

Kapitel 1 Vektoranalysis

§ 1 Kurvenintegrale

In diesem Paragraphen wird zunächst die Integrationstheorie im \mathbb{R}^n wiederholt, die eigentlich zum Stoff von Mathematik 2 gehört. Dabei wird besonders auf die Transformationsformel und ihre Anwendungen eingegangen.

In der zweiten Hälfte werden Kurven und Kurvenintegrale behandelt.

Zunächst möchte ich einige Besonderheiten meiner Notationen vorstellen:

Punkte im \mathbb{R}^n und Vektoren, die zur Beschreibung von Punkten dienen, schreibe ich als „Zeilenvektoren“:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ (im Skript **fett** gedruckt, an der Tafel in der Form } \underline{x}\text{)}.$$

Der zugehörige „Spaltenvektor“ entsteht durch Transponieren. Er wird im Skript und an der Tafel durch einen Pfeil gekennzeichnet:

$$\mathbf{x}^t = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Spaltenvektoren sind bei der Matrizenrechnung nützlich, können aber auch dort vermieden werden. Die Ausdrücke $A \cdot \vec{x}$ und $(\mathbf{x} \cdot A^t)^t$ bezeichnen den gleichen Spaltenvektor. Mit $L_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^t$ wird die durch A bestimmte lineare Abbildung bezeichnet. Ist $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ die „Standard-Basis“ des \mathbb{R}^n (deren Elemente die Einheitsvektoren sind), so ist

$$L_A(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\nu \cdot A^t = (A \cdot \vec{e}_\nu)^t$$

die (als Zeile geschriebene) ν -te Spalte von A .

Die (*euklidische*) *Norm* eines Vektors \mathbf{x} ist die Zahl

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Das *Skalarprodukt* der Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} ist die Zahl

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{\nu=1}^n x_\nu y_\nu.$$

Die Funktionalmatrix einer differenzierbaren Abbildung

$$F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

wird in der Literatur einheitlich in der Form

$$J_F = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \cdots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \cdots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix}$$

geschrieben. Bezeichnet $DF(\mathbf{x})$ die totale Ableitung von F in \mathbf{x} , so ist

$$(f_\mu)_{x_\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_\mu \cdot J_F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_\nu^t = \mathbf{e}_\mu \bullet DF(\mathbf{x})(\mathbf{e}_\nu).$$

In Mathematik 2 wurden mehrfache Riemann-Integrale behandelt. Dieses Thema soll hier wiederholt werden, wobei ich die folgende Notation verwende:

$$\int_M f(\mathbf{x}) dV_n = \int_M f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

wobei folgende Voraussetzungen erfüllt sein müssen:

1. M muss eine Jordan-messbare Teilmenge des \mathbb{R}^n sein. Das bedeutet, dass M beschränkt und ∂M eine Nullmenge ist. Eine *beschränkte Menge* ist eine Menge M , die in einem Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

enthalten ist. Die Zahl $\text{vol}_n(Q) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ nennt man das *Volumen* von Q .

Der *Rand* ∂M einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus allen Punkten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) \mathbf{x} gehört zu M oder ist ein Häufungspunkt von M .
- (b) \mathbf{x} ist kein innerer Punkt von M .

\mathbf{x} ist also genau dann Randpunkt von M , wenn jede Umgebung von \mathbf{x} einen Punkt von M und einen Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus M$ enthält.

Eine (*Jordan-*)*Nullmenge* im \mathbb{R}^n ist eine Menge N mit folgender Eigenschaft:

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ endlich viele Quader Q_1, \dots, Q_N mit

- (a) $N \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_N$.
- (b) $\text{vol}_n(Q_1) + \dots + \text{vol}_n(Q_N) < \varepsilon$.

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so bildet jeder Graph einer stetigen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} . Deshalb sind z.B. beschränkte Teile von Geraden in der Ebene Nullmengen in der Ebene und von Ebenen im Raum Nullmengen im Raum.

Für jede messbare Menge M ist ein *Volumen* $\text{vol}_n(M)$ erklärt, das in einfachen Fällen mit dem bekannten geometrischen Volumen übereinstimmt.

- Die Funktion f muss über M integrierbar sein. Dafür steht uns kein allgemeines leicht nachprüfbares Kriterium zur Verfügung. Eine etwas genauere Erklärung findet sich im Skript zu Mathematik 2. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ messbar und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über M integrierbar. Damit kommt man in den meisten praktischen Fällen aus.

Die Berechnung eines Riemann-Integrals bleibt auch zunächst etwas im Dunkeln, aber in gewissen Spezialfällen liegen praktikable Techniken vor, von denen ich weiter unten einige vorstellen werde. Zunächst erinnere ich aber an einige Regeln über den Umgang mit Integralen:

- $\int_M (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) dV_n = \int_M f(\mathbf{x}) dV_n + \int_M g(\mathbf{x}) dV_n$.
 $\int_M c \cdot f(\mathbf{x}) dV_n = c \cdot \int_M f(\mathbf{x}) dV_n$.
- Ist $f \leq g$, so ist $\int_M f(\mathbf{x}) dV_n \leq \int_M g(\mathbf{x}) dV_n$.
- Stets ist $|\int_M f(\mathbf{x}) dV_n| \leq \int_M |f(\mathbf{x})| dV_n \leq \sup_M |f| \cdot \text{vol}_n(M)$.
- Es ist $\int_M 1 dV_n = \text{vol}_n(M)$.

Der einfachste Fall liegt bei der Integration über einen Quader vor. Da kann man nämlich den **Satz von Fubini** anwenden:

Ist $Q = Q_1 \times Q_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ ein Quader und f auf Q stetig, so ist

$$\int_Q f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_{n+m} = \int_{Q_1} \left(\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_m \right) dV_n = \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_n \right) dV_m.$$

Dieses Verfahren kann man iterieren, man kann also nach jeder einzelnen Variablen integrieren, nach den Regeln der eindimensionalen Integration.

Weit verbreitet sind auch **Integrationen über Normalbereiche**. Ein *Normalbereich* ist eine Menge

$$N = \{(\mathbf{x}; y) \in M \times \mathbb{R} : \varphi(\mathbf{x}) \leq y \leq \psi(\mathbf{x})\},$$

wobei M kompakt und messbar und $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $\varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in M$ sein sollen. Ist nun $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\int_N f(\mathbf{x}; y) dV_{n+1} = \int_M \left(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}; y) dy \right) dV_n.$$

Dabei spielt die Numerierung der Variablen keine Rolle.

Beispiel.

Sei $M := \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x\}$. Das ist ein Normalbereich, insbesondere kompakt und messbar. Dann ist auch

$$N := \{(x, y, z) \in M \times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq xy\}$$

ein Normalbereich. Die Integration der Funktion $f(x, y, z) := xy^2z^3$ über N ergibt:

$$\begin{aligned} \int_N xy^2z^3 dV_3 &= \int_M \left(\int_0^{xy} xy^2z^3 dz \right) dV_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^3 dz dy dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^x x^5 y^6 dy dx \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{13 \cdot 28}. \end{aligned}$$

Eine weitere Berechnungsmethode liefert das **Prinzip von Cavalieri**:

Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt und messbar. Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei der „Schnitt“

$$K_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, t) \in K\}$$

leer oder messbar. Insbesondere gibt es dann ein Intervall $[a, b]$, so dass $K_t = \emptyset$ für $t \notin [a, b]$ ist, und es gilt:

$$\text{vol}_{n+1}(K) = \int_a^b \text{vol}_n(K_t) dt.$$

Man kann dieses Prinzip z.B. benutzen, um das Volumen einer Kugel zu berechnen. Sei $B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq r\}$. Dann ist

$$B_t = \begin{cases} \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2 - t^2\} & \text{falls } -r \leq t \leq r \\ \emptyset & \text{falls } |t| > r. \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= \int_{-r}^r \text{vol}_2(B_t) dt \\ &= \int_{-r}^r (r^2 - t^2)\pi dt \\ &= \pi \left(r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

Besonders wichtig ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel, die man auch als Transformationsformel bezeichnet.

In einer Veränderlichen ist die Substitutionsregel folgendermaßen bekannt:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

wobei $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Meistens wird die Formel nur für den Fall angewandt, dass φ injektiv und $\varphi' \neq 0$ ist, denn nur dann kann man nach Berechnung des Integrals die Substitution wieder rückgängig machen. Ist φ außerdem surjektiv, also $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$, so sind noch zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $\varphi' > 0$, so ist φ „orientierungserhaltend“, und es muss $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$ sein.
2. Ist $\varphi' < 0$, so ist φ „orientierungsumkehrend“ und $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$.

Vertauscht man bei einem Integral die Grenzen, so ändert sich das Vorzeichen. Deshalb kann man beide Fälle zusammenfassen zu:

$$\text{Ist überall } \varphi'(t) \neq 0, \text{ so ist } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

Das motiviert die allgemeine Formel:

1.1 Die Transformationsformel. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine zusammenhängende offene Menge), $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung (die „Transformation“) und $\det J_F(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in G$.

Weiter sei $K \subset G$ eine kompakte Jordan-messbare Menge und $f : F(K) \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_{F(K)} f(\mathbf{y}) dV_n = \int_K f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det J_F(\mathbf{x})| dV_n.$$

Die Formel bleibt gültig, wenn ein Teil der Voraussetzungen auf einer Nullmenge verletzt ist.

Wir betrachten einige Spezialfälle:

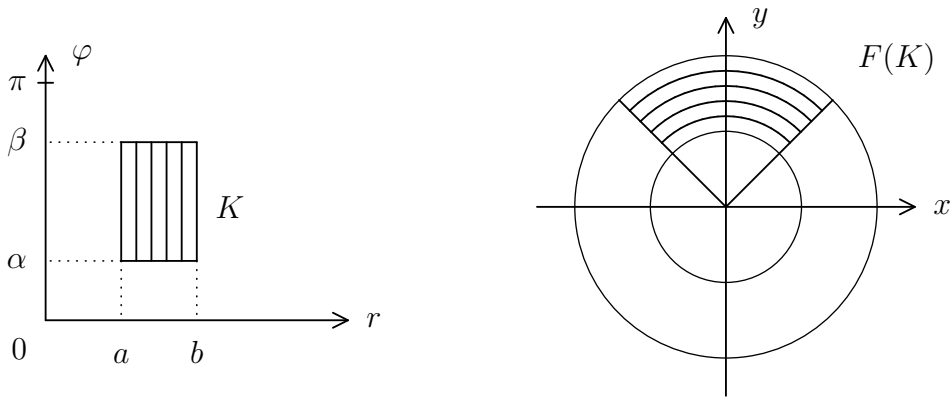
1. Ebene Polarkoordinaten

Sei $G := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < 2\pi\}$. Das ist ein Gebiet, und die Transformation auf Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$F(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi).$$

Dann ist $J_F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ und $\det J_F(r, \varphi) = r$.

Nun sei z.B. $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a \leq r \leq b \text{ und } \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$, mit $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Dann ergibt sich für $F(K)$ folgendes Bild:



Nach der Transformationsformel ist

$$\int_{F(K)} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Das bleibt auch dann noch richtig, wenn die Menge K an den Rand von G heranrückt. Man muß nur aufpassen, daß sich φ in keinem Intervall bewegt, dessen Länge 2π übersteigt.

Beispiele.

1. Sei $0 \leq a < b$ und $K_{a,b} := \{(x, y) : a < \|(x, y)\| < b\}$. Weiter sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$. Dann ist g eine sogenannte „rotationssymmetrische Funktion“, und es ist

$$\int_{K_{a,b}} g(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(r) r dr d\varphi = 2\pi \int_a^b f(r) r dr.$$

Ist z.B. $g(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|$ und $a = \varepsilon > 0$, $b = 1$, so ist $f(r) = 1/r$, und man erhält:

$$\int_{K_{\varepsilon,1}} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} d\mathbf{x} = 2\pi \int_{\varepsilon}^1 dr = 2\pi(1 - \varepsilon).$$

Läßt man ε gegen Null gehen, so ergibt sich: $\int_{D_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} d\mathbf{x} = 2\pi$.

2. Sei $P = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 25 - x^2 - y^2\}$. Dies ist ein Normalbereich über der x - y -Ebene, ein abgeschnittenes Paraboloid. Wir wollen das Volumen von P berechnen. Aus Symmetriegründen reicht es, den Teil zu berechnen, der über dem ersten Quadranten liegt, und dann das Ergebnis mit 4 zu multiplizieren. Wir können also das Integral über die Funktion $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ und die Menge $V = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$ berechnen, denn das Integral stimmt mit dem Volumen unter dem Graphen von f überein.

In Polarkoordinaten ist V gegeben durch $0 \leq r \leq 5$ und $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Also ist

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(P) &= 4 \cdot \int_V (25 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^5 (25 - r^2)r dr d\varphi \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{25}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_{r=0}^5 d\varphi \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{625}{4} d\varphi = \frac{625\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Wir wollen das Integral $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ berechnen, das im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und mit der Gamma-Funktion auftritt.

Wir beginnen mit einem Trick. Sei $Q_R := [-R, R] \times [-R, R]$ und $f(x, y) := e^{-x^2 - y^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} I_R := \int_{Q_R} f(x, y) dx dy &= \int_{-R}^R e^{-y^2} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &= 4 \cdot \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2, \end{aligned}$$

also $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 4 \cdot I^2$.

Ist andererseits $D_R = \{(x, y) : \|(x, y)\| \leq R\}$, so ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} f(x, y) dx dy.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{D_R} f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r e^{-r^2} dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^R d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) d\varphi \\ &= \pi(1 - e^{-R^2}), \end{aligned}$$

und das strebt gegen π für $R \rightarrow \infty$.

Jetzt lassen wir R gegen ∞ gehen und erhalten:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{R \rightarrow \infty} I_R} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

2. Zylinderkoordinaten

Hier ist $G = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } z \text{ beliebig}\}$ und

$$F(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z),$$

also $J_F = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für die Funktionaldeterminante ergibt sich

wieder $\det J_F(r, \varphi, z) = r$.

Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ das Bild eines Rechtecks R in der r - φ -Ebene nach Anwendung der ebenen Polarkoordinaten, sind g_1 und g_2 zwei stetig differenzierbare Funktionen über G und ist

$$T := \{(x, y, z) : (x, y) \in G \text{ und } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

so gilt für eine stetige Funktion $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

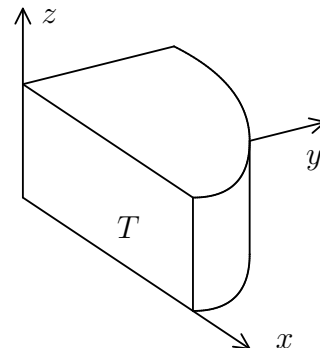
$$\int_T f(\mathbf{x}) dV_3 = \int_R \left(\int_{g_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{g_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right) r dr d\varphi.$$

Beispiele.

1. Ist etwa $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$, so ist $T = F(Q)$, mit $Q := \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$.

Also ist z.B.

$$\begin{aligned} \int_T x^2 y dV_3 &= \int_Q (r \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \cdot r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dz dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dr d\varphi \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= -\frac{1}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$



2. Ein fester Körper in der Physik kann mathematisch durch eine kompakte Jordan-meßbare Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Ist $V = v_3(M)$ das Volumen von M , so nennt man

$$(x_s, y_s, z_s) := \left(\frac{1}{V} \int_M x dV_3, \frac{1}{V} \int_M y dV_3, \frac{1}{V} \int_M z dV_3 \right)$$

den *Schwerpunkt* von M .

Wir wollen den Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$M := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

berechnen. Dabei ist $V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{\pi}{6} a^3$. Aus Symmetriegründen ist $x_s = y_s = z_s$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_M z dV_3 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr dz dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \left(r \cdot \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{\sqrt{a^2-r^2}} dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{r}{2} (a^2 - r^2) dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2 a^2}{4} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_{r=0}^a d\varphi \\ &= \frac{a^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{also } z_s = \frac{a^4 \cdot \pi \cdot 6}{\pi \cdot a^3 \cdot 16} = \frac{3}{8} a.$$

3. Räumliche Polarkoordinaten

Leider gibt es hier in der Literatur verschiedene Definitionen. Für mich ist die folgende Version besonders plausibel:

Sind die Polarkoordinaten in der Dimension $n - 1$ gegeben,

$$P_{n-1} = P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}),$$

so definiert man

$$P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) := (P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos \varphi_n, r \sin \varphi_n).$$

Insbesondere ist dann $P_3(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$. Hier misst φ den Winkel in der x - y -Ebene (von der x -Achse aus im mathematisch positiven

Sinn) und θ den Winkel gegen die x - y -Ebene (zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$), es ist also $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ und $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Leider ist eine andere Version gebräuchlicher:

Ist $\tilde{\theta}$ der Winkel gegen die positive z -Achse, so ist $\tilde{\theta} + \theta = \pi/2$, also $\cos \tilde{\theta} = \cos(\pi/2 - \theta) = -\sin(-\theta) = \sin \theta$ und $\sin \tilde{\theta} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta$.

