Kapitel III

Differential- und Integralrechnung

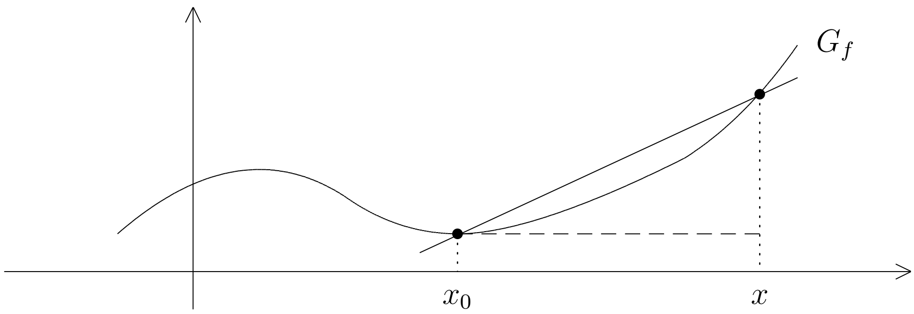
§1 Differenzierbare Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit „genügend glattem“ Graphen (was das heißt, werden wir noch sehen).

Es seien x, $x_0 \in I$. Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ bezeichnet man als *Sekante* durch diese beiden Punkte. Sie kann nicht vertikal verlaufen, denn dann gäbe es zu einem Argument mehrere Funktionswerte. Also kann man die Sekante in der Form $y = mx + b$ schreiben. Die Richtung m ist der Tangens des Steigungswinkels, also gegeben durch den *Differenzenquotienten*

$$m = \Delta f(x_0, x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Hält man x_0 fest und läßt x gegen x_0 laufen, so strebt die Richtung der Sekante gegen die Richtung der Tangente an G_f in $(x_0, f(x_0))$.



Definition.

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ *differenzierbar*, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt die *Ableitung* von f in x_0.

Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ nennt man die *Tangente* an den Graphen von f im Punkte $(x_0, f(x_0))$.

Bemerkung: Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung m wird durch die lineare Funktion

$$L(x) := f(x_0) + m(x - x_0)$$

beschrieben. Wie gut f durch diese lineare Funktion approximiert wird, kann man an der Differenz $r(x) := f(x) - L(x)$ ablesen. Natürlich ist $r(x_0) = 0$. Von der Tangente erwarten wir aber etwas mehr. Ist $x \neq x_0$, so ist

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \Delta f(x_0, x) - m.$$

Nur wenn $m = f'(x_0)$ ist, strebt dieser Ausdruck für $x \to x_0$ gegen 0. Das bedeutet, daß die Tangente tatsächlich diejenige Gerade ist, die f in der Nähe von x_0 am besten approximiert. Sie ist übrigens der Graph der Funktion

$$T_{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Wir bezeichnen manchmal auch diese Funktion als *Tangente* an f in x_0.

Ist f in x_0 differenzierbar, so ist die Funktion

$$D(x) := \begin{cases} \Delta f(x_0, x) & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

in x_0 stetig. Für $x \neq x_0$ ist außerdem $f(x) = f(x_0) + D(x) \cdot (x - x_0)$. Diese Gleichung bleibt erhalten, wenn man $x = x_0$ setzt. Also kann man vermuten, daß die folgende Aussage richtig ist:

III.1.1 Satz. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn gilt:*

Es gibt eine Funktion $D : I \to \mathbb{R}$, die stetig in x_0 ist, so daß

$$f(x) = f(x_0) + D(x) \cdot (x - x_0)$$

für alle $x \in I$ ist.

BEWEIS: Daß die Existenz einer solchen Funktion D aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt, haben wir schon gesehen.

Wenn umgekehrt das Kriterium erfüllt ist, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \Delta(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

und f ist in x_0 differenzierbar. □

Mit diesem Kriterium sind wir im Besitz einer alternativen Definition der Differenzierbarkeit, die zwar nicht ganz so anschaulich ist, sich in Beweisen aber manchmal als vorteilhaft erweist.

Setzt man übrigens $r(x) := f(x) - T_{x_0}(x)$, so ist

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - T_{x_0}(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = D(x) - f'(x_0).$$

Insbesondere ist $D(x_0) = f'(x_0)$. Aber Vorsicht ist geboten! Für $x \neq x_0$ hat $D(x)$ normalerweise nichts mit $f'(x)$ zu tun.

Als die Differentialrechnung erfunden wurde, hatte man zunächst die Vorstellung, daß die Differenzen $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ und $\Delta x := x - x_0$ gegen unendlich kleine Größen df und dx konvergieren, und daß die Ableitung $f'(x_0)$ daher ein *Differentialquotient* $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ sei. Diese Vorstellung ist natürlich unsinnig, aber die Bezeichnungsweise hat sich dennoch erhalten.

Neben der Bestimmung von Tangenten war eine der Hauptmotivationen für die Erfindung der Differentialrechnung die Bestimmung von Extremwerten.

Definition.

f hat in $x_0 \in I$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), falls gilt:

$\exists\, \varepsilon > 0,$ so daß $f(x) \le f(x_0)$ (bzw. $f(x) \ge f(x_0)$) für $|\, x - x_0\,| < \varepsilon$ ist.

In beiden Fällen sagt man, f hat in x_0 einen (lokalen) Extremwert.

Man beachte: Ist f in der Nähe von x_0 konstant, so hat f dort nach unserer Definition auch einen Extremwert! Das widerspricht ein wenig dem normalen Sprachgebrauch. Wir führen deshalb noch einen zusätzlichen Begriff ein:

Definition.

$f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein *isoliertes Maximum* (bzw. ein *isoliertes Minimum*, falls gilt:

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ so daß } f(x) < f(x_0) \text{ für } |\, x - x_0\,| < \varepsilon \text{ und } x \ne x_0 \text{ ist}$$

$$(\text{bzw. } f(x) > f(x_0) \text{ im Falle des Minimums}).$$

Bleiben wir zunächst bei den gewöhnlichen Extremwerten:

Wenn etwa x von links nach rechts ein Maximum bei x_0 durchläuft, dann hat die Tangente in x zunächst eine positive Steigung, verläuft dann immer flacher und neigt sich schließlich nach unten. Von der Anschauung her erwarten wir, daß der Funktionsgraph in einem Maximum (und analog in einem Minimum) eine waagerechte Tangente besitzt. Tatsächlich gilt:

III.1.2 „Notwendiges Kriterium" für Extremwerte. *Sei I ein Intervall, x_0 ein innerer Punkt von I, $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.*

Wenn f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall des lokalen Maximums, der andere geht analog.

Es ist dann $f(x) \le f(x_0)$ für x nahe bei x_0. Ist $x < x_0$, so ist $x - x_0 < 0$ und daher $\Delta f(x_0, x) \ge 0$. Ist jedoch $x > x_0$, so ist $\Delta f(x_0, x) \le 0$. Dann muß $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \Delta f(x_0, x) = 0$ sein. $\square$

Will man also die Extremwerte einer Funktion bestimmen, so sollte man ihre Ableitung kennen. Wir gehen jetzt daran, solche Ableitungen auszurechnen:

Beispiele:

1. Ist $f(x) \equiv c$ konstant, so ist
$$\Delta f(x_0, x) = \frac{c-c}{x-x_0} \equiv 0,$$
unabhängig von x. Also ist immer $f'(x_0) = 0$.

2. Ist $f(x) := x$, so ist $\Delta f(x_0, x) \equiv 1$, also immer $f'(x_0) = 1$.

3. Ist $f(x) := x^n$, so ist
$$\Delta f(x_0, x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} x_0^i,$$
also
$$f'(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1-i} x_0^i = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}.$$

4. Ist $f(x) := \dfrac{1}{x}$, so gilt für $x \neq 0$ und $x_0 \neq 0$:
$$\Delta f(x_0, x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x x_0}, \quad \text{also } f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

5. Sei $f(x) := \sqrt{x}$. Wir betrachten die Funktion nur für $x > 0$. Geschicktes Kürzen zeigt:
$$\Delta f(x_0, x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$
also $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

6. Sei $f(x) := \sin(x)$. Setzt man $h := x - x_0$, so erhält man:
$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0, x) &= \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{x - x_0} \\
&= \cos(x_0) \cdot \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x_0) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h}.
\end{aligned}$$
$$\text{Da } \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \text{ und } \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \text{ ist,}$$
$$\text{existiert } f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \Delta f(x_0, x_0 + h) = \cos(x_0).$$

Auf die Dauer ist diese Vorgehensweise etwas mühsam. Wir werden nun einige Differentiations–Regeln aufstellen.

Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar, so sagt man, f ist *auf I differenzierbar*. Durch $x \mapsto f'(x)$ wird dann eine neue Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ definiert.

Ist f' in x_0 differenzierbar, so nennt man f auch in x_0 *zweimal differenzierbar*, und man schreibt:

$$f''(x_0) := (f')'(x_0).$$

Entsprechend definiert man höhere Ableitungen f''', $f^{(4)}$, ...

III.1.3 Ableitungsregeln. *f und g seien in x_0 differenzierbar. Dann sind sie in x_0 auch stetig, und es gilt:*

1. *Linearität:*
$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0).$$

2. *Produktregel:*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

3. *Einfache Quotientenregel (für $f(x_0) \neq 0$):*
$$(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

4. *Allgemeine Quotientenregel (für $g(x_0) \neq 0$):*
$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

5. *Kettenregel: Ist h in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist*
$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

6. *Ableitung der Umkehrfunktion: Ist f umkehrbar, $f'(x_0) \neq 0$ und $y_0 := f(x_0)$, so ist f^{-1} in y_0 differenzierbar, und es gilt:*
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Wir müssen zunächst zeigen, daß eine differenzierbare Funktion auch stetig ist: Dazu schreiben wir f in der Form $f(x) = f(x_0) + D(x) \cdot (x - x_0)$, mit einer in x_0 stetigen Funktion D. Als Zusammensetzung stetiger Funktionen ist f dann auch selbst stetig in x_0.

1) Wir betrachten die Differenzenquotienten:

Es ist $\Delta(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x_0, x) = \alpha \cdot \Delta f(x_0, x) + \beta \cdot \Delta g(x_0, x)$. Die Anwendung der Grenzwertsätze liefert das gewünschte Ergebnis.

2) Hier ist ein ganz kleiner Trick nötig. Es ist

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0)),$$

also $\Delta(f \cdot g)(x_0, x) = \Delta f(x_0, x) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \Delta g(x_0, x)$. Der Übergang zum Limes (mit Hilfe der Grenzwertsätze und der Stetigkeit von g in x_0) liefert die Produktregel.

Wir beweisen nun erst einmal (5): Mit Hilfe von Differenzenquotienten wird das etwas problematisch, aber wir haben ja noch eine zweite Charakterisierung der Differenzierbarkeit: Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + D(x)\cdot(x-x_0) \\ \text{und} \quad h(y) &= h(y_0) + D^*(y)\cdot(y-y_0) \end{aligned}$$

mit einer in x_0 stetigen Funktion D und einer in $y_0 := f(x_0)$ stetigen Funktion D^*. Dann ist

$$\begin{aligned} h\circ f(x) &= h(y_0) + D^*(f(x))\cdot(f(x)-f(x_0)) \\ &= h\circ f(x_0) + (D^*(f(x))\cdot D(x))\cdot(x-x_0). \end{aligned}$$

Da die Funktion $x \mapsto D^*(f(x))\cdot D(x)$ in x_0 stetig ist, ist $h\circ f$ in x_0 differenzierbar, mit $(h\circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

3) Sei $h(x) := \dfrac{1}{x}$. Dann ist $\dfrac{1}{f} = h\circ f$. Die Ableitung von h kennen wir schon, und die Kettenregel liefert dann die gewünschte Quotientenregel.

4) folgt aus (2) und (3), denn es ist $\dfrac{f}{g} = f\cdot\dfrac{1}{g}$.

6) Ist f umkehrbar, $y_0 := f(x_0)$, $y := f(x)$ und $y \neq y_0$, so ist auch $x \neq x_0$, und es folgt:

$$\Delta f^{-1}(y_0,y) = \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\Delta f(x_0,x)}.$$

Ist nun $f'(x_0) \neq 0$, so existiert

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{x\to x_0} \Delta f^{-1}(f(x_0),f(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\Delta f(x_0,x)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Die folgenden Regeln sollte man sich merken:

$$\boxed{\begin{aligned} (x^n)' &= n\cdot x^{n-1} && \text{für } n\in\mathbb{N},\ x \text{ beliebig,} \\ (x^q)' &= q\cdot x^{q-1} && \text{für } q\in\mathbb{Q},\ x>0, \\ \sin'(x) &= \cos(x) && \text{für } x\in\mathbb{R}, \\ \cos'(x) &= -\sin(x) && \text{für } x\in\mathbb{R}, \\ \tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{für } x\neq \tfrac{\pi}{2}+n\cdot\pi, \\ \exp'(x) &= \exp(x), && \\ \ln'(x) &= \frac{1}{x}. && \end{aligned}}$$

Zum Beweis: Die erste Formel haben wir schon bewiesen, die zweite läßt sich mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion leicht daraus herleiten.

Daß $\sin'(x) = \cos(x)$ ist, haben wir schon gezeigt. Nun setzen wir $g(x) := x + \dfrac{\pi}{2}$. Dann ist $\cos(x) = \sin(g(x))$, also

$$\cos'(x) = \sin'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x).$$

Mit der Quotientenregel folgt schließlich:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \quad = \quad \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Den Beweis der beiden letzten Formeln müssen wir auf später verschieben.

Es kann natürlich auch vorkommen, daß eine Funktion in einem Punkt nicht differenzierbar ist. Wir betrachten

$$f(x) := |\,x\,| = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases} .$$

Offensichtlich existiert $f'(x) = +1$ für $x > 0$, und für $x < 0$ ist $f'(x) = -1$. Im Nullpunkt sieht es aber problematisch aus:

Es ist $\lim\limits_{x \to 0+} \Delta f(0, x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0-} \Delta f(0, x) = -1$. Wenn sich jedoch links- und rechtsseitiger Grenzwert voneinander unterscheiden, dann kann der gewöhnliche Grenzwert nicht existieren! Damit ist $|\,x\,|$ in $x = 0$ nicht differenzierbar. Anschaulich ist das klar, denn der Funktionsgraph hat dort einen Knick und kann dort deshalb keine Tangente besitzen.

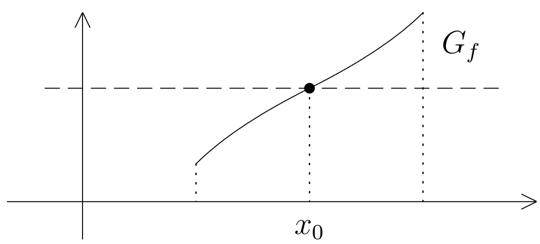
Zurück zur Extremwertbestimmung! Wir suchen nach einem Kriterium, das hinreichend für die Existenz eines Extremums ist, und das zugleich hilft, zwischen Minimum und Maximum zu unterscheiden. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ verschwindet im Nullpunkt, obwohl f dort keineswegs ein Extremum besitzt. Wir brauchen eine klare Definition für das „Ansteigen“ oder „Fallen“ einer Funktion in einem Punkt:

Definition.

Die Funktion f *steigt bei* x_0, falls gilt:

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

für genügend kleines positives h.



Die Funktion f *fällt bei* x_0, falls gilt:

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$$

für genügend kleines positives h.

III.1.4 Satz. *Sei f in x_0 differenzierbar.*

1. *Wenn f bei x_0 steigt, dann ist $f'(x_0) \geq 0$*
   Ist umgekehrt $f'(x_0) > 0$, so steigt f bei x_0.

2. *Wenn f bei x_0 fällt, dann ist $f'(x_0) \leq 0$.*
   Ist umgekehrt $f'(x_0) < 0$, so fällt f bei x_0.

Anschaulich ist das klar: Wenn die Tangente in x_0 mit der positiven x-Achse einen Winkel zwischen 0° und 90° einschließt, steigt der Graph von f dort von links unten nach rechts oben an. Ist der Winkel größer als 90°, so senkt sich der Graph von links oben nach rechts unten. Wir verzichten daher auf einen exakten Beweis.

III.1.5 Folgerung. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

1. *Ist $f'(x) > 0$ für* **alle** *$x \in I$, so ist f auf I streng monoton wachsend.*

2. *Ist $f'(x) < 0$ für* **alle** *$x \in I$, so ist f auf I streng monoton fallend.*

Auch auf den Beweis der Folgerung verzichten wir hier.

Mit dem Monotonie–Kriterium haben wir ein bequemes Hilfsmittel in der Hand, um die Umkehrbarkeit von Funktionen festzustellen.

Beispiel :

Es ist $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1 > 0$ für $-\dfrac{\pi}{2} < x < +\dfrac{\pi}{2}$. Also ist $\tan(x)$ in diesem Bereich streng monoton wachsend und daher injektiv. An den Intervallgrenzen strebt $\tan(x)$ gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$. Da $\tan(x)$ im Innern des Intervalls stetig ist, bildet die Funktion das Intervall surjektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Somit gilt:

$$\tan : \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R} \quad \text{ist bijektiv!}$$

Wir haben das schon in Kapitel I festgestellt, aber hier war es einfacher. Auch die Umkehrfunktion, den *Arcustangens*, haben wir schon an früherer Stelle kennengelernt. Nun wissen wir auch, daß $\arctan(x)$ differenzierbar ist, und es gilt:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Bemerkenswert ist, daß die Ableitung des Arcustangens eine rationale Funktion ist!

