M} f_n(x)\,| \le \sum_{n=N+1}^{M} |\, f_n(x)\,| \le \sum_{n=N+1}^{M} a_n.$$

Läßt man M gegen Unendlich gehen, so bleibt die Ungleichung erhalten:

$$|\,F_N(x) - F(x)\,| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\,| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man N so groß wählen, daß $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$ ist. Für diese N und beliebiges $x \in I$ ist dann auch $|\,F_N(x) - F(x)\,| < \varepsilon$. Also konvergiert (F_N) auf I gleichmäßig gegen F. □

Die folgenden Sätze über die Vertauschung von Grenzwerten formulieren wir nur für Funktionenfolgen. Sie gelten dann natürlich auch entsprechend für Reihen von Funktionen.

IV.3.4 Satz.

Die Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(t)\,dt.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Dann gibt es ein N, so daß für $n \ge N$ und alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|\,f(x) - f_n(x)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\,| &= |\int_a^b (f(t) - f_n(t))\,dt\,| \\ &\le \int_a^b |\,f(t) - f_n(t)\,|\,dt \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) \;=\; \varepsilon. \end{aligned}$$

Das ergibt die gewünschte Formel. □

IV.3.5 Satz.

Die Folge von stetig differenzierbaren Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei punktweise konvergent gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Außerdem sei f_n' gleichmäßig konvergent. Dann ist f stetig differenzierbar und

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Beweis: Sei $f^* := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Ist $x_0 \in I$ fest gewählt und $x \in I$ ein weiterer Punkt, so ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} f^*(t)\,dt. \end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^*(t)\,dt$$

eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $f'(x) = f^*(x)$. □

§4 Potenzreihen

Sei (c_n) eine Folge (reeller oder komplexer) Zahlen, $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt a*. Die Zahlen c_n heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Ist $a \in \mathbb{R}$ und sind alle Koeffizienten c_n reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe* und schreibt die Variable auch reell:

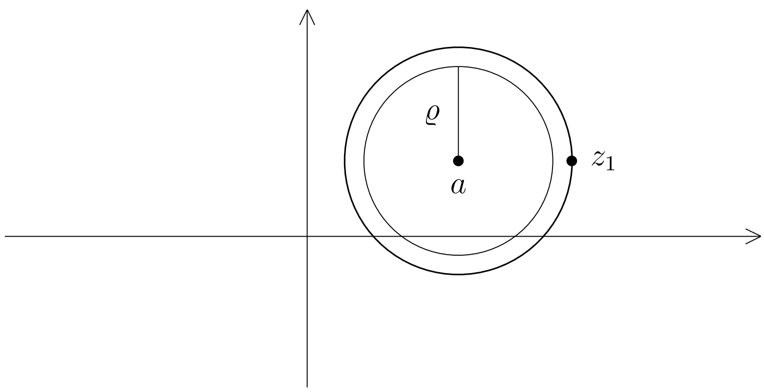
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Um nicht doppelte Arbeit machen zu müssen, betreiben wir die Theorie gleich im Komplexen. Der reelle Fall ist darin enthalten.

IV.4.1 Satz.

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *konvergiere für ein* $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$. *Es sei* $0 < \varrho < |\, z_1 - a\,|$.

Dann konvergiert $f(z)$ *auf* $\overline{D_\varrho(a)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |\, z-a\,| \le \varrho\}$ *absolut und gleichmäßig, und die Reihe* $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ *konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig auf* $\overline{D_\varrho(a)}$.



Beweis: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß $|\, c_n(z_1-a)^n\,| \le M$ für alle n ist. Und da $\varrho < |\, z_1 - a\,|$ sein soll, ist $q := \dfrac{\varrho}{|\, z_1 - a\,|} < 1$.

Für alle z mit $|\, z-a\,| \le \varrho$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\, c_n(z-a)^n\,| &= |\, c_n(z_1-a)^n\,| \cdot |\, \frac{z-a}{z_1-a}\,|^n \\ &\le M \cdot q^n. \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\,q^n$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ absolut konvergiert, und mit dem Weierstraßkriterium folgt, daß die Reihe sogar gleichmäßig auf $\overline{D_\varrho(a)}$ konvergiert.

2) Nach (1) ist $|\, n \cdot c_n(z-a)^{n-1}\,| \le n \cdot M \cdot q^{n-1}$, und

$$\frac{(n+1)M \cdot q^n}{nM \cdot q^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q$$

konvergiert gegen $q < 1$. Aus dem Quotientenkriterium folgt jetzt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot M \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ auf $\overline{D_\varrho(a)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. $\square$

Der vorliegende Satz hat weitreichende Konsequenzen für das Konvergenzverhalten von Potenzreihen.

Definition.

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Die Zahl

$$R := \sup\{r \ge 0 \mid \exists\, z_1 \in \mathbb{C}, \text{ so daß } f(z) \text{ konvergent in } z_1 \text{ und } r = |\, z_1 - a\,| \text{ ist.}\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen!

Der Kreis um a mit Radius R heißt der *Konvergenzkreis* der Reihe.

IV.4.2 Satz. *R sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$. Dann gilt:*

1. *Für $0 < r < R$ konvergiert $f(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ absolut und gleichmäßig.*
2. *Ist $|\, z_1 - a\,| > R$, so divergiert $f(z)$ in z_1.*

Beweis: 1) ist klar, wegen Satz 4.1.

2) Nach Definition von R kann $f(z)$ in einem Punkt z_1 mit $|\, z_1 - a\,| > R$ nicht mehr konvergieren. $\square$

Bemerkung : Bei **reellen** Potenzreihen geht alles genauso, man hat lediglich die Kreise durch Intervalle zu ersetzen.

Wir wissen jetzt, daß eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises konvergiert und außerhalb divergiert. Das Verhalten auf dem Rand des Kreises kann man nicht allgemein vorhersagen. Dafür sind gesonderte Betrachtungen erforderlich, die manchmal sehr schwierig werden können.

Auf jeden Fall ist es wichtig, den Konvergenzradius bestimmen zu können. In vielen Fällen gibt es dafür eine praktische Formel:

IV.4.3 Satz. *Sei (c_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen, $c_n \neq 0$ für fast alle n.*

Wenn die Folge $\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ konvergiert, dann ist

$$R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

der Konvergenzradius der Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Man beachte, daß der Entwicklungspunkt a dabei keine Rolle spielt!

Beweis: Wir verwenden das Quotientenkriterium: Es ist

$$\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |z-a|,$$

und dieser Ausdruck konvergiert (für festes z) gegen $\dfrac{1}{R} \cdot |z-a|$.

Ist $|z-a| < R$, also $\dfrac{1}{R} \cdot |z-a| < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $|z-a| > R$, so divergiert sie. Also muß R der Konvergenzradius sein!

Wir haben uns dabei übrigens nicht um gleichmäßige Konvergenz kümmern müssen. □

Beispiele:

1. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dann ist $a = 0$ und $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ergibt den Konvergenzradius $R = 1$.

   Für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe gegen $\dfrac{1}{1-z}$. Da alle Koeffizienten reell sind, kann man die Reihe auch reell auffassen. Tatsächlich nimmt die Grenzfunktion dann auf dem Konvergenzintervall $(-1, 1)$ nur reelle Werte an. An den Randpunkten $x = -1$ und $x = +1$ divergiert die Reihe.

2. Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$. Hier ist $a = 0$ und $c_n = \frac{1}{n}$.

   Da $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n}$ gegen 1 konvergiert, ist $R = 1$. An den Rändern des Konvergenzintervalls ist das Verhalten diesmal unterschiedlich:

   Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergiert, die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ konvergiert.

3. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wieder ist $a = 0$, und außerdem ist $c_n = \frac{1}{n!}$ für alle n, also

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \text{ konvergent gegen } +\infty.$$

Diese Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

Wir wollen nun einige Eigenschaften derjenigen Funktionen zusammenstellen, die als Grenzfunktionen von Potenzreihen auftreten:

IV.4.4 Satz. *Hat $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ den Konvergenzradius R, so ist $f(z)$ im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ stetig.*

Beweis: Die Reihe konvergiert auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_\varrho(a)}$, $0 \le \varrho < R$, gleichmäßig, und deshalb ist f dort stetig. □

IV.4.5 Satz. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten um a, mit Konvergenzradius R.*

Dann ist die Grenzfunktion $f(x)$ auf dem Konvergenzintervall $(a-R, a+R)$ stetig differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(x-a)^{n-1}.$$

Potenzreihen können also gliedweise differenziert werden!

Beweis: $F_N(x) := \sum_{n=0}^{N} c_n(x-a)^n$ konvergiert auf $(a-R, a+R)$ punktweise gegen eine stetige Funktion f. Jede der Funktionen F_N ist stetig differenzierbar, und die Folge der Ableitungen F_N' konvergiert auf jedem abgeschlossenen Teilintervall gleichmäßig.

Also ist f stetig differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \lim_{N\to\infty} F_N'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

□

Da die Ableitung einer Potenzreihe wieder eine Potenzreihe ist, kann man das obige Argument wiederholen und erhält:

IV.4.6 Folgerung.