Misst man also den Winkel θ von der positiven z -Achse aus, so erhält man als räumliche Polarkoordinaten:

$$F(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta), \quad r > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Hier ist also

$$J_F(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \det J_F &= (\cos \theta) \cdot (r^2 \cos \theta \sin \theta) + r(\sin \theta) \cdot (r \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der Koordinaten ist wichtig, damit man die Standard-Orientierung des Raumes erhält (Näheres dazu später!). Ist $r > 0$ und $0 < \theta < \pi$, so ist $\det J_F(r, \varphi, \theta) > 0$.

Ist $Q_0 = [\alpha, \beta] \times [a, b] \subset (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ und

$$Q := \{(\theta, \varphi, r) \in Q_0 \times \mathbb{R} : r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi)\},$$

mit zwei stetigen Funktionen r_1, r_2 , so ist

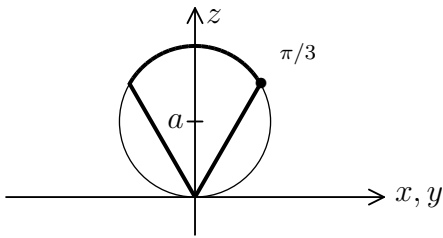
$$\begin{aligned} &\int_{F(Q)} f(\mathbf{x}) dV_3 = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Beispiele.

1. Wir können jetzt das Volumen der Einheitskugel ein zweites Mal berechnen:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 dV_3 \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

2. Es soll das Volumen der folgenden „Eistüte“ berechnet werden:



Die Eistüte T wird beschrieben durch

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ und } 0 \leq r \leq 2a \cos \theta.$$

Letzteres ergibt sich so: Der Radius in der durch θ bestimmten Richtung variiert zwischen 0 und einem Wert r_0 , wobei r_0 und $2a$ die Ankathete und die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit eingeschlossenem Winkel θ sind. Also ist $r_0/(2a) = \cos(\theta)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(T) &= \int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_{r=0}^{2a \cos \theta} d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \theta \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/6} \cos^3 \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{16\pi a^3}{3} \left(-\frac{\cos^4 \theta}{4} \right) \Big|_{\theta=0}^{\pi/6} \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \left(-\frac{9}{16} + 1 \right) = \frac{7\pi}{12} a^3. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Formel $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ benutzt.

Damit beschließen wir die Wiederholung der Integrationstheorie.

Definition. Ein stetiger (bzw. stückweise stetig differenzierbarer) (*parametrisierter*) Weg im \mathbb{R}^n ist eine stetige (bzw. stückweise stetig differenzierbare) Abbildung $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall ist. Ist α sogar überall stetig differenzierbar und $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$, so sprechen wir von einem *glatten* Weg.

Die Bildmenge $|\alpha| := \{\alpha(t) : t \in I\}$ nennt man die *Spur* von α . Ist $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, so nennt man den Punkt $\mathbf{x}_A(\alpha) := \alpha(a)$ den *Anfangspunkt* und $\mathbf{x}_E(\alpha) := \alpha(b)$ den *Endpunkt* von α .

Ist $t \in I$, so heißt $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ der *Tangentialvektor* von α bei t .

Manchmal nennen wir einen stückweise stetig differenzierbaren Weg auch einen *Integrationsweg*.

Definition. Eine surjektive streng monoton wachsende (oder fallende) stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ nennt man eine *Parametertransformation*. Die Wege α und $\alpha \circ \varphi$ besitzen dann die gleiche Spur. Ist α glatt, so ist auch $\alpha \circ \varphi$ glatt.

Durch die Parametrisierung werden die Punkte auf der Spur von α angeordnet, es wird also ein *Durchlaufungssinn* oder eine *Orientierung* für α festgelegt. Eine monoton wachsende Parametertransformation φ ändert diesen Durchlaufungssinn nicht. Man nennt φ dann *orientierungserhaltend*. Ist φ dagegen monoton fallend, so dreht sich der Durchlaufungssinn um, und man nennt φ *orientierungs-umkehrend*. Unter einer (*orientierten*) *Kurve* verstehen wir die Spur eines Weges, zusammen mit einem Durchlaufungssinn. Diese Kurve ist durch eine beliebige Parametrisierung festgelegt. Es kommt aber nicht auf die spezielle Parametrisierung an, solange man nur orientierungserhaltende Parametertransformationen zulässt.

Beispiele.

1. Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt und $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Richtungsvektor. Dann wird durch

$$\alpha(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Gerade durch \mathbf{a} mit Richtung \mathbf{v} beschrieben.

2. Es seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren mit $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, sowie \mathbf{a} ein beliebiger Punkt und $r > 0$. Dann nennt man

$$\alpha(t) := \mathbf{a} + (r \cos t)\mathbf{u} + (r \sin t)\mathbf{v}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

den Kreis um \mathbf{a} mit Radius r in der von \mathbf{u} und \mathbf{v} aufgespannten Ebene.

Meistens ist $n = 2$, $\mathbf{u} = (1, 0)$ und $\mathbf{v} = (0, 1)$. Dann ist

$$\alpha(t) = (a_1 + r \cos t, a_2 + r \sin t).$$

Die Spur dieses Weges besteht aus den Punkten (x, y) mit $x - a_1 = r \cos t$ und $y - a_2 = r \sin t$, also

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2.$$

Sei jetzt $I = [a, b]$ und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg. Ist eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ von $[a, b]$ gegeben, so liefern die Verbindungsstrecken der Punkte $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_N)$ einen „approximierenden Polygonzug“ der Länge

$$L(\mathfrak{Z}, \alpha) = \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Nun ist aber

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt,$$

also

$$L(\mathfrak{Z}, \alpha) \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Im Falle einer Geraden gilt die Gleichheit. Ist α stetig differenzierbar, so kann man die Spur von α so gut durch Streckenzüge approximieren, dass $L(\mathfrak{Z}, \alpha)$ im Grenzwert (für immer feinere Zerlegungen) gegen das Integral konvergiert.

Deshalb nennt man die Zahl

$$L(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

die *Bogenlänge* des Weges α . Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation, so ist

$$\begin{aligned} L(\alpha \circ \varphi) &= \int_c^d \|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \pm \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \\ &= \pm \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\alpha'(s)\| ds \\ &= L(\alpha), \end{aligned}$$

wobei das während der Rechnung auftretende Vorzeichen davon abhängt, ob φ orientierungserhaltend ist. Es fällt am Schluß wieder weg, weil man bei einer orientierungs-umkehrenden Transformation die Integralgrenzen vertauschen muss. Also ist die Bogenlänge unabhängig von der Parametrisierung, und man kann auch von der Länge einer *Kurve* sprechen.

Beispiele.

1. Ist $\alpha(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ die Parametrisierung der Verbindungsstrecke von \mathbf{a} und \mathbf{b} , mit $t \in [0, 1]$, so ist

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| dt = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

2. Durch $\alpha(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ wird der Kreis um (x_0, y_0) mit Radius r definiert. Es ist

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|(-r \sin t, r \cos t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

3. Sei $a > b > 0$ und $\alpha(t) := (a \cos t, b \sin t)$ die Parametrisierung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b . Dann ist $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ und $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Also erhält man als Länge des Ellipsenbogens das Integral

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt, \end{aligned}$$

mit $k := \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Ein Integral dieses Typs nennt man ein *Elliptisches Integral*. Es ist nicht elementar lösbar, man kann es nur numerisch auswerten. Die Konstante k wurde eingeführt, um ein sogenanntes „elliptisches Integral zweiter Gattung in Legendrescher Normalform“ zu erhalten. Derartige Integrale werden in den Formelsammlungen tabelliert.

4. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann wird durch $\alpha(t) := (t, f(t))$ ein glatter Weg in der Ebene gegeben, dessen Spur der Graph von f ist. Es ist $\alpha'(t) = (1, f'(t))$ und $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, also

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Wir wollen nun Integrale über Vektorfelder betrachten. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet. Ein *Vektorfeld* auf G eine Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Genau genommen ist ein Vektorfeld eigentlich eine Menge von Paaren $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x}))$, wobei die erste Komponente jeweils den Angriffspunkt $\mathbf{x} \in G$ des Vektors und die zweite Komponente $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ den Richtungsvektor beschreibt. Wir lassen die erste Komponente weg, denn das Vektorfeld wird vollständig durch die Abbildung F beschrieben. Das Feld heißt stetig, differenzierbar etc., wenn alle Komponentenfunktionen von $F = (f_1, \dots, f_n)$ es sind.

Beispiel.

Ist f eine stetig differenzierbare Funktion auf G , so kann man dort das Gradientenfeld $\mathbf{grad} f = \nabla f := (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ bilden, ein stetiges Vektorfeld.

Betrachten wir nun ein physikalisches Problem! Ein Massenpunkt soll in einem Kraftfeld \mathbf{F} längs eines glatten Weges α bewegt werden. Die Arbeit, die bei der Bewegung verrichtet wird, hängt von derjenigen Komponente der Kraft ab, die in Richtung des Tangentialvektors an α zeigt. Diese Komponente ist an der Stelle $\alpha(t)$ durch das Skalarprodukt aus $\mathbf{F}(\alpha(t))$ und dem Tangentialvektor $\alpha'(t)$ gegeben. Die Gesamt-Arbeit, die verrichtet wird, wenn der Massenpunkt entlang des ganzen Weges α bewegt wird, ergibt sich durch Integration über $\mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ ein stetig differenzierbarer Integrationsweg und $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann nennt man

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

das *Kurvenintegral (2. Art)* von \mathbf{F} über α .

Es gibt auch Kurvenintegrale 1. Art, die so ähnlich wie das Bogenlängen-Integral aussehen. Ich möchte hier nicht näher darauf eingehen.

Wir benutzen jetzt folgende Schreibweise: Ist α ein Integrationsweg, so soll $-\alpha$ den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnen.

1.2 Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art.

- $$\int_{\alpha} (c_1 \cdot \mathbf{F}_1 + c_2 \cdot \mathbf{F}_2) \cdot d\mathbf{x} = c_1 \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{x} + c_2 \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{x},$$
 für Vektorfelder $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und Konstanten c_1, c_2 .

- Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation mit $\varphi'(x) > 0$ für alle $x \in [c, d]$, so ist
$$\int_{\alpha \circ \varphi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

- Es ist
$$\int_{-\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

- Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha).$$

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) + 3): Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine beliebige Parameter-Transformation, so ist $(\alpha \circ \varphi)'(t) = \alpha'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \circ \varphi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_c^d \mathbf{F}(\alpha(\varphi(t))) \cdot \alpha'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \mathbf{F}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds \\ &= \text{sign}(\varphi') \cdot \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \text{sign}(\varphi') \cdot \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Den umgekehrt durchlaufenen Weg erhält man über die Parametertransformation $\varphi(t) = a + b - t$ mit $\varphi'(t) = -1$.

4) Zur Abschätzung benötigt man die Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\alpha(t))\| \cdot \|\alpha'(t)\| dt \\ &\leq \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \sup_{|\alpha|} \|\mathbf{F}\| \cdot L(\alpha). \end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Sei $n = 2$, $\mathbf{F}(x, y) := (cy, 0)$, $c > 0$, und $\alpha(t) := (\cos t, 1 + \sin t)$ auf $[0, 2\pi]$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (c(1 + \sin t), 0) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= -c \cdot \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t) dt = -c\pi, \end{aligned}$$

denn $\frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)$ ist eine Stammfunktion von $\sin^2 t$.

Fasst man \mathbf{F} als Strömungsfeld auf, so misst das Kurvenintegral über einen Kreis die „Zirkulation“ der Strömung.

2. Sei $n = 3$, $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) und

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \text{ für } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Setzen wir dagegen $\beta(t) := (2 + \cos t, \sin t, 0)$, so ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{5 + 4 \cos t}, \frac{2 + \cos t}{5 + 4 \cos t}, 0 \right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 4 \cos t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{5 + 4 \cos t} \right] dt \\
 &= \pi - \frac{3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}.
 \end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{1}{5 + 4 \cos t}$ ist auf $[0, 2\pi]$ positiv und symmetrisch zur Geraden $t = \pi$. Daher gilt mit der Substitution $\varphi(x) = 2 \arctan(x)$ und der Formel $\cos t = (1 - \tan^2(t/2))/(1 + \tan^2(t/2))$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{5 + 4 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx \\
 &= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{9 + x^2} \\
 &= \frac{4}{9} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + (x/3)^2} \\
 &= \frac{12}{9} \cdot \left(\arctan \frac{x}{3} \right) \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{12}{9} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

Also ist $\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$.

Im ersten Fall haben wir über eine geschlossene Kurve um die Polstellenmenge von \mathbf{F} herum integriert, im zweiten Fall über eine geschlossene Kurve, die ganz abseits der Polstellenmenge verläuft. Man kann zeigen, dass \mathbf{F} dort lokal ein Gradientenfeld ist. Ist z.B. $x \neq 0$, so ist \mathbf{F} Gradient der Funktion $g(x, y, z) := \arctan(y/x)$.

1.3 Hauptsatz über Kurvenintegrale. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine offene zusammenhängende Menge), und \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf G . Dann sind die folgenden Aussagen über \mathbf{F} äquivalent:

1. \mathbf{F} ist ein Gradientenfeld, d.h. es gibt eine stetig differenzierbare Funktion f auf G , so dass $\mathbf{F} = \nabla f$ ist.
2. Sind \mathbf{p} und \mathbf{q} Punkte in G , so hat das Kurvenintegral $\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ für alle Integrationswege $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ mit $\alpha(a) = \mathbf{p}$ und $\alpha(b) = \mathbf{q}$ den gleichen Wert. (Das Integral ist wegunabhängig).
3. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein **geschlossener** Integrationsweg, so ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Insbesondere ist

$$\int_{\alpha} (\nabla f) \cdot d\mathbf{x} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

BEWEIS:

(1) \implies (2): Ist $\mathbf{F} = \nabla f$, so gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)(t) dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\ &= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

und das hängt nicht mehr von α ab.

Den Zusatz haben wir damit auch gleich bewiesen!

(2) \implies (3): Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg und $\mathbf{p} := \alpha(a) = \alpha(b)$, so haben α und $-\alpha$ den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Also ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{-\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

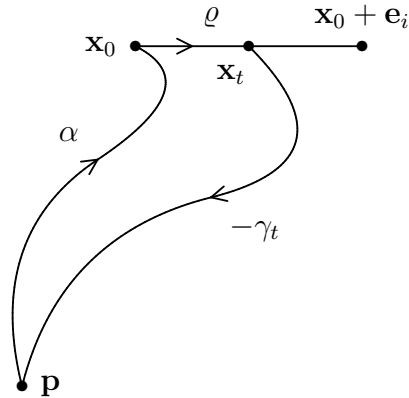
und daher $\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$.

(3) \implies (1): Wir setzen voraus, dass das Integral über jeden geschlossenen Weg verschwindet, und wir müssen eine Funktion f mit $\nabla f = \mathbf{F}$ konstruieren. Dazu sei $\mathbf{p} \in G$ ein fest gewählter Punkt. Ist $\mathbf{x} \in G$ ein beliebiger anderer Punkt, so gibt es einen stetigen Weg α , der \mathbf{p} innerhalb von G mit \mathbf{x} verbindet. Man kann diesen Weg sogar als Streckenzug, also als Integrationsweg wählen.

Wir setzen $f(\mathbf{x}) := \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$. Offensichtlich hängt diese Definition nicht von dem Weg α ab. Es bleibt zu zeigen, dass $\nabla f = \mathbf{F}$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ beliebig und \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor. Sei α ein Weg zwischen \mathbf{p} und \mathbf{x}_0 , sowie γ_t ein Weg von \mathbf{p} nach $\mathbf{x}_t := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i$. Zusammen mit der Verbindungsstrecke $\varrho(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i$, $0 \leq s \leq t$, von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_t erhält man für jedes $t \in [0, 1]$ einen geschlossenen Weg, über den das Integral Null ergibt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\gamma_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\varrho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i ds. \end{aligned}$$



Setzen wir $g(s) := \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i = F_i(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i)$, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s) ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $c = c(t) \in [0, t]$, so dass gilt: $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = F_i(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{e}_i) \cdot t$, also

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} F_i(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{e}_i) = F_i(\mathbf{x}_0).$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Definition. Ist $\nabla f = \mathbf{F}$, so nennt man $-f$ ein *Potential* für \mathbf{F} .