Jetzt wollen wir endlich das Kriterium für Extremwerte formulieren:

III.1.6 Erstes „hinreichendes Kriterium“ für Extremwerte.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt und $f'(x_0) = 0$.

Wenn $f'(x)$ bei $x = x_0$ das Vorzeichen wechselt, dann besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Extremum. Genauer gilt:

Ist f' bei x_0 fallend, so besitzt f in x_0 ein isoliertes Maximum.
Ist f' bei x_0 steigend, so besitzt f in x_0 ein isoliertes Minimum.

BEWEIS: Es sei $f'(x_0) = 0$. Wir betrachten nur den Fall des Maximums.

Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß alle x mit $|\,x - x_0\,| < \varepsilon$ noch im Intervall I liegen, und daß

$$f'(x_0 - h) > f'(x_0) = 0 > f'(x_0 + h) \qquad \text{für } 0 < h < \varepsilon$$

ist. Dann ist f zwischen $x_0 - \varepsilon$ und x_0 streng monoton wachsend und zwischen x_0 und $x_0 + \varepsilon$ streng monoton fallend. Also ist $f(x) < f(x_0)$ für alle x mit $|\,x - x_0\,| < \varepsilon$ und $x \neq x_0$. Das heißt, daß f in x_0 ein isoliertes Maximum besitzt. □

Beispiele :

1. Sei $f(x) := 2x^2 - 3x + 1$. Dann ist $f'(x) = 4x - 3$. Ein lokales Extremum kann nur dann in x_0 vorliegen, wenn $f'(x_0) = 0$ ist, also $x_0 = \dfrac{3}{4}$.

   Für $x < \dfrac{3}{4}$ ist $f'(x) < 0$, für $x > \dfrac{3}{4}$ ist $f'(x) > 0$. Also ist f' bei x_0 steigend, f besitzt in x_0 ein lokales Minimum (das hier zugleich auch das globale Minimum ist).

2. Sei $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

   Dann ist $f(x) = x \cdot D(x)$, mit $D(x) := \begin{cases} 2x + x \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

   Da der Sinus beschränkt bleibt, ist D in $x = 0$ stetig, also f überall differenzierbar und $f'(0) = 0$. Da $g(x) := 2 + \sin \frac{1}{x}$ stets ≥ 1 ist, ist $f(x) = x^2 \cdot g(x) > 0$ für $x \neq 0$. Also besitzt f im Nullpunkt ein globales (und damit erst recht ein lokales) Minimum. Dennoch ist f' in $x = 0$ weder steigend noch fallend. Für $x \neq 0$ ist nämlich

   $$f'(x) = 4x + 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos \frac{1}{x} = 4x + 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

   Die beiden ersten Terme werden in der Nähe von $x = 0$ beliebig klein, aber der dritte Term nimmt beliebig nahe beim Nullpunkt immer wieder die Werte 1 und -1 an. Also wechselt f' bei einseitiger Annäherung an 0 unendlich oft das Vorzeichen.

   Das bedeutet, daß das hinreichende Kriterium keineswegs notwendig ist!

Die Anwendung des 1. hinreichenden Kriteriums ist manchmal etwas mühsam, denn man muß das Verhalten von f' in einer ganzen Umgebung des mutmaßlichen Extremums studieren. Einfacher wird es, wenn man noch die zweite Ableitung zu Hilfe nimmt:

III.1.7 Zweites „hinreichendes Kriterium“ für Extremwerte.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt. f besitzt in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. Minimum), wenn gilt:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. $f''(x_0) < 0$ *(bzw.* $f''(x_0) > 0$*).*

Beweis: Ist $f''(x_0) < 0$, so ist f' in x_0 fallend. Ist $f''(x_0) > 0$, so ist f' in x_0 steigend. Der Rest folgt mit dem ersten Hinreichenden Kriterium. $\square$

Das zweite Kriterium läßt sich bequemer nachprüfen, aber man verschenkt gegenüber dem ersten etwas Information, und deshalb muß man darauf gefaßt sein, daß in gewissen Fällen das erste Kriterium noch anwendbar ist, das zweite aber nicht.

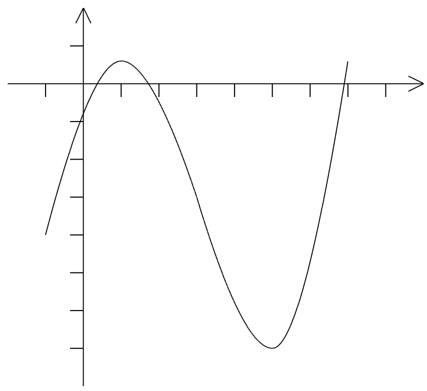
Beispiele:

1. Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x) := 2x^2 - 3x + 1$. Es ist $f''(x) = 4 > 0$, also muß in $x_0 = \dfrac{3}{4}$ ein Minimum vorliegen.

2. Sei $f(x) := \dfrac{1}{4} \cdot (x^3 - 9x^2 + 15x - 4)$.

   Dann ist $f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{9}{2}x + \dfrac{15}{4}$
   und $f''(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{2}$.
   Also gilt:

   $$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot (6 \pm \sqrt{36 - 20}) \\ &\qquad\quad\; = 3 \pm 2. \end{aligned}$$

   Da $f''(1) = -3 < 0$ ist, hat f in $x = 1$ ein isoliertes Maximum.
   Da $f''(5) = +3 > 0$ ist, hat f dort ein isoliertes Minimum.

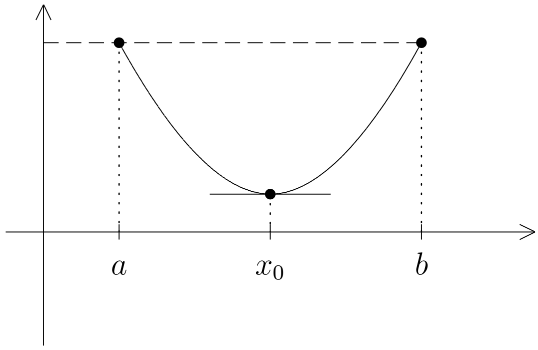
3. Sei $f(x) := x^4$. Dann ist $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$.

   Offensichtlich ist $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Aber es ist $f''(0) = 0$, das zweite hinreichende Kriterium läßt sich nicht anwenden! Andererseits gilt:

   Für $x > 0$ ist $f'(x) < 0$, und für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$. Also ist f' in 0 steigend, und f besitzt dort ein Minimum!

§2 Mittelwertsatz und Taylorsche Formel

II.2.1 Der Satz von Rolle. *Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Innern von I differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es einen inneren Punkt x_0 von I mit $f'(x_0) = 0$.*



BEWEIS: Sei $c := f(a) = f(b)$. Ist $f(x) \equiv c$ auf ganz I, so ist auch $f'(x) \equiv 0$.

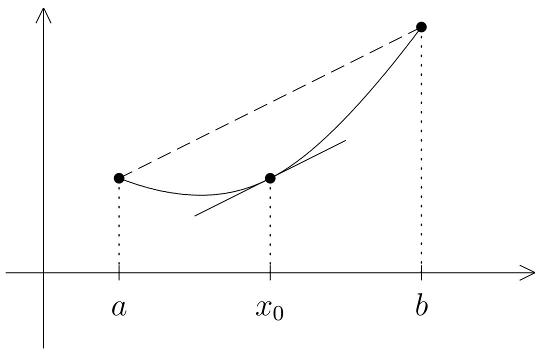
Ist f auf I nicht konstant, so muß entweder das Minimum oder das Maximum von f im Innern von I liegen. Und dort muß dann f' verschwinden. □

Der folgende wichtige Satz ist eine einfache Folgerung:

II.2.2 Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Innern von I differenzierbar.

Dann gibt es einen Punkt x_0 im Innern von I mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



BEWEIS: Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte lineare Funktion mit $L(a) = f(a)$ und $L(b) = f(b)$ (also die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$). Schreibt man L in der Form $L(x) = mx + b$, so ist $L'(x) \equiv m$ und $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Setzen wir $g := f - L$ auf I, so ist $g(a) = g(b) = 0$ und $g'(x) = f'(x) - m$. Nach dem Satz von Rolle, angewandt auf die Funktion g, existiert ein Punkt x_0 im Innern von I mit $g'(x_0) = 0$, also $f'(x_0) = m$. □

So einfach der Beweis, so mächtig die Konsequenzen:

II.2.3 Folgerung 1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von I differenzierbar.*

Ist $f'(x) \equiv 0$, so ist f konstant.

BEWEIS: Sei $I = [a, b]$, $a \le x_1 < x_2 \le b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein x_0 mit $x_1 < x_0 < x_2$ und

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Das ist nur möglich, wenn $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Und da die Punkte x_1 und x_2 beliebig gewählt werden können, ist f konstant. $\square$

Das Monotonie–Kriterium läßt sich jetzt verallgemeinern:

Definition.

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *(schwach) monoton wachsend* (bzw. *fallend*), falls für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) \ge f(x_2)\,).$$

II.2.4 Folgerung 2. *Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von I differenzierbar. f ist genau dann auf I monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \ge 0$ (bzw. $f'(x) \le 0$) für alle $x \in (a, b)$ ist.*

BEWEIS: Wir beschränken uns auf den Fall der wachsenden Funktion.

1) Ist f monoton wachsend, so sind alle Differenzenquotienten ≥ 0, und daher ist auch überall $f'(x) \ge 0$.

2) Nun sei $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in (a, b)$. Ist $x_1 < x_2$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz ein x_0 mit $x_1 < x_0 < x_2$, und es gilt:

$$0 \le f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,, \text{ also } f(x_1) \le f(x_2).$$

$\square$

Beispiel:

Sei $f(x) := x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und $f''(x) = 6x$. Da überall $f'(x) \ge 0$ ist, wächst f auf ganz $\mathbb{R}$ monoton. Außerhalb des Nullpunktes ist $f'(x)$ sogar positiv, also wächst f dort streng monoton. Im Nullpunkt selbst ist f steigend, denn es ist ja $f(-h) = -h^3 < 0 < h^3 = f(h)$ für kleines positives h. Daraus folgt, daß f sogar überall streng monoton steigt.

Schließlich kann man den Mittelwertsatz noch weiter verallgemeinern:

II.2.5 Der 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
Es seien f und g auf $I := [a, b]$ stetig und im Innern von I differenzierbar. Außerdem sei $g'(x) \ne 0$ im Innern von I.

Dann gibt es einen Punkt c im Innern von I mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Für $g(x) = x$ erhält man den 1. Mittelwertsatz zurück.

BEWEIS: Wäre $g(b) - g(a) = 0$, so wäre $g'(x_0) = 0$ für ein x_0 im Innern von I. Das hatten wir aber gerade ausgeschlossen.

Wir benutzen die Hilfsfunktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Es ist $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein c im Innern des Intervalls, so daß $F'(c) = 0$ ist. Aber offensichtlich ist

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Daraus folgt die gewünschte Gleichung. □

Als Anwendung ergibt sich die

II.2.6 Regel von de l'Hospital. *Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall $I := (a, b)$ differenzierbar, und es sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in I$.*

Außerdem sei $c \in I$ und $f(c) = g(c) = 0$.

Wenn $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, dann existiert auch* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, *und die beiden Grenzwerte sind gleich.*

BEWEIS: Wir arbeiten mit einseitigen Grenzwerten. Der Satz gilt dann dementsprechend auch etwas allgemeiner.

Es sei (x_ν) eine Folge von Zahlen mit $c < x_\nu < b$ und $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = c$ (nicht notwendig monoton). Nach dem 2. Mittelwertsatz gibt es Zahlen c_ν mit $c < c_\nu < x_\nu$ und

$$\frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} = \frac{f(x_\nu) - f(c)}{g(x_\nu) - g(c)} = \frac{f'(c_\nu)}{g'(c_\nu)}.$$

Da auch $\lim_{\nu \to \infty} c_\nu = c$ ist, strebt der letzte Quotient nach Voraussetzung gegen $\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Aber das bedeutet, daß

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ist, und analog schließt man für den linksseitigen Grenzwert. □

An Stelle der Annäherung an eine endliche Zahl c kann man auch den Fall $x \to \pm\infty$ betrachten, es gelten analoge Aussagen.

Beispiel:

$$\text{Es ist} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

II.2.7 2. Regel von de l'Hospital. *Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall $I := (a, b)$ differenzierbar, und es sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in I$.*

Es sei $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = +\infty$.

Wenn $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, dann existiert auch* $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, *und die beiden Grenzwerte sind gleich.*

Der BEWEIS benutzt ebenfalls den verallgemeinerten Mittelwertsatz, ist aber etwas komplizierter. Ich lasse ihn hier weg.

Beispiele:

1.
$$\text{Es ist} \quad \lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0.$$

2. Sei $p(x)$ ein Polynom. Dann ist
$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{p(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{p'(x)} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{\text{Konstante}} = +\infty.$$
Die Exponentialfunktion wächst stärker als jedes Polynom.

3. Dagegen gilt:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \cdot p'(x)} = 0.$$
Die Logarithmusfunktion wächst also schwächer als jedes Polynom.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a \in I$ ein fest gewählter Punkt. Wir wollen versuchen, f in der Nähe von a möglichst gut durch eine einfachere Funktion zu approximieren. Wie gut das geht, hängt unter anderem davon ab, wie „glatt" f ist.

Definition.

Die Funktion f heißt *k–mal stetig differenzierbar*, falls f auf I k–mal differenzierbar und die k–te Ableitung $f^{(k)}$ noch stetig auf I ist.

Mit $\mathcal{C}^k(I)$ bezeichnet man die Menge *aller* k–mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I.

Die Menge $\mathcal{C}^k(I)$ ist übrigens ein (unendlich-dimensionaler) Vektorraum.

Es sei nun $f \in \mathcal{C}^1(I)$, und $T_a(x) := f(a) + f'(a)(x - a)$ die Tangente an f in a. Weiter sei $R(x) := f(x) - T_a(x)$. Dann gilt:

$$R(a) = 0 \text{ und } R'(a) = 0.$$

Wie das Verhalten des Rest–Termes $R(x)$ zeigt, approximiert T_a die Funktion f immerhin so gut, daß ihre 0–te und erste Ableitung in a übereinstimmen.

Wir wollen jetzt $R(x)$ noch etwas genauer untersuchen. Dazu definieren wir

$$\eta(x) := \frac{R(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \Delta f(a,x) - f'(a).$$

Diese Funktion (die zunächst nur für $x \neq a$ definiert ist) strebt offensichtlich für $x \to a$ gegen Null. Nun haben wir:

$$f(x) = T_a(x) + R(x), \text{ mit } R(x) = \eta(x) \cdot (x-a) \text{ und } \lim_{x \to a} \eta(x) = 0.$$

Noch besser wird die Situation, wenn f sogar in $\mathcal{C}^2(I)$ liegt: Nach dem 2. Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \neq a$ ein c zwischen a und x, so daß gilt:

$$\frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{R(x) - R(a)}{(x-a)^2 - (a-a)^2} = \frac{R'(c)}{2(c-a)}.$$

Da f $2\times$ stetig differenzierbar ist, ist $R'(x) = f'(x) - f'(a)$ noch ein weiteres Mal differenzierbar, und eine weitere Anwendung des 2. Mittelwertsatzes ergibt ein d zwischen a und c mit

$$\frac{R'(c)}{2(c-a)} = \frac{R'(c) - R'(a)}{2 \cdot [(c-a) - (a-a)]} = \frac{R''(d)}{2} = \frac{1}{2} f''(d).$$

In diesem Falle ist also

$$R(x) = \frac{1}{2} f''(d)(x-a)^2, \text{ insbesondere } \eta(x) = \frac{1}{2} f''(d)(x-a),$$

wobei d von x abhängt.

Es ist zu erwarten, daß man bei höherem Differenzierbarkeitsgrad noch mehr Information erhält. Allerdings besteht keine Möglichkeit, die Approximation von f durch die Tangente zu verbessern, denn es ist $(f - T_a)'' = f''$. Die Idee ist nun, an Stelle der linearen Funktion T_a Polynome höheren Grades zu verwenden. Zu diesem Ziele betrachten wir erst einmal die „Entwicklung eines Polynoms" im Punkte a:

Es sei

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ein Polynom vom Grad n (also $a_n \neq 0$). Wir setzen $h := x - a$ und erhalten

$$p(x) = p(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k (a+h)^k = \sum_{i=0}^{n} b_i h^i =: f(h),$$

mit $b_n = a_n \neq 0$.

Nun ist

$$f^{(k)}(h) = p^{(k)}(a+h),$$

und da

$$(x^i)^{(k)} = \begin{cases} i(i-1) \cdot \ldots \cdot (i-k+1) x^{i-k} & \text{für } k \leq i \\ 0 & \text{für } k > i \end{cases}$$

ist, folgt:

$$f^{(k)}(0) = k! b_k, \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Also ist $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(0) = k!b_k$, und daher

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Wir wollen jetzt eine Funktion $f \in \mathcal{C}^n(I)$ in der Nähe von a durch ein Polynom $p(x)$ so approximieren, daß $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist.

Definition.