Eine (reelle) Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ist im Konvergenzintervall beliebig oft differenzierbar, und es gilt:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad \textit{für alle } n \ge 0.$$

Beweis: Wir müssen nur noch die Formel beweisen:

Offensichtlich ist

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) c_n (x-a)^{n-k}.$$

Setzt man $x = a$ ein, so erhält man:

$$f^{(k)}(a) = k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-k+1) c_k = k! c_k.$$

□

Die Formel erinnert an die Taylorentwicklung:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Dann kann man von f Taylor–Polynome beliebig hohen Grades bilden: Sei $a \in I$ ein fest gewählter Entwicklungspunkt,

$$Tf_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f in a. Dann ist

$$f(x) = Tf_{n,a}(x) + R_{n,a}(f;x),$$

wobei das Restglied durch

$$R_{n,a}(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

gegeben ist, mit einem (von x abhängigen) Punkt c zwischen a und x. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ ist schon Grenzwert einer Potenzreihe, etwa auf $(a-R, a+R) \subset I$. Dann ist die N-te Partialsumme der Reihe gerade das N-te Taylorpolynom von f in a. Also muß die Folge der Restglieder gegen Null konvergieren, und es gilt auf $(a-R, a+R)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =: Tf(x;a).$$

   Die Funktion stimmt dort mit ihrer „Taylor-Reihe“ überein.

2. Ist von der Funktion f nichts weiter bekannt, als daß sie unendlich oft differenzierbar ist, so kann man ebenfalls die Taylor-Reihe bilden. Aber konvergiert sie auch? Und wenn ja, konvergiert sie gegen f?

   Diese Fragen sind nicht trivial zu beantworten, und die Antwort ist auch nicht immer „ja“.

Beispiele :

1. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Dann ist $a = 0$ und
$$c_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = 2k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$
Wir können die Formel für den Konvergenzradius nicht benutzen, aber eine direkte Abschätzung ergibt, daß $R = 1$ ist. Der Grenzwert kann mit der Formel für die geometrische Reihe bestimmt werden:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$
Die Grenzfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und beliebig oft differenzierbar, aber die Taylorreihe konvergiert nur auf $(-1, +1)$.

2. Noch verrückter ist folgendes Beispiel:

   In den Übungen zu Kapitel III wurde die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
behandelt. Ihre Taylorreihe im Nullpunkt verschwindet, d.h. alle Koeffizienten sind Null. Da die Funktion außerhalb des Nullpunktes stets $\neq 0$ ist, konvergiert die Taylorreihe nur im Entwicklungspunkt selbst gegen die Funktion.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir die Formel für den Konvergenzradius noch etwas verallgemeinern:

IV.4.7 Satz.

In der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ sei stets $c_{2k} = 0$ und $c_{2k+1} \neq 0$ für fast alle k. Wenn dann
$$c := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}} \right|$$
existiert, dann ist $R := \sqrt{c}$ der Konvergenzradius.

Wenn stets $c_{2k+1} = 0$ ist und $c_{2k} \neq 0$ für fast alle k, und wenn außerdem
$$c := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} \right|$$
existiert, dann ist ebenfalls $R := \sqrt{c}$ der Konvergenzradius.

Der Beweis geht ähnlich wie bei der früher bewiesenen Formel. Wir betrachten nur den Fall $c_{2k+1} = 0$:
$$\left| \frac{c_{2k+2} z^{2k+2}}{c_{2k} z^{2k}} \right| = \left| \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} \right| \cdot |z|^2$$
konvergiert gegen $\frac{1}{c}|z|^2$, und dieser Ausdruck muß < 1 sein, damit die Reihe (nach Quotientenkriterium) konvergiert. Also muß $|z| < \sqrt{c}$ sein. $\square$

Beispiele :

1. Sei $f(x) := e^x$. Dann hat die Taylorreihe von f im Nullpunkt die Gestalt

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Von dieser Reihe wissen wir schon, daß sie den Konvergenzradius $R = +\infty$ hat. Also ist $F(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte unendlich oft differenzierbare Funktion. Wir wollen nun zeigen, daß $F(x) = f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Wir benötigen einige Eigenschaften der Funktion $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$:

(a) Offensichtlich ist $F(0) = 1$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} f(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^i}{i!} \cdot \frac{w^j}{j!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) \\ &= F(z) \cdot F(w). \end{aligned}$$

Hier haben wir den Produktsatz für Reihen benutzt. Die vorgenommenen Umformungen sind alle erlaubt, weil die Reihe in jedem Punkt absolut konvergiert.

(c) Da stets $F(z) \cdot F(-z) = F(0) = 1$ ist, ist $F(z) \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Für reelles $x > 0$ ist offensichtlich $F(x) > 0$, und dann ist auch $F(-x) = \frac{1}{F(x)} > 0$.

Nach dem Satz über die Differentiation von Reihen ist

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = F(x).$$

Also gilt für die logarithmische Ableitung:

$$(\ln \circ F)'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \equiv 1,$$

und daher ist $\ln \circ F(x) = x + c$, mit einer geeigneten Konstanten c. Die ermittelt man sofort durch $c = \ln \circ F(0) = \ln(1) = 0$. Daraus folgt: $F(x) = e^x$.

Zusammengefaßt haben wir herausbekommen:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ stetige Funktion (die *komplexe Exponentialfunktion*), deren Einschränkung auf die reelle Achse mit der reellen Exponentialfunktion e^x übereinstimmt.

2. Als nächstes wollen wir die Taylorreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ betrachten. Endliche Taylorentwicklungen haben wir schon in Kapitel III berechnet. Die Reihen sehen dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} S(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ ist die Reihe für den Sinus} \\ \text{und } C(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \text{ die für den Cosinus.} \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren auf ganz $\mathbb{R}$ (sogar auf ganz $\mathbb{C}$), wie man aus der erweiterten Formel für den Konvergenzradius entnimmt. Weiter gilt:

(a) $S(0) = 0$ und $C(0) = 1$.

(b) $S'(x) = C(x)$ und $C'(x) = -S(x)$.

Daraus folgt: $C''(x) = -S'(x) = -C(x)$. Setzen wir $g(x) := C(x) - \cos(x)$, so ist $g''(x) + g(x) \equiv 0$, also auch

$$\begin{aligned} [g(x)^2 + (g'(x))^2]' &= 2g(x)g'(x) + 2g'(x)g''(x) \\ &= 2g'(x) \cdot [g(x) + g''(x)] \equiv 0. \end{aligned}$$

Demnach muß $g(x)^2 + (g'(x))^2 \equiv c$ sein, mit einer Konstanten c. Da $g(0) = g'(0) = 0$ ist, ist $c = 0$. Also muß schon $g(x) \equiv 0$ sein.

Daher ist $C(x) = \cos(x)$ und $S(x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für reelles t ist dann insbesondere

$$e^{\mathbf{j}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{j}t)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(t) + \mathbf{j}\sin(t).$$

Das ist die schon bekannte Eulersche Formel, aber die linke Seite der Gleichung hat nun a priori eine konkrete Bedeutung. Aus der Definition ist ein Satz geworden. Für die komplexe Exponentialfunktion gilt jetzt übrigens:

$$\exp(x + \mathbf{j}y) = e^x \cdot (\cos y + \mathbf{j}\sin y).$$

3. Ist $|\,x\,| < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \dfrac{1}{1+x}$. Da man Potenzreihen gliedweise integrieren kann, folgt:

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-t)^n\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,t^{n+1}\Big|_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n.$$

Mit Hilfe des sogenannten Abelschen Grenzwertsatzes kann man zeigen, daß die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ auch noch im Falle $x = -1$ gegen die Funktion konvergiert. Das liefert die Summe der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = -\ln(1+1) = -\ln(2).$$

4. Aus der Darstellung $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ folgt für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Zum Schluß wollen wir noch eine besonders interessante Taylorentwicklung betrachten:

Wir beginnen mit dem Polynom $p(x) := (1+x)^n$. Dann ist

$$p^{(k)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(1+x)^{n-k}.$$

Insbesondere ist $p^{(n)}(x) \equiv n!$ und $p^{(k)}(x) \equiv 0$ für $k > n$. Die (in diesem Falle endliche) Taylorentwicklung von p im Nullpunkt hat die Koeffizienten

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Also ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Das wollen wir jetzt verallgemeinern und die Funktion

$$f(x) := (1+x)^\alpha \quad \text{für } |x| < 1 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}$$

untersuchen. Hier ist

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}.$$

Die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{k}$ werden durch die obige Gleichung definiert. Insbesondere setzt man $\binom{\alpha}{0} := 1$. Man beachte, daß diese Zahlen weder ganz noch positiv zu sein brauchen. Es gilt aber z.B. die bekannte Formel

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \binom{\alpha}{n}.$$

IV.4.8 Satz.

Die Binomialreihe $B(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ *konvergiert für* $|\,x\,| < 1$ *gegen* $(1+x)^\alpha$.

Beweis: 1) Den Konvergenzradius der Reihe bestimmen wir mit dem Quotientenkriterium: Es ist $c_n = \binom{\alpha}{n}$ und

$$\begin{aligned}
\left|\,\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\,\right| &= \left|\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)\cdot n!}{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot(n+1)!}\,\right| \cdot |\,x\,| \\
&= \left|\,\frac{\alpha-n}{n+1}\,\right| \cdot |\,x\,| \\
&= \left|\,\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\,\right| \cdot |\,x\,|,
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen $|\,x\,| < 1$.