Jetzt können wir das Beispiel

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

besser interpretieren. Auf den Gebieten

$$\begin{aligned} U_+ &:= \{(x, y, z) : x > 0\} \\ \text{und } U_- &:= \{(x, y, z) : x < 0\} \end{aligned}$$

besitzt \mathbf{F} jeweils ein Potential, und deshalb muss dort das Integral über \mathbf{F} und jeden geschlossenen Weg verschwinden (was wir nicht auf die Menge $\{(x, y, z) : x \neq 0\}$ übertragen dürfen, weil die nicht zusammenhängend ist).

Besäße \mathbf{F} sogar auf seinem ganzen Definitionsbereich ein Potential, so müsste auch dort jedes Integral über einen geschlossenen Weg verschwinden. Wir haben aber bereits einen Weg gefunden, auf den das nicht zutrifft. Also kann \mathbf{F} kein globales Gradientenfeld sein.

Wir kehren noch einmal zu unserer physikalischen Anwendung zurück.

Auf dem \mathbb{R}^3 sei ein Kraftfeld \mathbf{F} gegeben. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in diesem Kraftfeld entlang eines Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann ist $\mathbf{v}(t) := \alpha'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zur Zeit t . Das Newtonsche Gesetz der Bewegung besagt:

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = m \cdot \mathbf{v}'(t) \text{ für jeden Zeitpunkt } t.$$

Wenn man das Teilchen entlang α von $\mathbf{p} := \alpha(a)$ nach $\mathbf{q} := \alpha(b)$ bewegt hat, so beträgt die dabei geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b m \cdot \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{m}{2} \cdot [\|\mathbf{v}(b)\|^2 - \|\mathbf{v}(a)\|^2]. \end{aligned}$$

$T(t) := \frac{m}{2} \cdot \|\mathbf{v}(t)\|^2$ ist die *kinetische Energie* des Teilchens zur Zeit t . Die geleistete Arbeit ist also gerade die Änderung der kinetischen Energie.

Man nennt das Kraftfeld \mathbf{F} *konservativ*, wenn es ein Potential besitzt: $\mathbf{F} = -\nabla U$. In diesem Fall ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -[U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))],$$

also $T(a) + U(\alpha(a)) = T(b) + U(\alpha(b))$. Das bedeutet, daß die *Gesamtenergie* $E(\alpha(t)) := U(\alpha(t)) + T(t)$ bei der Bewegung des Teilchens konstant bleibt. Das ist der Satz von der Erhaltung der Energie.

Es wäre schön, ein einfacheres Kriterium zur Hand zu haben, um zu testen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Potential besitzt. In gewissen Fällen gibt es tatsächlich ein solches Kriterium.

Sei $B = B_r(\mathbf{0})$ eine offene Kugel um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n und

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : B \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B .

Damit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$ sein kann, muss auf jeden Fall gelten:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Ist diese notwendige „Integrabilitätsbedingung“

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \text{ und } \mathbf{x} \in B$$

erfüllt, so kann man tatsächlich eine Funktion f mit $\nabla f = \mathbf{F}$ konstruieren. Dazu setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i.$$

Um den Gradienten von f zu berechnen, brauchen wir die allgemeine Kettenregel und einen Satz über die Differentiation von Parameterintegralen:

1. **Kettenregel:** Ist $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist

$$\frac{\partial f \circ \mathbf{g}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

2. **Ableitung von Parameter-Integralen:** Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nach allen „Parametern“ x_1, \dots, x_n stetig partiell differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ stetig partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt.$$

Nach der Kettenregel ist nun

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}} (F_j(t\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(t\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial t x_k}{\partial x_i} = t \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x}),$$

und wegen der Integrabilitätsbedingung ist

$$\frac{d}{dt} (tF_j(t\mathbf{x})) = F_j(t\mathbf{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) x_i = F_j(t\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) x_i.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \delta_{ij} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x}) dt \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \int_0^1 F_j(t\mathbf{x}) dt \\
&= \int_0^1 \left(t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) x_i + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_j(t\mathbf{x})) dt \\
&= tF_j(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 = F_j(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Es sei an die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ im \mathbb{R}^3 erinnert:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Fassen wir die partielle Differentiation nach x_i als einen Operator D_i auf, so erhalten wir mit Hilfe des vektoriellen Operators $\nabla = (D_1, D_2, D_3)$ die Beziehung $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) := \nabla \times \mathbf{F}$. Im \mathbb{R}^3 bedeutet die obige Integrabilitätsbedingung gerade, dass $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist. Deshalb haben wir jetzt gezeigt:

1.4 Integrabilitätsbedingung für Gradientenfelder. *Sei \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Kugel um $\mathbf{0}$ im \mathbb{R}^3 . \mathbf{F} ist genau dann Gradient einer differenzierbaren Funktion, wenn $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ ist.*

Beispiele.

1. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, y, z)$ auf einer Kugelumgebung von $\mathbf{0}$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Also muss \mathbf{F} Gradient einer Funktion f sein. Wir berechnen f nach der obigen Formel:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= x \int_0^1 F_1(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 F_2(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 F_3(tx, ty, tz) dt \\
&= x \cdot \int_0^1 tx dt + y \cdot \int_0^1 ty dt + z \cdot \int_0^1 tz dt \\
&= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

Die Probe zeigt sofort, dass $\nabla f = \mathbf{F}$ ist, wie es ja auch sein muss.

2. Sei $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$. Dann gilt für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ auf U :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = 0, \\ \text{und } \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = 0.\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

Das zeigt, dass die Integrabilitätsbedingung notwendig, aber nicht hinreichend ist. Allerdings hatten wir gesehen, dass es Teilgebiete U^+ und U^- des Definitionsbereiches von \mathbf{F} gibt, wo tatsächlich ein Potential existiert. Die Konstruktion könnte im Sinne des obigen Beweises durchgeführt werden. Sehr viel einfacher geht es aber folgendermaßen:

Wir versuchen, eine Stammfunktion von F_2 bezüglich der Variablen y durch Integration zu finden. Sei y_0 beliebig gewählt und

$$\begin{aligned}g(x, y, z) &:= \int_{y_0}^y F_2(x, t, z) dt = \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} dt \quad (\text{mit } \varphi(t) = \frac{t}{x}) \\ &= \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} \frac{1}{1 + s^2} ds = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.}\end{aligned}$$

Die Konstante könnte noch von x und z abhängen, aber die Probe zeigt hier, dass wir sie nicht brauchen. Tatsächlich ist schon

$$g(x, y, z) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

eine Funktion mit $\nabla g = \mathbf{F}$. Leider ist g nicht auf ganz U definiert, wohl aber auf U^+ .

Ob ein Vektorfeld \mathbf{F} mit $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ global ein Gradientenfeld ist, hängt i.a. auch von der Geometrie des Definitionsbereiches ab. Auf Kugeln um den Nullpunkt (und verschiedenen anderen Gebieten) geht alles gut. Sobald das Gebiet aber Löcher besitzt, die sich nicht innerhalb des Gebietes umgehen lassen, ist Vorsicht geboten.

§ 2 Der Satz von Green

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Menge aller (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen auf M wird mit $\mathcal{C}^\infty(M)$ bezeichnet. Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, so nennt man die Menge

$$\text{Tr}(f) := \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

den *Träger* von f . Mit $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit kompaktem Träger.

Der Träger eines stetigen Vektorfeldes wird analog definiert.

2.1 Satz. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\{U_1, \dots, U_N\}$ eine offene Überdeckung von K und \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf der Vereinigung aller U_i . Dann gibt es stetige Vektorfelder \mathbf{F}_i auf dem \mathbb{R}^n , so dass gilt:

1. $0 \leq \|\mathbf{F}_i(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \dots, N$.

2. $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in K$.

3. Für jedes i ist der Träger von \mathbf{F}_i in U_i enthalten.

Bemerkung. Um diesen Satz zu beweisen, benötigt man eine sogenannte *Teilung der Eins* auf K zur Überdeckung $\{U_1, \dots, U_N\}$, also ein System von differenzierbaren Funktionen φ_i mit $\text{Tr}(\varphi_i) \subset U_i$, so dass $\sum \varphi_i = 1$ auf K ist. Auf die Details soll hier nicht näher eingegangen werden.

Es soll nun der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verallgemeinert werden, zunächst auf den Fall der Dimension 2. Dazu brauchen wir den Begriff des Gebietes mit stückweise glattem Rand. Das ist ein Gebiet, das beschränkt ist und dessen Rand bis auf endlich viele „Ecken“ glatt ist (also z.B. eine Kreisscheibe oder ein Polygonebiet).

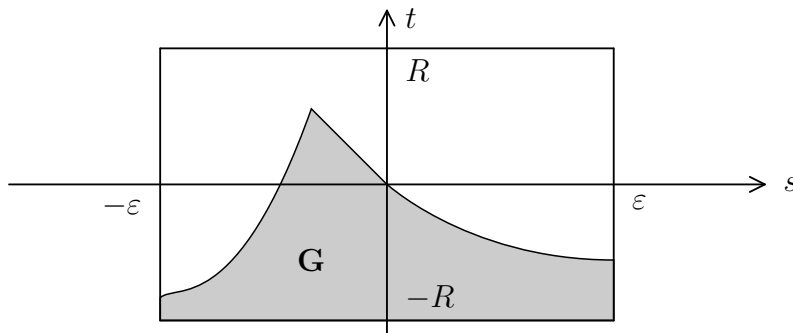
Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Gebiet mit stückweise glattem Rand*, falls gilt:

1. G ist beschränkt.
2. Der Rand ∂G besteht aus endlich vielen stückweise glatten einfach geschlossenen Kurven (die wir „Randkomponenten“ nennen).
3. Zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ gibt es eine ON-Basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ des \mathbb{R}^2 , ein $\varepsilon > 0$, ein $R > 0$ und eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $\psi : [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

- (a) $\psi(0) = 0$ und $|\psi(s)| \leq R$ für $|s| \leq \varepsilon$.

- (b) Ein Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ mit $|s| \leq \varepsilon$ und $|t| \leq R$ liegt genau dann in G , wenn $-R \leq t < \psi(s)$ ist.

Besteht der Rand von G nur aus einer einzigen einfach geschlossenen Kurve, so sprechen wir von einem *Jordangebiet*.



In den durch $\mathbf{x}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ gegebenen lokalen Koordinaten (s, t) haben die Punkte des Randes ∂G die Gestalt $(s, \psi(s))$. Da ψ stückweise stetig differenzierbar ist, besitzt der Graph von ψ an den Ecken zwei verschiedene Tangenten, die einen positiven Winkel einschließen (denn es gibt keine vertikalen Tangenten).

Durch $\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + (\varepsilon(1 - 2t))\mathbf{a}_1 + \psi(\varepsilon(1 - 2t))\mathbf{a}_2$ und $t \in [0, 1]$ wird eine lokale Parametrisierung des Randes gegeben, die die richtige Orientierung des Randes repräsentiert. Das Gebiet muss immer „links“ vom Rand liegen!

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial G$ heißt *regulär*, falls ∂G in der Nähe von \mathbf{x}_0 (bezüglich einer geeigneten ON-Basis) Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ist. Ist jeder Randpunkt regulär, so nennen wir G ein *Gebiet mit glattem Rand*.

2.2 Satz von Green. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, U eine offene Umgebung von \bar{G} und $\mathbf{F} = (f, g)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann ist

$$\int_G \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} (f dx + g dy),$$

wobei der Rand von G so orientiert werden muss, dass das Gebiet links vom Rand liegt.

Bemerkung. Wenn die Randkomponenten von G durch Wege α_j parametrisiert werden, so ist

$$\int_{\partial G} (f dx + g dy) := \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_j} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

BEWEIS: 1) Wir betrachten zuerst mal einen Spezialfall.

Sei $a < b, c < d$ und $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $c < \psi(x) < d$ für alle $x \in [a, b]$, sowie

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ und } c < y < \psi(x)\}.$$

Außerdem habe \mathbf{F} einen kompakten Träger, der ganz im Innern von $[a, b] \times [c, d]$ liegt.

Der Rand von G besteht aus 4 Kurven, von denen uns nur der durch ψ gegebene „Deckel“ interessiert (weil nur er den Träger von \mathbf{F} trifft), der wie folgt parametrisiert werden kann:

$$\alpha(t) := (t, \psi(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Allerdings muss der Weg in umgekehrter Richtung durchlaufen werden, weil ja G links vom Rand liegen soll.

Führen wir das Vektorfeld $\widehat{\mathbf{F}}(x, y, z) := (f(x, y), g(x, y), 0)$ auf dem \mathbb{R}^3 ein, so ist $\mathbf{rot} \widehat{\mathbf{F}}(x, y, z) = (0, 0, g_x(x, y) - f_y(x, y))$. Deshalb bezeichnen wir die Funktion $g_x - f_y$ mit $\mathbf{rot}_3 \mathbf{F}$ und unterscheiden zunächst zwei Fälle.

a) Ist $g = 0$, also $\mathbf{F} = (f, 0)$, so ist

$$\begin{aligned} \int_G \mathbf{rot}_3 \mathbf{F} \, dx \, dy &= - \int_G f_y(x, y) \, dx \, dy \\ &= - \int_a^b \left(\int_c^{\psi(x)} f_y(x, y) \, dy \right) dx \\ &= - \int_a^b [f(x, \psi(x)) - f(x, c)] dx = - \int_a^b f(x, \psi(x)) dx. \end{aligned}$$

Weiter ist $\alpha'(t) := (1, \psi'(t))$ und

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= - \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= - \int_a^b f(t, \psi(t)) dt. \end{aligned}$$

b) Ist $f = 0$, also $\mathbf{F} = (0, g)$, so führen wir die Situation auf den ersten Fall zurück. Dazu definieren wir die folgende Hilfsfunktion:

$$u(x, y) := \int_c^y g(x, s) ds \quad \text{für } (x, y) \in G.$$

Offensichtlich ist $u_y(x, y) = g(x, y)$ und daher $(u_x)_y = (u_y)_x = g_x$.

Weil ∂G ein geschlossener Weg ist, ist $\int_{\partial G} (u_x dx + u_y dy) = \int_{\partial G} (\nabla u) \cdot d\mathbf{x} = 0$, also

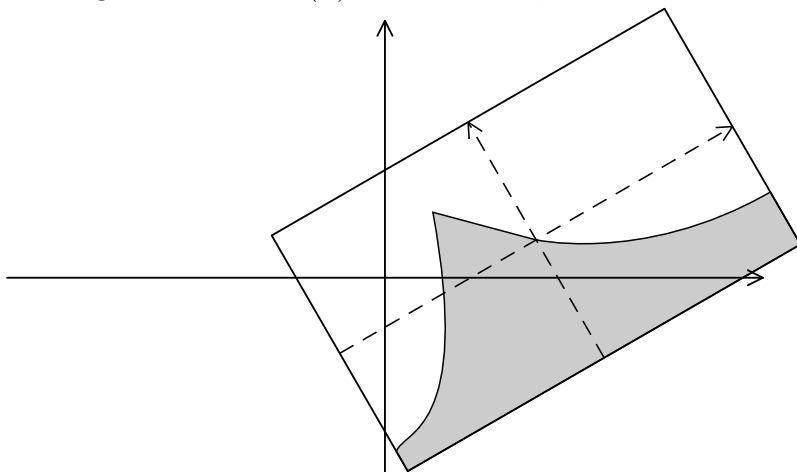
$$\int_{\partial G} u_x dx = - \int_{\partial G} u_y dy = - \int_{\partial G} g dy. \quad (*)$$

Wir wenden nun Fall (a) auf das Vektorfeld $(u_x, 0)$ an:

$$\begin{aligned}
\int_G \operatorname{rot}_3 \mathbf{F} \, dx \, dy &= \int_G g_x(x, y) \, dx \, dy \\
&= \int_G (u_x)_y \, dx \, dy \\
&= - \int_{\partial G} (u_x, 0) \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{nach (a)}) \\
&= - \int_{\partial G} u_x \, dx = \int_{\partial G} g \, dy \quad (\text{wegen (*)}) \\
&= \int_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Gilt der Satz von Green für zwei Vektorfelder \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 , so auch für $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Weil $(f, g) = (f, 0) + (0, g)$ ist, ist damit der Spezialfall bewiesen.

2) Jetzt lassen wir eine orientierungstreue euklidische Bewegung zu, also eine Abbildung der Gestalt $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \cdot A$, mit einer Drehmatrix A .