Sei $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $a \in I$ ein fester Punkt. Das Polynom

$$Tf_{n.a}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt *n–tes Taylorpolynom von f in a.*

Offensichtlich ist

$$Tf_{1,a} = T_a \quad \text{und} \quad Tf_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nun geht es um das Verhalten des *Restgliedes* $R(x) = R_{n,a}(f;x) := f(x) - Tf_{n,a}(x)$ in der Nähe von a:

II.2.8 Satz von der Taylorentwicklung. *Es sei $f \in \mathcal{C}^n(I)$.*

1. *Dann gibt es eine Funktion $\eta(x)$ mit $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$, so daß gilt:*

$$f(x) = Tf_{n,a}(x) + \eta(x) \cdot (x-a)^n.$$

2. *Ist sogar $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, so gibt es zu jedem $x \neq a$ ein c zwischen a und x, so daß*

$$f(x) = Tf_{n,a}(x) + R_{n,a}(f;x)$$

mit

$$R_{n,a}(f;x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

ist. Man spricht dann auch von der „Lagrangeschen Form“ des Restgliedes, und nennt diese Darstellung von f die „Taylorentwicklung“ der Ordnung n von f im Punkte a.

BEWEIS: Wir beginnen mit dem zweiten Teil, setzen $R(x) := f(x) - Tf_{n,a}(x)$ und betrachten

$$\varphi(x) := \frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

für $x \neq a$. Die $(n+1)$–te Ableitung von $(x-a)^{n+1}$ ergibt $(n+1)!$. Deshalb führt eine $(n+1)$–fache Anwendung des 2. Mittelwertsatzes zu

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{R'(c_1)}{(n+1)(x-a)^n} \\
&= \frac{R''(c_2)}{n(n+1)(x-a)^{n-1}} \\
&= \cdots \\
&= \frac{R^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

mit geeigneten Punkten c_i zwischen a und x, sowie $c := c_{n+1}$.

Ist f nur n–mal stetig differenzierbar, so erhält man auf die gleiche Weise die Beziehung

$$f(x) - Tf_{n-1,a}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

mit einem geeigneten c zwischen a und x. Wir setzen

$$\eta(x) := \frac{1}{n!} \cdot (f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)).$$

Da c stets zwischen a und x liegt und $f^{(n)}$ stetig ist, ist $\lim\limits_{x\to a} \eta(x) = 0$. Außerdem gilt:

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \eta(x) \cdot (x-a)^n.$$

Das ergibt die erste Behauptung. $\square$

Bemerkung: Die Beziehung $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ wird gerne mit Hilfe des Landauschen Symbols o abgekürzt:

$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \qquad (\text{für } x \to a\,).$$

Zum Beispiel ist

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots = 1 + nx + \mathrm{o}(x),$$

oder

$$x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = \mathrm{o}(1).$$

Im Falle der Taylorentwicklung kann man nun schreiben: Ist $f \in \mathcal{C}^n(I)$, so ist

$$f(x) = Tf_{n,a}(x) + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Wir wollen einige **Beispiele** zur Taylorentwicklung betrachten:

1. Sei $a = 0$ und $f(x) = \sin(x)$. Es ist

$$\sin'(x) = \cos(x),\ \sin''(x) = -\sin(x),\ \sin^{(3)}(x) = -\cos(x),\ \sin^{(4)}(x) = \sin(x),$$

und dann wiederholt sich das wieder. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sin^{(2n)}(0) &= 0 \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots) \\ \text{und } \sin^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Das ergibt für die Entwicklung der Ordnung $2n+2$:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}). \end{aligned}$$

2. Sei wieder $a = 0$ und $f(x) = e^x$. Da $(e^x)' = e^x$ und $e^0 = 1$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n). \end{aligned}$$

3. Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert. Hier nehmen wir $a = 1$ als Entwicklungspunkt. Es ist

$$\ln(1) = 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x},\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2},\ \ln^{(3)}(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3},\ \ln^{(4)}(x) = -6 \cdot \frac{1}{x^4},$$

und allgemein

$$\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{x^k}, \text{ für } k \geq 1.$$

Das bedeutet, daß

$$\frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

ist, also

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k + \mathrm{o}((x-a)^n) \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \mathrm{o}((x-1)^n). \end{aligned}$$

Diese Entwicklung kann natürlich nur für $x > 0$ gelten, und das asymptotische Verhalten bezieht sich sowieso stets nur auf die Annäherung an den Entwicklungspunkt.

Als Anwendung der Taylorformel können wir jetzt das Problem der lokalen Extrema endgültig erledigen:

II.2.9 Satz. *Die Funktion f sei in der Nähe von x_0 n–mal stetig differenzierbar. Es sei*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x_0) &= 0 \quad \textit{für } k = 1, \ldots, n-1 \\ \textit{und} \quad f^{(n)}(x_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

Ist n gerade, so liegt ein lokales Extremum in x_0 vor, und zwar

$$\begin{aligned} \textit{ein Maximum, falls } f^{(n)}(x_0) &< 0 \quad \textit{ist,} \\ \textit{und ein Minimum, falls } f^{(n)}(x_0) &> 0 \quad \textit{ist.} \end{aligned}$$

Beweis: Wir verwenden die Lagrangesche Form des Restgliedes bei der Taylorentwicklung. Da $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ ist, folgt mit $h := x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n,$$

mit einem geeigneten c zwischen x_0 und x.

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, so ist $f^{(n)}(x) \neq 0$ für $|\, x - x_0 \,| < \varepsilon$, und dann hat $f^{(n)}(c)$ das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$.

Wir betrachten nur den Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$, der andere geht analog. Da c von x (und damit von h) abhängt, können wir schreiben:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(h) \cdot h^n,$$

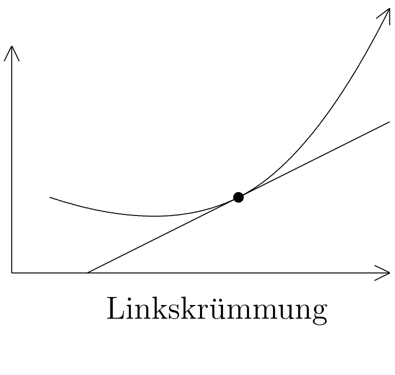
mit einer positiven Funktion φ.

Ist n ungerade, so wechselt h^n bei $h = 0$ sein Vorzeichen, und es kann kein Extremwert vorliegen. Ist n gerade, so bleibt h^n immer ≥ 0 und verschwindet bei $h = 0$. Dann besitzt f in x_0 ein Minimum. $\square$

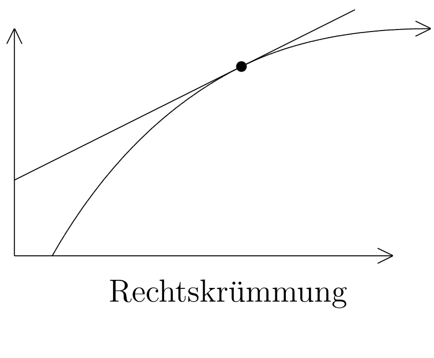
Was passiert nun in den Punkten x_0, wo $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und n ungerade ist?

Der erste interessante Fall ist der, wo $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist. Dann kann f'' nicht in einer ganzen Umgebung von x_0 verschwinden, denn dann müßte ja auch $f'''(x_0) = 0$ sein. Es wäre denkbar, daß eine Folge (x_ν) mit $x_\nu \to x_0$ existiert, so daß $f''(x_\nu) = 0$ für alle ν ist. Das würde bedeuten, daß f'' stark schwankt, und es wäre schwierig, vernünftige Aussagen über f zu machen. Diesen Fall wollen wir zunächst außer Acht lassen. Es bleibt folgende Situation:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{C}^3(I)$, $x_0 \in I$, $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, aber $f''(x) \neq 0$ für $x \in I$ und $x \neq x_0$. Wenn f'' auf beiden Seiten von x_0 das gleiche Vorzeichen hätte, dann läge in x_0 ein lokales Extremum von f'' vor, und dann müßte $f'''(x_0) = 0$ sein, was wir ja nicht haben wollen. Also muß f'' bei x_0 sein Vorzeichen wechseln, und demnach f' bei x_0 sein Monotonieverhalten. Der Graph einer Funktion mit monoton wachsender Ableitung ist nach links gekrümmt, der einer Funktion mit monoton fallender Ableitung ist nach rechts gekrümmt. Wir können also erwarten, daß f bei x_0 sein Krümmungsverhalten ändert.



Linkskrümmung



Rechtskrümmung

Wir suchen nun nach einer geometrischen Beschreibung des Krümmungsverhaltens einer Funktion: Die Anschauung zeigt, daß bei einer nach links gekrümmten Linie die Tangente stets unterhalb der Linie, bei einer nach rechts gekrümmten Linie stets oberhalb derselben bleibt.

Definition.

Sei $f \in \mathcal{C}^1(I)$. f heißt in $a \in I$ *konvex* (bzw. *strikt konvex*), falls $f(x) \geq T_a(x)$ in der Nähe von a ist (bzw. sogar echt $>$ für $x \neq a$).

f heißt in a *konkav* (bzw. *strikt konkav*), falls $f(x) \leq T_a(x)$ in der Nähe von a ist (bzw. sogar echt $<$ für $x \neq a$).

II.2.10 Satz. *Ist f' in a steigend (bzw. fallend), so ist f dort strikt konvex (bzw. strikt konkav).*

BEWEIS: Wir beschränken uns auf den konvexen Fall.

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $f'(a-h) < f'(a) < f'(a+h)$ für $0 < h < \varepsilon$ ist. Wir müssen zeigen, daß $f(x) - T_a(x) > 0$ für $|x-a| < \varepsilon$ und $x \neq a$ ist.

Sei etwa $a < x < a + \varepsilon$. Es ist

$$f(x) - T_a(x) = (\Delta f(a,x) - f'(a)) \cdot (x-a),$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $c = a + h \in (a,x)$, so daß $\Delta f(a,x) = f'(c)$ ist. Da $x - a > 0$ und $f'(c) - f'(a) > 0$ ist, ist auch $f(x) - T_a(x) > 0$.

Bei den Punkten x mit $a - \varepsilon < x < a$ schließt man analog. □

II.2.11 Folgerung. *Sei $f \in \mathcal{C}^2(I)$ und $a \in I$.*

1. *Wenn $f''(a) > 0$ ist, dann ist f in a strikt konvex.*
2. *Wenn $f''(a) < 0$ ist, dann ist f in a strikt konkav.*

Leider gilt nicht die Umkehrung. Die Funktion $f(x) := x^4$ ist im Nullpunkt strikt konvex, aber $f''(x) = 12x^2$ verschwindet dort.

Man kann jetzt aber z.B. sehen, daß e^x überall konvex und $\ln(x)$ überall konkav ist.

Wir sagen jetzt, f besitzt in a eine Linkskrümmung, wenn $f''(a) > 0$ ist, und f besitzt in a eine Rechtskrümmung, wenn $f''(a) < 0$ ist.

Definition.

Sei $f \in \mathcal{C}^2(I)$, $x_0 \in I$ und $f''(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

f hat in x_0 einen *Wendepunkt*, falls f dort von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergeht, oder umgekehrt.

Bemerkung: f hat also in x_0 genau dann einen Wendepunkt, wenn f'' dort das Vorzeichen wechselt. Daraus folgt insbesondere, daß $f''(x_0) = 0$ ist und f' in x_0 einen Extremwert besitzt. Man kann Beispiele konstruieren, wo die Umkehrung falsch ist. Dennoch findet man in der Literatur häufig die Definition: „Wendepunkt = Extremwert der 1. Ableitung“.

Zu beachten ist allerdings: Wir brauchen nicht die Voraussetzung, daß $f'(x_0) = 0$ ist. Wenn das zusätzlich erfüllt ist, sprechen wir von einem *Sattelpunkt*.

Man kann auch zeigen, daß in einem Wendepunkt x_0 die Tangente den Graphen durchsetzt, daß also $f(x) - T_{x_0}$ bei x_0 das Vorzeichen wechselt (denn mit $f'(x)$ ändert auch $f'(x) - f'(x_0)$ sein Monotonieverhalten).

In der Praxis arbeitet man meistens mit dem folgenden Satz:

II.2.12 Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte.
Sei I ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{C}^3(I)$ und $x_0 \in I$.

Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.

BEWEIS: Da $f'''(x_0) \neq 0$ ist, muß f'' bei x_0 entweder wachsen oder fallen. Da außerdem $f''(x_0) = 0$ ist, wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen. □

Beispiele:

1. Sei $f(x) := x^3$.

   Es ist $f''(x) = 6x$, also $f''(0) = 0$. Für $x < 0$ ist $f''(x) < 0$, und für $x > 0$ ist $f''(x) > 0$. Also wechselt f von einer Rechtskrümmung zu einer Linkskrümmung und hat damit in 0 einen Wendepunkt.

   Tatsächlich ist $f'''(0) = 6 \neq 0$.

2. Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x) := \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 9x^2 + 15x - 4)$ (vgl. Seite 190). Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}(x^2 - 6x + 5), \\ f''(x) &= \frac{3}{2}(x - 3) \\ \text{und} \quad f'''(x) &= \frac{3}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

   Wir hatten schon festgestellt, daß f in $x = 1$ ein isoliertes Maximum und in $x = 5$ ein isoliertes Minimum besitzt. Es ist

$$f(1) = \frac{1}{4}(1 - 9 + 15 - 4) = \frac{3}{4}$$

   und

$$f(5) = \frac{1}{4}(5 \cdot 25 - 9 \cdot 25 + 3 \cdot 25 - 4) = \frac{1}{4}(-25 - 4) = \frac{-29}{4}.$$

   Ist $x < 1$, so ist $f'(x) > 0$, also f streng monoton wachsend. Zwischen 1 und 5 ist $f'(x) < 0$. Dort fällt f streng monoton, und ab $x > 5$ wächst f wieder.

   Weiter ist $f''(x) = 0 \iff x = 3$. Da $f'''(3) \neq 0$ ist, liegt bei $x = 3$ ein Wendepunkt vor. Man sieht aber auch ganz leicht, daß $f''(x) < 0$ für $x < 3$ und > 0 für $x > 3$ ist. Damit wechselt f bei $x = 3$ von einer konkaven Funktion zu einer konvexen Funktion.

3. Sei $f(x) := x^4$, also $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$ und $f^{(4)}(x) = 24$.

   Es ist $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, aber $f^{(4)}(0) > 0$. Damit muß f im Nullpunkt ein Minimum besitzen, es kann dort kein Wendepunkt vorliegen!

4. Jetzt betrachten wir noch $f(x) := x^5$.

   Es ist $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$ und $f'''(x) = 60x^2$, also
   $f''(0) = 0$ **und** $f'''(0) = 0$.

   Aber offensichtlich ist $f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$. Damit besitzt f im Nullpunkt einen Wendepunkt.

Die Berechnung von Extremwerten hat unzählige Anwendungen. Hier ist ein einfaches, aber dennoch typisches Beispiel:

Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang u den größten Flächeninhalt?

Sind a und b die Längen der beiden Seiten des Rechtecks, so gilt:

$$u = 2a + 2b.$$

Die Größen a und b sind also nicht unabhängig voneinander, es gilt vielmmehr:

$$b = \frac{1}{2} \cdot (u - 2a) = \frac{u}{2} - a.$$

Der Flächeninhalt ist die Zahl $F = a \cdot b = a \cdot (\frac{u}{2} - a) = \frac{u}{2} \cdot a - a^2$, kann also als Funktion $F(a)$ aufgefaßt werden.

Der Definitionsbereich von F ist das Intervall $I := [0, \frac{u}{2}]$. Wir suchen nun im Innern des Intervalls nach lokalen Extrema:

Es ist $F'(a) = \frac{u}{2} - 2a$ und $F''(a) = -2$. Ein lokales Extremum kann höchstens vorliegen, wenn $F'(a) = 0$ ist, wenn also $a = \frac{u}{4}$ ist. Da $F''(a)$ immer negativ ist, liegt bei $a_0 := \frac{u}{4}$ ein isoliertes lokales Maximum vor.

Ist a_0 nun schon die gesuchte Lösung? Das ist noch nicht sicher! Wenn F sein Maximum im Innern von I annimmt, dann sind wir fertig. Es kann aber auch passieren, daß F sein Maximum auf dem Rand des Intervalls annimmt. Das müssen wir noch überprüfen:

Es ist $F(0) = F(\frac{u}{2}) = 0$, aber $F(a_0) = (\frac{u}{4})^2 > 0$. Also ist a_0 tatsächlich die gesuchte Lösung.[9] Die zweite Seite hat dann die Größe $b = \frac{u}{2} - a_0 = \frac{u}{4}$.

Bei gegebenem Umfang u hat unter allen Rechtecken das Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{u}{4}$ den größten Flächeninhalt.

Zum Schluß noch zwei etwas kompliziertere Funktionen:

[9] Da F überall differenzierbar ist, kann man auch anders argumentieren: Würde F am Rand einen noch höheren Wert annehmen, so müßte F' zwischen a_0 und dem Rand ein weiteres Mal verschwinden, nach dem Satz von Rolle. Wir wissen aber, daß das nicht der Fall ist.