2) $B(x)$ ist also eine differenzierbare Funktion auf $(-1,+1)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
B'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!} x^n \\
&= \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1)((\alpha-1)-1)\cdot\ldots\cdot((\alpha-1)-n+1)}{n!} x^n \\
&= \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
(1+x)B'(x) &= \alpha \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \right) \\
&= \alpha \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right) x^n \right) \\
&= \alpha \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right) \\
&= \alpha \cdot B(x).
\end{aligned}$$

Setzen wir $h(x) := \dfrac{B(x)}{(1+x)^\alpha}$, so folgt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(1+x)^\alpha B'(x) - B(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \cdot ((1+x)B'(x) - \alpha B(x)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Demnach muß $h(x) \equiv c$ konstant sein, also $B(x) = c(1+x)^\alpha$. Dabei ist $c = B(0) = 1$. Das zeigt, daß $B(x) = (1+x)^\alpha$ für $|\,x\,| < 1$ ist. $\square$

Beispiel:

Es ist

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n \\ &= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \pm \cdots . \end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklung leistet gute Dienste, wenn man etwa ein elliptisches Integral näherungsweise auswerten will:

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \qquad \text{mit } 0 < k < 1.$$

Solche Integrale kann man nicht elementar integrieren. Also entwickelt man den Integranden in eine Taylorreihe und nutzt aus, daß man hier Integration und Reihenbildung miteinander vertauschen kann.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (-k^2\sin^2\varphi))^{1/2}\, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^\infty \binom{\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \sin^2\varphi)^n \, d\varphi \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n k^{2n} \binom{\frac{1}{2}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi. \end{aligned}$$

Die Integrale

$$I(n) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$$

kann man rekursiv berechnen:

Es ist $I(0) = \dfrac{\pi}{2}$ und $I(n) = \dfrac{2n-1}{2n} \cdot I(n-1)$, wie man leicht durch partielle Integration herausbekommt.

Also ist

$$I(1) = \frac{\pi}{4}, \quad I(2) = \frac{3\pi}{16}, \quad I(3) = \frac{5\pi}{32}, \ldots$$

Das ergibt als Wert für das elliptische Integral:[1]

$$I = \pi(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{8} - \frac{3k^4}{128} - \frac{5k^6}{512} - \ldots) \, .$$

[1]Die Binomialkoeffizienten werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{1} &= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \\
\binom{\frac{1}{2}}{2} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8} \\
\binom{\frac{1}{2}}{3} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16} \\
\cdots & \quad usw.
\end{aligned}$$

§5 Fourierreihen

Definition.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit *Periode* T, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t).$$

Beispiele:

1. Die Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$ haben die Periode 2π, der Tangens hat die Periode π.
2. Die Funktion $e^{\mathbf{j}2\pi t}$ hat die Periode 1.
3. Die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp(x + \mathbf{j}y) = e^x \cdot (\cos(y) + \mathbf{j}\sin(y))$$

hat die Periode $2\pi\mathbf{j}$.

4. Hat f die Periode T, so sind auch $2T$, $3T, \ldots$ Perioden von f.
5. Eine konstante Funktion $f(t) \equiv c$ hat **jedes** $T \in \mathbb{R}$ als Periode.

Wie das letzte Beispiel zeigt, kann die Menge $\mathrm{Per}(f)$ aller Perioden der Funktion f aus ganz $\mathbb{R}$ bestehen. Ist allerdings f stückweise stetig[2] und nicht konstant, so gibt es in $\mathrm{Per}(f)$ ein kleinstes positives Element, also eine *kleinste Periode*. Das ist z.B. die Zahl 2π beim Sinus.

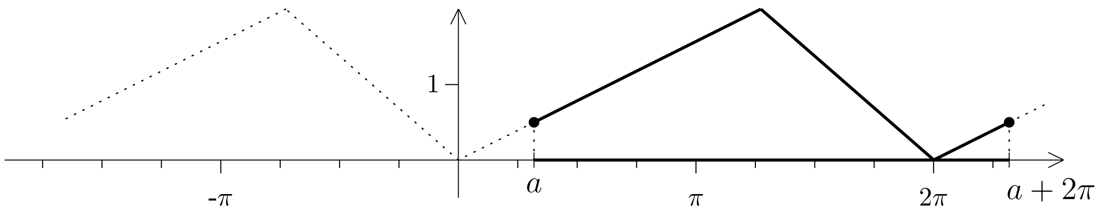
Hat f die Periode T, so hat $F(t) := f(\frac{T}{2\pi} \cdot t)$ die Periode 2π, denn es ist

$$\begin{aligned} F(t+2\pi) &= f(\frac{T}{2\pi}(t+2\pi)) \\ &= f(\frac{T}{2\pi} \cdot t + T) \\ &= f(\frac{T}{2\pi} \cdot t) \;=\; F(t). \end{aligned}$$

Deshalb ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nur Funktionen mit der Periode 2π betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, bedeutet hier künftig „**periodisch**“ stets „**periodisch mit Periode** 2π“. Das muß allerdings nicht in jedem Fall die kleinste Periode sein.

Ist nun $I = [a, a+2\pi]$ und f eine stückweise stetige Funktion auf I mit $f(a+2\pi) = f(a)$, so kann man f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen:

[2] d.h. stetig bis auf endlich viele Sprungstellen.



Dabei spielt es keine Rolle, mit welchem Intervall (der Länge 2π) man begonnen hat, es kommt immer die gleiche Funktion heraus. Wir verwenden hier meistens das Intervall

$$I = [-\pi, +\pi],$$

manchmal aber auch das Intervall $[0, 2\pi]$.

Es sei $\mathcal{S}^0(I)$ die Menge der stückweise stetigen Funktionen auf I. Bei diesen Funktionen existiert in jedem $x \in I$ der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert, allerdings brauchen die beiden Grenzwerte nicht übereinzustimmen. Es sind endlich viele solcher Sprungstellen erlaubt, aber keine schlimmeren Unstetigkeiten.

Mit $\mathcal{P}(I)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{S}^0(I)$, für die gilt:

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

Das sind diejenigen stückweise stetigen Funktionen auf I, die sich periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen.

Definition.

Unter einem *trigonometrischen Polynom vom Grad* $\leq n$ versteht man eine Funktion der Gestalt

$$f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Die Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3, … und b_1, b_2, b_3, … heißen die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms.

Mit $\mathcal{T}(I)$ bezeichnen wir die Menge aller (auf I eingeschränkten) trigonometrischen Polynome, mit $\mathcal{T}_n(I)$ die Teilmenge aller $f \in \mathcal{T}(I)$ vom Grad $\leq n$. Dann gilt:

$$\mathcal{T}_n(I) \subset \mathcal{T}(I) \subset \mathcal{P}(I) \subset \mathcal{S}^0(I).$$

Es handelt sich dabei nicht nur um Mengen von Funktionen, sondern sogar um Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, je nachdem, ob wir reelle oder komplexe Koeffizienten und Funktionswerte zulassen.

Definition.

Endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{S}^0(I)$ heißen *linear abhängig* über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$), wenn es Zahlen $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$) gibt, die nicht alle $= 0$ sind, so daß

$$c_1 \cdot f_1(t) + \cdots + c_N \cdot f_N(t) \equiv 0$$

auf ganz I ist.

Andernfalls heißen die Funktionen *linear unabhängig.*

Wir werden bald sehen, daß die Funktionen $\frac{1}{2}$, $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ mit $k = 1, \ldots, n$ linear unabhängig sind. Deshalb besitzt der Raum $\mathcal{T}_n(I)$ die Dimension $2n+1$. Alle anderen betrachteten Räume sind unendlich-dimensional!

Wir werden die Funktionenräume zunächst einmal als Vektorräume über $\mathbb{C}$ auffassen.

Definition.

Es sei V ein beliebiger $\mathbb{C}$–Vektorraum. Eine *Hermitesche Form auf* V ordnet jedem Paar $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times V$ eine komplexe Zahl $< \mathbf{v}, \mathbf{w} >$ zu, so daß gilt:

1. $< \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} > = < \mathbf{v}_1, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}_2, \mathbf{w} >$.
2. $< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = \overline{< \mathbf{w}, \mathbf{v} >}$.
3. $< \alpha \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w} > = \alpha \cdot < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$.

Die Hermitesche Form heißt *positiv semidefinit* (oder ein *Pseudo–Skalarprodukt*), falls gilt:

4a. $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$.

Die Hermitesche Form heißt *positiv definit* (oder ein *Skalarprodukt*), falls gilt:

4b. $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > > 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Wir kennen bereits das Hermitesche Standard–Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$. Nun definieren wir eine Hermitesche Form auf $\mathcal{S}^0(I)$ durch

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

Die Eigenschaften 1), 2) und 3) sind ganz leicht nachzurechnen. Außerdem gilt für jedes $f \in \mathcal{S}^0(I)$:

$$< f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} |\, f(t)\,|^2\, dt \geq 0\,.$$

Also liegt sogar ein Pseudo–Skalarprodukt vor. Leider ist es nicht positiv–definit. Ist etwa

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}\,,$$

so ist f nicht der Nullvektor in $\mathcal{S}^0(I)$, aber es ist $< f, f > = 0$.

Schränkt man die Hermitesche Form auf die Unterräume $\mathcal{P}(I)$ oder $\mathcal{T}(I)$ ein, so bleibt sie dort zumindest ein Pseudo–Skalarprodukt. Wenn wir es allerdings nur mit stetigen Funktionen zu tun haben, wie bei $\mathcal{T}(I)$ oder $\mathcal{T}_n(I)$, so bekommen wir sogar ein Skalarprodukt:

IV.5.1 Hilfssatz. *Ist* $f : I \to \mathbb{C}$ *stetig und* $\int_{-\pi}^{\pi} |\, f(t)\,|^2\, dt = 0$, *so ist* $f(t) \equiv 0$ *auf* I.