$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ bildet den \mathbb{R}^2 C^∞ -diffeomorph auf den \mathbb{R}^2 ab, und dabei das in (1) betrachtete spezielle Gebiet G auf ein verschobenes und gedrehtes Bildgebiet $H = \Phi(G)$. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung des Deckels von G , so ist $\Phi \circ \alpha$ eine Parametrisierung des Deckels von H .

Wir nehmen nun an, dass \mathbf{F} auf einer Umgebung V von \overline{H} definiert ist und mit Ausnahme des Deckels von H überall auf ∂H verschwindet. Wir benötigen die folgende **Hilfsbehauptung**:

$$((\operatorname{rot}_3 \mathbf{F}) \circ \Phi) \cdot \det J_\Phi = \operatorname{rot}_3((\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot J_\Phi).$$

Der BEWEIS ist technisch etwas aufwändig und wird deshalb in den Anhang verlagert. Außerdem müssen wir uns an eine Kettenregel erinnern: Ist α ein parametrisierter Weg im \mathbb{R}^2 und $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Abbildung, so ist

$$(\Phi \circ \alpha)'(t) = J_\Phi(\alpha(t)) \cdot (\alpha'(t))^t.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int_H \mathbf{rot}_3 \mathbf{F} \, du \, dv &= \int_G (\mathbf{rot}_3 \mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \det J_\Phi \, dx \, dy \\
&= \int_G \mathbf{rot}_3 ((\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot J_\Phi) \, dx \, dy \\
&= \int_{\partial G} ((\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot J_\Phi) \cdot d\mathbf{x} \\
&= \int_a^b (\mathbf{F} \circ \Phi \circ \alpha(t)) \cdot (J_\Phi \circ \alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F} \circ (\Phi \circ \alpha)(t) \cdot (\Phi \circ \alpha)'(t) \, dt \\
&= \int_{\Phi \circ \alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = \int_{\partial H} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist gerade die Transformationsformel, die zweite folgt aus der Hilfsbehauptung, die dritte aus Teil (a) des Beweises. Die nächste Gleichung beruht auf der Definition des Kurvenintegrals, die nächste ist eine einfache Umformung (mit der Kettenregel) und die beiden letzten Gleichungen benutzen noch einmal die Definition des Kurvenintegrals und die Tatsache, dass Φ den Rand von G auf den Rand von H abbildet, wobei jeweils nur der Deckel relevant ist.

3) Sei nun G beliebig. Da \overline{G} kompakt ist, gibt es endlich viele (eventuell gedrehte) offene Rechtecke R_1, \dots, R_N , die zusammen G überdecken, so dass für $i = 1, \dots, N$ gilt: Entweder ist $\overline{R_i} \subset G$, oder das Gebiet $G_i := R_i \cap G$ ist von der in (2) betrachteten speziellen Form. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_N$ in Vektorfelder \mathbf{F}_i , so dass der Träger von \mathbf{F}_i ganz im Innern von R_i liegt.

Liegt R_i im Innern von G , so verschwinden beide Seiten des Greenschen Satzes (angewandt auf \mathbf{F}_i), wie man leicht sieht, wenn man die schon vorgenommenen Berechnungen auf diesen Fall überträgt. Ist G_i von der speziellen Form, so haben wir für G_i und \mathbf{F}_i den Greenschen Satz schon bewiesen. Fasst man alles zusammen, so folgt der Satz auch für $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_N$. ■

Man kann den Satz von Green zur Berechnung von Flächeninhalten heranziehen.

2.3 Satz. *Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Jordan-Gebiet, so ist*

$$\text{vol}_2(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \, dy - y \, dx).$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \, dy - y \, dx) &= \frac{1}{2} \int_{\partial G} (-y, x) \cdot d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2} \int_G (x_x + y_y) \, dx \, dy \\
&= \int_G dx \, dy = \text{vol}_2(G).
\end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Ist $G = D_r(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$, so ist

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(G) &= \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \, dy - y \, dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_r(0)} (-y, x) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-r \sin t, r \cos t) \cdot (-r \sin t, r \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, dt = r^2 \pi. \end{aligned}$$

2. Sei G die Ellipse, deren Rand durch $\alpha(t) := (a \cos t, b \sin t)$ beschrieben wird. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(G) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = ab\pi. \end{aligned}$$

Anhang.

Behauptung: Sei $\mathbf{F} = (f, g)$ und $(u, v) = \Phi(x, y)$ eine euklidische Bewegung. Dann gilt:

$$((\mathbf{rot}_3 \mathbf{F}) \circ \Phi) \cdot \det J_\Phi = \mathbf{rot}_3((\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot J_\Phi).$$

BEWEIS:

1. Fall: $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}$, mit einem festen $\mathbf{p} = (p, q)$.

Dann ist $J_\Phi(\mathbf{x}) = E_2$ die Einheitsmatrix und $\det(J_\Phi(\mathbf{x})) = 1$. Also bleibt zu zeigen:

$$((\mathbf{rot}_3 \mathbf{F}) \circ \Phi) = \mathbf{rot}_3(\mathbf{F} \circ \Phi).$$

Das ist aber offensichtlich erfüllt, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} [g(x+p, y+q)] = g_u(x+p, y+q) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} [f(x+p, y+q)] = f_v(x+p, y+q).$$

2. Fall: $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A^t$, mit einer Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dann ist $\Phi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, also $J_\Phi(x, y) = A$ und $\det(J_\Phi(x, y)) = \det(A) = ad - bc$. Außerdem ist $J_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$ und

$$J_F - J_F^t = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } r := g_u - f_v = \mathbf{rot}_3(\mathbf{F}).$$

Also ist

$$(a, c) \cdot (J_F - J_F^t) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = (cr, -ar) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = -r \cdot \det(A),$$

und es bleibt zu zeigen:

$$\mathbf{rot}_3((\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot A) = -(a, c) \cdot (J_F \circ \Phi - J_F^t \circ \Phi) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Nach Definition der partiellen Ableitung und der Kettenregel ist

$$(\mathbf{F} \circ \Phi)_x = J_{\mathbf{F} \circ \Phi} \cdot \vec{e}_1 = (J_{\mathbf{F}} \circ \Phi) \cdot A \cdot \vec{e}_1 = (J_{\mathbf{F}} \circ \Phi) \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

und analog

$$(\mathbf{F} \circ \Phi)_y = J_{\mathbf{F} \circ \Phi} \cdot \vec{e}_2 = (J_{\mathbf{F}} \circ \Phi) \cdot A \cdot \vec{e}_2 = (J_{\mathbf{F}} \circ \Phi) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir $\mathbf{F} \circ \Phi = (\tilde{f}, \tilde{g})$, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}_3((\tilde{f}, \tilde{g}) \cdot A) &= (b\tilde{f} + d\tilde{g})_x - (a\tilde{f} + c\tilde{g})_y \\ &= b \cdot \tilde{f}_x + d \cdot \tilde{g}_x - a \cdot \tilde{f}_y - c \cdot \tilde{g}_y \\ &= (b, d) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{g}_x \end{pmatrix} - (a, c) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_y \\ \tilde{g}_y \end{pmatrix} \\ &= (b, d) \cdot (\mathbf{F} \circ \Phi)_x - (a, c) \cdot (\mathbf{F} \circ \Phi)_y \\ &= -(a, c) \cdot (J_{\mathbf{F}} \circ \Phi - J_{\mathbf{F}}^t \circ \Phi) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die Formel $\mathbf{a} \cdot B \cdot \vec{c} = \mathbf{c} \cdot B^t \cdot \vec{a}$ benutzt wurde. Damit ist alles gezeigt. ■

§ 3 Flächenintegrale

Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, $U = U(\overline{G}) \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung, so dass gilt:

1. $\varphi|_G$ ist injektiv.
2. $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in G$.

Dann heißt $S = \varphi(\overline{G}) \subset \mathbb{R}^3$ ein (*parametrisiertes*) \mathcal{C}^k -Flächenstück. Die Menge $\overset{\circ}{S} := \varphi(G)$ nennt man das *Innere* des Flächenstücks.

Bezeichnen wir die Parameter in G mit u und v , so erhalten wir die Funktionalmatrix

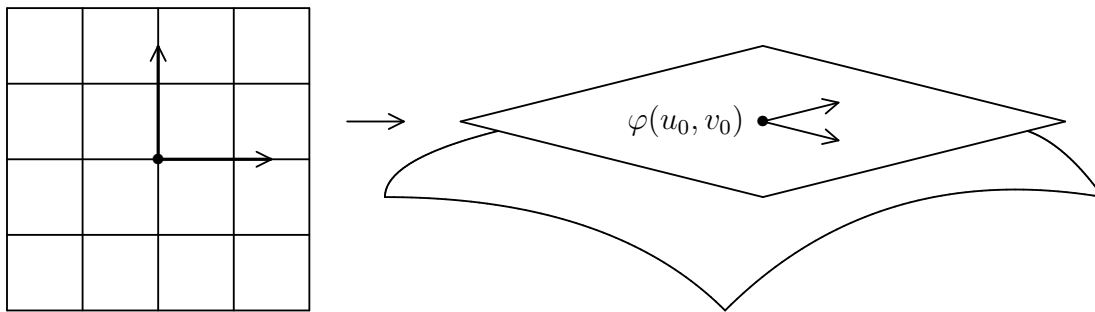
$$J_\varphi = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u & (\varphi_1)_v \\ (\varphi_2)_u & (\varphi_2)_v \\ (\varphi_3)_u & (\varphi_3)_v \end{pmatrix} = (\vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v).$$

Sei $\mathbf{u}_0 \in G$ und $\mathbf{p}_0 = \varphi(\mathbf{u}_0)$. Weil $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0) = 2$ ist, sind die beiden Spaltenvektoren $\vec{\varphi}_u(\mathbf{u}_0)$, $\vec{\varphi}_v(\mathbf{u}_0)$ linear unabhängig. Sie spannen einen 2-dimensionalen Unterraum $T_{\mathbf{p}_0}(S) \subset \mathbb{R}^3$ auf, den wir als die *Tangentialebene* von S im Punkt \mathbf{p}_0 bezeichnen. Motiviert wird diese Bezeichnung durch folgende Betrachtung:

Ist $\alpha(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_1)$ und $\beta(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_2)$, so verlaufen die Kurven α und β auf der Fläche, es ist $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbf{p}_0$ und

$$\alpha'(0) = \varphi_u(\mathbf{u}_0) \quad \text{und} \quad \beta'(0) = \varphi_v(\mathbf{u}_0).$$

Die Tangentialebene wird also von zwei Vektoren aufgespannt, die in \mathbf{p}_0 tatsächlich tangential zu S sind.



Beispiele.

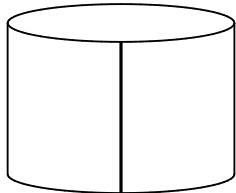
1. Sei $G := (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ und $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v).$$

Dann ist $S = \varphi(\overline{G}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } |z| \leq 1\}$ ein Zylindermantel der Höhe 2 mit Radius 1. Es ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind die Spalten immer linear unabhängig, und man kann sich leicht überlegen, dass φ auf G injektiv ist: Ist $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$, so ist zunächst schon mal $v_1 = v_2$. Außerdem ist $\cos(u_1) = \cos(u_2)$, also ist entweder $u_1 = u_2$ oder es gibt ein z mit $u_1 = \pi - z$ und $u_2 = \pi + z$ (oder umgekehrt). Im letzteren Falle wäre $\sin(u_1) = -\sin(-z) = \sin(z) = -\sin(u_2)$ und damit (weil ja auch $\sin(u_1) = \sin(u_2)$ ist) $u_1 = u_2 = \pi$.

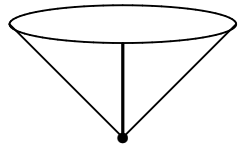


Man beachte, dass der Zylinder entlang der Linie $\{(1, 0, z) : |z| \leq 1\}$ zusammengeklebt wird. Auf \overline{G} ist φ nicht mehr injektiv.

2. Sei diesmal $G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ und $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

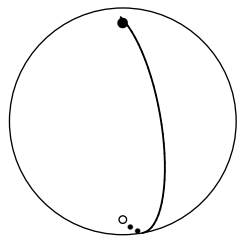
$$\varphi(u, v) := (v \cos(u), v \sin(u), v).$$

Für jeden Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 1$ ist die Verbindungsstrecke von $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ und $\mathbf{x} = (\cos(u), \sin(u), 1)$ ganz in S enthalten.



Daher ist S ein kreisförmiger Kegelmantel mit einer Spitze bei $(0, 0, 0)$. Die ganze Unterkante von G wird auf die Spitze abgebildet.

3. Sei $G := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ und $\varphi(u, v) := (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$. Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung der Oberfläche der Einheitskugel.



Die linke und die rechte Seite von G ergeben den Nordpol und den Südpol, die untere und die obere Seite von G werden zu einem Längenskreis zusammengeklebt.

4. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, U eine offene Umgebung von \overline{G} und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist

$$S := \{(x, y, z) \in \overline{G} \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

ein Flächenstück mit Parametrisierung $\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v))$. Solch ein Graph ist der Prototyp eines Flächenstücks.

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$N(h) := \{(x, y, z) \in U : h(x, y, z) = 0\}.$$

Ist $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in N(h)$, so kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden: Ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in N(h)$, so muss es zumindest eine partielle Ableitung von h geben, die in \mathbf{x}_0 nicht verschwindet. Ist etwa $h_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung V von $(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$, eine Umgebung W von z_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V \rightarrow W$, so dass $V \times W$ in U enthalten und

$$(V \times W) \cap N(h) = \{(x, y, z) \in V \times W : z = g(x, y)\}$$

ist.

6. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, $f(t) > 0$ auf $[a, b]$. Dann wird durch

$$\varphi(u, v) := (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

ein Flächenstück parametrisiert, die durch α bestimmte „Rotationsfläche“.

Wie kann man nun den Flächeninhalt eines Flächenstücks bestimmen? Wir versuchen es mit einer Approximation! Es sei ein Quader Q und eine Parametrisierung $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir zerlegen Q in viele kleine Teilquader. $(u_0, v_0) \in Q$ sei ein Gitterpunkt. Dann gibt es Zahlen ε und δ , so dass

$$\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0), \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_1 = (u_0 + \varepsilon, v_0), \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{e}_2 = (u_0, v_0 + \delta)$$

$$\text{und } \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_2 = (u_0 + \varepsilon, v_0 + \delta)$$

die Ecken eines Teilquaders sind. Die Bilder dieser vier Ecken auf der Fläche liegen leider nicht unbedingt in einer Ebene! Daher ist es nicht möglich, den Flächeninhalt auf diese Weise durch Vierecksflächen zu approximieren.

Wir können Genaueres über die Lage der Bilder der Ecken herausbekommen, wenn wir die Differenzierbarkeit von φ in (u_0, v_0) ausnutzen: Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte (vektorwertige) Funktion r , so dass für (u, v) nahe (u_0, v_0) gilt:

$$1. \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + L(u - u_0, v - v_0) + r(u - u_0, v - v_0).$$

$$2. \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

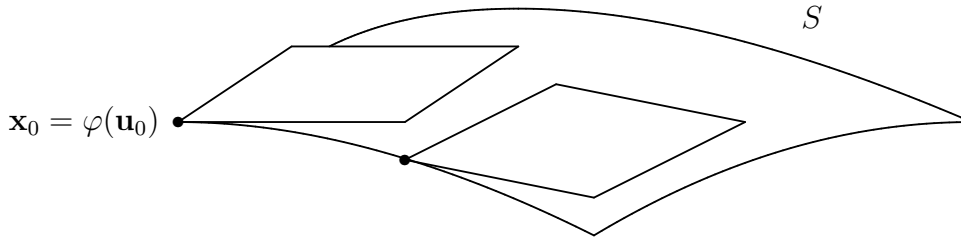
Dabei ist

$$L(h_1, h_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)h_2.$$

Näherungsweise ist also

$$\varphi(u_0 + s, v_0 + t) \approx \varphi(u_0, v_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)s + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)t.$$

Setzen wir $\mathbf{x}_0 := \varphi(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{a} := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathbf{u}_0)$ und $\mathbf{b} := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathbf{u}_0)$, so werden die Ecken des Teilquaders auf die Punkte \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}$ abgebildet, also auf die Ecken eines Parallelogramms. Wie gesagt, das gilt nur näherungsweise und nur für kleines ε und δ ! Das Parallelogramm approximiert das Bild des Teilquaders, normalerweise liegt aber nur eine seiner Ecken in der Fläche.