Beispiele :

1. Sei $f(x) := \dfrac{1}{x^2+r}$, mit $r > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x}{(x^2+r)^2},\\
f''(x) &= \frac{(-2)(x^2+r)^2 - (-2x)\cdot 4x(x^2+r)}{(x^2+r)^4}\\
&= \frac{2(3x^2-r)}{(x^2+r)^3},\\
f'''(x) &= \frac{12x(x^2+r)^3 - 2(3x^2-r)\cdot 6x(x^2+r)^2}{(x^2+r)^6}\\
&= \frac{12x((x^2+r)-(3x^2-r))}{(x^2+r)^4}\\
&= \frac{24x(r-x^2)}{(x^2+r)^4}.
\end{aligned}$$

Die Funktion ist überall positiv. Sie hat also keine Nullstellen, und für $x \to \pm\infty$ strebt sie gegen Null.

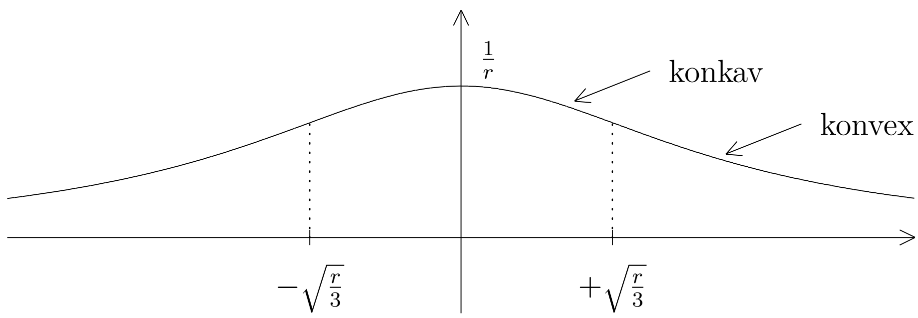
Es ist $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Da $f''(0) = \dfrac{-2r}{r^3} = -\dfrac{2}{r^2} < 0$ ist, liegt im Nullpunkt der einzige Extremwert vor, und der ist ein Maximum. (Letzteres könnte man sich auch ohne Benutzung der 2. Ableitung qualitativ überlegen!).

Weiter ist $f''(x) = 0 \iff 3x^2 - r = 0 \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{r}{3}}$. Einsetzen von $a_\pm := \pm\sqrt{\dfrac{r}{3}}$ ergibt:

$$f'''(a_\pm) = \frac{24a_\pm(r-\frac{r}{3})}{(\frac{r}{3}+r)^4} = \frac{24\cdot\frac{2}{3}\cdot r}{(\frac{4}{3})^4\cdot r^4}\cdot a_\pm = \frac{3^4}{16r^3}\cdot a_\pm \neq 0.$$

Also liegt bei $-\sqrt{\frac{r}{3}}$ und $+\sqrt{\frac{r}{3}}$ jeweils ein Wendepunkt vor. Für $|\,x\,| < \sqrt{\dfrac{r}{3}}$ ist $3x^2 - r < 0$, und da sowieso immer $x^2 + r \geq r > 0$ ist, ist $f''(x) < 0$ in diesem Bereich, also f konkav. Analog sieht man, daß f für $|\,x\,| > \sqrt{\frac{r}{3}}$ konvex ist.

Nun kann man den Graphen skizzieren:



2. Seien $k, \omega > 0$ und $f(x) := A \cdot e^{-kx} \sin(\omega x + \varphi)$ die Funktion einer „gedämpften harmonischen Schwingung“, für $x \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= A \cdot e^{-kx}[\omega \cos(\omega x + \varphi) - k \sin(\omega x + \varphi)], \\ f''(x) &= A \cdot e^{-kx}[-\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) - k\omega \cos(\omega x + \varphi) \\ &\qquad - k\omega \cos(\omega x + \varphi) + k^2 \sin(\omega x + \varphi)] \\ &= A \cdot e^{-kx}[(k^2 - \omega^2) \sin(\omega x + \varphi) - 2k\omega \cos(\omega x + \varphi)]. \end{aligned}$$

Es ist $f(0) = A \cdot \sin(\varphi)$ und $|\, f(x)\,| \leq A \cdot e^{-kx}$, insbesondere $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Nullstellen: Es ist

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \sin(\omega x + \varphi) = 0 \\ &\iff \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \omega x + \varphi = n\pi \\ &\iff \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq \frac{\varphi}{\pi} \text{ und } x = \frac{1}{\omega}[n\pi - \varphi]. \end{aligned}$$

Extremwerte: Zunächst ist

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \omega \cos(\omega x + \varphi) - k \sin(\omega x + \varphi) = 0 \\ &\iff \tan(\omega x + \varphi) = \frac{\omega}{k} \\ &\iff \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \frac{1}{\omega}[a + n\pi - \varphi], \\ &\qquad (\text{wobei } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ und } \tan(a) = \frac{\omega}{k} \text{ sein soll, und} \\ &\qquad \text{dann } a + n\pi - \varphi \geq 0, \text{ also } n \geq \frac{\varphi - a}{\pi} \text{ sein muß.} \end{aligned}$$

Die Zahl $a := \arctan(\frac{\omega}{k})$ ist bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von π eindeutig bestimmt und positiv, kann also tatsächlich zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gewählt werden. Setzt man $n_0 := \left[\dfrac{a - \varphi}{\pi}\right]$ (Gauß-Klammer), so ist

$$x_0 := \frac{1}{\omega}(a - n_0\pi - \varphi)$$

der kleinste mögliche Extremwert, der auftreten kann.

Zur näheren Untersuchung der Extremwerte setzen wir nicht die berechneten Werte ein, sondern wir benutzen die Gleichung

$$\omega \cos(\omega x + \varphi) = k \sin(\omega x + \varphi).$$

In diesen Punkten ist

$$f''(x) = -A \cdot e^{-kx}(k^2 + \omega^2) \sin(\omega x + \varphi).$$

$\omega x + \varphi = a + n\pi$ liegt immer zwischen $n\pi$ und $n\pi + \frac{\pi}{2}$. Bei geradem n ist der Sinus dort positiv, und es liegt ein Maximum vor. Bei ungeradem n liegt ein Minimum vor.

Man kann die Funktionswerte in den Maxima folgendermaßen bestimmen:

Ist $\omega\cos(\omega x+\varphi) = k\sin(\omega x+\varphi)$, so folgt:

$$\omega^2 = (\omega\sin(\omega x+\varphi))^2 + (\omega\cos(\omega x+\varphi))^2 = (\omega^2+k^2)\sin(\omega x+\varphi)^2,$$

also

$$\sin(\omega x+\varphi) = \pm\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}.$$

Ein Maximum liegt genau dann vor, wenn der Sinus positiv ist. Ist das bei $x = x_M$ der Fall, so ist

$$f(x_M) = A\cdot e^{-kx_M}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}.$$

Es gibt eine Folge von Maxima $x_1, x_2, x_3, \ldots$, zwischen denen jeweils Minima liegen. Der Abstand zwischen zwei Nullstellen von f' ist konstant:

$$\frac{1}{\omega}[a+(n+1)\pi-\varphi] - \frac{1}{\omega}[a+n\pi-\varphi] = \frac{\pi}{\omega}.$$

Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima x_n und x_{n+1} beträgt deshalb jeweils $\frac{2\pi}{\omega}$. Setzt man $y_n := f(x_n)$, so ist

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{A\cdot e^{-kx_n}\sin(\omega x_n+\varphi)}{A\cdot e^{-kx_{n+1}}\sin(\omega x_{n+1}+\varphi)} = \frac{e^{-kx_n}}{e^{-kx_{n+1}}} = e^{k(x_{n+1}-x_n)} = e^{2k\pi/\omega}.$$

Es reicht also, y_1 explizit zu berechnen.

Die Größe $D := \ln\dfrac{y_n}{y_{n+1}} = \dfrac{2k\pi}{\omega}$ nennt man das *logarithmische Dekrement* der Schwingung. Wenn man die Kreisfrequenz ω und die Amplitudenverhältnisse $\dfrac{y_n}{y_{n+1}}$ kennt, kann man über D den *Dämpfungskoeffizienten* k berechnen.

Übrigens stimmen die Maxima *nicht* mit den Punkten überein, wo der Graph die „Hüllkurve“ $y = Ae^{-kx}$ berührt: Dort muß ja $\sin(\omega x+\varphi) = \pm 1$ sein, also $\omega x+\varphi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$. Bezeichnen wir mit $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ die Schwingungsdauer und mit $x_{0,n} := \dfrac{1}{\omega}(n\pi-\varphi)$ die Nullstellen von f, so haben die Berührungspunkte die Abszissen

$$x_{B,n} = \frac{1}{\omega}((2n+1)\frac{\pi}{2}-\varphi) = x_{0,n}+\frac{T}{4}.$$

Wendepunkte: Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\iff \quad (k^2-\omega^2)\sin(\omega x+\varphi) = 2k\omega\cos(\omega x+\varphi) \\ &\iff \quad \tan(\omega x+\varphi) = \frac{2k\omega}{k^2-\omega^2}. \end{aligned}$$

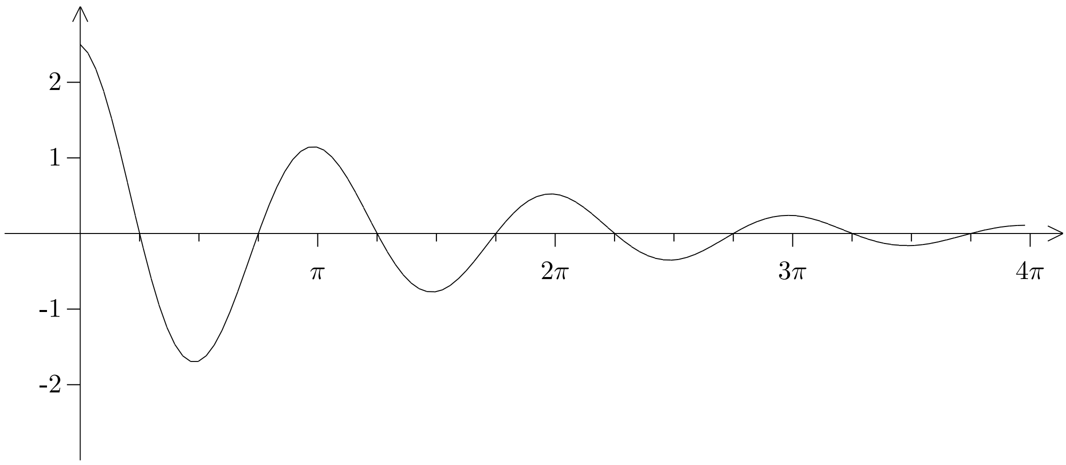
Da der Tangens überall streng monoton wachsend ist, ist

$$\tan(\omega x+\varphi) < \frac{2k\omega}{k^2-\omega^2},$$

falls x links von einem solchen Punkt liegt, und „ $>$ “, falls x rechts davon liegt. Das bedeutet, daß tatsächlich Wendepunkte vorliegen. Je zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte unterscheiden sich um $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$.

Zwischen zwei benachbarten Wendepunkten ist f konvex, falls f dort ein Minimum besitzt, und konkav, falls f dort ein Maximum besitzt.

Nun kann man den Graphen skizzieren:



Graph der Funktion $\quad \frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{x}{4}} \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{2})\,.$

§3 Das bestimmte Integral

Vorbemerkungen:

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. M heißt *beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $C > 0$ gibt, so daß gilt:

$$\forall\, x \in M \;:\; |\, x \,| \leq C.$$

Das ist gleichbedeutend damit, daß $M \subset [-C, +C]$ ist.

Eine Zahl C mit der Eigenschaft, daß $x \leq C$ für alle $x \in M$ ist, heißt *obere Schranke* für M. Und entsprechend heißt eine Zahl c, so daß $x \geq c$ für alle $x \in M$ ist, eine *untere Schranke* für M. Die Menge M heißt *nach oben beschränkt*, falls M eine obere Schranke besitzt. Sie heißt *nach unten beschränkt*, falls sie eine untere Schranke besitzt. Offensichtlich gilt:

M ist genau dann beschränkt, wenn M nach unten und nach oben beschränkt ist.

Eine Schranke ist so etwas wie eine Abschätzung. Nun kann man gut oder schlecht abschätzen. Eine obere Schranke C für die Menge M wollen wir eine „schlechte Abschätzung“ nennen, wenn es noch eine bessere Abschätzung gibt, also ein $C' < C$, so daß immer noch $x \leq C'$ für alle $x \in M$ ist. C soll eine „gute Abschätzung“ heißen, wenn sie sich nicht mehr verbessern läßt. Was bedeutet das?

C ist eine gute Abschätzung, wenn für jedes $C' < C$ gilt:

$$\exists\, x \in M \text{ mit } x > C'.$$

Solche guten Abschätzungen haben in der Mathematik noch einen anderen Namen:

Definition.

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von M, falls gilt:

1. C ist obere Schranke von M.
2. Jede Zahl $C' < C$ ist keine obere Schranke von M.

Ganz analog definiert man:

Definition.

c heißt *Infimum* oder *größte untere Schranke* von M, falls gilt:

1. c ist untere Schranke von M.
2. Jede Zahl $c' > c$ ist keine untere Schranke von M.

Beispiele:

1. Sei $a < b$. Dann ist $\sup([a, b]) = b$ und $\inf([a, b]) = a$, aber genauso auch $\sup((a, b)) = b$ und $\inf((a, b)) = a$.

2. Sei $M := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist
   $\sup(M) = 1$ und $\inf(M) = 0$.

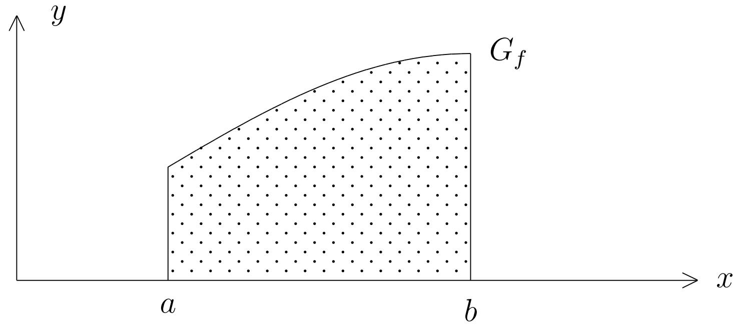
3. Sei $M := \mathbb{N}$. Dann ist $\inf(M) = 1$. Ein Supremum gibt es nicht, weil M nicht nach oben beschränkt ist.

4. Sei $f(x) := x^2$ und $M := \{f(x) \mid -1 \leq x \leq 2\}$. Dann gilt:
   $\sup(M) = 4$ und $\inf(M) = 0$.

Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms für $\mathbb{R}$ kann man zeigen:

Jede nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.
Jede nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum.

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nehmen vorerst an, daß $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und stellen uns die Aufgabe, die Fläche unter dem Graphen zu berechnen, also diejenige Fläche, die unten durch die x-Achse, oben durch den Graphen von f, links durch die Gerade $\{x = a\}$ und rechts durch die Gerade $\{x = b\}$ begrenzt wird.



Da wir keine Methode kennen, eine solche krummlinig begrenzte Fläche zu berechnen, versuchen wir es mit einem Approximationsverfahren. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

Zunächst teilen wir das Intervall $[a, b]$ in n kleinere Intervalle auf:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Die Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, brauchen nicht gleich lang zu sein. Das System der Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen wir auch als eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ und symbolisieren es mit einem $\mathfrak{Z}$. Die maximale Teilintervall–Länge, die dabei auftritt, nennen wir die *Feinheit* von $\mathfrak{Z}$ und bezeichnen sie mit $m(\mathfrak{Z})$. Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ heißt *feiner* als eine andere Zerlegung $\mathfrak{Z}'$, falls man $\mathfrak{Z}$ aus $\mathfrak{Z}'$ durch Hinzunahme von Punkten gewinnen kann. Dann ist insbesondere $m(\mathfrak{Z}) \leq m(\mathfrak{Z}')$.

Eine Zerlegung heißt *äquidistant*, falls alle Teilintervalle die gleiche Länge haben.

Wir wählen nun in jedem Teilintervall $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ einen Punkt ξ_k aus und setzen $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann ist $f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ der Flächeninhalt eines Rechtecks der Breite $x_k - x_{k-1}$ und der Höhe $f(\xi_k)$

Wir nennen nun

$$\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

eine *Riemannsche Summe von f zur Zerlegung* $\mathfrak{Z}$. Das ist eine Näherungssumme für den gesuchten Flächeninhalt.

Läßt man die Zerlegung fest, so bewegen sich die möglichen Riemannschen Summen zwischen zwei Extremen:

Für jedes k mit $1 \le k \le n$ definieren wir die Zahlen $u_k, o_k \in \mathbb{R}$ durch

$$u_k := \inf\{f(x) \mid x \in I_k\} \quad \text{und} \quad o_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}.$$

Offensichtlich gilt:

$$u_k \le f(x) \le o_k, \quad \text{für } x_{k-1} \le x \le x_k.$$

Wir definieren nun die *Untersumme* $S_u(f, \mathfrak{Z})$ und die *Obersumme* $S_o(f, \mathfrak{Z})$ durch

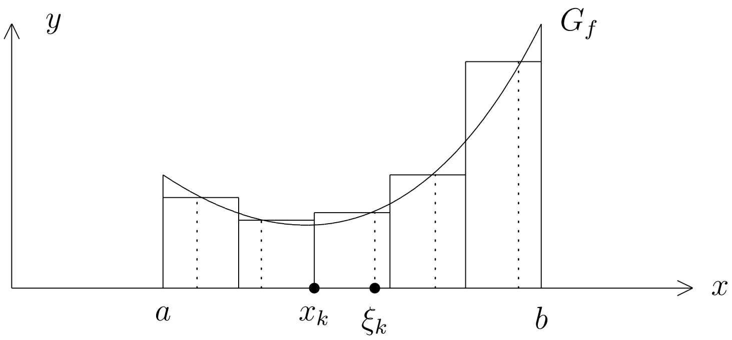
$$S_u(f, \mathfrak{Z}) := \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

und

$$S_o(f, \mathfrak{Z}) := \sum_{k=1}^{n} o_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Dann gilt für jedes mögliche ξ :

$$S_u(f, \mathfrak{Z}) \le \Sigma(f, \mathfrak{Z}, \xi) \le S_o(f, \mathfrak{Z}).$$



Die gesuchte Fläche muß zwischen Untersumme und Obersumme liegen. Je feiner die Zerlegung ist, desto besser wird die Fläche approximiert.