Beweis: Wir nehmen an, es wäre $f(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$. Wegen der Stetigkeit gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(t) \neq 0$ für $t \in U_\varepsilon(t_0) \cap I$ ist. Ist $0 < \delta < \varepsilon$ und

$J := \{t \in I \mid t_0 - \delta \le t \le t_0 + \delta\}$, so nimmt die stetige Funktion $|\, f(t)\,|^2$ auf J ein Minimum $r \ge 0$ an, und da $f(t) \ne 0$ auf J ist, muß sogar $r > 0$ gelten. Aber dann ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\, f(t)\,|^2 \, dt \;\ge\; \frac{1}{2} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} r \, dt \;=\; r \cdot \delta > 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

Wie im $\mathbb{C}^n$ definieren wir:

$$\|\, f \,\| := \sqrt{< f, f >} = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\, f(t)\,|^2 \, dt \Big)^{1/2}.$$

Wenn f nicht stetig ist, kann es passieren, daß $\|\, f \,\| = 0$ ist, obwohl f nicht die Nullfunktion ist!

Definition.

Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{S}^0(I)$ heißen *orthogonal* zueinander, wenn $< f, g >= 0$ ist.

Ein (eventuell unendliches) System von Funktionen φ_1, φ_2, φ_3, … heißt ein *Orthonormalsystem* (kurz: ON-System), falls gilt:

1. $< \varphi_n, \varphi_m >= 0$ für alle $n \ne m$.
2. $\|\, \varphi_n \,\| = 1$ für alle n.

IV.5.2 Satz. *Die Funktionen*

$$\begin{aligned} g_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ g_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \qquad \textit{für } n \ge 1 \\ \textit{und} \quad h_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt) \qquad \textit{für } n \ge 1 \end{aligned}$$

bilden ein ON-System in $\mathcal{S}^0(I)$ bzw. $\mathcal{P}(I)$.

Beweis: Die etwas lästigen Vorfaktoren dienen lediglich der Normierung. Daher betrachten wir nur die Funktionen 1, $\cos(nt)$ und $\sin(nt)$. Wir brauchen bloß einige Integrale auszurechnen:

1) Es ist $< 1, 1 >= \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$.

2) $< 1, \cos(nt) >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \, dt = \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

3) $< 1, \sin(nt) >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \, dt = -\frac{\cos(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

4) Wegen $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ ist

$$\begin{aligned} < \sin(nt), \cos(mt) > &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)t) \, dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)t) \, dt \\ &= 0 \qquad \text{für beliebiges } n \text{ und } m. \end{aligned}$$

5) Wegen $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ ist

$$\begin{aligned} < \cos(nt), \cos(mt) > &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t)\,dt \\ &= \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

6) Wegen $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ ist

$$\begin{aligned} < \sin(nt), \sin(mt) > &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t)\,dt \\ &= \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das gewünschte Ergebnis kann man nun direkt ablesen. □

Das gerade betrachtete ON-System wollen wir mit (C) bezeichnen. Ein weiteres Beispiel ist das System (E), das aus den Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\mathbf{j}nt}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

besteht.

Um damit umgehen zu können, müssen wir uns kurz mit Integralen komplexwertiger Funktionen befassen:

Ist

$$f(t) = g(t) + \mathbf{j}h(t),$$

so setzt man

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b g(t)\,dt + \mathbf{j}\int_a^b h(t)\,dt.$$

Ist nun $F = G + \mathbf{j}H$, $G' = g$ und $H' = h$, so ist $F' = f$, und es gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G\Big|_a^b + \mathbf{j} \quad H\Big|_a^b = F\Big|_a^b .$$

Insbesondere ist

$$\int_a^b e^{\mathbf{j}nt}\,dt = \int_a^b \left(\frac{1}{\mathbf{j}n} \cdot e^{\mathbf{j}nt}\right)'\,dt = \frac{1}{\mathbf{j}n} e^{\mathbf{j}nt}\Big|_a^b,$$

also

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{j}nt}\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt können wir zeigen:

IV.5.3 Satz. *Die Funktionen*

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\mathbf{j}nt}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

bilden ein ON-System.

BEWEIS: Es ist

$$< e^{\mathbf{j}nt}, e^{\mathbf{j}mt} >= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{j}(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Rechnen im Komplexen ist erheblich einfacher! □

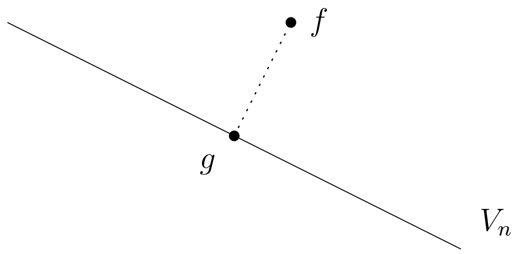
Wir wollen nun geometrische Vorstellungen aus dem $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ in die Theorie der Funktionenräume übertragen:

Ist $V = \mathcal{P}(I)$ und $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein ON-System in V, so setzen wir

$$V_n :=< \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n > .$$

Das ist der von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aufgespannte (endlich-dimensionale) Untervektorraum von V. Wir versuchen nun, zu gegebenem $f \in V$ ein $g \in V_n$ so zu bestimmen, daß der Abstand $\| f - g \|$ minimal wird.

Bei Funktionen machen geometrische Begriffe wie „Länge“ oder „Abstand“ nicht viel Sinn. Vertrauter ist da schon der Begriff der „Approximation“. Wir versuchen, f möglichst gut durch Elemente von V_n zu approximieren. Deshalb nennen wir die gesuchte Funktion g auch die *Best–Approximation von* f.



Das Maß, mit dem wir die Güte der Approximation messen, ist ungewohnt. Wir werden später noch einmal darauf zurückkommen.

Nun geht es darum, die Bestapproximation zu finden: Ein beliebiges Element $g \in V_n$ können wir in der Form

$$g = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu$$

ansetzen, mit komplexen Zahlen c_ν als Koeffizienten. Als Abkürzung benutzen wir außerdem die Buchstaben d_ν für die Skalarprodukte $< f, \varphi_\nu >$, $\nu = 1, \ldots, n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\;& \| f - g \|^2 = < f - g, f - g > \\ =\;& \| f \|^2 - < g, f > - < f, g > + \| g \|^2 \\ =\;& \| f \|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \bar{d}_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \bar{c}_\nu d_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} | c_\nu |^2 \\ =\;& \| f \|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu - d_\nu)(\bar{c}_\nu - \bar{d}_\nu) - \sum_{\nu=1}^{n} | d_\nu |^2 \qquad \text{(Trick!)} \\ =\;& \| f \|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} | c_\nu - d_\nu |^2 - \sum_{\nu=1}^{n} | d_\nu |^2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird dann am kleinsten, wenn $c_\nu = d_\nu$ für alle ν ist. Also gilt:

$$g_n := \sum_{\nu=1}^{n} < f, \varphi_\nu > \varphi_\nu \text{ ist die Best-Approximation von } f \text{ in } V_n.$$

Setzt man in der obigen Abschätzung $g = g_n$, so erhält man:

$$0 \leq \| f - g_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} | d_\nu |^2,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{n} | d_\nu |^2 \leq \| f \|^2.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz bedeutet das, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} | d_\nu |^2$ konvergiert.
Zugleich erhält man eine Abschätzung:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} | < f, \varphi_\nu > |^2 \;\leq\; \| f \|^2 .}$$

Diese Formel nennt man die *Besselsche Ungleichung*. Sie gilt für jedes ON-System!

Definition.

Ist $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein ON-System, so heißt $c_n := < f, \varphi_n >$ der n-te (formale) *Fourier-Koeffizient* von f bzgl. Φ.

Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$ heißt die *(formale) Fourierreihe* von f bzgl. Φ.

Das System Φ heißt *vollständig*, falls für jedes $f \in V$ die sogenannte *Parsevalsche Gleichung* erfüllt ist:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | < f, \varphi_\nu > |^2 = \| f \|^2.$$

Was die Vollständigkeit eines ON-System bedeutet, zeigt der folgende Satz:

IV.5.4 Satz. *Ein ON-System $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ ist genau dann vollständig, wenn gilt:*

$$\forall\, f \in V \quad \textit{ist} \quad \lim_{n\to\infty} \| f - \sum_{\nu=1}^{n} < f, \varphi_\nu > \varphi_\nu \| = 0.$$

Beweis: Es sei stets $c_\nu := < f, \varphi_\nu >$.

1) Zunächst setzen wir die Vollständigkeit von Φ voraus:

Wir haben oben schon gesehen, daß

$$\| f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} | c_\nu |^2$$

ist, also (wegen der Gültigkeit der Parsevalschen Gleichung)

$$\| f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu \|^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} | c_\nu |^2 .$$

Die rechte Seite konvergiert aber gegen Null.

2) Ist umgekehrt das Kriterium erfüllt, so führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gäbe ein $f \in V$, das die Parsevalsche Gleichung nicht erfüllt. Wegen der immer gültigen Besselschen Ungleichung muß dann

$$\| f \|^2 > \sum_{\nu=1}^{\infty} | c_\nu |^2$$

sein. Wir setzen $I := \| f \|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} | c_\nu |^2$ (> 0), und $I_n := \| f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu \|^2$.