Die Fläche des Parallelogramms ist durch $\|\varepsilon \mathbf{a} \times \delta \mathbf{b}\| = \varepsilon \delta \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ gegeben. Bezeichnen wir die Teilquader von Q mit $Q_{ij} = [t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}] \times [t_j^{(2)}, t_{j+1}^{(2)}]$, setzen wir $t_{ij} := (t_i^{(1)}, t_j^{(2)})$ (= linke untere Ecke von Q_{ij}) und bezeichnen wir mit \mathcal{P} die Zerlegung von Q in die Q_{ij} , so approximieren wir den Flächeninhalt $A(S)$ durch die „Riemannsche Summe“ $\Sigma(\mathcal{P})$, mit

$$\Sigma(\mathcal{P}) := \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t_{ij}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t_{ij}) \right\| \cdot (t_{i+1}^{(1)} - t_i^{(1)})(t_{j+1}^{(2)} - t_j^{(2)}).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen konvergieren die „Riemannschen Summen“ gegen einen Wert, der mit dem erwarteten Flächeninhalt übereinstimmt. Wir prüfen das hier nicht nach, sondern benutzen das Ergebnis nur als Motivation für die nächste Definition.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und $\varphi : \overline{G} \rightarrow S$ ein (parametrisiertes) \mathcal{C}^1 -Flächenstück. Dann heißt

$$A(S) := \int_G \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

der *Flächeninhalt* von S .

Wir wollen zeigen, dass der Flächeninhalt nicht von der Parametrisierung abhängt. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Definition. Ist $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, so heißt $G_A := \det(A^t \cdot A)$ die *Gramsche Determinante* von A .

Man beachte, dass $A^t \cdot A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix ist.

3.1 Satz.

1. Sei $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{k,k}$. Dann ist $G_{A \cdot B} = \det(B)^2 \cdot G_A$.
2. Ist $A = (\mathbf{a}_1^t, \mathbf{a}_2^t) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, so ist

$$G_A = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2.$$

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} G_{A \cdot B} &= \det((AB)^t \cdot (AB)) = \det(B^t \cdot (A^t \cdot A) \cdot B) \\ &= \det(B) \cdot \det(A^t \cdot A) \cdot \det(B) = \det(B)^2 \cdot G_A. \end{aligned}$$

2) Dieser Teil folgt aus den Definitionen und der Tatsache, dass

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \sin(\alpha)$$

ist, falls α der Winkel zwischen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 ist. ■

Wir kehren zurück zu dem parametrisierten Flächenstück $\varphi : G \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein weiteres Gebiet mit stückweise glattem Rand und $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : B \rightarrow G$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus (d.h. eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung wieder stetig differenzierbar ist), so kann man Φ auch eine Parametertransformation nennen. Wir setzen voraus, dass durch $(u, v) = \overline{\Phi}(s, t)$ sogar eine offene Umgebung von \overline{B} auf eine offene Umgebung von \overline{G} differenzierbar abgebildet wird. Mit φ ist dann auch $\psi = \varphi \circ \Phi$ eine Parametrisierung von S , und die Kettenregel ergibt:

$$J_\psi(s, t) = (J_\varphi(\Phi(s, t))) \cdot J_\Phi(s, t).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|\psi_s \times \psi_t\| &= \sqrt{G_{J_\psi}} = |\det(J_\Phi)| \cdot \sqrt{G_{J_\varphi \circ \Phi}} \\ &= |\det(J_\Phi)| \cdot \|(\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)\|. \end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel folgt:

$$\begin{aligned} \int_B \|\psi_s \times \psi_t\| \, dsdt &= \int_B |\det(J_\Phi)| \cdot \|(\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)\| \, dsdt \\ &= \int_G \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, dudv. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt hängt also nicht von der Parametrisierung ab.

Wir wollen nun Flächeninhalte berechnen.

Beispiele.

1. Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Gehen wir von der Parametrisierung $\varphi : Q = [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (r \cos(u), r \sin(u), v)$$

aus, so entsteht der Zylinder, indem wir ein Rechteck zusammenrollen und entlang einer Seite verkleben. Daher erwarten wir, dass der Flächeninhalt $A(S) = 2r\pi \cdot (b - a)$ beträgt. Nun ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin(u) & 0 \\ r \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also } (J_\varphi(u, v))^t \cdot (J_\varphi(u, v)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante

$$G_\varphi := \det(J_\varphi^t \cdot J_\varphi) = r^2,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_Q \sqrt{G(u, v)} \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_a^b r \, dv \, du \\ &= r(b - a) \cdot \int_0^{2\pi} du = 2r\pi(b - a), \end{aligned}$$

ganz so, wie wir es erwartet haben.

2. Als nächstes wollen wir den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \sin(u) \cos(v), r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Dann ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ r \cos u \sin v & r \sin u \cos v \\ -r \sin u & 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$G_\varphi(u, v) = \det(J_\varphi^t(u, v) \cdot J_\varphi(u, v)) = \det \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 u \end{pmatrix} = r^4 \sin^2 u.$$

Also ist

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 |\sin(v)| \, du \, dv \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(-\cos(u) \Big|_{u=0}^\pi \right) \, dv \\ &= 2r^2 \int_0^{2\pi} dv = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

Definition. Sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines Flächenstücks S und \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Umgebung U von S im \mathbb{R}^3 . Dann bezeichnet man das Integral

$$\int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} := \int_G \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)) \, du \, dv$$

als den *Fluss* des Vektorfeldes \mathbf{F} durch die Fläche S .

Wir untersuchen zunächst die Abhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung.

Zur Erinnerung: Ist $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\mathbf{z} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, und das Vektorprodukt wird durch diese Eigenschaft charakterisiert.

3.2 Lemma. Ist eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben, so gilt für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{v}^t, \mathbf{w}^t) \cdot A = (a\mathbf{v}^t + c\mathbf{w}^t, b\mathbf{v}^t + d\mathbf{w}^t)$$

und

$$(a\mathbf{v} + c\mathbf{w}) \times (b\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \det(A) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

BEWEIS: Die erste Aussage ist trivial. Für die zweite Aussage halten wir einen beliebigen Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ fest. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{z}, a\mathbf{v} + c\mathbf{w}, b\mathbf{v} + d\mathbf{w}) &= ab \cdot \det(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + ad \cdot \det(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &\quad + cb \cdot \det(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + cd \cdot \det(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= (ad - bc) \cdot \det(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbf{z} \cdot ((a\mathbf{v} + c\mathbf{w}) \times (b\mathbf{v} + d\mathbf{w})) = \det(A) \cdot \mathbf{z} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Da \mathbf{z} beliebig war, folgt daraus die Behauptung. \blacksquare

Wenden wir das auf eine Parametertransformation $\Phi : B \rightarrow G$, die Parametrisierung $\psi = \varphi \circ \Phi$, die Vektoren $\mathbf{v} = \varphi_u \circ \Phi$, $\mathbf{w} = \varphi_v \circ \Phi$ und die Matrix $A = J_{\Phi}$ an, so folgt aus der Gleichung $J_{\psi} = (J_{\varphi} \circ \Phi) \cdot J_{\Phi}$ die Beziehung

$$\psi_s \times \psi_t = \det(J_{\Phi}) \cdot ((\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\psi} F \cdot d\mathbf{O} &= \int_B F(\psi(s, t)) \cdot (\psi_s(s, t) \times \psi_t(s, t)) \, ds \, dt \\ &= \int_B F \circ \varphi(\Phi(s, t)) \cdot ((\varphi_u \circ \Phi) \times (\varphi_v \circ \Phi)) \cdot \det(J_{\Phi}) \, ds \, dt \\ &= \text{sign}(\det J_{\Phi}) \cdot \int_G F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, du \, dv. \end{aligned}$$

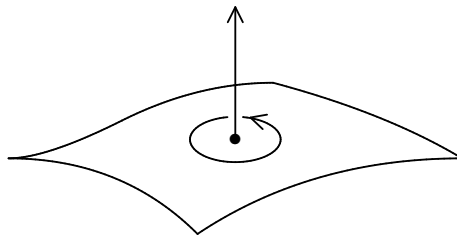
Da Φ ein Diffeomorphismus ist, muss $\det(J_\Phi(s, t)) \neq 0$ für alle $(s, t) \in B$ sein. Da B zusammenhängend ist, hat die Funktionaldeterminante konstantes Vorzeichen. Wir nennen Φ *orientierungstreu*, falls $\det(J_\Phi) > 0$ ist, und *orientierungsumkehrend*, falls $\det(J_\Phi) < 0$ ist.

Was versteht man nun unter der Orientierung eines Flächenstücks? Der Vektor $\varphi_u \times \varphi_v$ steht auf der Tangentialebene senkrecht. Daher heißt

$$\mathbf{n}_S := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

die *Flächennormale* von S . Es ist anschaulich klar, dass es in jedem Punkt der Fläche S genau 2 Vektoren der Länge 1 gibt, die in diesem Punkt auf S senkrecht stehen. Ändert man die Parametrisierung mittels einer Parametertransformation Φ , so multipliziert sich die Flächennormale mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(J_\Phi)$.

Die Richtung der Flächennormale legt die sogenannte „transversale Orientierung“ von S fest. Sie bestimmt, wo „oben“ und „unten“ ist. Die transversale Orientierung bestimmt auf eindeutige Weise eine „innere Orientierung“ von S , nämlich einen Umlaufsinn um die Normale. Dieser Umlaufsinn wird durch die Anordnung der Basis des Tangentialraumes festgelegt. Die Vektoren φ_u , φ_v und $\varphi_u \times \varphi_v$ bilden – in dieser Reihenfolge – ein Rechts-System (d.h. eine Basis des \mathbb{R}^3 mit positiver Determinante). Der Umlaufsinn wird so festgelegt, dass man – ausgehend von der durch φ_u festgelegten Richtung – nach einer positiven Drehung die durch φ_v festgelegte Richtung erreicht.



Halten wir eine (transversale oder innere) Orientierung von S fest, so sprechen wir von einem orientierten Flächenstück. Wir definieren den Fluss eines Vektorfeldes F durch ein orientiertes Flächenstück S durch

$$\int_S F \cdot d\mathbf{O} = \int_\varphi F \cdot d\mathbf{O},$$

wobei für φ nur positiv orientierte Parametrisierungen von S zugelassen sind. Geht man mittels einer orientierungstreuen Parametertransformation zu einer anderen Parametrisierung über, so ändert sich der Fluss nicht. Eine Umkehrung der Orientierung führt jedoch zu einem Vorzeichenwechsel.

Beispiel.

$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = q \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ ist das elektrische Feld einer Punktladung q im Nullpunkt.

Nun sei $S := \partial B_r(\mathbf{0})$. Verwenden wir die übliche Parametrisierung

$$\varphi(u, v) = (r \sin(u) \cos(v), r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

für S , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \varphi_v &= (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u) \times (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0) \\ &= r^2(\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \cos u \sin u) \\ &= r \sin u \cdot \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Weil $\|\varphi(u, v)\| = r$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{O} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} q \cdot \frac{\varphi(u, v)}{\|\varphi(u, v)\|^3} \cdot (r \sin u \cdot \varphi(u, v)) \, du \, dv \\ &= q \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin u \, du \, dv \\ &= q \cdot \int_0^{2\pi} 2 \, dv \\ &= q \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi q. \end{aligned}$$

Wegen der Ladung im Nullpunkt ist die Gesamtbilanz des Flusses durch die Kugeloberfläche (von innen nach außen) positiv. Das Ergebnis ist unabhängig vom Radius r .

§ 4 Satz von Stokes

Wir wollen jetzt eine spezielle Klasse von Flächenstücken betrachten.

Beispiel.

Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand und eine offene Umgebung $U = U(\overline{G})$. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar, so wird der Graph

$$S = \{(x, y, z) \in \overline{G} \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

durch $\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v))$ parametrisiert. Offensichtlich ist S ein \mathcal{C}^k -Flächenstück. Aber φ ist sogar auf \overline{G} injektiv und $\text{rg } J_\varphi(u, v) = 2$ gilt auf ganz U . Das hat geometrische Konsequenzen.

Es sei $\partial G = C_1 \cup \dots \cup C_N$, wobei die C_ν glatte Kurven mit Parametrisierungen $\alpha_\nu : I_\nu \rightarrow C_\nu$ sind. Die Menge $bS := \varphi(\partial G)$ ist Vereinigung der glatten Kurven $K_\nu := \varphi(C_\nu)$, die durch $\varphi \circ \alpha_\nu : I_\nu \rightarrow K_\nu \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert werden. Wir bezeichnen bS als „Rand“ von S . Anschaulich ist das klar, aber man darf bS nicht mit dem topologischen Rand ∂S verwechseln. Da S abgeschlossen ist, aber im \mathbb{R}^3 keine inneren Punkte besitzt, ist $\partial S = S$.

Dieses Beispiel soll das Muster für die folgende Definition liefern.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, $U = U(\overline{G})$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung, sowie $S := \varphi(\overline{G})$.

Ist φ auf \overline{G} injektiv und außerdem $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in \overline{G}$, so nennen wir S ein (*glattes*) \mathcal{C}^k -Flächenstück mit (*stückweise glattem*) Rand.

Die Menge $bS := \varphi(\partial G)$ bezeichnen wir als den *Rand* von S .

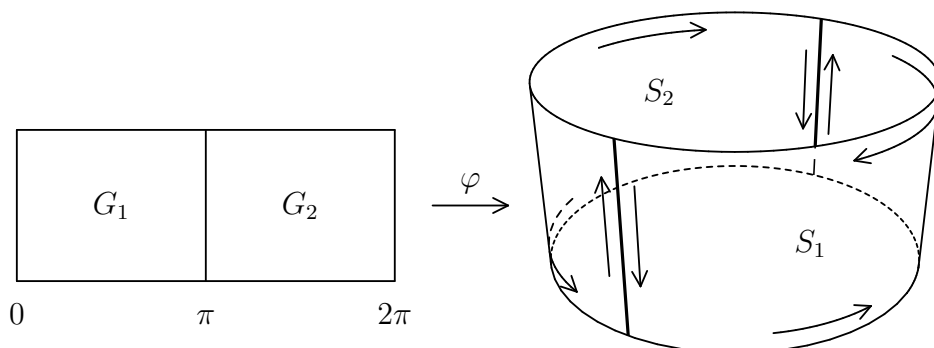
Leider passt diese Definition zu vielen unserer Beispiele nicht, weil dort φ auf \overline{G} nicht mehr injektiv ist.

Beispiele.

1. Beginnen wir mit dem Zylindermantel S (parametrisiert durch $\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v)$), bei dem durch das „Zusammenkleben“ die Injektivität verletzt wird. Hier bietet sich eine einfache Lösung an. Sei $G_1 := (0, \pi) \times (-1, 1)$ und $G_2 := (\pi, 2\pi) \times (-1, 1)$. Dann liefern die Abbildungen $\varphi_1 : \overline{G}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\varphi_2 : \overline{G}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) := (\cos(u), \sin(u), v)$ Parametrisierungen der beiden Mantelhälften

$$S_1 = \{(x, y, z) \in S : y \geq 0\} \text{ und } S_2 = \{(x, y, z) \in S : y \leq 0\}.$$

Dadurch werden S_1 und S_2 zu Flächenstücken mit Rand, und es ist $S = S_1 \cup S_2$.



Ist \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung von S , so ist

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}.$$

Das Zusammenkleben aus zwei Stücken spielt gar keine Rolle.

Beim Rand von S müssen wir etwas überlegen. Die Anschauung sagt uns, dass wir unter dem Rand bS nur die Vereinigung der beiden Kreise $K_- := \{(x, y, z) \in S : z = -1\}$ und $K_+ := \{(x, y, z) \in S : z = +1\}$ verstehen sollten. Tatsächlich ist dann auch

$$\int_{bS_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \int_{bS_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

denn die doppelt auftretenden Kurvenintegrale über die beiden Kleberänder heben sich weg, weil diese Ränder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. Man beachte dabei, dass die Ränder von G_1 und G_2 (und damit auch die Ränder von S_1 und S_2) so orientiert werden müssen, dass die Gebiete jeweils „links“ vom Rand liegen.

Unser Ziel wird es also sein, kompliziertere Flächen aus einfachen Flächenstücken mit Rand zusammenzusetzen.