Wenn wir also eine Folge von Zerlegungen $\mathfrak{Z}_\nu$ finden können, so daß

$$\lim_{\nu \to \infty} S_u(f, \mathfrak{Z}_\nu) \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \to \infty} S_o(f, \mathfrak{Z}_\nu)$$

existieren und gleich sind, dann sollte der gemeinsame Grenzwert der gesuchte Flächeninhalt sein.

Definition.

Eine beschränkte nicht-negative Funktion f heißt über $[a, b]$ *integrierbar*, falls es eine reelle Zahl A gibt, so daß gilt:

Für **jede** Folge $(\mathfrak{Z}_n)$ von Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} m(\mathfrak{Z}_n) = 0$ ist

$$\lim_{\nu\to\infty} S_u(f, \mathfrak{Z}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} S_o(f, \mathfrak{Z}_\nu) = A.$$

Der gemeinsame Grenzwert heißt das *(Riemannsche) Integral von f über* $[a, b]$ und wird mit dem Symbol

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

bezeichnet.

Für (beschränkte) positive Funktionen haben wir so den gewünschten Flächeninhalt gewonnen. Wenn der Graph von f stattdessen ganz unterhalb der x–Achse verläuft, ergeben sich automatisch negative Werte, also das Negative des Flächeninhaltes. Hat f wechselndes Vorzeichen, so gewinnt man den Flächeninhalt, indem man ihn zunächst abschnittsweise von Nullstelle zu Nullstelle berechnet.

Es ist sehr mühsam, die Integrierbarkeit einer Funktion nachzuweisen. Ohne Beweis sei daher der folgende allgemeine Satz angegeben:

II.3.1 Satz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*

1. *f ist integrierbar.*
2. *Ist $\mathfrak{Z}_n$ die Zerlegung von $[a, b]$ in n gleich lange Teilintervalle und $\xi^{(n)}$ jeweils eine Auswahl von Zwischenpunkten, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} S_u(f, \mathfrak{Z}_n) = \lim_{n\to\infty} S_o(f, \mathfrak{Z}_n) = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, \mathfrak{Z}_n, \xi^{(n)}).$$

II.3.2 Folgerung.

1. *Sei $a < c < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jeweils auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ stetig. Dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar, und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. stetig bis auf endlich viele Sprungstellen. Dann ist f integrierbar.*

Bemerkung : Bei einem Intervall $[a, b]$ wird natürlich immer vorausgesetzt, daß $a < b$ ist. Es erweist sich aber als praktisch, das Integral auch für $a = b$ und $a > b$ zu definieren:

Ist $a > b$, so setzt man

$$\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Und man setzt

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Beispiele :

1. Sei $f(x) := c$ eine konstante Funktion. Dann haben die Riemannschen Summen immer die Gestalt

$$\begin{aligned}\Sigma(f,\mathfrak{Z},\xi) &= \sum_{k=1}^{n} c\cdot(x_k - x_{k-1})\\ &= c\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\\ &= c\cdot(x_n - x_0) \quad = \quad c\cdot(b-a).\end{aligned}$$

$$\text{Also ist} \quad \int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a).$$

Ist $c > 0$, so kommt hier tatsächlich die Fläche des Rechtecks heraus. Ist $c < 0$, so erhält man das Negative der Fläche.

2. Sei $f(x) := x$. Wir wählen Zwischenpunkte $\xi_k := \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$, also jeweils die Mittelpunkte der Teilintervalle. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Sigma(f,\mathfrak{Z},\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k\cdot(x_k - x_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot(x_k^2 - x_{k-1}^2)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(x_n^2 - x_0^2).\end{aligned}$$

$$\text{Also ist} \quad \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\cdot(b^2 - a^2).$$

Den gleichen Wert bekommt man, wenn man den Flächeninhalt elementargeometrisch berechnet.

3. Einen echten Grenzübergang müssen wir bei der Funktion $f(x) := x^2$ ausführen. Wir betrachten zur Vereinfachung den Fall $a = 0$.

Wir wählen Teil–Intervalle der Länge $\frac{b}{n}$ und als Zwischenpunkte jeweils $\xi_k := x_k$. Dann erhalten wir für die n–te Riemannsche Summe

$$\begin{aligned}\Sigma(f,\mathfrak{Z}_n,\xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k)^2\cdot(x_k - x_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}\\ &= \frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2.\end{aligned}$$

Nun ist
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{6} \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (2+\frac{1}{n}),$$
also
$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, \mathfrak{Z}_n, \xi^{(n)}) = \frac{b^3}{3}.$$
Da stets $x^2 \geq 0$ ist, kann man hier das Integral als Flächeninhalt unter der Parabel deuten, und daher gilt für beliebiges a mit $0 < a < b$:
$$\int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot (b^3 - a^3).$$

Aus den Definitionen ergibt sich sehr leicht:

II.3.3 Regeln für die Integration.
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien integrierbar. Dann gilt:

1. *Linearität: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist*
$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Monotonie: Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist auch*
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x) \,|\,dx\,.$$

Die dritte Aussage folgt mit Hilfe der Monotonie des Integrals aus der Ungleichungs–Kette
$$-|\, f \,| \leq f \leq +|\, f \,|\,.$$

II.3.4 Folgerung 1.
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$, so ist
$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a).$$

Beweis: Dies ist eine triviale Anwendung der Monotonie–Eigenschaft. □

II.3.5 Folgerung 2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung).
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Beweis: Es gibt reelle Zahlen m, M, so daß $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ ist. Wir wählen m als das globale Minimum und M als das globale Maximum von f auf $[a, b]$. Wegen der Monotonie des Integrals ist dann auch

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M \cdot (b-a).$$

Durch $F(x) := f(x) \cdot (b-a)$ wird nun eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert, die die Werte $m \cdot (b-a)$ und $M \cdot (b-a)$ in $[a, b]$ annimmt. Nach dem Zwischenwertsatz und wegen der obigen Ungleichung muß F dann in einem geeigneten Punkt $c \in [a, b]$ auch den Wert $\int_a^b f(x)\, dx$ annehmen. Also ist

$$f(c) \cdot (b-a) = F(c) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$\square$

Bis jetzt hat es sich als ein sehr mühsames Unterfangen erwiesen, Integrale konkret auszurechnen. Wir verdanken es Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz, daß wir heute eine viel effektivere Methode kennen.

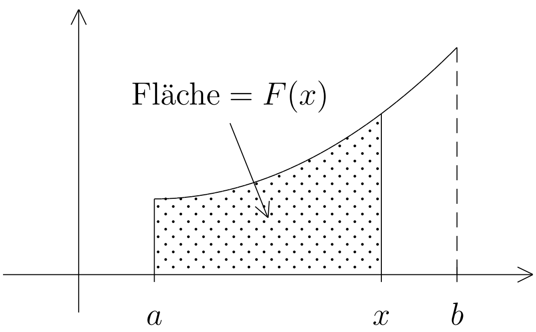
Wir betrachten ein Integral mit **variabler Obergrenze** über eine stetige Funktion f und erhalten so eine neue Funktion:

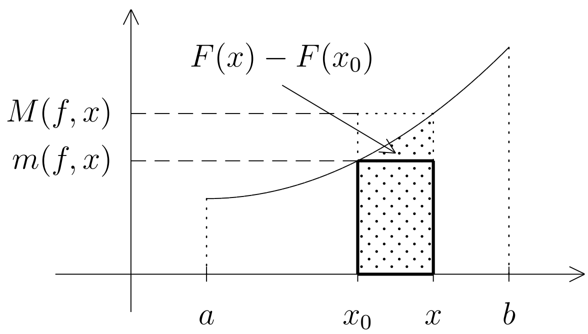
$$F(x) := \int_a^x f(u)\, du.$$

Aufgepaßt! F hängt von der Obergrenze x ab, nicht von der Integrationsvariablen u.

Es sei nun $a < x_0 < x < b$. Dann gilt:

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(u)\, du - \int_a^{x_0} f(u)\, du = \int_{x_0}^x f(u)\, du.$$





Als stetige Funktion nimmt f auf dem Intervall $[x_0, x]$ ein Minimum $m(f, x)$ und ein Maximum $M(f, x)$ an. Und die Monotonie des Integrals liefert:

$$m(f, x) \cdot (x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq M(f, x) \cdot (x - x_0).$$

Da $x - x_0 > 0$ ist, folgt:

$$m(f, x) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq M(f, x).$$

In der Mitte steht ein Differenzenquotient von F, links und rechts jeweils eine nur von x abhängige Größe. Läßt man nun x gegen x_0 wandern, so streben $m(f,x)$ und $M(f,x)$ beide gegen $f(x_0)$. Also muß auch der Differenzenquotient in der Mitte einen Limes besitzen, und man erhält:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0).$$

Diese Beziehung bleibt richtig, wenn man auch Argumente $x < x_0$ zuläßt.

Definition.

Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F' = f$.

Dann heißt F eine *Stammfunktion* von f.

Wir haben gerade gesehen, daß $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$ eine Stammfunktion von f ist.

Betrachten wir einmal die Abbildung $D : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^0$ mit $D(f) := f'$. Offensichtlich ist diese Abbildung linear:

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

$$D(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot D(f).$$

Die Suche nach einer Stammfunktion führt also auf das „LGS“

$$D(F) = f.$$

Die Lösungsmenge hat die gleiche Struktur wie im Falle endlichdimensionaler Vektorräume: Das zugehörige homogene System $D(f) = 0$ hat die Lösungsmenge

$$\text{Ker}\,(D) = \{F \in \mathcal{C}^1 \mid F' = 0\} = \{\text{Konstante Funktionen}\}.$$

Hat man außerdem eine spezielle Lösung F_0 des inhomogenen Systems gefunden, so ist die allgemeine Lösungsmenge die lineare Mannigfaltigkeit

$$F_0 + \text{Ker}\,(D) = \{F_0 + C \mid C \text{ konstant }\}.$$

Damit gilt für eine beliebige Stammfunktion F von f:

$$\int_a^x f(u)\,du = F(x) + c, \text{ mit einer geeigneten Konstante } c.$$

Setzt man $x = a$, so erhält man die Gleichung $0 = F(a) + c$, also $c = -F(a)$. Setzt man nun $x = b$ ein, so erhält man:

$$\int_a^b f(u)\,du = F(x)\,\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Zusammengefaßt haben wir bewiesen:

II.3.6 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

1. *$F(x) := \int_a^x f(u)\,du$ ist eine Stammfunktion von f.*

2. *Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2$ konstant.*

3. *Ist F eine Stammfunktion von f, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung : Die Menge aller Stammfunktionen von f wird oft mit dem Symbol $\int f(x)\,dx$ bezeichnet, und man spricht dann vom *unbestimmten Integral.* Diese Bezeichnungsweise korrekt durchzuhalten, ist mühsam. Wir verstehen hier unter dem unbestimmten Integral die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(u)\,du\,.$$

Aus Bequemlichkeit werden wir aber manchmal auch die andere Schreibweise benutzen.

Beispiele :

1. Da $(x^{n+1})' = (n+1)\cdot x^n$ ist, also $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$, folgt:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

   Das stimmt mit dem überein, was wir schon früher für $n = 1$ und $n = 2$ herausbekommen haben, ist aber natürlich viel allgemeiner.

2. Sei $f(x) := a_2x^2 + a_1x + a_0$. Die allgemeine Stammfunktion von f ist

$$F(x) := \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + c,$$

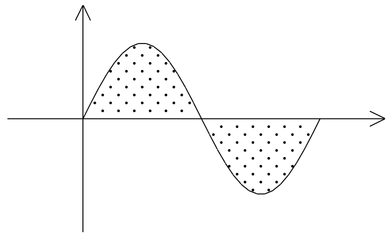
   mit einer Konstanten c.

3. Es soll $\int_{-2}^{+2} |\,x-1\,|\,dx$ berechnet werden. Dabei stört zunächst die Betragsfunktion. Es ist aber halb so schlimm, wir müssen nur die Nullstellen ermitteln und stückweise integrieren:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{+2} |\,x-1\,|\,dx &= \int_{-2}^{1}(1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\
&= (x - \frac{x^2}{2})\,\Big|_{-2}^{1} + (\frac{x^2}{2} - x)\,\Big|_1^2 \\
&= (\frac{1}{2} - (-4)) + (0 - (-\frac{1}{2})) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

4. Da $\cos'(x) = -\sin(x)$ ist, folgt:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = 2$$



und

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = -(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Im zweiten Fall heben sich positiv und negativ zu rechnende Flächenteile gegenseitig weg.

5. Bekanntlich ist $\arctan'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ und $\arctan(0) = 0$. Daraus folgt:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}\,du.$$

Da $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist, ist $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, also

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du}$$

Das liefert uns eine interessante neue Definition für die Zahl π.

Wir benutzen jetzt das Integral, um die Ableitung des Logarithmus zu bestimmen:

Definition.

Für $x > 0$ sei $L(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{1}{u}\,du.$

Offensichtlich ist $L(x)$ eine differenzierbare (und damit auch stetige) Funktion. Es ist $L(x) < 0$ für $0 < x < 1$, $L(1) = 0$ und $L(x) > 0$ für $x > 1$. Da $L'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ ist, muß $L(x)$ streng monoton wachsend sein, also überall injektiv.

II.3.7 Satz. *Für $a, b > 0$ ist $L(ab) = L(a) + L(b)$.*

Beweis: Wir beweisen die Formel mit einem kleinen Trick:

Sei $g(x) := ax$, mit einer Konstanten a, und $G(x) := L(g(x))$. Dann ist

$$G'(x) = \frac{a}{g(x)} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}\,.$$

Also ist G auch eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{x}$, und daher $L(ax) = G(x) = L(x) + c$, mit einer geeigneten Konstante c. Setzt man $x = 1$ ein, so folgt $L(a) = c$. Setzt man anschließend $x = b$ ein, so erhält man die gewünschte Gleichung. $\square$

II.3.8 Folgerung. *Es ist* $L(x^q) = q \cdot L(x)$ *für jedes* $q \in \mathbb{Q}$.

Da $L(2^n) = n \cdot L(2)$ für $n \to \infty$ gegen unendlich strebt, und $L(2^{-n}) = -n \cdot L(2)$ gegen $-\infty$, folgt (mit der Stetigkeit), daß $L : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ surjektiv und damit auch bijektiv ist.

Sei $E := L^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ die Umkehrfunktion zu L. Natürlich ist E dann auch bijektiv. Die für L hergeleiteten Rechenregeln drehen sich bei E um:

II.3.9 Satz. *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *ist* $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$, *und es ist* $E(0) = 1$.

II.3.10 Satz. *Die Funktion* E *ist überall differenzierbar, und es ist*

$$E'(x) = E(x).$$

Beweis: Da E die Umkehrfunktion zu L ist, und $L'(x) > 0$ für $x > 0$, folgt: E ist in jedem $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, mit

$$\begin{aligned} E'(x) &= (L^{-1})'(x) \\ &= \frac{1}{L'(E(x))} \quad = \quad E(x). \end{aligned}$$

□

Da $E'(x) = E(x) > 0$ für alle x ist, ist E streng monoton wachsend.

II.3.11 Satz.

1. *Es ist* $E(1) = e$ *(Eulersche Zahl).*
2. *Für jede reelle Zahl* x *ist* $E(x) = e^x$.

Auf den eher für Mathematiker interessanten Beweis wollen wir hier verzichten.

Als Folgerung ergibt sich:

$$L(x) = \ln(x).$$

Damit sind nun auch die Ableitungsregeln für die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus „bewiesen“. Wir wenden das auf allgemeinere Exponentialfunktionen an:

II.3.12 Satz. *Es ist* $a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$ *und* $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$. [10]

Beweis:
Es ist $a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \cdot \ln(a))$ und $(a^x)' = (e^{\ln(a) \cdot x})' = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$. □

Wir wollen einige Ableitungen ausrechnen:

[10] Diese Formeln hätten wir natürlich schon früher aus den (damals noch nicht bewiesenen) Ableitungsregeln für exp und ln herleiten können.

