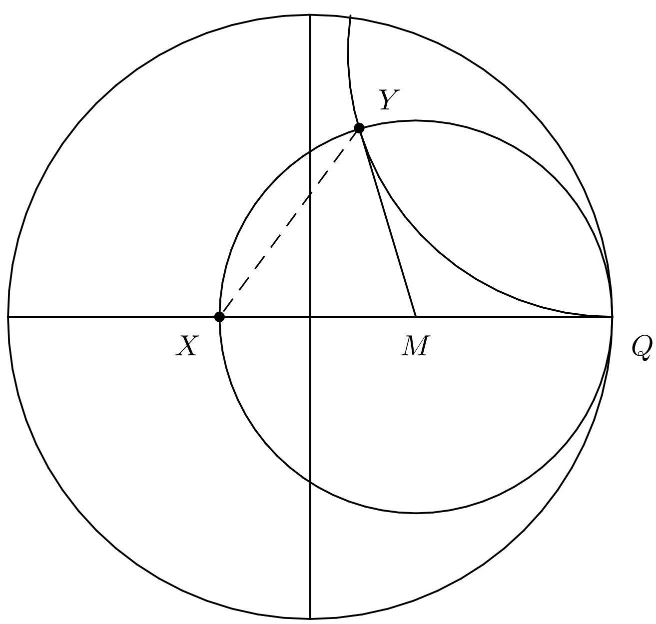
Bergische Universität - Gesamthochschule Wuppertal - Fachbereich Mathematik

Ausarbeitung der Vorlesung

Euklidische
und
Nichteuklidische Geometrie

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

– SS 1996 –



Kapitel Inhaltsverzeichnis

Kapitel Vorwort

Um 300 v.Chr. hielt in Alexandria ein griechischer Mathematiker namens Euklid Vorlesungen über Geometrie. Zu Anfang diskutierte er über einfachste Dinge wie Punkte, Linien oder Flächen, dann kam er zu komplexeren Begriffen und sprach über Winkel, Dreiecke und Kreise, erklärte wohl auch die zum Zeichnen notwendigen Instrumente, und schließlich stellte er ein System von Postulaten und Regeln vor, das sehr genau festlegte, was unter zulässigen geometrischen Konstruktionen zu verstehen sei. Schritt für Schritt baute er nun die Geometrie – und auf geometrischem Wege auch Teile der Arithmetik – auf, bis hin zu so schwierigen und kunstvollen Konstruktionen wie die der fünf regulären Polyeder. Und jeden seiner Schritte konnte er begründen, nichts außer der unbestechlichen Logik ließ er gelten. So war die erste umfassende und axiomatisch begründete mathematische Theorie geboren. Sie war schon so ausgereift, daß sie über tausend Jahre lang beispielhaft blieb.

Und doch plagte schon seine Zeitgenossen ein ganz kleiner Zweifel. Die meisten seiner Regeln erkannten sie als klar und selbstverständlich an. Nur sein fünftes Postulat erschien ihnen etwas weit hergeholt. Da forderte er nämlich auf recht umständliche Weise die Existenz des Schnittpunktes zweier Geraden, die in offensichtlicher Weise aufeinander zulaufen. Heute sprechen wir vom „Parallelenaxiom“, weil wir wissen, daß Euklids Forderung nichts anderes bedeutet, als daß man zu einer gegebenen Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt eindeutig die Parallele ziehen kann. Der Zweifel blieb, und er wuchs sogar im Laufe der Zeiten. Zweitausend Jahre lang bemühten sich Mathematiker der verschiedensten Kulturkreise, gehemmt durch starre philosophische Vorstellungen von Raum und Zeit, Euklids fünftes Postulat aus den anderen herzuleiten. Vergebens!

Erst der deutsche Mathematikerfürst Carl Friedrich Gauß, der junge Ungar Johann Bolyai und ein damals im Westen weitgehend unbekannter russischer Universitätsprofessor namens Nikolai Lobatschewski erkannten fast gleichzeitig, zwischen 1820 und 1830, die Unabhängigkeit des euklidischen Parallelenaxioms vom Rest der Geometrie, und indem sie dieses Postulat abwandelten, entwickelten sie eine völlig neue nichteuklidische Geometrie. Obwohl ihre Ergebnisse lange unbeachtet blieben, revolutionierten sie das mathematische Weltbild und leiteten eine Entwicklung ein, die bis heute nicht abgeschlossen ist.

Das über 2000-jährige Ringen um einen Unabhängigkeitsbeweis für das euklidische Parallelenpostulat ist Inhalt dieser Vorlesung. Zunächst stelle ich die Problematik dar, baue dann ein heutigen Ansprüchen genügendes Axiomensystem für die neutrale (von Parallelenaxiomen unabhängige) Geometrie auf und zeige schließlich die Auswirkungen von Euklids fünftem Postulat. Im zweiten Teil zeige ich, wie sich die Ideen im Laufe der Jahrhunderte klärten, so daß die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie nach 1800 zwangsläufig erfolgen mußte. Am Ende zeige ich mit Hilfe des Poincaréschen Modells, daß die neue Geometrie wirklich existiert.

Die Vorlesung wurde unter dem Titel „Geometrie 1“ angekündigt, weil ein ganzer Zyklus folgen sollte, mit projektiver Geometrie, Differentialgeometrie und schließlich deren Verallgemeinerung zur Riemannschen Geometrie. Ganz so ließ sich der Plan leider nicht verwirklichen, die Studienordnung und die Studentenzahlen ließen es nicht zu.

Das Skript wurde mit LaTeX 2.09 geschrieben, das Layout ist ein eigener Entwurf und die Zeichnungen sind mit Hilfe eines selbst erstellten TeX-Makro-Pakets entstanden.