Eine (*stückweise glatte*) Fläche mit Rand ist eine Vereinigung von endlich vielen Flächenstücken mit stückweise glattem Rand, wobei folgende Regel eingehalten werden muss: Die Vereinigung zweier Flächen S_1, S_2 mit Rand zu einer neuen Fläche S mit Rand ist genau dann erlaubt und möglich, wenn sich S_1 und S_2 nur entlang gewisser gemeinsamer Randkomponenten treffen und die Orientierung dieser Randkomponenten dabei jeweils entgegengesetzt ist. Solche Randkomponenten bezeichnen wir als „Klebekanten“. Der Rand bS besteht dann aus allen Randkomponenten von S_1 und S_2 , die keine Klebekanten sind.

2. Bei der Sphäre $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ geht es nicht so einfach. Die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

bildet alle Punkte $(0, v)$ auf den „Nordpol“ $\mathbf{n} := (0, 0, 1)$ ab. Das können wir auch nicht wie oben durch eine Unterteilung des Definitionsbereiches verhindern. Also müssen wir zu einer anderen Parametrisierung übergehen.

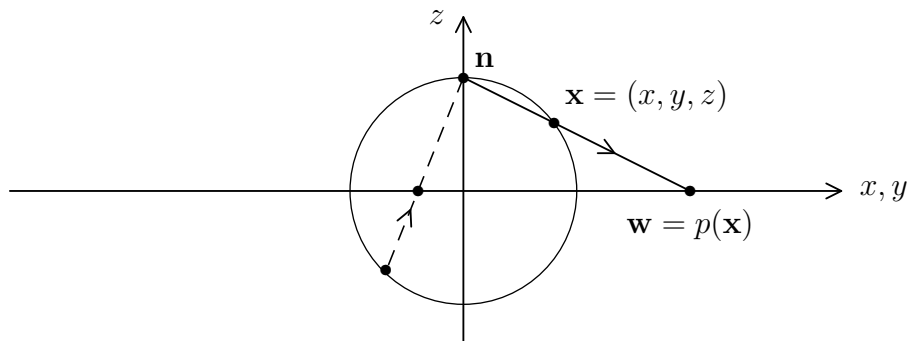
Ist $G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, so wird durch

$$\varphi_{\pm}(u, v) := (u, v, \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

die obere bzw. untere Hälfte der Sphäre parametrisiert. Leider sind diese Abbildungen auf ∂G nicht differenzierbar, wir müssen also nach einer besseren Parametrisierung suchen. Die „stereographische Projektion“ bietet sich an.

Die *stereographische Projektion* $p : S \setminus \{\mathbf{n}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird folgendermaßen definiert:

Ist $\mathbf{x} = (x, y, z) \in S \setminus \{\mathbf{n}\}$, so trifft der Strahl, der von \mathbf{n} ausgeht und bei \mathbf{x} die Sphäre durchstößt, in einem Punkt $(p(\mathbf{x}), 0)$ die x - y -Ebene:



Bei dieser Prozedur wird die obere Halbsphäre stark verzerrt, aber die untere Hälfte recht originalgetreu abgebildet. Ist $(u, v) = \mathbf{w} = p(\mathbf{x})$, so liegt $(\mathbf{w}, 0)$ auf der Geraden durch \mathbf{n} und \mathbf{x} . Es gibt also ein $t \in \mathbb{R}$, so dass $(\mathbf{w}, 0) = \mathbf{n} + t(\mathbf{x} - \mathbf{n})$ ist, d.h. $(u, v, 0) = (tx, ty, 1 + t(z - 1))$. Daraus folgt:

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right).$$

Weil auf der unteren Hälfte $z \leq 0$ ist, ist p dort wohldefiniert und auf einer offenen Umgebung (beliebig oft) differenzierbar.

Um die untere Hälfte der Sphäre zu parametrisieren, brauchen wir die Umkehrung von p . Ist $(u, v) = p(x, y, z)$, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \quad \text{und} \quad 1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1},$$

also

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \quad \text{und} \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Die durch

$$\varphi(u, v) := \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

gegebene Parametrisierung der unteren Hälfte von S mit

$$G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

als Definitionsbereich ist auch noch auf ∂G differenzierbar (und stimmt dort sogar mit der Identität überein).

Um die obere Hälfte zu parametrisieren, können wir die stereographische Projektion vom Südpol aus verwenden:

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

Allerdings liefert das die falsche Orientierung der Klebekanten. Um das zu korrigieren, wenden wir vorher in der u - v -Ebene eine Spiegelung an der u -Achse an. Das ergibt die Abbildung

$$\psi(u, v) := \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

Die Abbildungen φ und ψ parametrisieren die untere und die obere Halbsphäre so, dass der Äquator in verschiedener Richtung durchlaufen wird. Jetzt darf man verkleben und erhält die komplette Sphäre S als Fläche mit Rand, deren Rand ∂S aber leer ist (denn die Klebekanten muss man ja weglassen).

Durch „richtiges“ Verkleben von Flächenstücken entstehen sogenannte *orientierbare Flächen*. Das nicht orientierbare *Möbiusband* entsteht, wenn man ein Rechteck falsch verklebt, so dass die Klebekanten im gleichen Sinn durchlaufen werden.

3. Beim Kegel haben wir Pech. Weil die Spitze des Kegels eine „Singularität“ darstellt, können wir keine Parametrisierung finden, die bis zum Rand differenzierbar ist. Man kann sich das folgendermaßen erklären: Der Kegelmantel

ist eine sogenannte „abwickelbare“ Fläche, er kann ohne Veränderung der metrischen Verhältnisse auf einen Kreissektor in der Ebene abgebildet werden. Der umgekehrte Vorgang kann sehr konkret durchgeführt werden, indem man den Kreissektor aus Papier ausschneidet und dann zu einem Kegelmantel zusammenrollt. Je näher man dabei der Spitze kommt, desto stärker wird die Krümmung. Könnte man die Parametrisierung auf den Rand fortsetzen, so würde man an der Spitze eine unendlich große Krümmung erhalten. Weil die Krümmung differenzierbar von der Parametrisierung abhängt (was wir hier ohne Beweis akzeptieren müssen), ist das nicht möglich.

Wir müssen solche Flächen wie den Kegelmantel bei unseren Untersuchungen ausklammern. Notfalls kann man aber den Kegel durch Kegelstümpfe approximieren.

Die Suche nach einer passenden Zerlegung einer Fläche mit Rand in Flächenstücke mit stückweise glattem Rand kann sich als sehr mühsam erweisen. In der Praxis müssen wir diese Zerlegung aber gar nicht durchführen, wie der folgende Satz zeigt:

4.1 Satz. *Sei S eine Fläche mit Rand. Außerdem seien zwei Parametrisierungen $\varphi : G \rightarrow S$ und $\psi : H \rightarrow S$ gegeben. Wenn $\varphi(G)$ und $\psi(H)$ den Rand ∂S nicht treffen und $W := \varphi(G) \cap \psi(H)$ ist, so sind die Mengen $\psi^{-1}(W)$ und $\varphi^{-1}(W)$ jeweils im \mathbb{R}^2 offen, und es gibt einen Diffeomorphismus $\Phi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$ mit $\varphi \circ \Phi = \psi$.*

Auf den BEWEIS müssen wir hier verzichten. Der Nutzeffekt des Satzes soll am Beispiel der Sphäre erläutert werden. Nehmen wir aus der oberen Halbsphäre den Nordpol, den Äquator und einen Meridian heraus, so bleibt eine Teilmenge U übrig, die wir wahlweise mit der stereographischen Projektion oder mit Kugelkoordinaten parametrisieren können. Da sich die eine Parametrisierung aus der anderen über einen differenzierbaren Parameterwechsel ergibt und Flächenintegrale unabhängig von der Parametrisierung definiert sind, können wir bei der Berechnung von Flächenintegralen mit der Parametrisierung arbeiten, die dem Problem am besten angepasst ist. Im Falle der Sphäre werden das meistens die Kugelkoordinaten sein. Zum Beweis des folgenden Satzes benötigen wir dagegen eine saubere Zerlegung in Flächenstücke mit stückweise glattem Rand.

4.2 Satz von Stokes. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche mit Rand und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von S . Dann gilt:*

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

BEWEIS: Wie oben beschrieben wurde, können wir uns auf den Fall eines Flächenstücks mit stückweise glattem Rand beschränken.

Sei $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung von S , $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂G und $\beta := \varphi \circ \alpha$ die entsprechende Parametrisierung von bS .

Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \alpha'(t) \cdot J_\varphi(\alpha(t))^t = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha(t)) \\ \varphi_v(\alpha(t)) \end{pmatrix} \\ &= \alpha'_1(t) \cdot \varphi_u(\alpha(t)) + \alpha'_2(t) \cdot \varphi_v(\alpha(t)),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t)) \cdot (\alpha'_1(t) \cdot \varphi_u(\alpha(t)) + \alpha'_2(t) \cdot \varphi_v(\alpha(t))) dt \\ &= \int_{\partial G} (X du + Y dv),\end{aligned}$$

mit den durch

$$\begin{aligned}X(u, v) &= (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \cdot \varphi_u(u, v) \\ \text{und } Y(u, v) &= (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v)\end{aligned}$$

definierten Funktionen $X, Y : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$.

Jetzt kommt der entscheidende Schritt des Beweises: Nach dem Satz von Green ist

$$\int_{\partial G} (X du + Y dv) = \int_G (Y_u(u, v) - X_v(u, v)) du dv.$$

Nach der Produktregel ist außerdem

$$\begin{aligned}Y_u - X_v &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v + (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi_{uv} - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u + (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi_{uv} \\ &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u,\end{aligned}$$

also

$$\int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_G ((\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u) du dv.$$

Um zu zeigen, dass dieses Integral mit dem Flächenintegral $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$ übereinstimmt, brauchen wir die Formel

$$(\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u = \det((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v),$$

die im Anhang dieses Paragraphen bewiesen wird.

Mit der Beziehung

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_G ((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) du dv \\ &= \int_G \det((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v) du dv.\end{aligned}$$

sind wir fertig. ■

Wir wollen den Stokesschen Satz benutzen, um die Rotation eines Vektorfeldes zu interpretieren.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U , $\mathbf{x}_0 \in U$ und \mathbf{n} ein beliebiger Einheitsvektor. Außerdem sei $\varepsilon > 0$. Mit S_ε sei die Kreisscheibe mit Radius ε um \mathbf{x}_0 bezeichnet, die in \mathbf{x}_0 auf \mathbf{n} senkrecht steht.

Wir können die Fläche S_ε wie folgt parametrisieren: Ist $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ein ON-System, so dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{n}$ ist, so setzen wir

$$\varphi(u, v) := \mathbf{x}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \text{ für } (u, v) \in D_\varepsilon(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2.$$

Es ist $\varphi_u = \mathbf{a}$ und $\varphi_v = \mathbf{b}$, also $\varphi_u \times \varphi_v = \mathbf{n}$. Die Kreisscheibe ist also so orientiert, dass die zugehörige transversale Orientierung durch \mathbf{n} gegeben ist. Offensichtlich handelt es sich um ein Flächenstück mit glattem Rand. Durch

$$\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + (\varepsilon \cos t)\mathbf{a} + (\varepsilon \sin t)\mathbf{b}$$

wird eine Parametrisierung $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow bS_\varepsilon$ gegeben, durch die der Rand bS_ε richtig orientiert wird. Das Integral

$$Z(\mathbf{F}, bS_\varepsilon) := \int_{bS_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

heißt die *Zirkulation* von \mathbf{F} auf bS_ε , und die Zahl

$$w_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\varepsilon)} \int_{bS_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Z(\mathbf{F}, bS_\varepsilon)}{A(S_\varepsilon)}$$

nennen wir die *Wirbeldichte* von \mathbf{F} in \mathbf{x}_0 bezüglich \mathbf{n} .

4.3 Zusammenhang zwischen Rotation und Wirbeldichte. *Es ist*

$$w_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}.$$

BEWEIS: Nach Stokes ist

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{F}, bS_\varepsilon) &= \int_{bS_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S_\varepsilon} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} \\ &= \int_{D_\varepsilon(\mathbf{0})} \mathbf{rot} \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot \mathbf{n} \, du \, dv \\ &= (\mathbf{rot} \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{q}_\varepsilon)) \cdot \mathbf{n}) \cdot \text{vol}_2(D_\varepsilon(\mathbf{0})), \end{aligned}$$

wobei \mathbf{q}_ε ein Punkt aus $D_\varepsilon(\mathbf{0})$ ist (Mittelwertsatz der Integralrechnung!).

Andererseits ist $A(S_\varepsilon) = \int_G \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv = \int_{D_\varepsilon(\mathbf{0})} du \, dv = \text{vol}_2(D_\varepsilon(\mathbf{0}))$, also

$$Z(\mathbf{F}, bS_\varepsilon)/A(S_\varepsilon) = (\mathbf{rot} \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{q}_\varepsilon)) \cdot \mathbf{n}).$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert das gewünschte Resultat. ■

Die Wirbeldichte misst die infinitesimale Zirkulation des Vektorfeldes \mathbf{F} um die Achse \mathbf{n} . Dies entspricht dem Anteil von $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ in Richtung des Vektors \mathbf{n} .

4.4 Satz (Integration über geschlossene Flächen). Sei S eine glatte kompakte Fläche und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann ist $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = 0$.

BEWEIS: Sei $S_0 \subset S$ ein kleines Flächenstück mit glattem Rand C . Dann ist

$$\int_{S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

Der Rest $S \setminus S_0$ ist ebenfalls eine Fläche mit Rand C . Dann ist

$$\int_{S \setminus S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

weil der Rand eines Flächenstücks immer so orientiert werden muss, dass die Fläche „links“ vom Rand liegt. Nun folgt:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} + \int_{S \setminus S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

■

Zum Schluss ein Rechenbeispiel:

Beispiel.

Schneidet man im \mathbb{R}^3 den durch $x^2 + y^2 = 1$ gegebenen Zylinder mit der durch $z = y$ gegebenen Ebene, so erhält man eine elliptische Fläche S , parametrisiert durch $\varphi(u, v) = (u, v, v)$, für $(u, v) \in D_1(\mathbf{0})$. Dann ist

$$\varphi_u \times \varphi_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1) =: \mathbf{n}.$$

Will man $\int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, x + y, x + y + z)$

berechnen, so kann man stattdessen $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$ berechnen.

Nun ist $\mathbf{rot} \mathbf{F} = (1, -1, 1)$, also

$$\begin{aligned}
\int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} \\
&= \int_{D_1(\mathbf{0})} (1, -1, 1) \cdot (0, -1, 1) \, du \, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (r^2) \Big|_{r=0}^1 \, d\varphi = 2\pi.
\end{aligned}$$

Man könnte das Integral natürlich auch direkt berechnen. Dazu muss man eine Parametrisierung des Randes finden, z.B. $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow bS$ mit $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, \sin t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (\cos t, \cos t + \sin t, \cos t + 2 \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin t \cos t + \cos^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t] \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} [\sin(2t) + 1 + \cos(2t)] \, dt \\
&= \left(t + \frac{1}{2}(\sin(2t) - \cos(2t)) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Der zweite Weg ist etwas umständlicher.

Anhang.

4.5 Lemma. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist

$$\mathbf{b} \cdot (J_{\mathbf{F}} - J_{\mathbf{F}}^t) \cdot \mathbf{a}^t = \det(\mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

für alle Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

BEWEIS: Es genügt, für \mathbf{a} und \mathbf{b} Einheitsvektoren einzusetzen. Ist $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, so ist

$$\mathbf{e}_j \cdot (J_{\mathbf{F}} - J_{\mathbf{F}}^t) \cdot \mathbf{e}_i^t = (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j}, \quad \text{für } i < j,$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \sum_{k=1}^3 (\mathbf{rot} \mathbf{F})_k \cdot \det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\
&= (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j}.
\end{aligned}$$

Ist nämlich $\{k, i, j\} \neq \{1, 2, 3\}$, so ist $\det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$. Ist $\{k, i, j\} = \{1, 2, 3\}$ und (k, i, j) eine zyklische Vertauschung von $(1, 2, 3)$, so ist $\det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 1$ und $(\mathbf{rot} \mathbf{F})_k = (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j}$. Ist (k, i, j) keine zyklische Vertauschung von $(1, 2, 3)$, so ändert sich bei beiden Termen das Vorzeichen. ■

4.6 Satz. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Abbildung, $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit $\varphi(G) \subset U$ und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann gilt:

$$(\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u = \det((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v).$$

BEWEIS: Nach der Kettenregel ist

$$(\mathbf{F} \circ \varphi)_u = \mathbf{e}_1 \cdot J_{\mathbf{F} \circ \varphi}^t = \mathbf{e}_1 \cdot J_\varphi^t \cdot (J_{\mathbf{F}} \circ \varphi)^t = \varphi_u \cdot (J_{\mathbf{F}} \circ \varphi)^t$$

und analog

$$(\mathbf{F} \circ \varphi)_v = \varphi_v \cdot (J_{\mathbf{F}} \circ \varphi)^t.$$

Mit dem Lemma folgt nun:

$$\begin{aligned} \det((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v) &= \varphi_v \cdot (J_{\mathbf{F}} \circ \varphi - J_{\mathbf{F}}^t \circ \varphi) \cdot \varphi_u^t \\ &= \varphi_u \cdot (J_{\mathbf{F}}^t \circ \varphi) \cdot \varphi_v^t - \varphi_v \cdot (J_{\mathbf{F}}^t \circ \varphi) \cdot \varphi_u^t \\ &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v^t - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u^t \\ &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u. \end{aligned}$$

■

§ 5 Satz von Gauss

Wir wollen jetzt Gebiete mit stückweise glattem Rand im \mathbb{R}^3 betrachten.

