Kapitel 4 Differentialgleichungen

§ 1 Typen und Methoden

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion $y = y(x)$ und ihre Ableitungen y', y'' ... vorkommen. Hat die Gleichung die Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

so spricht man von einer *impliziten Differentialgleichung*. Hat sie die Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung*.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung.

Beispiele.

1. $y'' = -\omega^2 y$ ist eine explizite DGL 2. Ordnung.
2. $(yy^{(5)})^2 + xy'' + \ln y = 0$ ist eine implizite DGL 5. Ordnung.

Wir werden hier im Wesentlichen mit expliziten DGLn arbeiten.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Unter einer *Lösung* der DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ versteht man eine n–mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\{(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \, : \, t \in I\} \subset B$.
2. Für alle $t \in I$ ist $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$.

Für implizite DGLn definiert man Lösungen analog.

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung, so nennt man die Kurve $\Phi : I \to B$ mit $\Phi(t) := (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ die zugehörige *Lösungskurve*.

Definition. Ein Punkt $\mathbf{A}_0 = (t_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in (I \times \mathbb{R}^n) \cap B$ wird auch als ein *Satz von Anfangsbedingungen* zu der DGL bezeichnet. Unter dem zugehörigen *Anfangswertproblem* versteht man die Suche nach einer Lösung φ der DGL, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varphi(t_0) = a_0, \varphi'(t_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

Beispiele.

1. Wir betrachten die DGL $y' = ky$ mit einer Konstanten $k \neq 0$. Als Anfangsbedingung sei $y(0) = 1$ gefordert.

   Das ist eine (homogene) lineare DGL 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten). Es gibt zu diesem Anfangswertproblem genau eine Lösung auf $\mathbb{R}$, nämlich $\varphi(t) = e^{kt}$.

   Allgemeiner gibt es zu jedem Satz $(0, c)$ von Anfangsbedingungen genau eine Lösung φ_c mit $\varphi_c(0) = c$, nämlich $\varphi_c(t) = ce^{kt}$. Die Lösungen hängen vom Parameter c (und damit von der Anfangsbedingung) stetig ab. Man sagt, das Problem ist sachgemäß gestellt.

2. Die DGL $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ verhält sich nicht so angenehm. Offensichtlich ist die Nullfunktion $\varphi_0(t) \equiv 0$ eine Lösung, aber auch jede Funktion $\varphi_c(t) := (t-c)^3$ löst die DGL. Also gehen durch jeden Punkt der x–Achse mindestens zwei Lösungskurven. Man spricht auch von einem schlecht gestellten Problem!

3. Die DGL $|y'| + |y| = 0$ besitzt nur die Nullfunktion als Lösung. Allgemeine Anfangswertprobleme sind dann überhaupt nicht mehr lösbar.

Unter einem *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung* versteht man ein System von n Gleichungen, in dem n unbekannte Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ und ihre ersten Ableitungen vorkommen. In der expliziten Version sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Eine *Lösung* ist dann ein System von Funktionen $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Wir schreiben ein solches System auch kurz in der Form

$$\vec{y}\,' = F(x, \vec{y}).$$

Diese Schreibweise erweist sich als besonders praktisch, wenn man mit *linearen Systemen* arbeitet:

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y},$$

mit einer Matrix-wertigen Funktion $A(x) = \big(a_{ij}(x) \mid i, j = 1, \ldots, n\big)$.

Beispiel.

Das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

kann in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Wir kennen schon die Lösung dieses Systems unter der Anfangsbedingung $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$, nämlich $\varphi_1(t) = \sin(t)$ und $\varphi_2(t) = \cos(t)$.

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen einfachen DGLn n–ter Ordnung und den Systemen von DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System (**) zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Ist φ eine Lösung der DGL $(*)$, so ist $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$, und wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \ldots, \quad \varphi_n := \varphi^{(n-1)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \varphi'(t) = \varphi_2(t), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}'(t) &= \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi_n(t) \\ \text{und} \qquad \varphi_n'(t) &= \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

d.h., $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist eine Lösung des Systems (**).

Ist umgekehrt eine Lösung $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ des Systems gegeben, so setze man $\varphi := \varphi_1$. Dann ist

$$\varphi'(t) = \varphi_2(t), \quad \ldots, \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi_n(t)$$

und schließlich

$$\varphi^{(n)}(t) = \varphi_n'(t) = f(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)),$$

also φ Lösung von $(*)$.

Auf diese Weise kann man die Theorie der DGLn n–ter Ordnung auf die der Systeme 1. Ordnung zurückführen.

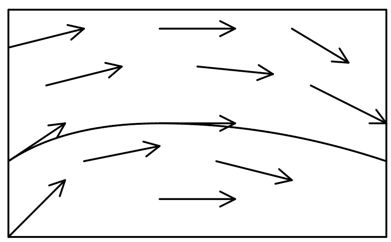
Betrachten wir also ein System $\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})$ (mit einer stetigen Abbildung $F : B \to \mathbb{R}^n$) und eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t)).$$

Für die zugehörige Lösungskurve $\boldsymbol{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ gilt:

$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = (1, \boldsymbol{\varphi}'(t)) = (1, F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))).$$

Im Falle $n = 1$ ist $F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ die „Steigung“ von $\boldsymbol{\varphi}$ zum Zeitpunkt t. Das durch F vorgegebene *Richtungsfeld* lässt den Verlauf der Lösungskurven schon ahnen.



Unter gewissen Voraussetzungen existieren eindeutig bestimmte Lösungskurven.

Behauptung: Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und nach $y_1, \ldots, y_n$ sogar **stetig differenzierbar**. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $K := I \times Q \subset B$, so gibt es eine Konstante $L \geq 0$, so dass gilt:

$$\|F(x, \mathbf{y}) - F(x, \mathbf{y}')\| \leq L \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| \quad \text{für } (x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{y}') \in K.$$

BEWEIS: Sei $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ der aus den partiellen Ableitungen nach $y_1, \ldots, y_n$ gebildete Teil der Funktionalmatrix von F. Das ist eine $n \times n$-Matrix, und die Funktion $(x, \mathbf{y}) \mapsto \|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{y})\|$ ist stetig auf B. Da Q konvex ist, gilt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz: Zu $x \in I$ und $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Q$ gibt es ein $\mathbf{z}$ auf der Verbindungsstrecke von $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$ mit

$$\|F(x, \mathbf{y}) - F(x, \mathbf{y}')\| \leq \|\frac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{z})\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|.$$

Wir setzen dann einfach $L := \sup\{\|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{z})\| \,:\, (x, \mathbf{z}) \in K\}$. Da K kompakt ist, ist $0 \leq L < \infty$. Wenn F als Funktion von $y_1, \ldots, y_n$ nirgends konstant ist, dann ist sogar $L > 0$. ∎

Man nennt L eine *Lipschitz-Konstante* und sagt, dass F auf K einer *Lipschitz-Bedingung* genügt. Wenn man zu jedem Punkt $(x, \mathbf{y}) \in B$ eine Umgebung $U \subset B$

finden kann, auf der F einer Lipschitz-Bedingung genügt, so genügt F *lokal* der *Lipschitz-Bedingung.*

1.1 Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Abbildung $F : G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge lokal der Lipschitz-Bedingung.*

Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ der DGL $\vec{y}\,' = F(x, \vec{y})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *$t_0 \in I$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*
2. *I ist offen und maximal.*
3. *Die Integralkurve $\mathbf{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ verläuft in G von Rand zu Rand.*

Bedingung (1) bedeutet, dass φ das gegebene Anfangswertproblem löst, und Bedingung (2) bedeutet, dass die Lösung auf kein größeres Intervall fortgesetzt werden kann. Dass $\mathbf{\Phi}$ in G von Rand zu Rand läuft, ist etwas schwerer zu erklären. Gemeint ist Folgendes: Entweder ist $I = (t_-, t_+)$ unbeschränkt oder $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ wächst unbeschränkt oder die Werte $\mathbf{\Phi}(t)$ kommen dem Rand von G beliebig nahe. Das heißt **nicht**, dass $\lim\limits_{t \to t_+} \mathbf{\Phi}(t)$ existiert, wohl aber, dass $\mathbf{\Phi}(t)$ jede kompakte Teilmenge von G mit wachsendem t irgendwann verlässt.

Die Theorie der Differentialgleichungen ist eigentlich eine Sammlung unzähliger Spezialfälle, und man braucht fast jedesmal einen neuen trickreichen Ansatz, um die Lösung zu finden. Einige besonders einfache Typen von DGLn 1. Ordnung sollen hier kurz angesprochen werden.

Beispiele.

1. Wir beginnen mit der DGL

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}\,,$$

wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind. Man spricht von einer **DGL mit getrennten Variablen**. Ist g sogar stetig differenzierbar, so ist die Gleichung eindeutig lösbar.

Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $\varphi(t) \equiv y_0$ die einzige Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$. Deshalb setzen wir voraus, dass g auf J keine Nullstellen hat. Ist F eine Stammfunktion von f, G eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{g}$ und φ eine Lösung, so gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = f(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int f(t)\,dt \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\int \frac{1}{g(y)}\,dy\right) \circ \varphi = \int f(t)\,dt \\
&\Longleftrightarrow \quad G(\varphi(x)) = F(x) + c \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Die Physiker haben dafür eine suggestivere, wenn auch etwas schwerer zu begründende Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Longleftrightarrow \quad G(y) = F(x) + c \\
&\Longleftrightarrow \quad y = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Da $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ ist, ist G eine streng monotone Funktion, insbesondere also umkehrbar. Das rechtfertigt jeweils die letzte Folgerung.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $y' = xy$. Dann ist $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$ definiert, und $g(y) = y$ können wir auf jedem Intervall J betrachten, das nicht die Null enthält. Wir erhalten die Stammfunktionen

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \text{ und } G(y) := \ln|y|, \text{ also } G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
y(x) &= \pm\exp(\frac{1}{2}x^2 + c) \\
&= C \cdot \exp(\frac{1}{2}x^2), \text{ mit } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung $y(x) \equiv 0$ mit ein. Liegt J in $\mathbb{R}_+$, so muss $C > 0$ gewählt werden, sonst $C < 0$.

Die Lösung mit Anfangwert $y(x_0) = y_0$ muss die Bedingung $y_0 = C\cdot\exp(x_0^2/2)$ erfüllt sein, also $\ln(C) = \ln(y_0) - x_0^2/2$. Damit ist

$$y(x) = \exp(\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \ln(y_0)).$$

2. Eine **lineare DGL 1. Ordnung** hat allgemein folgende Gestalt:

$$\boxed{y' + a(x)y = r(x).}$$

(a) Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom *homogenen* Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, dass $y(x) \neq 0$ für alle x ist. Dann gilt:

$$(\ln \circ |y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten c, die auch ≤ 0 sein darf.

(b) Nun betrachten wir den *inhomogenen* Fall ($r(x) \not\equiv 0$). Je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung unterscheiden sich um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat also die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung“ $\varphi_p(t)$ der inhomogenen Gleichung. Die findet man z.B. über einen geeigneten Ansatz (Variation der Konstanten):

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL erhält man Bedingungen für $c(x)$ und damit

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} r(t) e^{A(t)}\, dt.$$

Die Probe zeigt, dass y_p tatsächlich die inhomogene DGL löst. Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = (\int_{x_0}^{x} r(t) e^{A(t)}\, dt + c) \cdot e^{-A(x)}.$$

3. Unter einer **Bernoullischen Differentialgleichung** versteht man eine DGL der Form

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 1},$$

mit stetigen Funktionen a, b auf einem Intervall $I = (c, d)$. Sei φ eine Lösung, die in der Nähe von x_0 positiv ist. Dann gilt:

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(t)^\alpha.$$

Nun ist $\big(\varphi(t)^{1-\alpha}\big)' = (1-\alpha)\varphi(t)^{-\alpha}\varphi'(t)$. Teilt man die obige Gleichung durch $\varphi(t)^\alpha/(1-\alpha)$, so erhält man:

$$\big(\varphi(t)^{1-\alpha}\big)' = (1-\alpha)a(t)\varphi(t)^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t).$$

Das bedeutet, dass $\Phi(t) := \varphi(t)^{1-\alpha}$ Lösung der folgenden linearen DGL ist:

$$Y' = (1-\alpha)a(t)Y + (1-\alpha)b(t).$$

Umgekehrt ist für jede Lösung Φ dieser linearen DGL die Funktion $\varphi(t) = \Phi(t)^{1/(1-\alpha)}$ Lösung der Bernoulli-Gleichung.

Ein Spezialfall ist die sogenannte **logistische Differentialgleichung** (auch als **Differentialgleichung des beschränkten Wachstums** bezeichnet):

$$y' = ay - by^2,\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ y > 0.$$

Ist $\varphi(t)$ Lösung der logistischen DGL, so ist $\Phi(t) = \varphi(t)^{-1}$ Lösung der linearen DGL $Y' + aY = b$. Die homogene Gleichung $Y' + aY = 0$ hat die Lösung $Y(t) = c \cdot e^{-at}$. Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung können wir die konstante Funktion $y_p(x) = b/a$ nehmen. Also können wir $\Phi(t) = ce^{-at} + \dfrac{b}{a}$ setzen. Dann ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Phi(t)} = \frac{a}{b + ace^{-at}}\,.$$

§ 2 Die Laplacetransformation

Wir betrachten Funktionen f mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ (etwa, um Einschaltvorgänge zu berücksichtigen) und wollen so etwas ähnliches wie eine Fouriertransformation anwenden. Leider existiert die Fourier-Transformierte von f i.a. nicht. Wir erzwingen die Konvergenz des Fourier-Integrals, indem wir einen „konvergenzerzeugenden Faktor“ einführen, d.h. wir ersetzen $f(t)$ durch $f(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Dann ist

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty f(t)e^{-(\alpha + \mathrm{j}\,\omega)t}\,dt.$$

Dieses Integral existiert z.B., wenn $f(t)$ stückweise stetig und $f(t)e^{-\alpha t}$ absolut integrierbar ist.

Definition. Eine (stückweise stetige) Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \to \mathbb{C}$ *wächst höchstens exponentiell von der Ordnung* γ, wenn es Konstanten $M > 0$ und $T > 0$ gibt, so dass für $t \geq T$ gilt:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}.$$

2.1 Existenz der Laplacetransformation. *Wenn die (stückweise stetige) Funktion* $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ *höchstens exponentiell von der Ordnung* γ *wächst, dann konvergiert das uneigentliche Integral*

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(z) > \gamma$.

BEWEIS: Wir schreiben z in der Form $z = x + \mathrm{j}y$, mit $x > \gamma$. Dann gilt für $t \geq T$:

$$|f(t)e^{-zt}| = |f(t)| \cdot e^{-xt} \leq M \cdot e^{(\gamma - x)t} = M \cdot e^{-|\gamma - x|t}.$$

Diese Funktion ist absolut integrierbar, denn es ist

$$\int_T^{T_1} e^{-|\gamma - x|t}\,dt = \left(-\frac{1}{|\gamma - x|} \cdot e^{-|\gamma - x|t}\right)\Big|_T^{T_1} = \frac{1}{|\gamma - x|} \cdot (e^{-|\gamma - x|T} - e^{-|\gamma - x|T_1}),$$

und dieser Ausdruck bleibt beschränkt für $T_1 \to \infty$. ∎

Definition. Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Das uneigentliche Integral

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

heißt *Laplace-Transformierte* von f, sofern es für ein $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Man schreibt auch

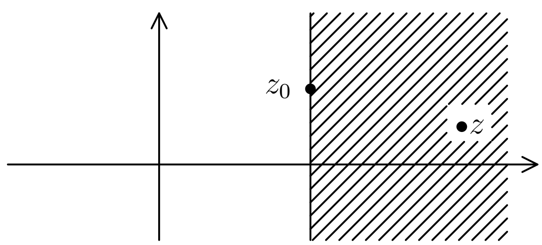
$$F(z) = \mathcal{L}[f(t)],$$

oder – wenn keine Verwechslungsgefahr besteht – wie bei der Fourier-Transformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(z).$$

$f(t)$ heißt *Urbildfunktion*, $F(z)$ *Bildfunktion.*

2.2 Bereiche absoluter Konvergenz. *Wenn die Laplace-Transformierte* $F(z)$ *von* $f(z)$ *für ein* $z_0 \in \mathbb{C}$ *absolut konvergiert, dann tut sie das auch für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(z_0)$.



BEWEIS: Sei $z_0 := u + \mathrm{j}\, v$ und $z = x + \mathrm{j}\, y$, mit $x \geq u$. Dann ist

$$|e^{-zt}| = e^{-xt} \leq e^{-ut} = |e^{-z_0 t}|.$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Das Infimum α aller reeller Zahlen $x \geq 0$, so dass

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

für $\mathrm{Re}(z) > x$ absolut konvergiert, heißt die *Abszisse absoluter Konvergenz* für $\mathcal{L}[f(t)]$. Die Halbebene, die links von der vertikalen Geraden $\{z \mid \mathrm{Re}(z) = \alpha\}$ begrenzt wird, ist das genaue Konvergenzgebiet des Laplace-Integrals. Der Rand gehört entweder ganz dazu oder überhaupt nicht. Da $f(t) = 0$ für $t < 0$ ist, kann auch die ganze Ebene als Konvergenzgebiet vorkommen.

Beispiele.

1. Sei $f(t) \equiv 1$. Da wir nur Funktionen betrachten, die $= 0$ für $t < 0$ sind, lassen wir diese zusätzliche Bedingung meistens weg.

   Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^R 1 \cdot e^{-zt}\,dt &= \left(-\frac{1}{z}e^{-zt}\right)\Big|_0^R \\ &= \frac{1}{z}(1 - e^{-zR}),\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für $\mathrm{Re}(z) > 0$ gegen $\frac{1}{z}$. Also haben wir:

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{z} \qquad (\text{für } \mathrm{Re}(z) > 0)$$

2. Die Funktion $f(t) := e^{at}$ wächst höchstens exponentiell von der Ordnung a. Also können wir die Laplace-Transformierte bilden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at} e^{-zt}\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-z)t}\,dt \\
&= \left(\frac{1}{a-z} e^{(a-z)t}\right)\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{a-z}(0-1) = \frac{1}{z-a},
\end{aligned}$$

falls $\mathrm{Re}(a-z) < 0$ ist, also $\mathrm{Re}(z) > a$.

3. Sei $f(t) := \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}\,\omega t} + e^{-\mathrm{j}\,\omega t})$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(\mathrm{j}\,\omega - z)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(\mathrm{j}\,\omega + z)t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega - z} e^{(\mathrm{j}\,\omega - z)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{-(\mathrm{j}\,\omega + z)} e^{-(\mathrm{j}\,\omega + z)t}\Big|_0^\infty\right] \\
&= \frac{1}{2}[-\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega - z} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega + z}] \\
&= \frac{z}{z^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}(\mathrm{j}\,\omega - z) < 0$ und $\mathrm{Re}(\mathrm{j}\,\omega + z) > 0$, also $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Analog erhält man: $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$.

Bemerkung. Die Laplace-Transformierte

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\,dt$$

ist als Parameterintegral im Bereich der absoluten Konvergenz eine holomorphe Funktion von z. (Zum genauen Beweis vgl. G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, 3. Kap., §2, Satz 1.). Es kann allerdings vorkommen – wie die vorangegangenen Beispiele zeigen – , dass $F(z)$ auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann. Man wird dann auch die fortgesetzte Funktion als Laplace-Transformierte von f bezeichnen.

Beschränkt man sich auf reelle Parameter s, so endet der Existenzbereich von $F(s)$ stets bei der Abszisse der absoluten Konvergenz.

2.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation.

Sei $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)$ *und* $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(z)$*. Dann gilt:*

1. *Linearität:* $a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a \cdot F(z) + b \cdot G(z).$

2. *Ähnlichkeitssatz:*

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot F(\frac{1}{a}z). \qquad (\text{für } a \in \mathbb{R},\ a > 0\ )$$

3. *Verschiebungssatz (Verschiebung im Zeitbereich):*

$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-zT} \cdot F(z). \qquad (\text{für } T \in \mathbb{R}\ )$$

(Man beachte, dass $f(t-T)$ *links vom Nullpunkt abgeschnitten werden muss!)*

4. *Dämpfungssatz (Verschiebung im Bildbereich):*

$$e^{-ct} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+c). \qquad (\text{für } c \in \mathbb{C}\ )$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(at)e^{-zt}\,dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(at)e^{-\frac{z}{a}at} \cdot a\,dt \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{z}{a}\tau}\,d\tau \\
&= \frac{1}{a}F(\frac{z}{a}).
\end{aligned}$$

3) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t-T)] &= \int_0^\infty f(t-T)e^{-zt}\,dt \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-z(\tau+T)}\,d\tau \\
&= e^{-zT} \cdot \int_0^\infty f(\tau)e^{-z\tau}\,d\tau \\
&= e^{-zT} \cdot F(z).
\end{aligned}$$

4) Es ist

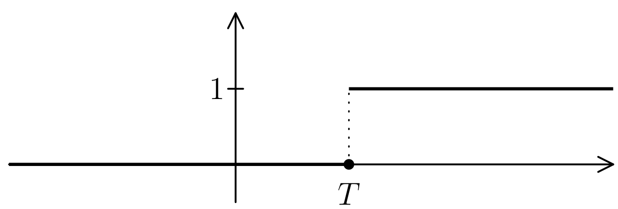
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-ct}f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-(z+c)t}\,dt \\ &= F(z+c). \end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Als erstes betrachten wir die Sprungfunktion

$$\sigma_T(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le T \\ 1 & \text{für } t > T. \end{cases}$$



Ist $H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$ die *Heaviside-Funktion*, so kann man schreiben:

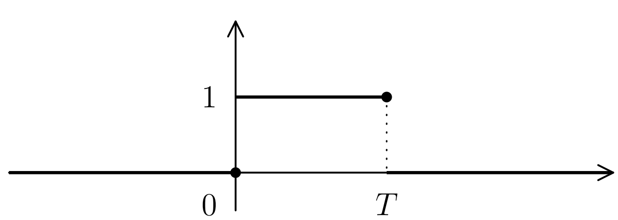
$$\sigma_T(t) = H(t-T).$$

Für die Laplace-Transformation besteht kein Unterschied zwischen H und der Funktion 1. Also gilt:

$$\mathcal{L}[\sigma_T(t)] = \mathcal{L}[H(t-T)] = e^{-zT} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{1}{z} \cdot e^{-zT}.$$

2. Als nächstes betrachten wir den Rechteck-Impuls

$$\pi_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t \le T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Es ist $\pi_T(t) = \sigma_0(t) - \sigma_T(t)$, also

$$\mathcal{L}[\pi_T(t)] = \frac{1}{z}(1 - e^{-zT}).$$

3. Es ist
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= \int_0^\infty te^{-zt}\,dt \\ &= \left(t\cdot(-\frac{1}{z}e^{-zt})\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zt}\,dt \\ &= -\frac{1}{z^2}e^{-zt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{z^2},\end{aligned}$$
für $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Wir untersuchen jetzt, wie sich *Differentiation und Integration im Zeitbereich* auswirkt. Dabei wollen wir die Klasse derjenigen Funktionen, die wir Laplace-transformieren können, geringfügig erweitern:

Definition. Unter einer L-*Funktion* verstehen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f(t) = 0$ für $t < 0$.
2. f ist stückweise stetig für $t > 0$.
3. f ist bei 0 uneigentlich integrierbar.
4. Das Laplace-Integral
$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$
existiert für wenigstens ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ (und dann natürlich für alle ζ mit $\operatorname{Re}(\zeta) > \operatorname{Re}(z)$).

Selbstverständlich ist jede stückweise stetige Funktion mit höchstens exponentiellem Wachstum eine L-Funktion.

2.4 Die Laplace-Transformierte der Ableitung. *$f(t)$ sei $= 0$ für $t < 0$ und differenzierbar für $t > 0$, und f' sei eine L-Funktion.*

Dann ist f eine stückweise stetige Funktion von höchstens exponentiellem Wachstum, und mit $F(z) := \mathcal{L}[f(t)]$ gilt:
$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; z\cdot F(z) - f(0+).$$

Beweis: Da f' eine L-Funktion ist, existiert das uneigentliche Integral
$$\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^t f'(\tau)\,d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}(f(t) - f(\varepsilon)),$$
und damit existiert auch

$$f(0+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon),$$

und es ist

$$\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(0+).$$

Weiterhin existiert nach Voraussetzung für ein $z_0 = x_0 + \mathrm{j}y_0$ mit $x_0 > 0$ das Integral

$$\int_0^\infty f'(s)e^{-z_0 s}\,ds.$$

Also ist $M(t) := \displaystyle\int_0^t |f'(s)|e^{-x_0 s}\,ds$ durch eine Konstante $M > 0$ beschränkt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-x_0 t}| &= \Big|\Big(\int_0^t f'(s)\,ds + f(0+)\Big) \cdot e^{-x_0 t}\Big| \\
&\le \int_0^t |f'(s)|e^{-x_0 s}\,ds + |f(0+)e^{-x_0 t}| \text{ (weil } e^{-x_0 t} \le e^{-x_0 s} \text{ für } s \le t) \\
&= M(t) + |f(0+)e^{-x_0 t}| \;\le\; M + |f(0+)e^{-x_0 t}|,
\end{aligned}$$

also $|f(t)| \le \widetilde{M} \cdot e^{x_0 t}$, mit $\widetilde{M} = M + |f(0+)|$. Damit wächst f höchstens exponentiell von der Ordnung x_0.