Wegen des Kriteriums konvergiert I_n gegen Null, also ist $I_n < I$ für hinreichend großes n. Andererseits ist aber

$$I_n = \| f \|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} | c_\nu |^2 \geq I, \qquad \text{für alle } n.$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Betrachten wir jetzt die speziellen ON–Systeme (C) und (E):

Wir beginnen mit (C) und numerieren folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= g_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ \varphi_{2n} &:= g_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos(nt) \qquad \text{für } n \geq 1 \\ \text{und} \quad \varphi_{2n+1} &:= h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(nt) \qquad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Sodann setzen wir

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot < f, \varphi_1 >, \\ a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot < f, \varphi_{2n} > \\ \text{und} \quad b_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot < f, \varphi_{2n+1} > . \end{aligned}$$

Dann hat die formale Fourierreihe $S_f(x)$ von f bzgl. des Systems (C) die Gestalt

$$\begin{aligned} S_f(x) &= < f, \varphi_1 > \varphi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (< f, \varphi_{2n} > \varphi_{2n}(x) + < f, \varphi_{2n+1} > \varphi_{2n+1}(x)) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\sqrt{\pi} a_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + (\sqrt{\pi} b_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right), \end{aligned}$$

es ist also

$$\boxed{S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).}$$

Man beachte, daß die Koeffizienten a_n, b_n hier nicht mit den zuvor definierten formalen Fourierkoeffizienten übereinstimmen. Aus historischen Gründen nennt man a_0, a_n und b_n dennoch die *Fourierkoeffizienten von f (bzgl. (C))*.

Wir kommen jetzt zum System (E):

Setzt man $c_n := \frac{1}{2}(a_n - \mathbf{j}b_n)$ und $c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + \mathbf{j}b_n) = \bar{c}_n$, für $n \geq 1$, sowie $c_0 := \frac{a_0}{2}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{j}nt} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\mathbf{j}nt} + c_{-n}e^{-\mathbf{j}nt}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((c_n + c_{-n})\cos(nt) + (c_n - c_{-n})\sin(nt)) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die komplexe Form der Fourierreihe von f gefunden. Die Summation von $-\infty$ bis $+\infty$ ist so zu verstehen, wie es oben schon angedeutet wurde:

$$\text{Term}(0) + (\text{Term}(1) + \text{Term}(-1)) + (\text{Term}(2) + \text{Term}(-2)) + \cdots$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten c_n kann man übrigens auch direkt berechnen, ohne den Umweg über die a_n und b_n. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\
\text{und} \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathbf{j}nt}\,dt \quad (\text{für } n \geq 1).
\end{aligned}$$

Die Besselsche Ungleichung sieht für das System (C) folgendermaßen aus:

$$|< f, g_0 >|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|< f, g_n >|^2 + |< f, h_n >|^2) \leq \| f \|^2,$$

also

$$\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\sqrt{\pi}a_n|^2 + |\sqrt{\pi}b_n|^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt.$$

Das heißt:

$$\boxed{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt.}$$

Ohne Beweis geben wir auch die Besselsche Ungleichung für das System (E) an:

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt\,.}$$

IV.5.5 Satz. *Die trigonometrischen Systeme (C) und (E) sind jeweils vollständig (in $\mathcal{P}(I)$).*

Diesen Satz werden wir hier nicht beweisen, und wir werden in den kommenden Abschnitten auch keinen Gebrauch von ihm machen. Wir wollen nur überlegen, was er bedeutet:

Ist f stückweise stetig und periodisch, so kann man formal die Fourierreihe bilden:

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

bzw. in der komplexen Form

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{j}nt}.$$

Ist $$T_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathbf{j}nt}$$

die N–te Partialsumme, so gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T_N(t))^2 \, dt \;=\; 0.$$

Man sagt auch, die Fourierreihe von f *konvergiert im quadratischen Mittel* gegen f. Damit liegt ein neuer Konvergenzbegriff vor, der den Fourierreihen besonders gut angepaßt ist. In der Wellenlehre beschreibt man die *Energie* durch ein solches quadratisches Integral. Das ist die physikalische Motivation dafür, daß man überhaupt mit der Approximation im quadratischen Mittel arbeitet.

Wir sind hier allerdings mehr daran interessiert, ob die Fourierreihe im gewöhnlichen Sinne (punktweise oder gleichmäßig) gegen die Funktion konvergiert. Mit dieser Frage beschäftigen wir uns im folgenden Paragraphen, und wir werden sehen, daß man dafür etwas eingeschränktere Funktionenklassen betrachten muß.

§6 Harmonische Analyse

In Kapitel I haben wir gelernt, daß die Überlagerung zweier harmonischer Sinusschwingungen gleicher Frequenz wieder eine solche ergibt. Ist die Kreisfrequenz $\omega = 1$, so kann man außerdem jede harmonische Sinusschwingung als Linearkombination von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ schreiben. Es handelt sich dabei immer um periodische Funktionen mit der Periode 2π. Diese (kleinste) Periode wird auch als *Wellenlänge* bezeichnet.

Die Funktionen $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ haben die Wellenlänge $\dfrac{2\pi}{n}$, denn es ist z.B.

$$\sin(n(t + \frac{2\pi}{n})) = \sin(nt + 2\pi) = \sin(nt).$$

Man spricht auch von *Oberschwingungen*. In der Praxis kommen solche Überlagerungen von Schwingungen und Oberschwingungen häufig vor.

Bei der harmonischen Analyse versucht man, eine periodische Bewegung in ihre harmonischen Bestandteile zu zerlegen. Ein guter Kandidat ist die Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten wir ja schon bestimmen können. Wir müssen jetzt allerdings wissen, wann eine Funktion tatsächlich durch ihre Fourierreihe dargestellt wird.

Dazu wollen wir zunächst einige Hilfsmittel bereitstellen:

IV.6.1 Hilfssatz. *Für $x \neq 2k\pi$ ist*

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Beweis: Sei $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathbf{j}nx}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(e^{\mathbf{j}x} - 1) D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathbf{j}(n+1)x} - \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathbf{j}nx} \\
&= e^{\mathbf{j}(N+1)x} - e^{-\mathbf{j}Nx}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $e^{-\mathbf{j}\frac{x}{2}}$ ergibt:

$$(e^{\mathbf{j}\frac{x}{2}} - e^{-\mathbf{j}\frac{x}{2}}) \cdot D_N(x) = e^{\mathbf{j}(N+\frac{1}{2})x} - e^{-\mathbf{j}(N+\frac{1}{2})x},$$

also

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \text{für } x \neq 2k\pi.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos(nx)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{N} (e^{\mathbf{j}nx} + e^{-\mathbf{j}nx})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathbf{j}nx} \\ &= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Funktion

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathbf{j}nx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

heißt *(N–ter) Dirichlet–Kern.*

Ist die Funktion f (auf einem beschränkten Intervall) stückweise stetig, so ist sie bis auf endlich viele Stellen stetig, und als Unstetigkeiten kommen höchstens Sprungstellen vor. Ist a eine solche Sprungstelle, so existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} f(a-) &= \lim_{x\to a-} f(x) \\ \text{und} \quad f(a+) &= \lim_{x\to a+} f(x). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$M_f(a) := \frac{1}{2}(f(a-) + f(a+)).$$

Ist f in a stetig, so ist $M_f(a) = f(a)$. An den Sprungstellen ist M_f gerade der Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte.

Um die Konvergenz der Fourierreihe gegen die Funktion beweisen zu können, müssen wir stärkere Bedingungen an die Glattheit der Funktion stellen. Dazu noch eine Bemerkung über Differenzierbarkeit in Unstetigkeitsstellen:

Ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwar nicht in x stetig, existiert aber der rechtsseitige Grenzwert $f(x+)$, so heißt f in x *rechtsseitig differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(x+) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}$$

existiert. Analog definiert man die linksseitige Differenzierbarkeit und die linksseitige Ableitung $f'(x-)$.

Definition.

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise glatt*, wenn sie bis auf endlich viele Ausnahmen stetig differenzierbar ist, und wenn in den Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte $f(x-)$ und $f(x+)$ und die einseitigen Ableitungen $f'(x-)$ und $f'(x+)$ existieren.

Ist f stückweise glatt, so ist f' stückweise stetig.

IV.6.2 Satz. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise glatt* **und** *stetig, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann kann man die Regel von der partiellen Integration in der folgenden Weise anwenden:*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = (f(t)g(t))\,\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Wir kennen den Satz bisher nur unter der Voraussetzung, daß auch f stetig differenzierbar ist. Da stückweise stetige Funktionen integriert werden können, macht die linke Seite nach wie vor Sinn.

Beweis: Es gibt eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b,$$

so daß f auf jedem Teilintervall $I_k := [x_k, x_{k+1}]$ stetig differenzierbar ist. Dort können wir dann partiell integrieren und erhalten:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)g(t)\,dt = f(x_{k+1}-)g(x_{k+1}) - f(x_k+)g(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g'(t)\,dt.$$

Da f nach Voraussetzung aber stetig ist, ist $f(x_k+) = f(x_k)$ und $f(x_{k+1}-) = f(x_{k+1})$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)g(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)g(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left[(f(t)g(t))\,\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g'(t)\,dt \right] \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left[f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g'(t)\,dt \right] \\
&= f(t)g(t)\,\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Schließlich brauchen wir noch den Mittelwertsatz in verallgemeinerter Form:

IV.6.3 Satz. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(t)p(t)\,dt = f(c) \cdot \int_a^b p(t)\,dt.$$

Beweis: Wie schon im Beweis von III.3.5. sei m das Minimum und M das Maximum von f auf $[a,b]$. Dann ist

$$m \cdot p(t) \le f(t)p(t) \le M \cdot p(t)$$

auf $[a,b]$, und wegen der Linearität und der Monotonie des Integrals folgt:

$$m \cdot \int_a^b p(t)\,dt \le \int_a^b f(t)p(t)\,dt \le M \cdot \int_a^b p(t)\,dt.$$

Durch $F(x) := f(x) \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ wird eine stetige Funktion auf $[a,b]$ definiert, die nach dem Zwischenwertsatz in einem geeigneten $c \in [a,b]$ den Wert $\int_a^b f(t)p(t)\,dt$ annehmen muß. $\square$

IV.6.4 Riemannsches Lemma. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und*

$$F(y) := \int_a^b f(t)\sin(yt)\,dt.$$

Dann ist $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0$.