Beispiele :

1. Sei etwa $f(x) := e^{x \cdot \sin(x^2)}$. Will man diese Funktion differenzieren, so schreibt man sie am besten wie folgt als Verknüpfung von Funktionen:

   $f(x) = \exp \circ h(x)$, $h(x) := x \cdot \sin g(x)$ und $g(x) := x^2$. Dann ist $g'(x) = 2x$ und

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \cdot \sin g(x) + x \cdot (\sin \circ g)'(x) \\ &= \sin(x^2) + x \cdot (\cos(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \sin(x^2) + x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= \sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2). \end{aligned}$$

   also

$$f'(x) = \exp(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x \cdot \sin(x^2)} \cdot [\sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2)].$$

2. Ist $f(x) := \ln(\sin^2(x))$, so gilt:

$$f'(x) = \ln'(\sin^2(x)) \cdot (\sin^2)'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \cot(x).$$

3. Das vorige Beispiel läßt sich verallgemeinern:

   Sei g differenzierbar, $g(x) > 0$ für alle x im Definitionsbereich von g.

$$\text{Dann ist} \quad (\ln \circ g)'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

   Man nennt diesen Ausdruck auch die *logarithmische Ableitung* von g. Sie kann oftmals recht nutzbringend angewandt werden:

   Sei z.B. $g(x) := x^x$. Es ist auf den ersten Blick nicht klar, wie man hier differenzieren soll, da es *scheinbar* zwei verschiedene Regeln gibt, die auch zu verschiedenen Ergebnissen führen. Die logarithmische Ableitung hilft weiter: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{g'(x)}{g(x)} &= (\ln \circ g)'(x) &&= (x \cdot \ln(x))' \\ &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} &&= 1 + \ln(x). \end{aligned}$$

   Das ergibt das überraschende Ergebnis

$$\boxed{(x^x)' = x^x \cdot (1 + \ln(x)).}$$

Bemerkung : Für $x > 0$ ist $\ln(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Aber was ist im Falle $x < 0$ los? Dann ist $-x > 0$ und $\ln(-x)' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$. Also gilt allgemein (für $x \neq 0$): $\ln(|\,x\,|)$ ist Stammfunktion von $\dfrac{1}{x}$.

Es irritiert vielleicht ein wenig, daß hier die nicht überall differenzierbare Betragsfunktion vorkommt. Aber den Punkt $x = 0$, wo $|\,x\,|$ nicht differenzierbar ist, haben wir ja gerade ausgeschlossen.

Etwas ähnliches tritt auf, wenn man die Stammfunktion von $\tan(x)$ sucht. Dazu verwenden wir noch einmal die logarithmische Ableitung:

Sei I ein Intervall, in dem $\cos(x)$ keine Nullstelle hat. Dort ist $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ definiert. Außerdem ist dort $|\cos(x)|$ differenzierbar und > 0. Ist dort $\cos(x) < 0$, so ist $|\cos(x)| = -\cos(x)$ und $|\cos|'(x) = -\cos'(x)$, also $\dfrac{\cos'(x)}{\cos(x)} = \dfrac{|\cos|'(x)}{|\cos|(x)}$. Daher gilt für beliebiges $x \in I$:

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)} \\ &= -\frac{|\cos|'(x)}{|\cos(x)|} = -(\ln\circ|\cos|)'(x).\end{aligned}$$

Also ist $-\ln(|\cos(x)|)$ auf dem betreffenden Intervall eine Stammfunktion von $\tan(x)$. Man beachte, daß man $\ln\circ\cos$ i.a. gar nicht bilden kann!

Generell muß man aufpassen, ob die Funktion, die man integrieren möchte, überhaupt auf dem Integrationsintervall definiert und integrierbar ist. Sonst kann folgendes passieren:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{x^2}\,dx &= (-\frac{1}{x})\Big|_{-1}^{+1} \\ &= (-1) - 1 = -2.\end{aligned}$$

Das ist natürlich vollkommener Unsinn!

Der Integrand $\dfrac{1}{x^2}$ ist in $x = 0$ nicht definiert und ansonsten überall positiv. Das Teilintegral

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -1 - (-\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

strebt für $\varepsilon \to 0$ gegen $+\infty$. Also ist die Funktion nicht einmal über $[0, 1]$ integrierbar, und wir dürfen keineswegs über den Nullpunkt hinweg integrieren.

Der Integrand ist zwar außerhalb 0 stetig, aber er ist nicht beschränkt!

Wir fassen nun die inzwischen ermittelten Stammfunktionen zu einer Tabelle zusammen:

Funktion	Stammfunktion	
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$x \neq 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$	
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$x \neq (n + \frac{1}{2})\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \neq (n + \frac{1}{2})\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$	$x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	
e^x	e^x	
$x^x \cdot (1 + \ln(x))$	x^x	$x > 0$

§4 Integrationstechniken

Wir wollen Differentiations-Regeln neu betrachten und in die Sprache der Integrale und Stammfunktionen übersetzen.

Wir beginnen mit der *Produktregel*:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Sie besagt, daß $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$ ist. Nun kommt es selten vor, daß der Integrand deutlich sichtbar diese Form besitzt, aber umso häufiger ist er von der Form $f \cdot g'$. Wenn wir die Gleichung nach $f \cdot g'$ auflösen und dann integrieren, erhalten wir:

II.4.1 Regel der Partiellen Integration.
Sind f und g über $[a, b]$ stetig differenzierbar, so ist

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(x) \cdot g(x))\,\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Auf den ersten Blick ist der Nutzen dieser Formel noch nicht zu sehen, denn statt des Integrals über $f \cdot g'$ muß man nun das Integral über $f' \cdot g$ berechnen. Den Vorteil erkennt man am besten an Beispielen:

Beispiele :

1. Sei $0 < a < b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x)\,dx &= \int_a^b \ln(x) \cdot x'\,dx \quad \text{(denn es ist } x' = 1\text{)} \\
&= (\ln(x) \cdot x)\,\Big|_a^b - \int_a^b \ln'(x) \cdot x\,dx \quad \text{(Partielle Integration)} \\
&= (x \cdot \ln(x))\,\Big|_a^b - (x)\,\Big|_a^b \quad \text{(denn es ist } \ln'(x) \cdot x = 1\text{)}.
\end{aligned}$$

Also ist $x \cdot \ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$. Zur Probe kann man ja differenzieren.

Die Regel der Partiellen Integration hat hier weitergeholfen, weil $f' \cdot g$ viel einfacher als $f \cdot g'$ ist. Wie man in solchen Fällen jeweils f und g wählen muß, sagt einem aber keiner. Hier fängt die Kunst des Integrierens an.

2. Das folgende Beispiel ist besonders typisch und hat schon fast den Charakter eines Kochrezeptes:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2(x)\,dx &= \int_a^b (-\cos'(x)) \cdot \sin(x)\,dx \\
&= (-\cos(x) \cdot \sin(x))\,\Big|_a^b - \int_a^b (-\cos(x)) \cdot \cos(x)\,dx \\
&= -(\cos(x) \cdot \sin(x))\,\Big|_a^b + \int_a^b \cos^2(x)\,dx \\
&= -(\cos(x) \cdot \sin(x))\,\Big|_a^b + (x)\,\Big|_a^b - \int_a^b \sin^2(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Jetzt ist das Integral, das wir ausrechnen wollten, wieder aufgetaucht! Trotzdem hilft uns das weiter: Das Integral über $\sin^2(x)$ auf der rechten Seite hat nämlich das richtige Vorzeichen. Wir können es auf die andere Seite der Gleichung bringen und erhalten:

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left((x-\cos(x)\cdot\sin(x))\,\Big|_a^b\right).$$

3. Von ähnlicher Bauart ist das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_a^b e^x\cdot\sin(x)\,dx &= \int_a^b e^x\cdot(-\cos'(x))\,dx\\ &= -(e^x\cdot\cos(x))\,\Big|_a^b - \int_a^b (e^x)'\cdot(-\cos(x))\,dx\\ &= -(e^x\cdot\cos(x))\,\Big|_a^b + \int_a^b e^x\cdot\cos(x)\,dx.\end{aligned}$$

Eine zweite Rechnung liefert:

$$\int_a^b e^x\cdot\cos(x)\,dx = (e^x\cdot\sin(x))\,\Big|_a^b - \int_a^b e^x\cdot\sin(x)\,dx.$$

Setzt man das in das erste Ergebnis ein, so erhält man:

$$\int_a^b e^x\cdot\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left((e^x\cdot(\sin(x)-\cos(x)))\,\Big|_a^b\right).$$

Die zweite Technik, die wir kennenlernen wollen, ist noch etwas schwieriger.

Durch Probieren kann man rasch herausfinden, daß nicht nur $-\cos(x)$ Stammfunktion von $\sin(x)$ ist, sondern auch $-\dfrac{1}{a}\cos(ax)$ Stammfunktion von $\sin(ax)$. Wenn man zur Probe differenziert, benötigt man die Kettenregel. Daher liegt es nahe, diese Regel auf ihre Verwendbarkeit in der Integrationstheorie hin zu untersuchen:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Weiter sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, mit $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I = [a,b]$.

Dann ist die Verknüpfung $F\circ\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ definiert und differenzierbar, es ist

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t).$$

Also ist $F\circ\varphi$ eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

Für das bestimmte Integral von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ über $[\alpha,\beta]$ ergibt das:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Andererseits ist

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)\,dx.$$

Da $F' = f$ ist, haben wir bewiesen:

II.4.2 Substitutionsregel. *Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Merken kann man sich diese Regel mit folgender Eselsbrücke:
Ist $x = x(t)$, so ist

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\frac{dt}{dt}\,dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Wenn nun F Stammfunktion von f ist, dann ergibt sich:

$$F(x(t)) \text{ ist Stammfunktion von } f(x(t)) \cdot x'(t).$$

Auch hier zeigt sich der Nutzen am besten an Hand von Beispielen. Dabei beginnen wir mit dem einfacheren Fall, der Anwendung der Substitutionsregel **von rechts nach links**. Der Integrand ist dann in der Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ gegeben.

Beispiele :

1. Häufig möchte man eine Funktion der Form $x \mapsto f(x + c)$ integrieren. Hier wird in f die Funktion $\varphi(t) := t + c$ eingesetzt. Da $\varphi'(t) \equiv 1$ ist, folgt:

$$\int_a^b f(t + c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx.$$

2. Nun untersuchen wir Funktionen der Form $x \mapsto f(x \cdot c)$. Hier wird $\varphi(t) := t \cdot c$ eingesetzt, mit $\varphi'(t) \equiv c$. Die Substitutionsregel liefert eine Formel für das Integral über $c \cdot f(t \cdot c)$. Wir können aber die Konstante c auf die andere Seite der Gleichung bringen und erhalten dann:

$$\int_a^b f(t \cdot c)\,dt = \frac{1}{c} \cdot \int_{a\cdot c}^{b\cdot c} f(x)\,dx.$$

3. Auch das folgende Beispiel ist eigentlich ein alter Bekannter:

   Es sei $f(x) := \dfrac{1}{x}$ und $\varphi(t)$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen über $[\alpha, \beta]$. Dann gilt:

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

   Also ist

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{1}{x}\,dx = (\ln|\,x\,|)\,\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = (\ln|\,\varphi(t)\,|)\,\Big|_\alpha^\beta .$$

   Das hätte man aber auch über die logarithmische Ableitung erhalten:

   Da $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = (\ln\circ|\varphi|)'(t)$ ist, ist $\ln\circ|\varphi|$ eine Stammfunktion von $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$.

   Z.B. ist

$$\int_a^b \tan(t)\,dt = \int_a^b \frac{-\cos'(t)}{\cos(t)}\,dt = -(\ln|\cos(t)\,|)\,\Big|_a^b .$$

4. Sei $f(x) := x^n$, φ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi(t)^n \cdot \varphi'(t)\,dt &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \Big(\varphi(\beta)^{n+1} - \varphi(\alpha)^{n+1}\Big).\end{aligned}$$

Speziell ist $\dfrac{1}{2}\varphi(t)^2$ Stammfunktion von $\varphi(t)\varphi'(t)$, also etwa

$$\int_\alpha^\beta \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t)^2 \Big|_\alpha^\beta .$$

Wenn die rechte Seite der Substitutionsregel der Ausgangspunkt ist, kann man die Substitution φ leicht erkennen. Schwieriger wird es, wenn man mit der linken Seite beginnt. Dann die geeignete Substitution zu finden, erfordert Kreativität und viel Routine. Wir beginnen mit einem noch relativ einfachen Beispiel:

Es soll das Integral $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$ berechnet werden, für $-1 < a < b < +1$.

Es ist

$$0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \iff (y \ge 0) \wedge (x^2 + y^2 \le 1).$$

Für $a \to -1$ und $b \to +1$ wird also durch das obige Integral die Fläche des halben Einheitskreises berechnet.

Die Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$ erinnert an die Gleichung $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, deshalb kann man es ja einmal mit der Substitution $\varphi(t) := \sin(t)$ versuchen. Das geht nur, wenn sich die Intervallgrenzen in der Form $a = \varphi(\alpha)$ und $b = \varphi(\beta)$ schreiben lassen.

Zum Glück bildet die Sinus-Funktion das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ bijektiv auf das Intervall $[-1,+1]$ ab, und wir können $\alpha := \arcsin(a)$ und $\beta := \arcsin(b)$ setzen.

Die Substitutionsregel liefert nun:

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Tatsächlich hat sich die Situation vereinfacht, das neue Integral kann in der bekannten Weise mit Hilfe partieller Integration berechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \cos(t)\sin'(t)\,dt \\ &= \cos(t)\sin(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \sin^2(t)\,dt \\ &= \cos(t)\sin(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (1-\cos^2(t))\,dt \\ &= (\cos(t)\sin(t) + t)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot(\cos(t)\cdot\sin(t)+t)\,\Big|_\alpha^\beta .$$

Das Ergebnis kann nun noch etwas umformuliert werden. Zunächst können wir $\cos(t)$ durch $\sqrt{1-\sin^2(t)}$ ersetzen, so daß nur noch die Substitutions-Funktion $\sin(t)$ vorkommt. Dann ist es natürlich wünschenswert, die Hilfsgrößen α und β loszuwerden, damit das Ergebnis von a und b abhängt. Setzen wir die Gleichungen

$$\alpha = \arcsin(a) \quad \text{und} \quad \beta = \arcsin(b)$$

ein, so erhalten wir:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot(t\cdot\sqrt{1-t^2}+\arcsin(t))\,\Big|_a^b .$$

Läßt man hier $a \to -1$ und $b \to +1$ gehen, so konvergiert auch die rechte Seite gegen $\frac{1}{2}\cdot(\arcsin(+1)-\arcsin(-1)) = \frac{\pi}{2}$. Also ist

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Das sollte für die Fläche des halben Einheitskreises auch herauskommen!

Nachdem das Prinzip klargeworden ist, können wir weitere Beispiele rechnen:

Beispiele :

1. Es soll $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ berechnet werden:

   Wir verwenden die Substitution $x(t) = t^2$, also $x'(t) = 2t$. Dann ist $t = \sqrt{x}$ und

   $$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\cdot 2t\,dt \\ &= 2(t-1)e^t = 2(\sqrt{x}-1)\cdot e^{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

2. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß man jede rationale Funktion (außerhalb ihrer Polstellen) integrieren kann. Deshalb möchte man Integranden gerne mit Hilfe einer geeigneten Substitution rational machen:

   In $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ benutzen wir die Substitution $x(t) = t^6$, mit $x'(t) = 6t^5$ und $t = \sqrt[6]{x}$. Dann gilt:

   $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5}{t^2+t^3}\,dt = 6\int \frac{t^3}{1+t}\,dt.$$

3. Ist F rational, so integriert man $f(x) := F(e^x)$ mit Hilfe der Substitution $x(t) = \ln(t)$, also $x'(t) = \frac{1}{t}$ und $t = e^x$. Dann ist

   $$\int F(e^x)\,dx = \int \frac{F(t)}{t}\,dt.$$

4. Jetzt sollte das Schema deutlich geworden sein.

   Sei etwa $F(x,y)$ eine rationale Funktion in x und y. Um $f(x) := F(x, \sqrt[m]{ax+b})$ zu integrieren, setzen wir $\sqrt[m]{ax+b} = t$, also $x(t) = \dfrac{1}{a}(t^m - b)$, mit $x'(t) = \dfrac{m}{a}t^{m-1}$. Das ergibt:

$$\int F(x, \sqrt[m]{ax+b})\,dx = \int F(\frac{1}{a}(t^m - b), t)\frac{m}{a}t^{m-1}\,dt.$$

5. Zum Schluß noch ein schwierigeres Beispiel:

   Es soll $\displaystyle\int F(\sin x, \cos x)\,dx$ für eine rationale Funktion $F = F(x,y)$ berechnet werden:

   In der Klasse der Winkelfunktionen, ihrer Umkehrungen und deren Ableitungen kennen wir nur einen einzigen Fall, wo eine rationale Funktion auftaucht:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   Daher versuchen wir, Sinus und Cosinus durch den Tangens auszudrücken: Es ist

$$\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)},$$

   also

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \frac{1}{1+\tan^2(x)} \\ \text{und} \quad \sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}. \end{aligned}$$

   Das ist noch nicht ganz befriedigend, weil jetzt für die Darstellung von Sinus und Cosinus durch den Tangens noch Wurzeln benötigt werden. Es gilt aber:

$$\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\tan(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})},$$

$$\text{und} \quad \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)},$$

   wobei

$$\tan(x) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

   ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \\ \text{und} \quad \cos(x) &= \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die Substitution $t = \tan(\dfrac{x}{2})$, also $x(t) = 2\arctan(t)$ und $x'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$. Dann folgt:

$$\int F(\sin x, \cos x)\, dx = \int F(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Damit ist der ganze Integrand rational geworden.