Ist $x := \mathrm{Re}(z) > x_0$, so ist $|f(t)e^{-zt}| = |f(t)|e^{-x_0 t} \cdot e^{-(x-x_0)t} \le M \cdot e^{-(x-x_0)t}$, und dieser Ausdruck strebt für $t \to \infty$ gegen Null. Mit partieller Integration folgt nun:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}\,dt \\
&= f(t)e^{-zt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-ze^{-zt})\,dt \\
&= -f(0+) + z \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt \\
&= -f(0+) + z \cdot F(z).
\end{aligned}$$

■

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht:

2.5 Folgerung. *Sei $f(t)$ für $t > 0$ n-mal differenzierbar, und $f^{(n)}$ eine L-Funktion. Dann ist auch f eine L-Funktion, und für die Laplace-Transformierte $F(z)$ von f gilt:*

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; z^n \cdot F(z) - z^{n-1} \cdot f(0+) - z^{n-2} \cdot f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

2.6 Die Laplace-Transformierte des Integrals. *Sei $f(t)$ stetig für $t > 0$ und von höchstens exponentiellem Wachstum. Es existiere $f(0+)$ und damit die Laplace-Transformierte $F(z)$ von $f(t)$. Dann existiert auch die Laplace-Transformierte von*

$$h(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau, \qquad \textit{und es gilt:} \quad h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{z}F(z).$$

BEWEIS: Da $h'(t) = f(t)$ für $t > 0$ ist, folgt aus den vorangegangenen Sätzen, dass die Laplace-Transformierte von h existiert. Außerdem ist h in $t = 0$ stetig, mit $h(0) = 0$.

Also ist $F(z) = z \cdot \mathcal{L}[h(t)]$ und $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{z}F(z)$. ■

Beispiele.

1. Die Funktion $f(t) = t^n$ erfüllt alle nötigen Voraussetzungen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{n-1}] &= \mathcal{L}[(\frac{1}{n}t^n)'] \\ &= \frac{1}{n}(z \cdot \mathcal{L}[t^n] - 0) \\ &= \frac{z}{n} \cdot \mathcal{L}[t^n]. \end{aligned}$$

Nachdem $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{z^2}$ ist, folgt aus der obigen Reduktionsformel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

2. Es ist $(\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$.

Also ist

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{z} \cdot \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{z(z^2+4)}.$$

Aus den bekannten Transformationen kann man weitere ableiten:

Beispiel.

Es gilt:

$$\frac{1}{z-a} \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{at} \quad \text{und} \quad \frac{1}{z-b} \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{bt}.$$

Da $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1/(a-b)}{z-a} - \dfrac{1/(a-b)}{z-b}$ ist, folgt:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}.$$

Wir wollen uns nun mit der Rücktransformation befassen:

Sei f stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}, \text{ für große } t.$$

Außerdem sei natürlich $f(t) = 0$ für $t < 0$. Ist $x > \gamma$ fest, aber beliebig gewählt, so ist auch $f_x(t) := e^{-xt} f(t)$ stückweise glatt und $= 0$ für $t < 0$. Außerdem ist f_x absolut integrierbar. Daher ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f_x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t) e^{-\mathsf{j}\,\omega t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(x+\mathsf{j}\,\omega)t}\,dt \\
&= F(x + \mathsf{j}\,\omega),
\end{aligned}$$

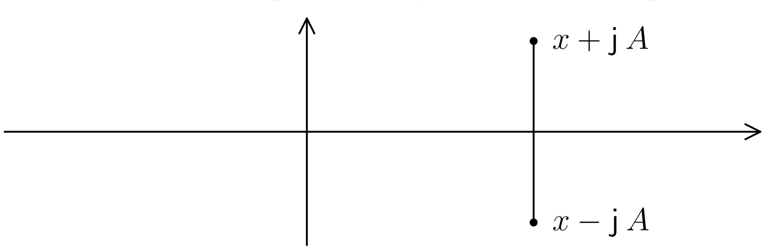
wenn wir mit $F(z)$ die Laplace-Transformierte von f bezeichnen. Weil f_x die Voraussetzungen des Fourier-Integral-Theorems erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f_x(t-) + f_x(t+)) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f_x}(\omega) e^{\mathsf{j}\,\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x + \mathsf{j}\,\omega) e^{\mathsf{j}\,\omega t}\,d\omega,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) &= \frac{e^{xt}}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x + \mathsf{j}\,\omega) e^{\mathsf{j}\,\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x + \mathsf{j}\,\omega) e^{(x+\mathsf{j}\,\omega)t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \lim_{A\to\infty} \int_{x-\mathsf{j}\,A}^{x+\mathsf{j}\,A} F(z) e^{zt}\,dz,
\end{aligned}$$

wobei über den Weg $\omega \mapsto x + \mathsf{j}\,\omega$ komplex integriert wird.



Damit haben wir bewiesen:

2.7 Komplexe Umkehrformel. *Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und von höchstens exponentiellem Wachstum, $F(z)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$, mit γ als Abszisse der absoluten Konvergenz. Dann ist*

$$\frac{1}{2}\big(f(t-) + f(t+)\big) = \frac{1}{2\pi \mathsf{j}} \text{ C.H.} \int_{x-\mathsf{j}\,\infty}^{x+\mathsf{j}\,\infty} F(z)e^{zt}\,dz.$$

Die Integration ist über die Gerade $\{z \mid \mathrm{Re}(z) = x\}$ *zu erstrecken, wobei* $x > \gamma$ *beliebig gewählt werden kann. Ist* f *in* t *stetig, so steht auf der linken Seite der Gleichung einfach nur der Wert* $f(t)$*.*

Die komplexe Umkehrformel kann nur auf solche holomorphen Funktionen angewandt werden, die Laplace-Transformierte sind. Wir hatten mehrfach eine gewisse Analogie zur Theorie der Potenzreihen festgestellt. Man kann sich nun fragen, ob jede holomorphe Funktion, die auf einer rechten Halbebene holomorph ist, schon automatisch die Laplace-Transformierte einer geeigneten Urbildfunktion ist. Leider gilt das nicht, es lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben.

Das Problem, ein vollständiges Kriterium dafür anzugeben, wann eine holomorphe Funktion eine Laplace-Transformierte ist, ist ungelöst. Es gibt bis jetzt nur einige hinreichende Kriterien.

2.8 Darstellbarkeitskriterium. *Sei* $F(z)$ *in der Halbebene*

$$\{z \mid \mathrm{Re}(z) > x_1 \geq 0\}$$

holomorph und von der Gestalt

$$F(z) = \frac{c}{z^\alpha} + \frac{g(z)}{z^{1+\varepsilon}},$$

mit $0 < \alpha \leq 1$, $\varepsilon > 0$ *und einer für* $\mathrm{Re}(z) \geq x_1 + \delta$, $\delta > 0$, *beschränkten Funktion* g*.*

Dann ist $F(z)$ *die Laplace-Transformierte einer Funktion* $f(t)$*.*

Zum BEWEIS vgl. Doetsch, 7. Kap., §2, Satz 4.

Wir kommen nun zu den verschiedenen Methoden, die Rück-Transformation praktisch durchzuführen.

Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen:

Die folgende Tabelle kann benutzt werden:

$F(z)$		$f(t)$
$\frac{1}{z}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	1
$\frac{1}{z-a}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	e^{at}
$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
$\frac{1}{z^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	t
$\frac{1}{z^n}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$\frac{z}{z^2+\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sin(\omega t)$

$F(z)$		$f(t)$
$\frac{1}{z}e^{-zT}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sigma_T(t)$
$\frac{1}{z}(1-e^{-zT})$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\pi_T(t)$
$\frac{2}{z(z^2+4)}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sin^2 t$
$\arctan(\frac{\omega}{z})$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\frac{\sin(\omega t)}{t}$
$\frac{z}{z^2-\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\cosh(\omega t)$
$\frac{\omega}{z^2-\omega^2}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$\sinh(\omega t)$
$\frac{1}{z\sqrt{z}}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

Rücktransformation durch Partialbruch-Zerlegung

Diese Methode ist anwendbar, wenn die gegebene Bildfunktion eine rationale Funktion der Gestalt

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomen P und Q mit $\deg(P) < \deg(Q)$ ist. Wir werden etwas später untersuchen, wann man der Funktion F ansehen kann, dass sie eine Laplace-Transformierte ist.

Sind $a_1, \ldots, a_k$ die (komplexen) Nullstellen des Nenner-Polynoms $Q(z)$, mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$, so gilt:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{m_i} \frac{A_{i\nu}}{(z-a_i)^\nu},$$

mit geeigneten komplexen Koeffizienten $A_{i\nu}$.

Man braucht nun lediglich die Formel

$$\frac{1}{(z-a)^n} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{at}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{z^n}] = e^{at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Beispiel.

Sei $F(z) := \dfrac{2z^2 - 9z + 19}{(z+3)(z-1)^2}$.