Beweis: Als stückweise stetige Funktion ist f über $[a,b]$ integrierbar. Wir setzen

$$A := \int_a^b f(t)\,dt.$$

Nun sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es gibt eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ in Teilintervalle $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, so daß die zugehörige Untersumme $S_u(f,\mathfrak{Z})$ und Obersumme $S_o(f,\mathfrak{Z})$ jeweils von A um weniger als $\frac{\varepsilon}{4}$ entfernt ist. Das folgt aus der Integrierbarkeit. Also ist

$$0 \le S_o(f,\mathfrak{Z}) - S_u(f,\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $u_k = \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}$ und $o_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}$ bedeutet das:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (o_k - u_k)(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiter benutzen wir für $a \le \alpha < \beta \le b$ die Abschätzung

$$\Big|\int_\alpha^\beta \sin(yt)\,dt\Big| = \Big|\frac{\cos(y\beta) - \cos(y\alpha)}{y}\Big| \le \frac{2}{y},$$

sowie die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\sin(yt)\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\sin(yt)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - u_k)\sin(yt)\,dt + \sum_{k=0}^{N-1} u_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(yt)\,dt.$$

Wählt man jetzt $y_0 > \dfrac{4}{\varepsilon} \cdot \sum\limits_{k=0}^{N-1} |\,u_k\,|$, so ergibt sich für $y \ge y_0$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(t)\sin(yt)\,dt\Big| &\le \\
&\le \sum_{k=0}^{N-1} (o_k - u_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{2}{y} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} |\,u_k\,| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das liefert die gewünschte Konvergenz. $\square$

IV.6.5 Folgerung. *Sei $a > 0$ beliebig. Dann ist*

$$\boxed{\lim_{y\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(yx)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Für $0 < a < 2\pi$ ist außerdem

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\int_0^a D_N(x)\,dx = \int_0^\pi D_N(x)\,dx = \pi.}$$

BEWEIS: Wir setzen $x(t) = \dfrac{t}{y}$. Dann ist

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(yx)}{x}\,dx = \lim_{y\to\infty}\int_0^{ay}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Aus Kapitel III, §5, wissen wir, daß das uneigentliche Integral auf der rechten Seite konvergiert.

Es bleibt der Wert auszurechnen. Wir haben gerade gesehen, daß der Limes auf der linken Seite garnicht von a abhängt. Für $0 < a < 2\pi$ folgt aus dem Riemannschen Lemma:

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^a \sin(yx)\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)dx = 0. \qquad (*)$$

Daß die Funktion $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ stückweise stetig ist, also bei 0 einen rechtsseitigen Limes besitzt, sieht man durch zweimalige Anwendung der l'Hospitalschen Regel: Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} &= \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}} = \frac{f(x)}{g(x)},\\
\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\cos\frac{x}{2} - 1}{2\sin\frac{x}{2} + x\cos\frac{x}{2}},\\
\frac{f''(x)}{g''(x)} &= \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck strebt für $x \to 0$ gegen Null.

Unabhängig von der speziellen Wahl von $a \in (0, 2\pi)$ ist also wegen $(*)$

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(yx)}{2\sin(\frac{x}{2})}\,dx = \lim_{y\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(yx)}{x}\,dx\,.$$

Da wir die Konvergenz (auf der rechten Seite) schon bewiesen haben, reicht es, wenn wir zur Berechnung des Grenzwertes auf der linken Seite der Gleichung in y eine spezielle (unbeschränkte) Folge einsetzen, etwa $y_N := N + \dfrac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}$. Außerdem können wir z.B. $a = \pi$ setzen.

Es ist aber

$$\int_0^\pi \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx)\right)dx = \frac{\pi}{2},$$

unabhängig von N, denn es ist ja

$$\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi = 0 \qquad \text{für jedes } n \geq 1.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir können jetzt den entscheidenden Schritt in Richtung auf einen allgemeinen Konvergenzbeweis hin tun:

IV.6.6 Dirichletsche Integralformel. *Es sei f stückweise stetig und periodisch, und*

$$T_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

das N–te Fourierpolynom von f. Dann ist

$$T_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt.$$

Beweis: Setzt man die Integraldarstellungen der Koeffizienten a_0, a_n und b_n in die Definition von $T_N(x)$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
T_N(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\cos(nx))\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos(n(t-x))\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})(t-x))}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\tau)}{\sin\frac{\tau}{2}}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde die Substitution $t(\tau) = x + \tau$ (mit $t'(\tau) = 1$) vorgenommen. Die Integrationsgrenzen mußten wegen der Periodizität des Integranden nicht verändert werden! □

IV.6.7 Hauptsatz der harmonischen Analyse. *Die Funktion f sei stückweise glatt und periodisch. Dann konvergiert die Fourierreihe von f* **punktweise** *gegen M_f.*

Beweis: Wir halten einen Punkt $x \in (-\pi, +\pi)$ fest. (Zur Betrachtung der Randpunkte verschiebt man am besten das Integrationsintervall ein wenig und geht dann genauso vor!)

1) Für $t \in [0, \pi]$ setzen wir

$$s_+(t) := \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Offensichtlich ist s_+ auf $(0, \pi]$ stückweise stetig. Da die Funktion

$$g(t) := \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}$$

bei $t = 0$ stetig ist und dort den Wert 1 annimmt, verhalten sich $s_+(t)$ und $s_+(t)g(t) = \dfrac{f(x+t) - f(x+)}{t}$ bei Annäherung an 0 von rechts gleich. Und da f stückweise glatt ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(x+t) - f(x+)}{t}$. Also ist s_+ sogar auf $[0, \pi]$ stückweise stetig.

2) Aus dem Riemannschen Lemma folgt nun:

$$\lim_{y \to \infty} \int_0^\pi s_+(t) \sin(yt)\, dt = 0.$$

Wir wissen außerdem aus dem Beweis von Folgerung 6.5, daß folgender Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned}
&\lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+) \frac{\sin(yt)}{\sin \frac{t}{2}}\, dt \\
&= \; f(x+) \cdot \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt \\
&= \; f(x+) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \;=\; \frac{1}{2} f(x+).
\end{aligned}$$

Weil schließlich

$$\frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = s_+(t) + \frac{f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

ist, stimmt er mit dem Grenzwert

$$\lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin(yt)}{\sin \frac{t}{2}}\, dt$$

überein.

Also ist

$$\frac{1}{2} f(x+) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}\, dt.$$

Völlig analog beweist man:

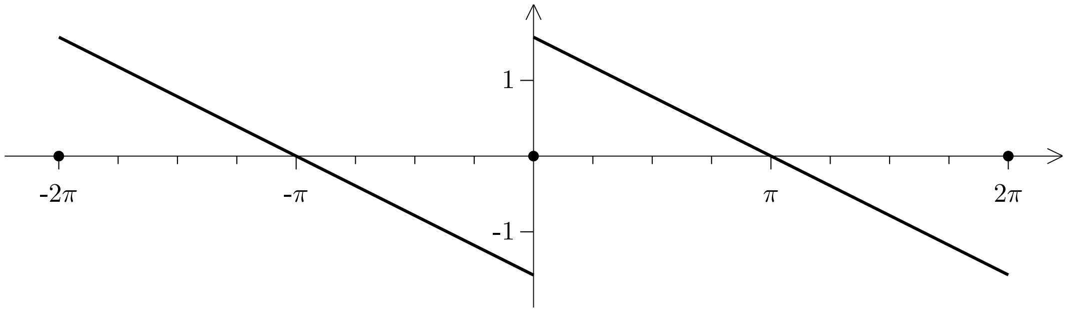
$$\frac{1}{2} f(x-) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}\, dt.$$

Die Addition beider Formeln ergibt (mit der Dirichletschen Integralformel):

$$\lim_{N \to \infty} T_N(x) = \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)).$$

Das war zu zeigen. □

Beispiel:



$$\text{Sei} \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{für } x \neq k \cdot 2\pi, \\ 0 & \text{für } x = k \cdot 2\pi. \end{cases}$$

Wir wollen die Fourierkoeffizienten von f berechnen. Es ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{2\pi}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n}.$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}(\pi x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^{2\pi} = 0, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,dx = 0 \\ \text{und} \quad b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f hat also die Gestalt

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Aus dem Hauptsatz der harmonischen Analyse können wir schließen, daß $S_f(x)$ punktweise gegen $f(x)$ konvergiert, denn f ist stückweise glatt, und es ist $M_f = f$.