Definition. Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ heißt ein *Gebiet mit stückweise glattem Rand*, falls gilt:

1. $\partial\Omega$ ist eine stückweise glatte Fläche mit Rand.
2. Ist $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, so gibt es eine Folge von Punkten $\mathbf{x}_\nu \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, die gegen \mathbf{x}_0 konvergiert.

Die erste Bedingung besagt: Es gibt endlich viele Flächenstücke S_1, \dots, S_N mit stückweise glattem Rand, so dass gilt:

- $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$.
- Für $i \neq j$ ist $S_i \cap S_j = bS_i \cap bS_j$, und dieser Durchschnitt besteht nur aus Klebekanten.

Die zweite Bedingung soll sicherstellen, dass sich Ω nur auf einer Seite des Randes befindet. Daraus kann man folgern, dass der Rand von $\partial\Omega$ leer ist.

Beispiel.

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\bar{G} \subset U$, $c \in \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(\mathbf{x}) > c$ für alle $\mathbf{x} \in \bar{G}$. Dann ist

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G \text{ und } c < z < f(x, y)\}$$

ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Der Rand besteht aus folgenden Flächen:

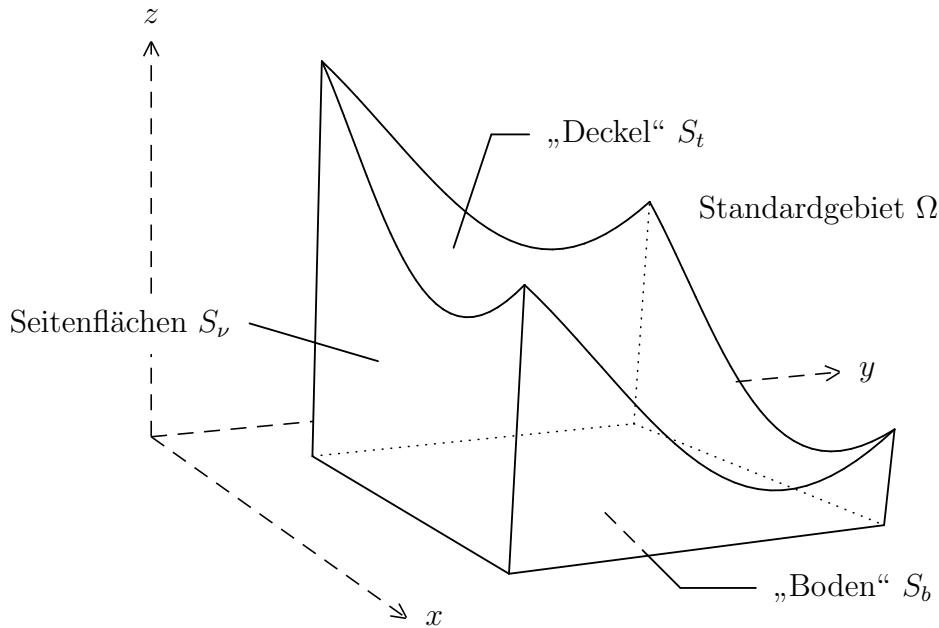
- $S_b := \{(u, v, c) : (u, v) \in \bar{G}\}$ ist der „Boden“ von Ω , parametrisiert durch $\varphi_b : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_b(u, v) = (u, v, c)$ („b“ steht für „Bottom“).
- $S_t := \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in \bar{G}\}$ ist der „Deckel“ von Ω , parametrisiert durch $\varphi_t : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_t(u, v) := (u, v, f(u, v))$ („t“ steht für „Top“).
- Besteht ∂G aus den glatten Kurvenstücken C_1, \dots, C_n , so erhält man die Seitenflächen

$$S_\nu := \{(u, v, z) : (u, v) \in C_\nu \text{ und } c \leq z \leq f(u, v)\},$$

für $\nu = 1, \dots, n$. Ist $\alpha_\nu : [a_\nu, b_\nu] \rightarrow C_\nu$ eine Parametrisierung des ν -ten Kurvenstücks, so kann S_ν durch

$$\varphi_\nu(u, v) := (\alpha_\nu(u); (1 - v)c + v \cdot f(\alpha_\nu(u)))$$

parametrisiert werden, für $(u, v) \in [a_\nu, b_\nu] \times [0, 1]$.



Offensichtlich ist $\partial\Omega = S_b \cup S_t \cup (S_1 \cup \dots \cup S_N)$, die einzelnen Randkomponenten sind Flächen mit stückweise glattem Rand. Auch die Bedingungen (2) und (3) sind erfüllt. Wir werden ein solches Gebiet ein *Standardgebiet* nennen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ heißt *regulärer Randpunkt* von Ω , falls es eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

1. $U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) < 0\}$,
2. $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in U$.

Ist Ω ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$ die Zerlegung des Randes in Flächenstücke mit stückweise glattem Rand, so sind alle Punkte in den offenen Randkomponenten $\overset{\bullet}{S}_v$ reguläre Randpunkte, es kann aber noch mehr geben. Die Oberfläche einer Kugel besteht nur aus regulären Randpunkten.

Wird ein regulärer Randpunkt \mathbf{x}_0 in einer Umgebung U wie oben durch h beschrieben, so kann man zeigen:

1. $U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$.
2. Ist $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) := \frac{\nabla h(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla h(\mathbf{x}_0)\|}$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \Omega \text{ für } -\varepsilon < t < 0$$

und

$$\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \text{ für } 0 < t < \varepsilon.$$

Deshalb nennen wir $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ den *äußeren (Einheits-)Normalenvektor* von $\partial\Omega$ in \mathbf{x}_0 . Die innere Orientierung von S in \mathbf{x}_0 soll nun so gewählt werden, dass die zugehörige transversale Orientierung durch $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ gegeben ist, dass also $\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)$ und $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ in die gleiche Richtung zeigen. Ist das nicht sowieso schon der Fall, so muss man nur φ durch $\varphi \circ T$ mit $T(u, v) := (v, u)$ ersetzen, denn es ist $(\varphi \circ T)_u = \varphi_v$ und $(\varphi \circ T)_v = \varphi_u$. Stimmt die Orientierung, so ist

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \frac{\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)}{\|\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)\|}.$$

Bemerkung. Weil der Rand von Ω lokal wie ein Graph aussieht, ist er eine Jordan-Nullmenge. Daraus folgt, dass Ω messbar ist.

5.1 Der Satz von Gauß. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und \mathbf{F} ein Vektorfeld, das auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV_3 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}.$$

Ist $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_N$, so ist $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} := \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$. Ist $\varphi_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine positiv orientierte Parametrisierung von S_i , so bezeichnen wir $\mathbf{n}_{S_i} := (\varphi_i)_u \times (\varphi_i)_v$ als *äußere Flächennormale*, auch wenn dieser Vektor nicht normiert ist. Dann gilt:

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{G_i} \mathbf{F}(\varphi_i(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}_{S_i}(\mathbf{u}) \, du \, dv.$$

Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ist im \mathbb{R}^3 definiert durch

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Zur Bedeutung der Divergenz kommen wir später.

BEWEIS: Der allgemeine Satz ist schwierig zu beweisen, wir beschränken uns auf den Fall eines Standardgebietes

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \text{ und } c < z < f(x, y)\},$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand und $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir übernehmen die Bezeichnungen vom Anfang dieses Abschnittes und setzen $C := C_1 \cup \dots \cup C_k = \partial G$ und $S := S_1 \cup \dots \cup S_k$. Dann ist $\partial\Omega = S_b \cup S_t \cup S$.

1. Schritt: Sei $\mathbf{F} = (0, 0, u(x, y, z))$, mit einer stetig differenzierbaren Funktion u . Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial u}{\partial z}$ und

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{F} \, dV_3 &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \, dV_3 \\
&= \int_G \left(\int_c^{f(x,y)} \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \\
&= \int_G \left[u(x, y, f(x, y)) - u(x, y, c) \right] dx \, dy.
\end{aligned}$$

Die (äußere) Flächennormale zum Boden S_b ist $\mathbf{n}_b = (0, 0, -1)$. Um dies zu erreichen, können wir als Parametrisierung $\varphi_b(x, y) := (y, x, c)$ benutzen, definiert auf $G^* := \{(x, y) : (y, x) \in G\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{G^*} (0, 0, u(y, x, c)) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy \\
&= - \int_{G^*} u(y, x, c) \, dx \, dy = - \int_G u(x, y, c) \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

In jedem glatten Punkt der Seitenfläche S ist $\mathbf{n}_S = (a, b, 0)$, mit gewissen Zahlen a und b , also $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_S = 0$. Das Integral über die Seitenwände liefert keinen Beitrag.

Der Deckel S_t wird parametrisiert durch $\varphi_t(x, y) = (x, y, f(x, y))$, die Flächennormale $\mathbf{n}_t = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$ zeigt nach oben. Damit ist

$$\int_{S_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_G (0, 0, u(x, y, f(x, y))) \cdot (-f_x, -f_y, 1) \, dx \, dy = \int_G u(x, y, f(x, y)) \, dx \, dy.$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man die gewünschte Formel für das spezielle Vektorfeld.

2. Schritt: Jetzt sei $\mathbf{F}(x, y, z) = (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), 0)$. Wir setzen

$$U_1(x, y, z) := - \int_c^z u_1(x, y, t) \, dt \quad \text{und} \quad U_2(x, y, z) := \int_c^z u_2(x, y, t) \, dt,$$

sowie $U_3 := (U_2)_y - (U_1)_x$. Dann können wir durch

$$\mathbf{A} := (U_2, U_1, 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} := (0, 0, -U_3).$$

zwei Vektorfelder \mathbf{A} und \mathbf{B} definieren. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot} \mathbf{A} &= ((A_3)_y - (A_2)_z, (A_1)_z - (A_3)_x, (A_2)_x - (A_1)_y) \\
&= (-(U_1)_z, (U_2)_z, (U_1)_x - (U_2)_y) \\
&= (u_1, u_2, -U_3) = \mathbf{F} + \mathbf{B}.
\end{aligned}$$

Weiter ist $(U_3)_z = ((U_2)_z)_y - ((U_1)_z)_x = (u_2)_y + (u_1)_x$, also

$$\mathbf{div} \mathbf{F} = (u_1)_x + (u_2)_y = (U_3)_z = -\mathbf{div} \mathbf{B}.$$

Weil $\partial\Omega$ eine geschlossene Fläche ist, ist $\int_{\partial\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{O} = 0$, und daher

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{O} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{O} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{B} \, dV_3 \quad (\text{nach Schritt 1}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{F} \, dV_3. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Eine stetige Funktion kennt man schon dann, wenn man ihr Integral über beliebige kleine Kugeln kennt. Das folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

5.2 Hilfssatz. *Sei f stetig auf dem Gebiet Ω .*

Ist $\int_B f(\mathbf{x}) \, dV_3 = 0$ für jede Kugel $B \subset \Omega$, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$.

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Für kleines $\varepsilon > 0$ liegt die Kugel $B_\varepsilon = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ in Ω und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\mathbf{q}_\varepsilon \in B_\varepsilon$, so dass gilt:

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f(\mathbf{x}) \, dV_3 = f(\mathbf{q}_\varepsilon) \cdot \text{vol}_3(B_\varepsilon).$$

Also ist

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}_3(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(\mathbf{x}) \, dV_3 = 0. \quad \blacksquare$$

Wir werden den Satz benutzen, um die Divergenz zu interpretieren.

Ist \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet Ω , so nennen wir

$$\delta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}_3(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$$

die *Quelldichte* von \mathbf{F} in \mathbf{x}_0 . Dabei bezeichnet B_ε wieder eine Kugel mit Radius ε um \mathbf{x}_0 . In der Umgebung einer „Quelle“ ist die Gesamtbilanz des Flusses von \mathbf{F} durch die Kugeloberfläche (von innen nach außen) positiv, bei einer „Senke“ ist sie negativ. Nun ist aber

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}_3(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}_3(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} \mathbf{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, dV_3 = \mathbf{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0).$$

Die Quelldichte ist also nichts anderes als die Divergenz.

Beispiel.

Wir betrachten die Strömung eines flüssigen oder gasförmigen Mediums. Das (zeitabhängige) Geschwindigkeitsfeld sei durch das Vektorfeld $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ beschrieben, die Dichte des Mediums durch die Funktion $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$. Es werde im Innern der Strömung weder Masse produziert noch vernichtet. Ist B ein kleines Gebiet, so wird durch

$$M(t) := \int_B \varrho(\mathbf{x}, t) dV_3$$

die Gesamtmasse in B zur Zeit t gegeben. Der Fluss des Mediums durch ein Flächenstück S wird durch das Integral $\int_S (\varrho \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{O}$ gegeben (Einheit = $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \cdot \text{Fläche} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}}$).

Ist der Fluss durch ∂B positiv, so nimmt die Masse im Innern ab! Also gilt die Gleichung

$$-M'(t) = \int_{\partial B} (\varrho \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{O}.$$

Unter Verwendung der Formel für die Differentiation von Parameterintegralen folgt:

$$-M'(t) = -\frac{d}{dt} \int_B \varrho(\mathbf{x}, t) dV_3 = -\int_B \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV_3.$$

Andererseits gilt wegen des Gaußschen Satzes:

$$\int_{\partial B} (\varrho \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{O} = \int_B \mathbf{div}(\varrho \cdot \mathbf{F}) dV_3.$$

Mit dem Hilfssatz ergibt sich nun die berühmte *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{div}(\varrho \cdot \mathbf{F}) = 0.$$

5.3 Gaußsches Gesetz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, $\mathbf{0} \notin \partial\Omega$. Setzt man $r := \|\mathbf{x}\|$, so folgt:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x}}{r^3} \cdot d\mathbf{O} = \begin{cases} 4\pi & \text{falls } \mathbf{0} \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{r^3}$. Im Falle $\Omega = B_1(\mathbf{0})$ haben wir das Integral schon früher berechnet (Beispiel am Ende von §3), da stimmt die Behauptung.

1. Fall: $\mathbf{0} \notin \Omega$. In diesem Fall ist \mathbf{F} stetig differenzierbar auf Ω , und es ist $\mathbf{div} \mathbf{F} = 0$:

$$\begin{aligned}
(x_\nu \cdot r^{-3})_{x_\nu} &= 1 \cdot r^{-3} - 3x_\nu \cdot r^{-4} \cdot r_{x_\nu} \\
&= r^{-3} - 3x_\nu^2 \cdot r^{-5}, \\
\text{also } \operatorname{div} \mathbf{F} &= r^{-5} \cdot \sum_{\nu=1}^3 (r^2 - 3x_\nu^2) \\
&= r^{-5} \cdot (3r^2 - 3r^2) = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV_3 = 0.$$

2. Fall: $\mathbf{0} \in \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{0})} \subset \Omega$ ist. Sei $\Omega' := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\mathbf{0})}$. Dann ist

$$0 = \int_{\partial\Omega'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} - \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O},$$

also

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = 4\pi.$$

Die letzte Gleichung haben wir schon in dem oben zitierten Beispiel bewiesen. ■

Zum Schluss wollen wir als Anwendung die *Maxwellschen Gleichungen* betrachten:

Das *Coulombsche Gesetz* besagt: Eine Ladungsverteilung erzeugt ein *elektrisches Feld* \mathbf{E} und verändert damit die Struktur des Raumes. Wird eine Probeladung q in das elektrische Feld gebracht, so wirkt auf q eine zu q proportionale Kraft in Richtung der Feldlinien. Diese Kraft kann man messen und so für jede stückweise glatte Kurve C die Arbeit

$$A(q, C) = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$$

ermitteln, die verrichtet wird, wenn q entlang C bewegt wird. In einem elektrostatischen Feld, also bei ruhender Ladungsverteilung, hängt das Integral nicht vom Verlauf der Kurve ab, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt, und sein Wert gibt die *Spannungsdifferenz* zwischen diesen Punkten wieder.