Die Partialbruchzerlegung hat die Gestalt

$$F(z) = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}\ .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
A &= \operatorname{res}_{-3}(F(z)) = \lim_{z\to -3} \frac{2z^2 - 9z + 19}{(z-1)^2} = 4, \\
B &= \operatorname{res}_{1}(F(z)) = \lim_{z\to 1} \left[\frac{2z^2 - 9z + 19}{z+3}\right]' \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{(4z-9)(z+3) - (2z^2 - 9z + 19)}{(z+3)^2} = \frac{(-5)4 - 12}{16} = -2, \\
\text{und } C &= \lim_{z\to 1} F(z)(z-1)^2 = \lim_{z\to 1} \frac{2z^2 - 9z + 19}{z+3} = \frac{2 - 9 + 19}{4} = 3\,,
\end{aligned}$$

also

$$F(z) = \frac{4}{z+3} - \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

Daraus folgt:

$$F(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\ 4e^{-3t} - 2e^t + 3te^t.$$

Rücktransformation mit Residuenkalkül

Sei $F(z)$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, so dass $z \cdot F(z)$ für $z \to \infty$ beschränkt bleibt. Dann ist F außerhalb einer genügend großen Kreisscheibe holomorph, und es gibt dort eine Laurententwicklung

$$z \cdot F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}.$$

Also ist

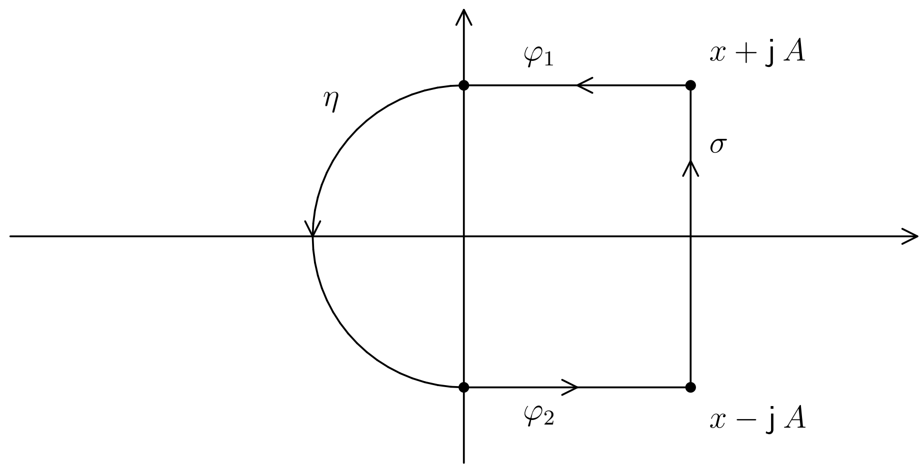
$$F(z) = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} z^{-n},$$

und das bedeutet, dass $F(z)$ eine Laplace-Transformierte ist. (Darstellbarkeitskriterium)

Ist $F(z)$ holomorph in der Halbebene $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > x_1 \geq 0\}$, so erhält man die Urbildfunktion $f(t)$ durch die komplexe Umkehrformel:

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \cdot \lim_{A\to\infty} \int_{x-\mathrm{j}\,A}^{x+\mathrm{j}\,A} F(z)e^{zt}\,dz.$$

Wir betrachten nun folgende Figur:



Dabei sei

$$\begin{array}{rrcl} & \sigma(\tau) & := & x + \mathrm{j}\,\tau, \qquad (-A \leq \tau \leq A) \\ & \varphi_1(\tau) & := & (x-\tau) + \mathrm{j}\,A, \qquad (0 \leq \tau \leq x) \\ & \varphi_2(\tau) & := & \tau - \mathrm{j}\,A, \qquad (0 \leq \tau \leq x) \\ \text{und} & \eta(\tau) & := & Ae^{\mathrm{j}\,\tau}, \qquad (\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2}). \end{array}$$

$C := \sigma + \varphi_1 + \eta + \varphi_2$ ist ein geschlossener Weg, der bei genügend großem A alle Singularitäten von $F(z)$ in seinem Inneren enthält. Nach dem Residuensatz ist also

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_C F(z)e^{zt}\,dz = \sum_{\mathrm{Re}(z)\leq x_1} \mathrm{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Da man zeigen kann, dass die Integrale über φ_1, φ_2 und η für $A \to \infty$ verschwinden, folgt:

2.9 Umkehrformel mit Residuen. *Ist $F(z)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ und holomorph für $\mathrm{Re}(z) > \gamma$ und $z \cdot F(z)$ beschränkt für $z \to \infty$, so ist $F(z)$ die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$, und es gilt:*

$$\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) = \sum_{\mathrm{Re}(z)\leq\gamma} \mathrm{res}_z(F(z)e^{zt}).$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt, wenn $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ist, mit Polynomen P und Q, so dass

$$\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$$

ist.

Der vorangegangene Satz lässt sich auf die Situation verallgemeinern, dass $F(z)$ unendlich viele Singularitäten besitzt. Voraussetzung ist dann aber ein einigermaßen kontrolliertes Wachstum von F.

Jetzt wollen wir die Laplace-Transformation benutzen, um lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten zu lösen.

Man kann zeigen, dass die Lösungen einer solchen DGL Funktionen von höchstens exponentiellem Wachstum sind (vorausgesetzt, das trifft auf die Inhomogenität zu!). Auf einen Beweis wollen wir hier nicht eingehen, weil das für die praktische Anwendung keine große Rolle spielt.

Wir beginnen mit einer DGL 1. Ordnung:

$$y' + ay = g(t), \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(0) = A.$$

Man kann nun schrittweise vorgehen:

1. **Laplace-Transformation**

   Sei $y(t)$ eine Lösung, $Y(z) := \mathcal{L}[y(t)]$ und $G(z) := \mathcal{L}[g(t)]$. Wendet man auf beide Seiten der DGL die Laplace-Transformation an, so erhält man:

   $$(z \cdot Y(z) - y(0)) + a \cdot Y(z) = G(z),$$

   also

   $$(z + a) \cdot Y(z) - A = G(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

   Wir lösen die gewonnene Gleichung nach $Y(z)$ auf:

   $$Y(z) = \frac{G(z) + A}{z + a}.$$

3. **Rücktransformation**

   Wir suchen nun die Urbildfunktion $y(t)$ zu $Y(z)$:

   $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{G(z) + A}{z + a}].$$

   Dabei können alle drei vorgestellten Methoden der Rück-Transformation zum Einsatz kommen. In der Praxis wird man es meist mit Tabellen versuchen.

Bemerkung. Die allgemeine Lösung der DGL setzt sich aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Das Verfahren mit der Laplace-Transformation liefert gleich die allgemeine Lösung, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beispiel.

Wir betrachten die DGL
$$y' + 2y = 2t - 4,$$
mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

1. Schritt: Laplace-Transformation!

$$z \cdot Y(z) - 1 + 2 \cdot Y(z) = \mathcal{L}[2t - 4] = \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}.$$

2. Schritt: Lösung im Bildbereich!

$$\begin{aligned} (z+2) \cdot Y(z) - 1 &= \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z}, \\ \text{also} \quad Y(z) &= \frac{2}{z^2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2}. \end{aligned}$$

3. Schritt: Rück-Transformation:

Die Funktionen, die als Summanden auf der rechten Seite auftreten, finden sich nicht alle in der Mini-Tabelle, die wir aufgestellt haben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+2)} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1 - e^{-2t}}{2} \\ \text{und} \quad \frac{1}{z+2} &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{-2t}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch die Urbildfunktion zu $\dfrac{1}{z^2(z+2)}$ finden. Wir tun dies mit Hilfe der Partialbruch-Zerlegung.

$$\begin{aligned} \textbf{Ansatz:} \quad \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z+2} &= \frac{az(z+2) + b(z+2) + cz^2}{z^2(z+2)} \\ &= \frac{(a+c)z^2 + (2a+b)z + 2b}{z^2(z+2)}. \end{aligned}$$

Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & & & c & = & 0, \\ 2a & + & b & & & = & 0, \\ & & 2b & & & = & 1. \end{array}$$

Also ist $b = \dfrac{1}{2}$, $a = -\dfrac{1}{4}$ und $c = \dfrac{1}{4}$, und damit

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2}\right) - \frac{4}{z(z+2)} + \frac{1}{z+2} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{3}{2(z+2)} - \frac{4}{z(z+2)} \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ\ t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2(1 - e^{-2t}) \\
&= t - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}e^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Als nächstes betrachten wir eine DGL 2. Ordnung:

$$y'' + ay' + by = g(t), \quad \text{mit Anfangswerten } y(0) = A \text{ und } y'(0) = B.$$

Auch hier gibt es die drei Schritte:

1. **Laplace-Transformation**

$$(z^2 \cdot Y(z) - z \cdot A - B) + a \cdot (z \cdot Y(z) - A) + b \cdot Y(z) = G(z),$$

also

$$(z^2 + az + b) \cdot Y(z) - (z + a)A - B = G(z).$$

2. **Lösung im Bildbereich**

$$Y(z) = \frac{G(z) + (z+a)A + B}{z^2 + az + b}.$$

3. **Rücktransformation** Hier kann man auf die bekannten Methoden zurückgreifen.

Beispiel.

$$y'' + 4y = \sin(\omega t).$$

1. Schritt:

$$z^2 Y(z) - zA - B + 4Y(z) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2},$$

also

$$(z^2 + 4)Y(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} + zA + B.$$

2. Schritt:

$$Y(z) = \frac{\omega}{(z^2 + \omega^2)(z^2 + 4)} + A \cdot \frac{z}{z^2 + 4} + B \cdot \frac{1}{z^2 + 4},$$

für $\operatorname{Re}(z) > 0$.