Da f Sprungstellen aufweist, kann die Fourierreihe nicht gleichmäßig konvergieren. Wir wollen aber zeigen, daß sie es auf jedem Intervall $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ tut:

Betrachten wir also

$$R_N(x) := T_N(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{1}{2}(\pi - x)$$

für $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$ und kleines $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} \int_\pi^x \cos(nt)\,dt + \frac{1}{2}\int_\pi^x dt \\ &= \int_\pi^x \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt)\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\int_\pi^x D_N(t)\,dt \;=\; \int_\pi^x \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \end{aligned}$$

Dieses Integral werten wir mit Hilfe von partieller Integration und mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integration aus. Mit einem geeigneten c zwischen π und x ist

$$\begin{aligned} &\int_\pi^x \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \\ &= \frac{-\cos(N+\frac{1}{2})t}{(2N+1)\sin\frac{t}{2}}\Big|_\pi^x + \int_\pi^x \frac{\cos(N+\frac{1}{2})t}{2N+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)' dt \\ &= \frac{-\cos(N+\frac{1}{2})x}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}}\Big|_\pi^x + \frac{\cos(N+\frac{1}{2})c}{2N+1}\int_\pi^x \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)' dt \\ &= \frac{-\cos(N+\frac{1}{2})x}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}}\Big|_\pi^x + \frac{\cos(N+\frac{1}{2})c}{2N+1}\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(-\cos((N+\frac{1}{2})x) + \cos((N+\frac{1}{2})c)(1-\sin\frac{x}{2})\right). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$ ist $\dfrac{\varepsilon}{2} \le \dfrac{x}{2} \le \pi - \dfrac{\varepsilon}{2}$, also

$$0 < \sin\frac{\varepsilon}{2} \le \sin\frac{x}{2} < 1$$

und damit

$$1 < \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\,.$$

Außerdem ist $0 < 1 - \sin\dfrac{x}{2} < 1$. Daraus folgt:

$$|\,R_N(x)\,| \le \frac{2}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}} \le \frac{2}{(2N+1)\sin\frac{\varepsilon}{2}} \text{ für } \varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, daß (R_N) gleichmäßig gegen Null konvergiert, und damit (T_N) gleichmäßig gegen f.

Wie macht es sich nun bemerkbar, daß die Konvergenz in der Nähe von $x = 0$ *nicht* mehr *gleichmäßig* ist?

Wir müssen die Werte der Partialsummen $T_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}$ in der Nähe von $x = 0$ abschätzen. Um etwaige Maxima zu ermitteln, berechnen wir die erste Ableitung:

$$T_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$T_N'(x) = 0 \iff \sin(N+\frac{1}{2})x = \sin\frac{x}{2}.$$

Auch bei großem (aber festem) N kann x so klein gewählt werden, daß

$$0 < \frac{x}{2} < (N+\frac{1}{2})x < \pi$$

ist. Da der Sinus zwischen 0 und π jeden Wert (zwischen 0 und 1) genau zweimal annimmt, und zwar symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{2}$, tritt die erste positive Nullstelle von F_N' genau dort auf, wo

$$(N+\frac{1}{2})x = \pi - \frac{x}{2} \text{ ist, also bei } x = x_N := \frac{\pi}{N+1}.$$

Da $T_N(0) = 0$ und $T_N(x_N) > 0$ ist und dazwischen kein Extremwert liegt, muß T_N in x_N ein Maximum besitzen. Wir wollen den Wert von T_N in diesem Maximum berechnen:

$$\begin{aligned} T_N(x_N) &= T_N(x_N) - T_N(0) = \int_0^{x_N} T_N'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{x_N} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{x_N}{2}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = t(u) = \dfrac{2u}{2N+1}$ ist

$$\frac{t}{2} = \frac{u}{2N+1} \quad \text{und} \quad (N+\frac{1}{2})t = (2N+1)\frac{t}{2} = u.$$

Also ist

$$\begin{aligned} T_N(x_N) &= \int_0^{(N+\frac{1}{2})x_N} \frac{\sin(u)}{(2N+1)\sin(\frac{u}{2N+1})}\,du - \frac{\pi}{2N+2} \\ &= \int_0^{\pi(1-\varepsilon_N)} \frac{\sin u}{(2N+1)\sin(\frac{u}{2N+1})}\,du - \frac{\pi}{2N+1}, \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_N := \dfrac{1}{2N+2}$, denn es ist

$$(N+\frac{1}{2})x_N = \frac{(2N+1)\pi}{2N+2} = \pi\cdot(1-\varepsilon_N).$$

Für kleines positives x ist $0 < \sin x < x$. Also gilt für großes N:

$$0 < \sin\frac{u}{2N+1} < \frac{u}{2N+1},$$

und daher

$$\frac{\sin(u)}{(2N+1)\sin(\frac{u}{2N+1})} > \frac{\sin(u)}{u}.$$

Damit ist

$$T_N(x_N) > \int_0^{\pi(1-\varepsilon_N)} \frac{\sin(u)}{u}\,du - \frac{\pi}{2N+2}.$$

Läßt man N gegen Unendlich gehen, so strebt ε_N gegen Null und $\frac{\pi}{2N+2}$ gegen Null.

Also liegt $T_N(x_N)$ für großes N in der Nähe der festen Zahl

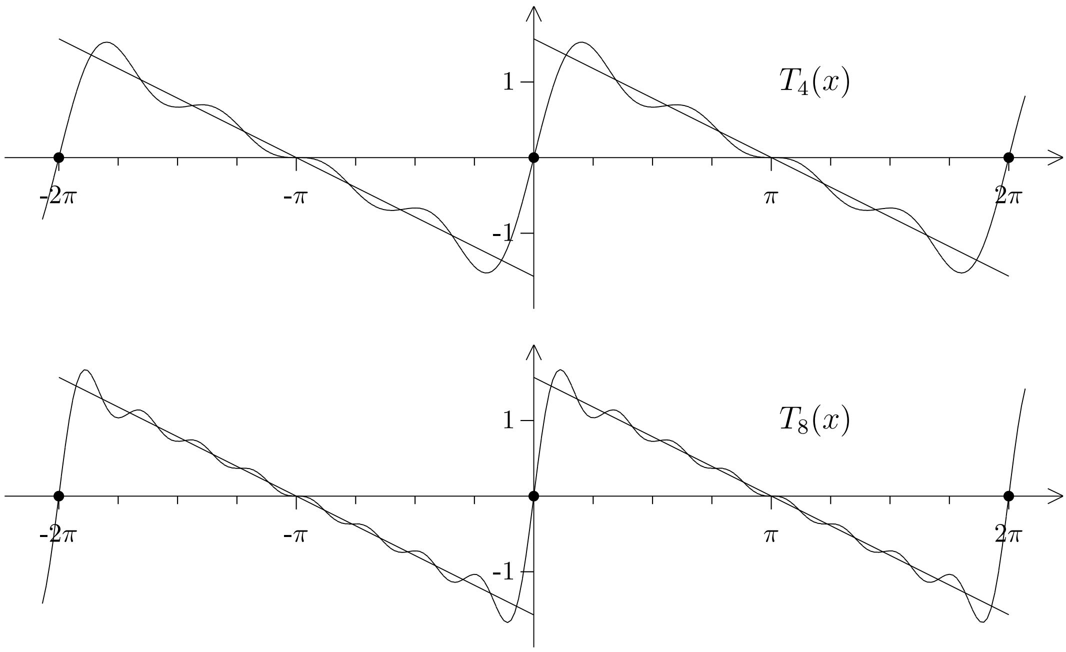
$$\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}\,du \;=\; 1.85193705\ldots\,,$$

während

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2} = 1.570\ldots$$

ist. Die Partialsummen der Fourierreihe schießen in der Nähe der Unstetigkeitsstelle um einen unangenehm hohen Betrag über das Ziel hinaus, und die Approximation wird um so schlechter, je größer das N ist. Dieses Verhalten wird das *Gibbs'sche Phänomen* genannt, und es ist bei allen unstetigen stückweise glatten periodischen Funktionen zu beobachten.

Betrachten wir noch zwei Partialsummen im Bild:



Das eben betrachtete Beispiel ist so typisch, daß wir noch einiges daraus lernen können.

So fällt z.B. auf, daß nur Sinus–Terme in der Reihe auftreten. Das hat damit zu tun, daß die Funktion $f(x)$ auf $[-\pi,+\pi]$ ungerade ist, also symmetrisch zum Nullpunkt. Allgemein gilt:

IV.6.8 Satz.
$S_f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ *sei die (formale) Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion* $f(x)$. *Dann gilt:*

1. *Ist* f *gerade (also* $f(-x) = f(x)$ *), so ist* $b_n = 0$ *für* $n \geq 1$.

2. *Ist* f *ungerade (also* $f(-x) = -f(x)$ *), so ist* $a_n = 0$ *für* $n \geq 1$.

Beweis: Ist f gerade, so ist $f(x)\sin(nx)$ für jedes $n \ge 1$ ungerade, und dann ist

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0,$$

weil sich die positiven und die negativen Teile gerade wegheben.

Ist f ungerade, so ist $f(x)\cos(nx)$ ungerade und $a_n = 0$. □

Auch die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz können wir jetzt umfassender beantworten.

IV.6.9 Satz über gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen.

Ist die Funktion f stückweise glatt, periodisch **und zusätzlich stetig**, *so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.*

Beweis:

Sei $S_f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$.

Die Funktion $g := f'$ ist stückweise stetig, also kann man formal auch ihre Forierreihe bilden:

$$S_g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx)).$$

Weil f stetig und stückweise glatt ist, kann man die verallgemeinerte Regel der partiellen Integration (Satz 6.2) anwenden:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}(f(t)\cos(nt))\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)n\sin(nt)\,dt \\ &= n\cdot b_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}(f(t)\sin(nt))\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)n\cos(nt)\,dt \\ &= -n\cdot a_n. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{\pi}f(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Nun erinnern wir uns an die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt.$$

Daraus folgt, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2)$ konvergent ist. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\le \left(|\,c_n\,| - \frac{1}{n}\right)^2 = c_n^2 - \frac{2|\,c_n\,|}{n} + \frac{1}{n^2} \\ \text{und}\quad 0 &\le \left(|\,d_n\,| - \frac{1}{n}\right)^2 = d_n^2 - \frac{2|\,d_n\,|}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$| a_n | + | b_n | = \frac{| c_n |}{n} + \frac{| d_n |}{n} \leq \frac{1}{2}(c_n^2 + d_n^2 + \frac{2}{n^2}).$$

Damit besitzt $S_f(x)$ eine konvergente Majorante, und nach dem Weierstraß–Kriterium ist $S_f(x)$ gleichmäßig konvergent. $\square$

Bei dem oben betrachteten Beispiel hatten wir etwas mehr herausbekommen, nämlich die gleichmäßige Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Unstetigkeitsstelle enthält. Auch das ist allgemein richtig:

IV.6.10 Satz. *Ist f stückweise glatt und periodisch und $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, das keine der Unstetigkeitsstellen von f enthält, so konvergiert die Fourierreihe $S_f(x)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f.*

BEWEIS: Sei $\psi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ die Funktion aus dem Beispiel. Dann hat ψ in $[-\pi, +\pi]$ genau eine Sprungstelle der Höhe π, nämlich bei $x = 0$.