6. Manchmal kann es auch sinnvoll sein, Winkelfunktionen einzusetzen, wie wir es schon beim ersten Beispiel zur Substitutionsregel gesehen haben. Die Substitution $x(t) = \sin(t)$ ergibt z.B.:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx &= \int \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}} \cos(t)\, dt \\
&= \int \sqrt{\frac{(1-\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt \\
&= \int \frac{1-\sin t}{\cos t} \cos t\, dt \\
&= \int (1-\sin t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun – wie versprochen – zeigen, daß jede rationale Funktion integrierbar ist:

$$\text{Es sei} \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ mit Polynomen } P \text{ und } Q.$$

Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. Schritt:

Ist $\deg(P) \geq \deg(Q)$, so führt man eine Polynomdivision durch:

$$f(x) = P_0(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ mit Polynomen } P_0 \text{ und } R,$$

sowie $\deg(R) < \deg(Q)$.

Da Polynome problemlos integriert werden können, braucht man nur den Fall $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\deg(P) < \deg(Q)$ zu betrachten.

2. Schritt:

Bestimme alle Nullstellen von $Q(x)$! Da einige Nullstellen komplex sein können, ergibt sich eine Zerlegung

$$Q(x) = (x - c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{k_r} \cdot q_1(x)^{s_1} \cdot \ldots \cdot q_l(x)^{s_l},$$

mit reellen Zahlen $c_1, \ldots, c_r$ und unzerlegbaren quadratischen Polynomen $q_1(x), \ldots, q_l(x)$.

Dieser Schritt kann natürlich in der Praxis ein unüberwindbares Hindernis darstellen, denn für $\deg(Q) > 4$ gibt es kein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen. Theoretisch existiert die Zerlegung aber!

3. Schritt:

Wenn die Zerlegung von $Q(x)$ in „irreduzible Faktoren“ vom Typ $x-c$ bzw. $q(x)$ gegeben ist, dann kann man $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von *Partialbrüchen* schreiben:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{\varrho=1}^{r}\sum_{i=1}^{k_\varrho} \frac{A_{\varrho,i}}{(x-c_\varrho)^i} + \sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_\lambda} \frac{B_{\lambda,j}x + C_{\lambda,j}}{q_\lambda^j}.$$

Hier ist eine Andeutung des Beweises für den ersten Teil der Summe:

Es sei $Q(x) = (x-c)^k \cdot g(x)$, mit $g(c) \neq 0$. Setzt man $b := \dfrac{P(c)}{g(c)}$, so ist

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{b\cdot g(x) + (P(x) - b\cdot g(x))}{(x-c)^k \cdot g(x)} \\ &= \frac{b}{(x-c)^k} + \frac{P(x) - b\cdot g(x)}{(x-c)^k\cdot g(x)}.\end{aligned}$$

Da $P(c) - b\cdot g(c) = 0$ ist, muß der Zähler des zweiten Bruches den Faktor $x-c$ enthalten. Es gibt also ein $k' < k$, so daß $P(x) - b\cdot g(x) = (x-c)^{k'} \cdot h(x)$ mit einem geeigneten Polynom $h(x)$ mit $h(c) \neq 0$ ist. Also ist

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b}{(x-c)^k} + \frac{h(x)}{(x-c)^{k-k'}\cdot g(x)}.$$

Den zweiten Summanden behandelt man nun wieder genauso, und nach endlich vielen Schritten ist man am Ziel.

In der Praxis nimmt man den Satz von der Partialbruchzerlegung einfach zur Kenntnis, setzt die Zähler der Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten an, multipliziert aus und versucht, über einen Koeffizientenvergleich zu Gleichungen für die gesuchten Koeffizienten zu kommen.

4. Schritt:

Schließlich sucht man nach Stammfunktionen für Funktionen der Art

$$\frac{A}{(x-c)^k} \quad \text{und} \quad \frac{Bx+C}{q(x)^s}.$$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x-c}\,dx = \ln|\,x-c\,|.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-c)^k}\,dx = \frac{1}{1-k}(x-c)^{1-k}$, für $k \geq 2$.

c) Bei Integralen der Form $\displaystyle\int \frac{h(x)}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$ mit linearem $h(x)$ müssen wir zunächst eine Substitution vornehmen. Da wir nur den Fall betrachten, wo der Nenner **keine** reelle Nullstelle besitzt, ist $a^2 - 4b < 0$.

Wir machen den Ansatz $x(t)^2 + a\cdot x(t) + b = c^2(t^2+1)$. Dann muß gelten:

$$x(t) = \frac{1}{2}\cdot(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2 + 4c^2(t^2+1)}).$$

Setzen wir $c := \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$, also $a^2 - 4b = -4c^2$, so ergibt sich die Substitution

$$x(t) := ct - \frac{a}{2}, \quad x'(t) = c.$$

Dann ist

$$\int \frac{h(x)}{(x^2 + ax + b)^n}\,dx = \int \frac{c \cdot h(x(t))}{(c^2(t^2+1))^n}\,dt = \frac{1}{c^{2n-1}} \int \frac{h(x(t))}{(t^2+1)^n}\,dt.$$

Der Zähler $h(x(t))$ ist wieder eine lineare Funktion.

Wir müssen also noch die folgenden Integraltypen behandeln:

d) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t).$

e) $\displaystyle\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$

f) $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{x'(t)}{x(t)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^n}\,dx$, für $x(t) = t^2 + 1$ (und $n > 1$).

Also ist $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}.$

g) Es bleibt der schwierigste Fall, nämlich $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt.$

Behauptung: Es gibt für jedes $n \geq 1$ eine aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Funktion F_n mit $F_n(0) = 0$ und $F_n' = \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$.

Beweis: Wir führen Induktion nach n.

Natürlich setzen wir $F_1(t) := \arctan(t)$. Aber wie weiter? Wenn es die gesuchten Funktionen gibt, dann gilt:

$$\begin{aligned}
[2n \cdot F_{n+1}(t) - (2n-1) \cdot F_n(t)]' &= \frac{2n}{(t^2+1)^{n+1}} - \frac{2n-1}{(t^2+1)^n} \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^n} - \frac{2n(t^2+1-1)}{(t^2+1)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^n} + t \cdot \frac{(-n) \cdot 2t}{(t^2+1)^{n+1}} \\
&= \left(\frac{t}{(t^2+1)^n}\right)',
\end{aligned}$$

also

$$F_{n+1}(t) = \frac{2n-1}{2n} F_n(t) + \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + C,$$

mit einer Integrations-Konstanten C, die wegen $F_n(0) = F_{n+1}(0) = 0$ ebenfalls $= 0$ gesetzt werden sollte. Diese rekursive Definition tut's tatsächlich!

In der Theorie läßt sich also jede rationale Funktion elementar integrieren. In der Praxis dürfte es oft an der Nullstellenbestimmung im Nenner scheitern.

Beispiele:

1. Sei $f(x) := \dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$.

   Wir machen den Ansatz $\dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b+cx}{x^2+1}$. Das führt zu dem Gleichungssystem $a + c = 0$, $b - c = 0$ und $a - b = 1$.

   Also muß $a = \dfrac{1}{2}$ und $b = c = -\dfrac{1}{2}$ sein, d.h. $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+1}\right]$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{2} \cdot \left[\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln|\,x-1\,| - \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right].\end{aligned}$$

2. Sei $f(x) := \dfrac{x^4}{x^3-1} = x + \dfrac{x}{x^3-1} = x + \dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

$$\text{Der Ansatz} \quad \frac{x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b+cx}{x^2+x+1}$$

   liefert $a + c = 0$, $a + b - c = 1$ und $a - b = 0$, also $a = b = \dfrac{1}{3}$ und $c = -\dfrac{1}{3}$.

$$\text{Damit ist} \quad f(x) = x + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+x+1}\right].$$

   Das Integral $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx$ behandeln wir mit der Substitution

$$x(t)^2 + x(t) + 1 = c^2(t^2+1), \text{ mit } c = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

   Das ergibt $x(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t - 1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1-x(t)}{x(t)^2+x(t)+1}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{3-\sqrt{3}t}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\,dt \quad = \quad \int \frac{\sqrt{3}-t}{t^2+1}\,dt,\end{aligned}$$

   mit $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ und $t^2 = \dfrac{1}{3}(4x^2+4x+1)$. Also ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\ln|\,x-1\,| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right).\end{aligned}$$

§5 Uneigentliche Integrale

Wir beginnen mit einem Beispiel:

Sei $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, also f über $[0,1]$ nicht im Riemannschen Sinne integrierbar.

Andererseits ist $F(x) := 2\sqrt{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$, und daher

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = F(1) - F(\varepsilon) = 2(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

Niemand kann einen nun daran hindern, ε gegen Null gehen zu lassen. Und siehe da:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = 2.$$

Da dieser Grenzwert existiert, wollen wir ihn natürlich gerne als Integral von f über $[0,1]$ auffassen. Damit das möglich ist, müssen wir den Integralbegriff erweitern. Das geschieht in Gestalt der „uneigentlichen Integrale“.

Definition.

Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig (aber nicht notwendig beschränkt).

f heißt über $[a,b)$ *uneigentlich integrierbar*, falls

$$A := \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt$$

existiert (und damit eine endliche reelle Zahl ist).

Den Grenzwert A bezeichnet man auch mit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ und nennt ihn das *uneigentliche Integral von f über* $[a,b]$. Man sagt dann auch, daß das uneigentliche Integral *konvergiert*, und man nennt es *divergent*, falls der Grenzwert nicht existiert.

Analog erklärt man uneigentliche Integrale über $(a,b]$ durch den rechtsseitigen Limes, wie im obigen Beispiel.

Man kann zeigen, daß dieser Begriff nichts Neues bringt, wenn f schon im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

Eine Funktion f heißt über einem offenen Intervall (a,b) uneigentlich integrierbar, falls es einen Punkt $c \in (a,b)$ gibt, so daß f über $(a,c]$ und über $[c,b)$ integrierbar ist. Wichtig ist, daß man beide Grenzübergänge unabhängig voneinander durchführt!

Beispiel :

Wir betrachten $f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$ auf $(0,b]$ für verschiedene α.

a) Ist $\alpha = 1$, so ist $F(x) := \ln(x)$ eine Stammfunktion für $f(x)$, und daher

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(\varepsilon) \longrightarrow +\infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Das uneigentliche Integral divergiert!

b) Ist $\alpha \neq 1$, so ist $F(x) := -\dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ Stammfunktion für f.

Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha < 1$: dann ist

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right).$$

Da $1-\alpha > 0$ ist, strebt $\dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} = \varepsilon^{1-\alpha}$ gegen Null für $\varepsilon \to 0$.

Also existiert $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = -\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}}$ für $\alpha < 1$.

Insbesondere ist $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$.

c) Ist $\alpha > 1$, so ist $\alpha - 1 > 0$, und $\dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}$ strebt gegen $+\infty$ für $\varepsilon \to 0$. In diesem Fall divergiert das uneigentliche Integral.

Das trifft z.B. auf $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ zu.

Ein weiteres Problem beim Riemannschen Integral besteht darin, daß der Integrand immer über einem beschränkten Intervall definiert sein muß. Manchmal möchte man jedoch auch über ganz $\mathbb{R}$ oder zumindest über eine Halbachse integrieren. Dann behilft man sich mit einem anderen Typ von Integral:

Definition.

Sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. f heißt über $[a, +\infty)$ *uneigentlich integrierbar*, falls

$$A := \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

existiert.

Man sagt dann, daß das uneigentliche Integral von f über $[a, +\infty)$ existiert oder konvergiert, und man schreibt:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt := A.$$

Analog definiert man das uneigentliche Integral über $(-\infty, b]$.

Beispiel :

Wir betrachten noch einmal $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ für verschiedene α.

a) $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x) - \ln(a)$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$. Das uneigentliche Integral divergiert auch hier.

b) Ist $\alpha < 1$, so ist $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$, wobei $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha}$ gegen $+\infty$ strebt, für $x \to \infty$. Auch dieses Integral divergiert.

c) Ist $\alpha > 1$, so konvergiert das uneigentliche Integral offensichtlich. Das bedeutet, daß insbesondere das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert, während $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ divergiert.

Wir haben übrigens gesehen, daß $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ für **kein** α konvergiert!

Wie bei offenen Intervallen müssen uneigentliche Integrale über ganz $\mathbb{R}$ durch zwei voneinander unabhängige Grenzprozesse berechnet werden:

Definition.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existiert (oder konvergiert) genau dann, wenn die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt \text{ und } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

existieren. Der Wert des Integrals über ganz $\mathbb{R}$ ist gleich der Summe der Werte der Teilintegrale, d.h. es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Man beachte, daß in der letzten Formel a und b unabhängig voneinander gegen die Grenzen streben. Manchmal findet man auch noch den folgenden Grenzwert:

$$HW\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{+r} f(t)\,dt.$$

Man spricht dann vom *Cauchy'schen Hauptwert*. Es kann passieren, daß dieser Hauptwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral von f über $\mathbb{R}$ divergiert.

Wenn keine explizite Stammfunktion gegeben ist, wird es schwierig mit dem Nachweis von Konvergenz oder Divergenz eines uneigentlichen Integrals. Für den Fall gibt es aber gewisse Konvergenzkriterien. Bevor wir darauf eingehen, müssen wir etwas über Folgen von Zahlen nachtragen:

Es sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so daß folgendes gilt:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{s.d. } \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt: } |\,a_n - a\,| < \varepsilon.$$

Da die Folgenglieder a_n dem Grenzwert beliebig nahe kommen, erwarten wir, daß sich die Folgenglieder auch untereinander beliebig nahe kommen. Das ist in der Tat der Fall:

Sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|\, a_n - a \,| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_0$ ist. Aber dann gilt für $n, m \geq N_0$:

$$\begin{aligned} |\, a_n - a_m \,| &= |\,(a_n - a) + (a - a_m)\,| \\ &\leq |\, a_n - a \,| + |\, a_m - a \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten ist so typisch, daß es eine besondere Bezeichnung dafür gibt:

Definition.

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } \forall\, n, m \geq n_0 \, : \, |\, a_n - a_m \,| < \varepsilon.$$

Wir haben oben gerade eingesehen, daß jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Das war nicht so überraschend. Es gilt aber für reelle Folgen auch die Umkehrung:

II.5.1 Cauchy'sches Konvergenzkriterium.
Jede (reelle) Cauchyfolge besitzt einen Grenzwert.

Beweis: Daß dieser Satz gilt, ist keineswegs selbstverständlich. Das Hauptproblem besteht darin, einen Kandidaten für den Grenzwert zu finden.

1) *Cauchyfolgen sind beschränkt*:

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $|\, a_n - a_m \,| \leq 1$ für $n, m \geq n_0$ ist. Dann ist

$$C := \max\{|\, a_n \,| \,:\, n = 1, 2, \ldots, n_0\}$$

eine endliche reelle Zahl, und es gilt:

Für $n \leq n_0$ ist $|\, a_n \,| \leq C$,
für $n > n_0$ ist

$$|\, a_n \,| = |\, a_{n_0} + (a_n - a_{n_0})\,| \leq |\, a_{n_0} \,| + |\, a_n - a_{n_0} \,| \leq C + 1.$$

Also ist die Folge durch $C + 1$ beschränkt.

2) Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß (der ziemlich direkt aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen folgt) besitzt jede beschränkte Folge einen Häufungspunkt. Sei also a ein HP der Cauchyfolge (a_n). Wie im ersten Kapitel angemerkt wurde, kann man eine Teilfolge $(a_{n(k)})$ von (a_n) finden, die gegen a konvergiert. Demnach ist a ein guter Kandidat für den Grenzwert.

3) Um nun zu zeigen, daß (a_n) selbst schon gegen a konvergiert, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Da (a_n) Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|\, a_n - a_m \,| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geq n_1$ ist. Und weil $(a_{n(k)})$ gegen a konvergiert, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $n_0 := n(k_0) \geq n_1$ und $|\, a_{n_0} - a \,| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Für $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |\, a_n - a \,| &= |\,(a_{n_0} - a) + (a_n - a_{n_0})\,| \\ &\leq |\, a_{n_0} - a \,| + |\, a_n - a_{n_0} \,| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß (a_n) gegen a konvergiert. □

Das Konvergenzkriterium von Cauchy wird uns noch häufiger begegnen. Als erstes wenden wir es auf die Theorie der uneigentlichen Integrale an:

II.5.2 Cauchykriterium für uneigentliche Integrale. *Sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, C = C(\varepsilon) \geq a, \text{ s.d. } \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \Big| < \varepsilon \text{ für } C < x_1 < x_2 \text{ ist.}$$

BEWEIS:
„$\Longrightarrow$“: Das uneigentliche Integral konvergiere gegen $A \in \mathbb{R}$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $C = C(\varepsilon)$ so, daß

$$\Big| \int_a^r f(x)\,dx - A \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } r \geq C \text{ ist.}$$

Für $C < x_1 < x_2$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \Big| &= \Big| \int_a^{x_2} f(x)\,dx - \int_a^{x_1} f(x)\,dx \Big| \\ &= \Big| (\int_a^{x_2} f(x)\,dx - A) + (A - \int_a^{x_1} f(x)\,dx) \Big| \\ &\leq \Big| \int_a^{x_2} f(x)\,dx - A \Big| + \Big| \int_a^{x_1} f(x)\,dx - A \Big| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“: Nun sei das Kriterium erfüllt.