3. Schritt: Die gesuchte Lösung ist

$$y(t) = \omega \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)}] + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Zur Berechnung des ersten Termes müssen wir Fälle unterscheiden:

a) der Fall $\omega^2 \neq 4$:

In diesem Falle hat

$$F(z) := \frac{1}{(z^2+\omega^2)(z^2+4)}$$

4 verschiedene einfache Polstellen, nämlich $z = \pm \mathrm{j}\,\omega$ und $z = \pm 2\mathrm{j}$. Es bietet sich die Residuen-Methode an:

$$\begin{aligned}
f(t) &:= \mathcal{L}^{-1}[F(z)] \\
&= \mathrm{res}_{\mathrm{j}\,\omega}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{-\mathrm{j}\,\omega}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{2\mathrm{j}}(F(z)e^{zt}) + \mathrm{res}_{-2\mathrm{j}}(F(z)e^{zt}) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{j}\,\omega(\omega^2-4)} \cdot (-e^{\mathrm{j}\,\omega t} + e^{-\mathrm{j}\,\omega t}) + \frac{1}{4\mathrm{j}\,(\omega^2-4)} \cdot (e^{2\mathrm{j}\,t} - e^{-2\mathrm{j}\,t}) \\
&= -\frac{1}{\omega(\omega^2-4)} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{2(\omega^2-4)} \sin(2t) \\
&= \frac{\omega\sin(2t) - 2\sin(\omega t)}{2\omega(\omega^2-4)}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$y(t) = \frac{\omega\sin(2t) - 2\sin(\omega t)}{2(\omega^2-4)} + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

b) der Fall $\omega^2 = 4$ (Resonanzfall):

Ist $\omega^2 = 4$, so ist

$$Y(z) = \frac{\pm 2}{(z^2+4)^2} + A \cdot \frac{z}{z^2+4} + B \cdot \frac{1}{z^2+4},$$

also

$$y(t) = \pm 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(z^2+4)^2}] + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned}
f(z) := \frac{1}{(z^2+4)^2} &= \frac{1}{(z-2\mathrm{j}\,)^2(z+2\mathrm{j}\,)^2} \\
&= \frac{a}{z-2\mathrm{j}} + \frac{b}{(z-2\mathrm{j}\,)^2} + \frac{c}{z+2\mathrm{j}} + \frac{d}{(z+2\mathrm{j}\,)^2},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
a &= \operatorname{res}_{2\mathrm{j}}(f) = \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \left[\frac{1}{(z+2\mathrm{j}\,)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \frac{-2}{(z+2\mathrm{j}\,)^3} = \frac{1}{32\mathrm{j}}\,, \\
b &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} \frac{1}{(z+2\mathrm{j}\,)^2} = -\frac{1}{16}\,, \\
c &= \operatorname{res}_{-2\mathrm{j}}(f) = \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \left[\frac{1}{(z-2\mathrm{j}\,)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \frac{-2}{(z-2\mathrm{j}\,)^3} = \frac{-1}{32\mathrm{j}}\,, \\
d &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} \frac{1}{(z-2\mathrm{j}\,)^2} = -\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Wir benutzen die so gewonnene Partialbruchzerlegung und die Formel

$$\mathcal{L}^{-1}[g(z)] = \sum_z \operatorname{res}_z\bigl(g(z)e^{zt}\bigr).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{z-2\mathrm{j}} &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} e^{zt} = e^{2\mathrm{j}\,t}, \\
\operatorname{res}_{2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{(z-2\mathrm{j}\,)^2} &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}} te^{zt} = te^{2\mathrm{j}\,t}, \\
\operatorname{res}_{-2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{z+2\mathrm{j}} &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} e^{zt} = e^{-2\mathrm{j}\,t}, \\
\operatorname{res}_{-2\mathrm{j}} \frac{e^{zt}}{(z+2\mathrm{j}\,)^2} &= \lim_{z\to -2\mathrm{j}} te^{zt} = te^{-2\mathrm{j}\,t}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2}\right] &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}(e^{2\mathrm{j}\,t} - e^{-2\mathrm{j}\,t}) - \frac{t}{8}\cdot\frac{1}{2}(e^{2\mathrm{j}\,t} + e^{-2\mathrm{j}\,t}) \\
&= \frac{1}{16}\cdot\sin(2t) - \frac{t}{8}\cos(2t).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$y(t) = \pm\frac{1}{8}\cdot(\sin(2t) - 2t\cos(2t)) + A\cos(2t) + \frac{B}{2}\sin(2t).$$

Die Amplitude von $y(t)$ nimmt im Resonanzfall beliebig hohe Werte an.

§ 3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nun **lineare Systeme 1. Ordnung** untersuchen:

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x).$$

Wie üblich beginnt man mit dem **homogenen** Fall $\vec{b}(x) \equiv 0$. Ist A auf einem Intervall I definiert und stetig, so ist $F(x, \vec{y}) := A(x) \cdot \vec{y}$ auf $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und genügt dort der Lipschitz-Bedingung. Daher sind die Lösungen auf ganz I definiert, und man sieht auch sofort, dass sie einen (reellen) Vektorraum $\mathcal{L}$ bilden.

Für ein festes $t_0 \in \mathbb{R}$ sei $E : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $E(\varphi) := \varphi(t_0)$. [1] Dann ist E offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz folgt, dass E bijektiv, also ein Isomorphismus von $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist.

> *Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Systems von n DGLn ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von $\mathcal{L}$ bezeichnet man auch als *Fundamentalsystem* (von Lösungen) und die Matrix

$$X(t) := \Big(\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)\Big)$$

als *Fundamentalmatrix*.

Definition. Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein (beliebiges) System von n Lösungen der DGL $\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y}$, so heißt die Funktion $W(t) := \det\Big(\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)\Big)$ die zugehörige *Wronski-Determinante*.

3.1 Formel von Liouville. *Ist $W(t)$ die Wronski-Determinante eines Systems $X(t)$ von Lösungen der DGL $\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y}$, so ist $W'(t) = W(t) \cdot \operatorname{Spur}(A(t))$. Ist $X(t)$ sogar eine Fundamentalmatrix der DGL, so gilt für beliebiges (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$:*

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds\right).$$

BEWEIS: Sei $X(t)$ eine beliebige Matrix von Lösungen und $W(t) = \det X(t)$. Dass dann $W'(t) = W(t) \cdot \operatorname{Spur}(A(t))$ ist, müssen wir ohne Beweis zur Kenntnis nehmen. Ist $X(t)$ sogar ein Fundamentalsystem, so ist $X(t)$ für alle t invertierbar, also $W(t) \neq 0$ und

$$(\ln \circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \operatorname{Spur}(A(t)),$$

[1] „E“ steht für *evaluate* (auswerten).

und damit

$$\ln(\frac{W(t)}{W(t_0)}) = \ln(W(t)) - \ln(W(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur}(A(s))\,ds.$$

Wendet man exp an, so erhält man die Liouville-Formel. ∎

$W(t)$ erfüllt also die lineare DGL erster Ordnung

$$Y' = \operatorname{Spur}(A(x)) \cdot Y.$$

Ist nun W nicht die Null-Lösung, so kann W keine Nullstelle haben, wegen des Eindeutigkeitssatzes.

3.2 Folgerung. *Die Wronski-Determinante $W(t) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t)$ verschwindet entweder identisch oder nirgends.*

Ist $W(t_0) \neq 0$ für ein t_0, so bilden die φ_i ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen Systems in geschlossener Form anzugeben!

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{b}(x)$$

gewinnt man mit der Methode der *Variation der Kostanten.*

Ist $X(t) = (\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t))$ eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n \cdot \vec{\varphi}_n(t).$$

Die Methode der Variation der Konstanten besagt nun, dass wir einen Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen sollen, bei dem wir die Konstanten durch Funktionen ersetzen:

$$\vec{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n(t) \cdot \vec{\varphi}_n(t) = X(t) \cdot \vec{c}(t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p'(t) &= X'(t) \cdot \vec{c}(t) + X(t) \cdot \vec{c}'(t) \\ &= A(t) \cdot X(t) \cdot \vec{c}(t) + X(t) \cdot \vec{c}'(t) \\ &= A(t) \cdot \vec{\varphi}_p(t) + X(t) \cdot \vec{c}'(t). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} \quad &\Longleftrightarrow \quad X(t) \cdot \vec{c}'(t) = \vec{b}(t) \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{c}'(t) = X(t)^{-1} \cdot \vec{b}(t) \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{c}(t) = \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s)\,ds + \vec{k}, \end{aligned}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{k}$, den wir gleich Null setzen können. Das bedeutet:

$$\vec{\varphi}_p(t) = X(t) \cdot \left(\int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s)\, ds \right).$$

Vollständige Lösungen kann man im Falle von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten angeben. Dazu müssen wir die Exponentialfunktion von Matrizen einführen.