Die durch das elektrische Feld veränderte Struktur des Raumes wird durch die *elektrische Verschiebungsdichte* \mathbf{D} beschrieben. Der Unterschied zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} ist etwas schwer zu verstehen. Aus physikalischer Sicht unterscheiden sich die Felder (im Vakuum) um eine Konstante, und sie werden in unterschiedlichen Einheiten gemessen. Außerdem beschreibt \mathbf{E} die Fernwirkung und \mathbf{D} die Nahwirkung des elektrischen Feldes. Aus mathematischer Sicht sind diese Unterschiede irrelevant. Allerdings ist zu beobachten, dass \mathbf{E} immer über Kurven integriert wird, während \mathbf{D} benutzt wird, um den Fluss des Feldes durch Flächenstücke zu messen. Man müsste \mathbf{E} und \mathbf{D} eigentlich durch unterschiedliche mathematische Objekte beschreiben (was in der Theorie der „Differentialformen“ auch tatsächlich geschieht). Im Rahmen dieser Vorlesung können wir darauf allerdings nicht eingehen.

Ist in einem Gebiet Ω eine Ladungsverteilung durch eine Dichtefunktion ϱ gegeben, so besagt das sogenannte **Gaußsche Gesetz**:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\Omega} \varrho dV_3.$$

Zusammen mit dem Gaußschen Satz ergibt das für beliebige Gebiete Ω :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \varrho) dV_3 = 0.$$

Daraus folgt die *1. Maxwell'sche Gleichung*:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho.$$

Als nächstes nehmen wir an, dass ein Magnetfeld vorliegt. Man interessiert sich für den Fluss $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{O}$ der magnetischen Feldlinien durch Flächenstücke S . Das Vektorfeld \mathbf{B} nennt man die *magnetische Induktion*. Bewegt man eine Leiterschleife im Magnetfeld, so beobachtet man einen Spannungsstoß, der nach Faraday der negativen zeitlichen Änderung des Flusses durch diejenige Fläche entspricht, die von der Leiterschleife berandet wird. Auf Grund der Spannung fließt Strom, werden Ladungen entlang der Leiterschleife bewegt und es entsteht ein elektrisches Feld. Da man die Spannung auch als die beim Ladungstransport verrichtete Arbeit auffassen kann, gilt:

$$\int_{bS} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{O}.$$

Nach Stokes und wegen der eindeutigen Rekonstruierbarkeit der Vektorfelder aus ihren Flächenintegralen folgt das *Induktionsgesetz*, die *2. Maxwell'sche Gleichung*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

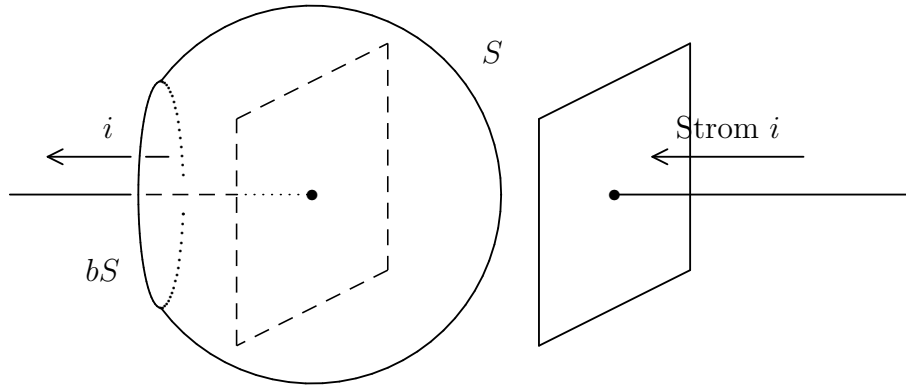
Da man außerdem noch nie magnetische Monopole (also magnetische Quellen) entdeckt hat, fordert man zusätzlich als *3. Maxwell'sche Gleichung*:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Fließt Strom durch eine Leiterschleife, so kann man beobachten, dass sich ein Magnetfeld um die Stromlinien herum aufbaut. Durch Integration der *magnetischen Erregung* \mathbf{H} über geschlossene Wege erhält man den Gesamtstrom durch die eingeschlossene Fläche. Ist die Stromverteilung durch eine (vektorielle) Dichtefunktion \mathbf{J} gegeben, die sogenannte *Stromdichte*, so ergibt sich der Gesamtstrom als Integral über die Stromdichte. Das ist das *Durchflutungsgesetz*

$$\int_{bS} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{O}.$$

Maxwell entdeckte als erster, dass das Gesetz so unvollständig ist und in gewissen Situationen zu Widersprüchen führt.



Wählt man die Fläche S wie im Bild, so ergibt das Integral $\int_{bS} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x}$ den Gesamtstrom i , der durch den Leiter fließt. Aber das Integral auf der rechten Seite der Gleichung, $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{O}$, verschwindet, denn zwischen den Kondensatorplatten fließt kein Strom.

Maxwell fand heraus, dass zur Stromdichte als Korrekturterm noch die zeitliche Änderung der elektrischen Verschiebungsdichte addiert werden muss:

$$\int_{bS} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{O}.$$

Mit dem Stokeschen Satz führt das zur 4. *Maxwellschen Gleichung*:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

§ 6 Krummlinige Koordinaten

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Durch

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$$

sei ein Diffeomorphismus von G auf ein anderes Gebiet $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Als Beispiel kann man sich etwa die Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = z$$

vorstellen. Hier ist $G = \{(r, \varphi, z) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$ und $\tilde{G} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0 \text{ und } z \text{ beliebig}\}$.

Die Parameter u, v, w (im Beispiel also r, φ, z) nennt man auch *krummlinige Koordinaten*. Man nennt sie *orthogonal*, falls die Gradienten $\nabla u, \nabla v$ und ∇w überall paarweise zueinander orthogonal sind (wobei u, v, w vermöge Φ^{-1} als Funktionen von x, y, z aufgefasst werden).

Durch den Punkt $(u, v, w) = (c_1, c_2, c_3)$ gehen die drei Flächen $u = c_1, v = c_2$ und $w = c_3$. Auch sie treffen sich dort paarweise orthogonal. Je zwei der Flächen schneiden sich entlang einer Kurve, parametrisiert durch u, v oder w . Die Tangentialvektoren an diese Kurven in $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ sind die Vektoren

$$\mathbf{a}_u := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(\mathbf{c}), \quad \mathbf{a}_v := \frac{\partial \Phi}{\partial v}(\mathbf{c}) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_w := \frac{\partial \Phi}{\partial w}(\mathbf{c}).$$

Bei orthogonalen krummlinigen Koordinaten sind auch diese Tangentialvektoren paarweise zueinander orthogonal (und natürlich $\neq \mathbf{0}$). Dabei ist

$$\vec{a}_u = J_\Phi(\mathbf{c}) \cdot \vec{e}_1, \quad \vec{a}_v = J_\Phi(\mathbf{c}) \cdot \vec{e}_2 \quad \text{und} \quad \vec{a}_w = J_\Phi(\mathbf{c}) \cdot \vec{e}_3.$$

Setzen wir $h_1 := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|$, $h_2 := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|$ und $h_3 := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\|$, so bilden die Vektoren

$$\mathbf{e}_u := \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v := \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_w := \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w}$$

ein ON-System.

Beispiele.

1. Es ist

$$(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z),$$

also

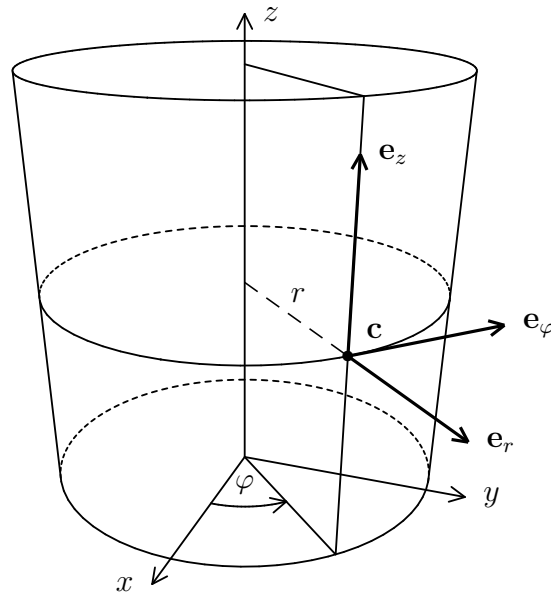
$$\mathbf{a}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{a}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_z = (0, 0, 1).$$

Daher ist

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \quad \text{und} \quad h_3 = 1$$

und damit

$$\mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1).$$



Ganz allgemein ist übrigens

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w) \\ &= \det\left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \det J_\Phi, \end{aligned}$$

also $\det J_\Phi = h_1 h_2 h_3$.

2. Wir betrachten die Kugelkoordinaten (räumliche Polarkoordinaten):

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Die Fläche $r = c_1$ ist eine Sphäre, also zeigt $\nabla r(\mathbf{c})$ in Richtung des Vektors \mathbf{c} (radial nach außen). Die Fläche $\varphi = c_2$ ist eine Halbebene, die auf der x - y -Ebene senkrecht steht. Offensichtlich ist $\nabla \varphi(\mathbf{c})$ parallel zur x - y -Ebene und tangential zu der Sphäre durch \mathbf{c} , insbesondere orthogonal zu \mathbf{c} . Schließlich ist die Fläche $\theta = c_3$ ein zur z -Achse rotations-symmetrischer Kegel. Daher ist $\nabla \theta(\mathbf{c})$ orthogonal zu \mathbf{c} und liegt in der Halbebene $\varphi = c_2$ durch \mathbf{c} . Das bedeutet, dass die Kugelkoordinaten ein orthogonales System krummliniger Koordinaten bilden.

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_r &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{a}_\theta &= (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \theta) \\ \text{und } \mathbf{a}_\varphi &= (-r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \sin \theta, 0).\end{aligned}$$

Daraus folgt: $h_1 = 1$, $h_2 = r$ und $h_3 = r \sin \theta$. Als Anwendung erhalten wir sehr viel einfacher als durch Determinantenberechnung:

$$\det J_\Phi = h_1 h_2 h_3 = r^2 \sin \theta.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \mathbf{e}_\theta &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta) \\ \text{und } \mathbf{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).\end{aligned}$$

Man möchte nun gerne die Differentialoperatoren **grad**, **div** und **rot** in krummlinigen Koordinaten ausdrücken. Was heißt das? Sei $\mathbf{A} = (A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z))$ ein Vektorfeld, gegeben in kartesischen Koordinaten. Durch $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ seien orthogonale krummlinige Koordinaten gegeben. Da die Felder \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v und \mathbf{e}_w in jedem Punkt von G eine ON-Basis bilden, kann man \mathbf{A} auch wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}(\Phi(u, v, w)) \\ &= (\mathbf{A}(\Phi(u, v, w)) \cdot \mathbf{e}_u) \mathbf{e}_u + (\mathbf{A}(\Phi(u, v, w)) \cdot \mathbf{e}_v) \mathbf{e}_v + (\mathbf{A}(\Phi(u, v, w)) \cdot \mathbf{e}_w) \mathbf{e}_w.\end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: Ist $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^n , so kann jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_\nu) \cdot \mathbf{a}_\nu$$

geschrieben werden, denn aus der Gleichung $\mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \mathbf{a}_\nu$ folgt: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_\mu = \sum_{\nu=1}^n x_\nu (\mathbf{a}_\nu \cdot \mathbf{a}_\mu) = x_\mu$.)

Wir beginnen mit dem Gradienten. Sei f eine differenzierbare Funktion auf $\Phi(G)$. Dann ist $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ein Vektorfeld auf $\Phi(G)$ und $(\nabla f) \circ \Phi$ ein Vektorfeld auf G . Wir müssen noch die Skalarprodukte ausrechnen. Nach Kettenregel ist

$$\frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u} = ((\nabla f) \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u} &= J_{f \circ \Phi} \cdot \vec{e}_1 = (J_f \circ \Phi) \cdot J_\Phi \cdot \vec{e}_1 \\ &= (J_f \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} = ((\nabla f) \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$((\nabla f) \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_u = \frac{1}{h_1} \cdot ((\nabla f) \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u},$$

und analog

$$\begin{aligned} ((\nabla f) \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_v &= \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v} \\ \text{und } ((\nabla f) \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_w &= \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial w}. \end{aligned}$$

Beispiele.

1. Im Falle der Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z)$ ist

$$(\nabla f) \circ \Phi = \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

2. Im Falle der Kugelkoordinaten $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, \theta)$ ist

$$(\nabla f) \circ \Phi = \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Man beachte, dass die Kugelkoordinaten in der Literatur unterschiedlich definiert werden, und dass deshalb die obige Formel in der Literatur auch anders lauten kann.

Wir kommen jetzt zu Divergenz und Rotation. Es sei ein differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3)$ auf $\tilde{G} = \Phi(G)$ gegeben. Dann ist

$$\mathbf{div}(F) = (F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z$$

eine Funktion auf \tilde{G} und $\mathbf{div}(F) \circ \Phi$ eine Funktion auf G .

$$\mathbf{rot}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2, \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3, \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right)$$

ist ein Vektorfeld auf \tilde{G} und $(\mathbf{rot} F) \circ \Phi$ ein Vektorfeld auf G .

Ist $F \circ \Phi = \tilde{F}_1 \mathbf{e}_u + \tilde{F}_2 \mathbf{e}_v + \tilde{F}_3 \mathbf{e}_w$, mit

$$\tilde{F}_1 = (F \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_u, \quad \tilde{F}_2 = (F \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_v \quad \text{und} \quad \tilde{F}_3 = (F \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_w,$$

so ist

$$(\mathbf{div} F) \circ \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} (\tilde{F}_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial v} (\tilde{F}_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial w} (\tilde{F}_3 h_1 h_2) \right].$$

und

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi &= \\
 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v} (\tilde{F}_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial w} (\tilde{F}_2 h_2) \right] \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial w} (\tilde{F}_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u} (\tilde{F}_3 h_3) \right] \mathbf{e}_v \\
 &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\tilde{F}_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial v} (\tilde{F}_1 h_1) \right] \mathbf{e}_w.
 \end{aligned}$$

Auf die zum Beweis erforderlichen komplizierten Rechnungen verzichten wir hier.

Beispiele.

1. Zylinderkoordinaten r, φ, z (mit $h_1 = 1$, $h_2 = r$ und $h_3 = 1$):

$$(\mathbf{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_2) + \frac{\partial}{\partial z} (r \tilde{F}_3) \right].$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_1 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_r = (F_1 \circ \Phi) \cos \varphi + (F_2 \circ \Phi) \sin \varphi, \\
 \tilde{F}_2 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = -(F_1 \circ \Phi) \sin \varphi + (F_2 \circ \Phi) \cos \varphi \\
 \text{und } \tilde{F}_3 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_z = F_3.
 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_3) - \frac{\partial}{\partial z} (r \tilde{F}_2) \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\tilde{F}_1) - \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{F}_3) \right] \mathbf{e}_\varphi \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_2) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_1) \right] \mathbf{e}_z.
 \end{aligned}$$

2. Kugelkoordinaten r, θ, φ (mit $h_1 = 1$, $h_2 = r$ und $h_3 = r \sin \theta$):

$$(\mathbf{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{F}_1 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \tilde{F}_2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \tilde{F}_3) \right],$$

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_1 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_r \\
 &= (F_1 \circ \Phi) \cos \varphi \sin \theta + (F_2 \circ \Phi) \sin \varphi \sin \theta + (F_3 \circ \Phi) \cos \theta, \\
 \tilde{F}_2 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\theta \\
 &= (F_1 \circ \Phi) \cos \varphi \cos \theta + (F_2 \circ \Phi) \sin \varphi \cos \theta - (F_3 \circ \Phi) \sin \theta \\
 \text{und } \tilde{F}_3 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\varphi \\
 &= -(F_1 \circ \Phi) \sin \varphi + (F_2 \circ \Phi) \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$(\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi = R_1 \mathbf{e}_r + R_2 \mathbf{e}_\theta + R_3 \mathbf{e}_\varphi$$

mit

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \tilde{F}_3 \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \tilde{F}_2) \right] \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{F}_3 \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_2) \right], \\ R_2 &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_1) - \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_3 \sin \theta) \right] \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{F}_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_3), \\ \text{und } R_3 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{F}_2) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{F}_1) \right]. \end{aligned}$$