Sei $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ein Punkt, h eine reelle Zahl. Dann hat die Funktion $\frac{h}{\pi}\psi(x - x_0)$ nur jeweils in den Punkten $x_0 + 2k\pi$ eine Sprungstelle (von der Höhe h), und von diesen Stellen liegt nur x_0 selbst in $[-\pi, \pi]$.

Hat jetzt $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ die Sprungstellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit den Höhen $h_1, h_2, \ldots, h_k$, so hat

$$F(x) := f(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{\pi}\psi(x - x_i)$$

überhaupt keine Sprungstellen mehr. Die Fourierreihe S_F konvergiert überall gleichmäßig, und die Fourierreihe des Korrekturterms konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig, das keine der Sprungstellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ enthält. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Beispiele:

1. Wir beginnen mit einer Fourierreihe, zu der wir die passende Funktion suchen:

   Sei $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Da die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Majorante ist, konvergiert $F(x)$ überall gleichmäßig, stellt also eine stetige Funktion dar.

   Die gliedweise differenzierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(nx)}{n} = \frac{x - \pi}{2}$ konvergiert auf jedem Intervall $I_\varepsilon = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ gleichmäßig. Auf solchen Intervallen ist also $F'(x) = \frac{x - \pi}{2}$, d.h.

   $$F(x) = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 + C,$$

   mit einer geeigneten Konstante C.

   Die Gleichung gilt zunächst nur außerhalb der Punkte $2n\pi$, aber da $F(x)$ als gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen selbst wieder stetig ist, gilt sie sogar überall.

Nun ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 dx + 2\pi C\\ &= \frac{(x-\pi)^3}{12}\Big|_0^{2\pi} + 2\pi C\\ &= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi C\end{aligned}$$

und andererseits wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $F(x)$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Also ist $C = -\dfrac{\pi^2}{12}$ und

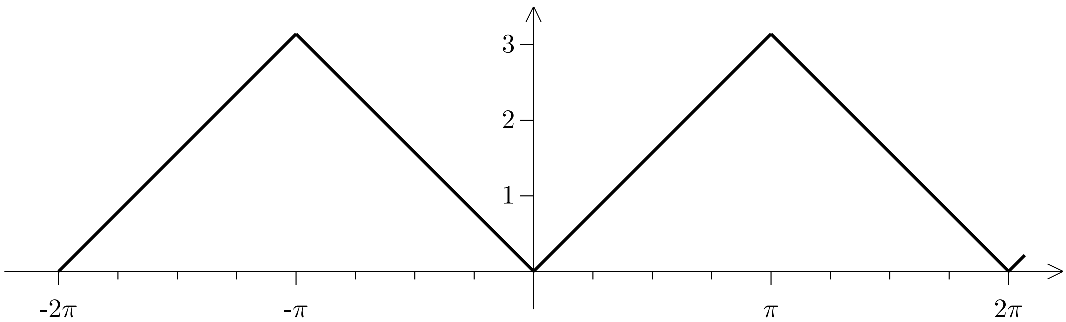
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Der Fall $x = 0$ ergibt insbesondere die Formel

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

So liefert uns die Fouriertheorie den Grenzwert einer Reihe, deren Konvergenz uns schon lange bekannt ist.

2. Als nächstes betrachten wir die Fourierreihe einer stetigen Funktion:



Wir definieren $f(x) := |\,x\,|$ auf $[-\pi, \pi]$ und setzen wie üblich periodisch fort.

Dann erhalten wir folgende Fourierkoeffizienten:

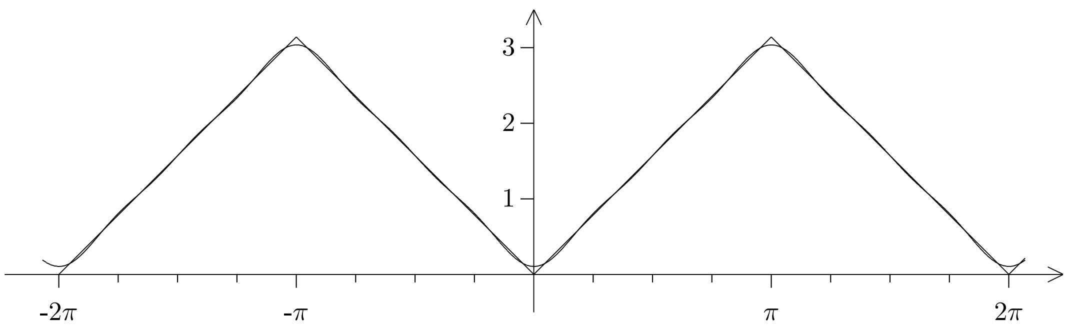
$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\cdot t^2\,\Big|_0^\pi = \pi,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(t\cdot\frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(nt)}{n^2}\,\Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi)-1)\\
&= \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}\\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}\\
\text{und}\quad b_n &= 0, \quad \text{weil } f \text{ eine gerade Funktion ist.}
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir die Fourierreihe

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \cdots).$$

Hier ist schon $T_5(x)$ eine gute Approximation:



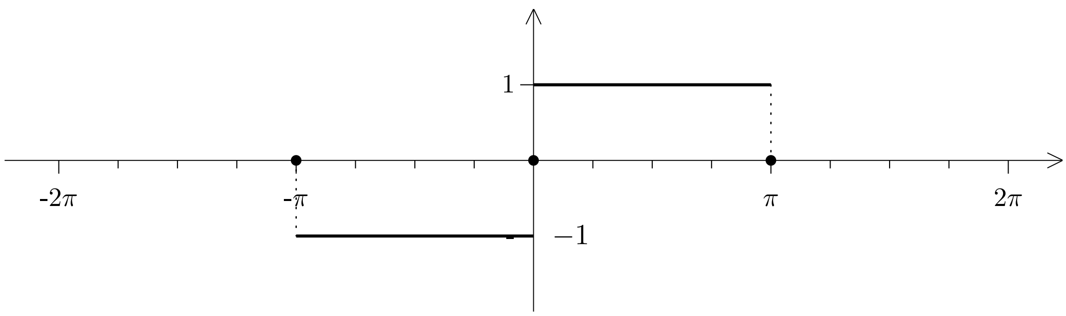
Insbesondere ergibt sich für $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

3. Schließlich betrachten wir noch einen typischen „Rechteckimpuls“:

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } -\pi < x < 0,\\ 0 & \text{für } x = 0,\\ 1 & \text{falls } 0 < x < \pi.\end{cases}$$



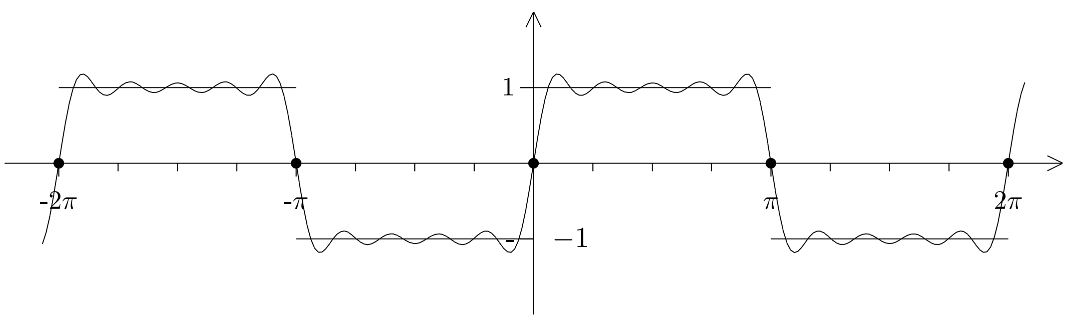
Da f eine ungerade Funktion ist, ist $a_n = 0$ für alle n. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nt)\,dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(nt)}{n}\Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2\pi}{n}((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe hat also die Gestalt

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Wegen der Unstetigkeitsstellen tritt natürlich wieder das Gibbs'sche Phänomen auf! Wir skizzieren das Polynom $T_9(x)$:



Wir fassen die Ergebnisse in einem Diagramm zusammen:

$$
\begin{array}{ccc}
f \text{ stückweise stetig} & \Longrightarrow & \exists \ \text{(formale) Fourierreihe } S_f. \\
 & & (S_f \to f \text{ im quadratischen Mittel}) \\
\Uparrow & & \\
f \text{ stückweise glatt} & \Longrightarrow & S_f \to f \text{ punktweise,} \\
 & & \text{gleichmäßig auf allen abg. Intervallen,} \\
 & & \text{die keine Unstetigkeit enthalten.} \\
 & & \text{Gibbs'sches Phänomen tritt auf.} \\
\Uparrow & & \\
f \text{ stetig} & & \\
\text{und stückweise glatt} & \Longrightarrow & S_f \to f \text{ gleichmäßig.}
\end{array}
$$