Für eine Matrix

$$A = \left(a_{ij} \;\middle|\; \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \right) \in M_{n,m}(K), \text{ mit } K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C},$$

wird wie folgt eine Norm eingeführt: $\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$.

Es ist $\|A\| \geq 0$ (und $= 0 \iff A = 0$), $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ und $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Außerdem ist $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, wenn man die Matrizen miteinander multiplizieren kann. Im Falle eines Vektors ist die Matrix-Norm genau die euklidische Norm.

Definition. Sei $A_k = \left(a_{ij}^{(k)} \,:\, i,j = 1, \dots, n\right)$ eine Folge von quadratischen Matrizen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ heißt *konvergent* gegen eine Matrix $A = \left(a_{ij} \,:\, i,j = 1, \dots, n\right)$, falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ für jedes Indexpaar (i, j) gegen a_{ij} konvergiert.

3.3 Die Exponentialfunktion für Matrizen.

1. *Wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$.
2. *Die Reihe* $e^A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ *konvergiert für jede Matrix* A.

Beweis: 1) Weil $|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A_k\|$ ist, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ eine Majorante für jede der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$. Aus dem Majorantenkriterium folgt die Behauptung.

2) Die Zahlen-Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert gegen $e^{\|A\|}$. Weil $\|A^k\| \le \|A\|^k$ ist, konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|\frac{1}{k!}A^k\|$. Und das bedeutet wiederum, dass die Exponentialreihe konvergiert. ∎

Achtung: Die Komponenten von e^A sind normalerweise **nicht** die Funktionen $\exp(a_{ij})$.

Die Berechnung von e^A ist i.a. schwierig. Sehr nützlich sind dabei die folgenden Regeln:

3.4 Regeln zur Berechnung von e^A.

1. *Ist $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix, so ist $e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.*

2. *Ist A beliebig und P invertierbar, so ist*

$$e^{P^{-1} \cdot A \cdot P} = P^{-1} \cdot e^A \cdot P.$$

Ist A diagonalisierbar, so ist auch e^A diagonalisierbar.

Beweis: Zunächst eine Vorbemerkung: Dass eine Matrizenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergiert, bedeutet, dass die Folge $S_N := \sum_{k=1}^{N} A_k$ im üblichen Sinne in dem euklidischen Vektorraum $M_{n,n}(K) = K^{n \cdot m}$ konvergiert.

Da für festes B die Abbildung $X \mapsto B \cdot X$ linear und damit stetig ist, folgt: Konvergiert S_N gegen S, so konvergiert auch $B \cdot S_N \to B \cdot S$ und $S_N \cdot B \to S \cdot B$. Daher ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B \cdot A_k) = B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot B) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \cdot B.$$

1) Man definiert $D^0 = E_n$ (Einheitsmatrix), und offensichtlich ist $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ Daraus folgt:

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(\frac{1}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \frac{1}{k!}\lambda_n^k) \\ &= \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}). \end{aligned}$$

2) Es ist $(P^{-1} \cdot A \cdot P)^k = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdots (P^{-1} \cdot A \cdot P) = P^{-1} \cdot A^k \cdot P$, also

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}\cdot A\cdot P} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(P^{-1}\cdot A\cdot P)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}P^{-1}\cdot(\frac{1}{k!}A^k)\cdot P \\ &= P^{-1}\cdot(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k)\cdot P \\ &= P^{-1}\cdot e^A\cdot P. \end{aligned}$$

Ist nun $P^{-1}\cdot A\cdot P = \Delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, so ist $P^{-1}\cdot e^A\cdot P = \Delta(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n})$. ∎

3.5 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. *Sei $A\in M_{n,n}(K)$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $X(t)$ des linearen Systems $\vec{y}\,' = A\cdot\vec{y}$ mit $X(0)=E_n$ ist gegeben durch*

$$X(t) := e^{tA}.$$

Beweis: Es ist $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$. Wir wollen zeigen, dass dies eine differenzierbare (matrizen-wertige) Funktion ist. Ist $A^k = \big(c_{ij}^{(k)}\big)$, so sind die Einträge in e^A konvergente Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}c_{ij}^{(k)}t^k$ (mit Konvergenzradius $R=\infty$). Diese sind alle differenzierbar, und ihre Ableitungen sind die formal abgeleiteten Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}c_{ij}^{(k)}t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}c_{ij}^{(k+1)}t^k,$$

die wiederum auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren. Also ist $X(t)=e^{At}$ differenzierbar und

$$X'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^{k+1}t^k = A\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k = A\cdot e^{At}.$$

Außerdem ist $X(0)=E$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist damit alles bewiesen. ∎

3.6 Das Additionstheorem für die Exponentialfunktion.

1. *Ist $A\cdot B = B\cdot A$, so ist $e^{A+B} = e^A\cdot e^B$.*
2. *Für $s,t\in\mathbb{R}$ ist $e^{sA}\cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}$.*
3. *Die Matrix e^A ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:*

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

BEWEIS: Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist

$$B \cdot e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B \cdot (tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \cdot B = e^{tA} \cdot B.$$

Wir setzen $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \cdot e^{t(A+B)} - A \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} - e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot (e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}) \\ &= (A+B) \cdot F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$ ist also die eindeutig bestimmte Lösung der DGL $\vec{y}\,' = (A+B) \cdot \vec{y}$, mit $F(0) = 0$. Daher muss $F(t) \equiv 0$ sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

1) Für $t = 1$ erhält man: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

2) Die Matrizen sA und tA sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

3) Es ist $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = E$, also e^A invertierbar, mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Aus der Liouville-Formel ergibt sich für $X(t) = e^{tA}$:

$$\det(e^{tA}) = W(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{Spur}(A)\, ds\right) = e^{t \cdot \operatorname{Spur}(A)}.$$

Mit $t = 1$ erhält man die gewünschte Formel. ∎

Wir können lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten lösen, sofern wir die Matrizen e^{tA} berechnen können. Im Falle von Diagonalmatrizen ist das möglich, und auch im Falle diagonalisierbarer Matrizen. Um beliebige Fälle behandeln zu können, muss man auf den Satz von der Jordanschen Normalform zurückgreifen. Dabei nehmen wir zusätzlich an, dass das charakteristische Polynom $\chi_A(x) := \det(A - x \cdot E_n)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt:

$$\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - x)^{m_r},$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Über $\mathbb{C}$ ist diese Voraussetzung immer erfüllt.

Die Zahl $a(\lambda_i) := m_i$ nennt man die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_i. Unter dem *Eigenraum* zum Eigenwert λ_i versteht man den Vektorraum

$$E(\lambda_i) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, A \cdot \vec{x} = \lambda_i \vec{x}\}.$$

Die Zahl $g(\lambda_i) := \dim E(\lambda_i)$ nennt man die *geometrische Vielfachheit* von λ_i. Es ist stets $1 \leq g(\lambda_i) \leq a(\lambda_i)$. Dabei ergibt sich die erste Ungleichung aus der Tatsache, dass es definitionsgemäß zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor gibt.

Ist $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist A diagonalisierbar und wir können e^{tA} wie oben gezeigt ausrechnen.

Ist $g(\lambda_i) < a(\lambda_i)$ für irgendwelche i, so ist A nicht diagonalisierbar, aber es gilt eben noch der **Satz von der Jordanschen Normalform**. Wir brauchen ihn nur in der folgenden vereinfachten Form:

Ist A eine beliebige Matrix, so gibt es eine reguläre Matrix P mit

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Dabei hat die m_i-reihige Jordan-Matrix $J_i = J(\lambda_i)$ jeweils die Gestalt

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & * & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i & * \\ 0 & & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

wobei an Stelle der Sterne Einsen oder Nullen stehen können. Man schreibt J_i auch in der Form

$$J_i = \lambda_i \cdot E_{m_i} + N_i,$$

wobei N_i höchstens oberhalb der Diagonalen Einträge $\neq 0$ besitzt. Ist $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$, so ist $N_i = 0$. Allgemein gilt:

Behauptung: Es ist $(N_i)^{m_i} = 0$, d.h. N_i ist eine *nilpotente Matrix*.

Beweis dafür:

Sei $N = N_i$ und $m = m_i$. Ein Eintrag $c_{\nu\mu}$ in einer Matrix C liegt genau dann in der p-ten Nebendiagonale (oberhalb der Hauptdiagonalen), wenn $\mu = \nu + p$ ist.

Wir zeigen, dass in N^k unterhalb der k-ten Nebendiagonalen nur noch Nullen stehen, d.h. es ist $(N^k)_{\nu\mu} = 0$ für $\mu < \nu + k$.