Wir setzen $x_n := a + n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (x_n) eine monoton wachsende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Wir setzen außerdem $A_n := \int_a^{x_n} f(x)\,dx$. Wir wollen zeigen, daß die Folge (A_n) gegen eine reelle Zahl A konvergiert, und daß A gerade das uneigentliche Integral ist.

a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $C = C(\varepsilon)$ gemäß dem Kriterium. Außerdem wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $x_n \geq C$ für $n \geq n_0$ ist. Für solche n gilt:

$$|\, A_n - A_{n_0} \,| = \Big| \int_{x_{n_0}}^{x_n} f(x)\,dx \Big| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß (A_n) eine Cauchyfolge ist, die dementsprechend gegen ein $A \in \mathbb{R}$ konvergieren muß.

Wir wollen zeigen, daß $\lim\limits_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx = A$ ist. Dazu sei noch einmal ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $|\, A_n - A \,| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\Big| \int_{x_n}^r f(x)\,dx \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$ und $r > x_n$ ist. Für solche r ist dann

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^r f(x)\,dx - A \Big| &= \Big| \int_a^{x_n} f(x)\,dx + \int_{x_n}^r f(x)\,dx - A \Big| \\ &\leq \Big| \int_{x_n}^r f(x)\,dx \Big| + |\, A_n - A \,| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Der Nutzen des Cauchykriteriums wird sich gleich zeigen. Zuvor brauchen wir jedoch noch einen weiteren Begriff:

Definition.

Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert absolut*, falls $\int_a^\infty |\,f(x)\,|\,dx$ konvergiert.

Für andere Typen von uneigentlichen Integralen definiert man die absolute Konvergenz entsprechend.

II.5.3 Satz. *Ist f absolut uneigentlich integrierbar, so auch im gewöhnlichen Sinne.*

Beweis: Es ist

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |\,f(x)\,|\,dx.$$

Wenn also $|\,f(x)\,|$ das Cauchykriterium erfüllt, so erst recht $f(x)$ selbst. Daraus folgt die Behauptung. □

Die Umkehrung des Satzes ist falsch!

Nun haben wir ein Mittel an der Hand, die Konvergenz von Integralen durch den Vergleich mit bekannteren Integralen zu beweisen:

II.5.4 Majorantenkriterium. *Es sei g uneigentlich integrierbar. Ist $|\,f\,| \le g$, so ist f absolut uneigentlich integrierbar.*

Beweis: Mit dem Cauchykriterium und der Monotonie des Integrals erhält man, daß mit g auch $|\,f\,|$ uneigentlich integrierbar ist. □

Beispiele:

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergiert, weil $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert.

2.

$$\text{Es ist}\qquad \begin{aligned}\int_1^r e^{-x}\,dx &= -\int_1^r (e^{-x})'\,dx\\ &= -(e^{-r}-e^{-1}),\end{aligned}$$

und das konvergiert gegen $\dfrac{1}{e}$ für $r\to\infty$.

Also existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$.

Analog ist

$$\int_{-\infty}^{-1} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{-1}(e^x)'\,dx = \lim_{r\to\infty}(e^{-1}-e^{-r}) = e^{-1}.$$

Für $x\ge 1$ ist $x^2\ge x$, also $e^{-x^2}\le e^{-x}$.

Für $x \le -1$ ist $x^2 = |\,x\,|^2 \ge |\,x\,| = -x$, also $-x^2 \le x$. Damit ist dort $e^{-x^2} \le e^{-x}$, und es folgt die Konvergenz des „Fehlerintegrals“ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

3. Die Funktion $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$ ist überall stetig, und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_s^t \frac{\sin x}{x}\,dx &= -\int_s^t \frac{\cos' x}{x}\,dx \\ &= -\frac{\cos x}{x}\,\Big|_s^t - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx,\end{aligned}$$

also
$$\Big|\int_s^t \frac{\sin x}{x}\,dx\,\Big| \le \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \int_s^t \frac{1}{x^2}\,dx.$$
Der Ausdruck auf der rechten Seite strebt für $0 < s < t$ und $s \to \infty$ gegen Null. Mit dem Cauchykriterium folgt nun, daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergiert.

Man kann jedoch zeigen, daß $\displaystyle\int_0^\infty \Big|\,\frac{\sin x}{x}\,\Big|\,dx$ divergiert!

4. Die Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Dabei ist $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz des uneigentlichen Integrals bei $t = 0$: Ist $x \ge 1$, so strebt t^{x-1} für $t \to 0$ gegen Null und es gibt keine Probleme. Für $0 < x < 1$ ist aber $t^{x-1} = e^{|\,(x-1)\cdot\ln t\,|}$, und das divergiert bei $t = 0$. Also muß in diesem Fall die Konvergenz des Integrals bewiesen werden:

Für $0 < t \le 1$ ist $1 < e^t \le e$, also $|\,e^{-t}t^{x-1}\,| < t^{x-1}$. Es reicht demnach, die Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ zu zeigen. Da $(t^x)' = x \cdot t^{x-1}$ ist, folgt aber:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\,dt &= \frac{1}{x}t^x\,\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{x}(1-\varepsilon^x) \to \frac{1}{x}\ (\text{für } \varepsilon \to 0+).\end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Konvergenz des Integrals für $t \to \infty$. Das geht folgendermaßen:

Da die Exponentialfunktion stärker als jede Potenz wächst, strebt $e^{-t}t^{x+1}$ für $t \to \infty$ gegen Null. Also gibt es eine Zahl $C > 0$, so daß $e^{-t}t^{x+1} \le C$ für alle t ist. Daraus folgt:

$$|\,e^{-t}t^{x-1}\,| \le C \cdot \frac{1}{t^2} \text{ für } t \ge 1.$$

Mit dem Majorantenkriterium ergibt sich die Konvergenz des Integrals.

Die so eingeführte Funktion ist die *Gamma-Funktion*. Es gilt:

a) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -(e^{-t})\Big|_0^\infty = 1.$

b) $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$. Mit partieller Integration erhält man:

$$\int_\varepsilon^r e^{-t}t^x\,dt = -e^{-t}t^x\Big|_\varepsilon^r + x\int_\varepsilon^r e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Der erste Summand strebt gegen 0, der zweite gegen $x \cdot \Gamma(x)$. Also ist

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Insbesondere folgt daraus: $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

§6 Kurven und Weglängen

Definition.

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

α heißt *stetig* (*differenzierbar*, *stetig differenzierbar* usw.), falls alle Komponentenfunktionen α_i stetig (differenzierbar, stetig differenzierbar usw.) sind.

Ist α differenzierbar, so bezeichnet man die Ableitung

$$\dot{\alpha}(t) := (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t))$$

auch als *Geschwindigkeitsvektor* von α an der Stelle t.

Definition.

Eine Abbildung $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetige Kurve* oder auch *Integrationsweg*, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ gibt, so daß α auf jedem Teilintervall stetig differenzierbar ist (mit existierenden einseitigen Grenzwerten). Die Kurve heißt *glatt*, falls α auf ganz I stetig differenzierbar ist und $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist.

$\alpha(a)$ heißt Anfangspunkt, $\alpha(b)$ heißt Endpunkt der Kurve. Ist $\alpha(a) = \alpha(b)$, so nennt man die Kurve *geschlossen*.

Beispiele :

1. Sind $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{v}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, so ist $\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ die *Gerade* durch $\mathbf{x}_0$ in Richtung $\mathbf{v}$. Als Abbildung ist sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig differenzierbar. Da $\dot{\alpha}(t) \equiv \mathbf{v}$ ist, liegt eine glatte Kurve vor.

2. Sind $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ zwei verschiedene Vektoren, so ist $\alpha(t) := (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$ die *Verbindungsstrecke* von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$. Definitionsintervall ist hier das Intervall $[0, 1]$. Für die Ableitung erhält man $\dot{\alpha}(t) \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Das ist der Richtungsvektor der Strecke und $\neq \mathbf{0}$.

3. $\alpha(t) := (r \cos t, r \sin t)$ beschreibt einen *Kreis* vom Radius r um Null im $\mathbb{R}^2$. Als Definitionsintervall nimmt man sinnvollerweise das Intervall $[0, 2\pi]$. Das ergibt einen geschlossenen Weg. Die Ableitung ist $\dot{\alpha}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, mit

$$\| \dot{\alpha}(t) \| = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r.$$

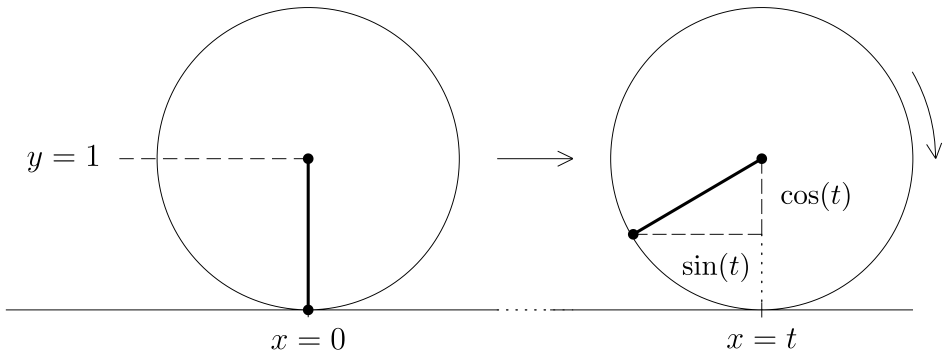
Ist $r = 0$, so kommt nur der Nullpunkt heraus. Setzt man $r \neq 0$ voraus, so ist die Kreislinie eine glatte Kurve.

4. Durch $\alpha(t) := (a \cos t, b \sin t)$ und $t \in [0, 2\pi]$ wird eine Ellipse mit den Halbachsen a und b definiert:

$$E := \alpha([0, 2\pi]) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x_1}{a})^2 + (\frac{x_2}{b})^2 = 1\}.$$

5. Viele interessante Kurven kommen aus der Anwendung. Wir betrachten hier eine *Zykloide*:

   Eine Kreisscheibe vom Radius 1 rolle entlang der x-Achse. Beim Start habe der Mittelpunkt die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$. Der Punkt mit den Anfangskoordinaten $(0,0)$ bewegt sich auf der Peripherie der Scheibe. Wie sehen seine Koordinaten $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ aus, nachdem die Scheibe um eine Strecke der Länge t weitergerollt ist?



   Das Rad berührt nun die x-Achse bei $(t, 0)$, und der beobachtete Punkt hat einen Kreisbogen der Länge t zurückgelegt. Da der Radius des Kreises $= 1$ sein soll, entspricht der Bogenlänge auch ein Winkel vom (Bogen–)maß t. Offensichtlich gilt dann für $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$:

$$x(t) = t - \sin t \text{ und } y(t) = 1 - \cos(t).$$

   Man überlegt sich leicht, daß diese Beziehungen auch füer $t \ge \frac{\pi}{2}$ richtig bleiben. Für $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ gilt z.B.:

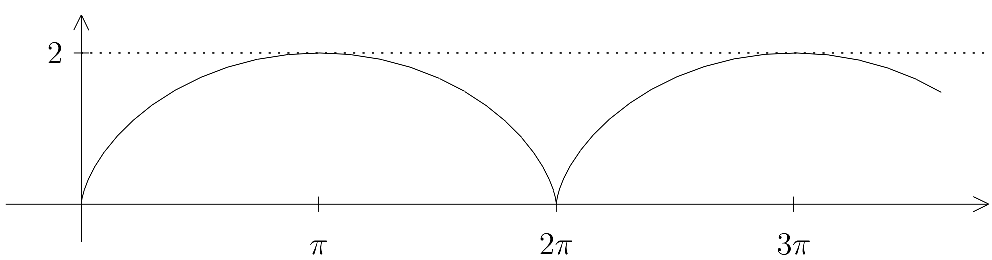
$$x(t) = t - \sin(\pi - t) = t - \sin t \text{ und } y(t) = 1 + \cos(\pi - t) = 1 - \cos(t).$$

   Also beschreibt ein Punkt auf der Peripherie des Kreises die Kurve

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \text{ mit } \dot{\alpha}(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

   Dann ist $\| \dot{\alpha}(t) \| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$, und das wird genau dann Null, wenn $\cos(t) = 1$ ist, also bei $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, daß α an diesen Stellen nicht glatt ist. Bei den Punkten $(2k\pi, 0)$ treten Ecken auf.

   Ansonsten ist α glatt. $y(t)$ nimmt seine Maxima $y = 2$ jeweils bei $t = (2k+1)\pi$ an und bewegt sich sonst zwischen 0 und 2.



Sei wieder $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Integrationskurve. Wir wählen eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_m$ des Definitionsintervalls:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b.$$

Dann erhalten wir Punkte $\alpha(t_0), \ldots, \alpha(t_m)$ auf der Spur der Kurve. Verbinden wir diese Punkte nacheinander durch Strecken, so ergibt das einen approximierenden Streckenzug. Und die Länge dieses Streckenzuges ist die Zahl

$$L(\alpha, \mathfrak{Z}_m) := \sum_{j=0}^{m-1} \| \alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j) \|.$$

Geht man von $\mathfrak{Z}_m$ zu einer feineren Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ über, so vergrößert sich die Länge des Streckenzuges: $L(\alpha, \mathfrak{Z}') \geq L(\alpha, \mathfrak{Z}_m)$. Wäre die Menge alle $L(\alpha, \mathfrak{Z})$ beschränkt, so könnte man das Supremum (die kleinste obere Schranke) dieser Zahlen als *Länge von* α bezeichnen. Leider existiert dieses Supremum nicht für jede stetige Kurve. Wenn es doch existiert, nennt man die Kurve *rektifizierbar* und bezeichnet die Länge mit $L(\alpha)$. Es gilt:

II.6.1 Satz. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann ist α rektifizierbar, und es gilt:*

$$L(\alpha) = \int_a^b \| \dot{\alpha}(t) \| \, dt.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \mathfrak{Z}_m) &= \sum_{j=0}^{m-1} \| \alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j) \| \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(t_{j+1}) - \alpha_i(t_j))^2} \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i'(\xi_j))^2} \cdot (t_{j+1} - t_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \| \dot{\alpha}(\xi_j) \| \cdot (t_{j+1} - t_j) \\
&= \Sigma(\| \dot{\alpha} \|, \mathfrak{Z}_m, \xi).
\end{aligned}$$

Dabei sind die $\xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$ Zwischenpunkte, wie sie nach dem Mittelwertsatz existieren:

$$\frac{\alpha_i(t_{j+1}) - \alpha_i(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \alpha_i'(\xi_j).$$

Als Ergebnis der Gleichungskette erhält man eine Riemannsche Summe der Funktion $t \mapsto \| \dot{\alpha}(t) \|$ zur Zerlegung $\mathfrak{Z}_m$. Wir haben dabei etwas gemogelt, denn in Wirklichkeit müssen wir zu jedem j **und** zu jedem i einen eigenen Zwischenwert ξ_{ji} wählen. Diese technischen Feinheiten wollen wir hier zu Gunsten besserer Verständlichkeit übergehen.

Da $\| \dot{\alpha} \|$ auf $[a, b]$ stetig und somit integrierbar ist, konvergieren die Riemannschen Summen gegen das Integral. Es ist außerdem hinreichend plausibel, daß $\{L(\alpha, \mathfrak{Z})\}$ beschränkt ist, etwa durch $\sup\{\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| \mid a \le t \le b\} \cdot (b-a)$. Also ist α rektifizierbar, und die Länge kann durch das Integral ausgedrückt werden. $\square$

Beispiele :

1. Bei der Verbindungsstrecke $\alpha(t) := (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$ von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ ist $\overset{\bullet}{\alpha}(t) \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, also
$$L(\alpha) = \int_0^1 \| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \| \, dt = \| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \|.$$
Das ist genau das, was man erwartet.

2. Bei der Kreislinie $\alpha(t) := (r\cos t, r\sin t)$ ist $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ und $\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| = r$, also
$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

3. Bei der Zykloide $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ist $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = (1-\cos t, \sin t)$, also $\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$. Nun ist
$$\cos t = \cos(2 \cdot \frac{t}{2}) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2}),$$
also
$$\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| = \sqrt{2 - (2 - 4\sin^2(\frac{t}{2}))} = 2|\sin(\frac{t}{2})|.$$
Daher ergibt sich für einen Zykloidenbogen (von $t = 0$ bis $t = 2\pi$):
$$\begin{aligned} L(\alpha) &= 2\int_0^{2\pi} |\sin^2(\frac{t}{2})|\,dt \\ &= 4\int_0^{2\pi} |\sin x(t)|x'(t)\,dt \qquad (\text{mit } x(t) := \frac{t}{2}) \\ &= 4\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx \\ &= 4 \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$
Es ist bemerkenswert, daß man als Ergebnis eine rationale Zahl erhält!

4. Sei $\alpha(t) := (a\cos t, b\sin t)$ die Ellipse mit den Halbachsen a und b. Dann ist $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ und $\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Also erhält man als Länge des Ellipsenbogens das Integral
$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\,dt, \end{aligned}$$
mit $k := \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$. Ein Integral von solchem Typ nennt man ein *Elliptisches Integral.* Es ist nicht elementar lösbar, man muß es numerisch auswerten.

5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $\alpha(t) := (t, f(t))$ eine Kurve, deren Spur der Graph von f ist. Es ist $\dot{\alpha}(t) = (1, f'(t))$, also
$$\| \dot{\alpha}(t) \| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$
Damit ist
$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$