Für $k = 1$ ist das klar. Wenn die Behauptung für ein k bewiesen ist, dann folgt:

$$(N^{k+1})_{\nu\mu} = \sum_{j=1}^{n} (N^k)_{\nu j} N_{j\mu} = \sum_{j=\nu+k}^{n} (N^k)_{\nu j} N_{j\mu}.$$

Ist aber $\mu \leq \nu + k$ und $j \geq \nu + k$, so ist $\mu \leq j$, also $N_{j\mu} = 0$. Damit verschwindet $(N^{k+1})_{\nu\mu}$ für $\mu < \nu + k + 1$ und die Behauptung ist gezeigt.

Weil $\lambda \cdot E_m$ und N vertauschbar sind, ist $e^{\lambda E + N} = e^{\lambda E} \cdot e^N = e^{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} N^k$.

Ist $A^* := P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$, so ist $(A^*)^k = \begin{pmatrix} (J_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (J_r)^k \end{pmatrix}$

und

$$P^{-1} \cdot e^{At} \cdot P = e^{A^*t} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_r t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} Q_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_r t} Q_r(t), \end{pmatrix}$$

mit

$$Q_i(t) = e^{N_i t} = \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{1}{k!} (N_i)^k t^k = \begin{pmatrix} 1 & q_{12}^{(i)}(t) & \cdots & q_{1,m_i}^{(i)}(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & q_{m_i-1,m_i}^{(i)}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $q_{\nu\mu}^{(i)}(t)$ ein Polynom vom Grad $\le m_i - 1$. Außerdem verschwinden alle $q_{\nu\mu}^{(i)}(t)$ für $\mu = 2, \ldots, g(\lambda_i)$.

Setzen wir $Y(t) := P \cdot e^{A^*t} = e^{At} \cdot P$, so ist offensichtlich $Y'(t) = A \cdot Y(t)$, also $Y(t) = P \cdot e^{A^*t}$ eine Fundamentalmatrix der DGL $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$.

Um die DGL zu lösen, müssen wir $Y(t)$ berechnen.

Ist $P = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$, so ist

$$\begin{aligned} Y(t) &= (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \cdot Q_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_r t} \cdot Q_r(t) \end{pmatrix} \\ &= \Big((\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{m_1}) \cdot e^{\lambda_1 t} Q_1(t), \ldots, (\vec{y}_{n-m_r+1}, \ldots, \vec{y}_n) \cdot e^{\lambda_r t} Q_r(t) \Big) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} &(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m) \cdot e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & q_{12}(t) & \cdots & q_{1,m_i}(t) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & q_{m_i-1,m_i}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= e^{\lambda t} (\vec{y}_1, q_{12}(t)\vec{y}_1 + \vec{y}_2, \ldots, q_{1,m}(t)\vec{y}_1 + \cdots + q_{m-1,m}(t)\vec{y}_{m-1} + \vec{y}_m) \\ &= \big(e^{\lambda t} \vec{q}_1(t), \ldots, e^{\lambda t} \vec{q}_m(t) \big), \end{aligned}$$

wobei die Einträge in den Vektoren $\vec{q}_j$ Polynome in t vom Grad $\le m - 1$ sind.

Fasst man alles zusammen, so erhält man folgendes Ergebnis:

3.7 Lösungen von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten. *Sei A eine beliebige n-reihige Matrix und $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - x)^{m_r}$.*

1. *Ist $g(\lambda_i) = a(\lambda_i) = m_i$ und sind $\vec{y}_1^{(i)}, \ldots, \vec{y}_{m_i}^{(i)}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i, so sind $\vec{\varphi}_\nu := e^{\lambda_i t}\vec{y}_\nu^{(i)}$, $\nu = 1, \ldots, m_i$, linear unabhängige Lösungen der DGL $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$.*

2. *Ist $g_i := g(\lambda_i) < a(\lambda_i) = m_i$, so erhält man g_i linear unabhängige Lösungen $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_{g_i}$ wie in (1).*

   Außerdem gibt es linear unabhängige Lösungen $\vec{\varphi}_\nu(t) = e^{\lambda_i t}\vec{q}_\nu(t)$, $\nu = g_i + 1, \ldots, m_i$, wobei die Vektoren $\vec{q}_\nu(t)$ als Einträge jeweils Polynome in t vom Grad $\le m_i$ enthalten.

Dieser Satz ermöglicht es, die Lösungen über einen Ansatz zu finden.

Beispiele.

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Wir wollen die DGL $\vec{y}\,' = A \circ \vec{y}$ lösen.

   a) Zunächst ist $\chi_A(x) = \det(A - xE_3) = -x^3 + x^2 + x - 1$. Durch Probieren findet man die erste Nullstelle $x = 1$. Dann ist $p_A(x) : (x-1) = -x^2+1$, und das ergibt zwei weitere Nullstellen $x = \pm 1$. Wir setzen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.

   b) Der Vektor $\mathbf{y}_1 = (-1, 1, 1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Der Eigenraum von λ_2 ist $E(1) = \{(x, y, z) : -x + 4y - 3z = 0\}$. Eine Basis von $E(1)$ bilden die Vektoren $\mathbf{y}_2 = (4, 1, 0)$ und $\mathbf{y}_3 = (-3, 0, 1)$.

   c) Das liefert folgendes Fundamentalsystem:

$$\vec{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},\ \vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \text{ und } \vec{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

2. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A. Es ist

$$\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2).$$

   Der Eigenwert $\lambda_1 = 2$ hat die Vielfachheit 1. Der Eigenwert $\lambda_2 = 1$ hat die (algebraische) Vielfachheit 2.

c) Man findet sofort einen Eigenvektor zu λ_1, nämlich $\mathbf{y}_1 := (0,1,1)$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $E(1) = \{(x,y,z) : x = y \text{ und } z = 0\}$, eine Basis stellt der Vektor $\mathbf{y}_2 = (1,1,0)$ dar.

Zwei Lösungen kann man also direkt angeben:

$$\vec{\varphi}_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \text{ und } \vec{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}.$$

d) Für die dritte Lösung machen wir den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} q_1 + p_1 t \\ q_2 + p_2 t \\ q_3 + p_3 t \end{pmatrix} e^{t}.$$

Setzt man $\vec{y}(t)$ in die DGL ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (q_1+p_1)+p_1 t &= (q_2-q_3)+(p_2-p_3)t, \\ (q_2+p_2)+p_2 t &= (-2q_1+3q_2-q_3)+(-2p_1+3p_2-p_3)t \\ \text{und} \quad (q_3+p_3)+p_3 t &= (-q_1+q_2+q_3)+(-p_1+p_2+p_3)t. \end{aligned}$$

e) Der Vergleich der Koeffizienten bei t liefert:

$$p_1 = p_2 - p_3, \quad p_2 = -2p_1 + 3p_2 - p_3 \text{ und } p_3 = -p_1 + p_2 + p_3.$$

Also ist $p_1 = p_2 =: \alpha$ und $p_3 = 0$.

Der Vergleich der Koeffizienten bei 1 liefert:

$$q_1 + p_1 = q_2 - q_3, \quad q_2 + p_2 = -2q_1 + 3q_2 - q_3 \text{ und } q_3 + p_3 = -q_1 + q_2 + q_3.$$

Das ergibt

$$q_1 = q_2 =: \beta \text{ und } q_3 = -\alpha.$$

Mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ erhalten wir die Lösung

$$\vec{\varphi}_3(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

3. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -5 & 6 & -15 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_A(x) = -x^3 + 6x^2 - 21x + 26$. Durch Probieren kann man $\lambda_1 = 2$ finden. Polynomdivision liefert $\chi_A(x) : (x-2) = -x^2 + 4x - 13$ und damit die weiteren Eigenwerte $\lambda_2 = 2 + 3\mathrm{j}$ und $\lambda_3 = 2 - 3\mathrm{j}$.

Zu λ_1 findet man schnell den Eigenvektor $\mathbf{y}_1 = (-3, 0, 1)$. Aber was machen wir mit den komplexen Eigenwerten λ_2 und λ_3? Ein (komplexer) Eigenvektor zu λ_2 ist $\mathbf{y}_2 = (-1 + \mathsf{j}\,, 1 + 2\,\mathsf{j}\,, 1)$. Wir zerlegen die komplexe Lösung $\varphi(t) = \mathbf{y}_2 e^{\lambda_2 t}$ in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
\vec{\varphi}(t) &= \Big[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\Big] e^{2t}(\cos(3t) + \mathsf{j}\,\sin(3t)) \\
&= \Big[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(3t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3t)\Big] e^{2t} \\
&\quad + \mathsf{j}\,\Big[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(3t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(3t)\Big] e^{2t}.
\end{aligned}$$

$\vec{\varphi}_1(t) = \mathrm{Re}(\vec{\varphi}(t))$ und $\vec{\varphi}_2(t) = \mathrm{Im}(\vec{\varphi}(t))$ sind dann reelle Lösungen. Das funktioniert übrigens immer!