K. Fritzsche, Dezember 1996

Kapitel 1 Euklidische Geometrie

§ 1 Die deduktive Methode

Anfänge der Mathematik finden sich in Mesopotamien, um 3000 v.Chr., auf Tontafeln überliefert. Bekannt war z.B. schon der „Satz des Pythagoras“ als Rechenvorschrift, sowie Formeln zur Flächen- und Volumenberechnung.

Bei den Ägyptern gab es eher Sammlungen von Daumenregeln, überliefert auf Papyrus. Die Erhaltung der Original-Dokumente ist sehr viel schlechter.

Die Geometrie kam wohl über Ägypten nach Griechenland, das Wort „Geometrie“ stammt aus dem Griechischen („Erdvermessung“). Originale der Werke der griechischen Mathematiker sind so gut wie nicht erhalten. Aus der Sekundärliteratur weiß man recht gut über die „fertige“ griechische Mathematik Bescheid, aber kaum etwas über die Entstehungsgeschichte. Viele Vorstellungen darüber beruhen auf reinen Legenden.

Thales von Milet (ca. 624 – 548 v. Chr.) war zunächst Kaufmann und politischer Ratgeber, weit gereist, hatte Kontakte zu ägyptischen Priestern und babylonischen Astronomen. Eine Sonnenfinsternis soll er vorhergesagt haben. Aristoteles berichtet, daß Thales gezeigt habe, wie man mit der Wissenschaft reich werden könne. Er habe auf Grund seiner astronomischen Kenntnisse eine gute Ölernte vorausgesehen und schon im Winter alle Ölpressen der Umgebung gemietet und daraufhin einen hohen Gewinn erzielt.

Thales führte erstmals abstrakte Überlegungen in die Mathematik und speziell in die Geometrie ein. Er suchte nach allgemeinen Gesetzmäßigkeiten in der Natur und erkannte als einer der ersten die Notwendigkeit logischer Beweise. Er entdeckte, daß gewisse geometrische Fakten aus anderen hergeleitet werden können. Schon früh zog er sich aus dem öffentlichen Leben zurück, widmete sich ganz dem Studium der Philosophie und der Wissenschaften und begründete die Ionische Schule für Mathematik und Philosophie. Die ersten Beweise der folgenden Sätze werden ihm zugeschrieben:

- Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
- Zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bestimmen ein Dreieck.
- Ein Winkel, der einem Halbkreis einbeschrieben ist, ist ein Rechter.

Angeblich hat er den Göttern einen Ochsen geopfert, als er den zuletzt genannten Satz gefunden hatte.

Mit Thales und seinen Zeitgenossen beginnt die griechische Mathematik, sich von der ägyptischen und babylonischen Mathematik abzusetzen.

Nicht weit von Milet liegt die Insel Samos.

Pythagoras von Samos (ca. 570 – 495 v.Chr.) reiste in Kleinasien, Ägypten und Mesopotamien, ging um 529 nach Sizilien und schließlich nach Kroton in Süditalien. Er gründete dort einen Orden, in dem es vor allem um harmonische Lebensführung ging, die Gesellschaft der „Pythagoräer". Die Vollmitglieder bildeten eine sehr enge Gemeinschaft, sie lebten unter strenger Disziplin, teilten alles miteinander und hielten ihr Wissen vor der Außenwelt geheim. Es gab 4 Studiengebiete: Arithmetik, Harmonielehre, Geometrie und Astronomie. Welche mathematischen Sätze tatsächlich von den Pythagoräern und welche gar von Pythagoras selbst gefunden wurden, ist kaum noch rekonstruierbar. Sie wußten aber z.B. von der Existenz der 5 regulären Polyeder. Angeblich wurde ein Schüler ertränkt, weil er diese Erkenntnis Außenstehenden verraten habe. Aber vielleicht wurde diese nur verbreitet, weil die Pythagoräer in der Bevölkerung nicht sehr beliebt waren.

Zum ersten Mal wurden nun größere Mengen mathematischer Sätze in eine logische Reihenfolge gebracht. Die „deduktive Methode" von Thales wurde weiterentwickelt.

Aber die Pythagoräer entdeckten auch erstmals, daß Logik und Intuition nicht unbedingt übereinstimmen müssen:

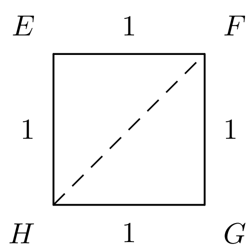
Zwei Strecken AB und CD werden *kommensurabel* genannt, wenn es eine Vergleichsgröße δ und (positive ganze) Zahlen m und n gibt, so daß

$$AB = n \cdot \delta \quad \text{und} \quad CD = m \cdot \delta$$

ist. Für die frühen Pythagoräer war es intuitiv klar, daß jedes Paar von Strecken kommensurabel ist. Aber dann gilt für die Streckenverhältnisse:

$$AB : CD = (n \cdot \delta) : (m \cdot \delta) = n : m.$$

Je zwei geometrische Längen stehen zueinander in einem rationalen Verhältnis. Das führt zu Problemen, wenn man folgendes Quadrat betrachtet:



Nach Pythagoras ist $FH^2 = FG^2 + HG^2 = 2$, und außerdem ist $FH : FG = FH : 1 = FH$. Es gibt also zwei Zahlen p und q, so daß $FH = p : q$ ist, also $p = q \cdot FH$, und man kann diese Zahlen so wählen, daß sie keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$ mehr besitzen.

Aus $FH^2 = 2$ folgt nun: $p^2 = 2q^2$, d.h. p^2 ist *gerade*. Das geht nur, wenn auch p gerade ist, also $p = 2r$, mit einer geeigneten Zahl r. Doch dann ist

$$2q^2 = p^2 = 4r^2, \quad \text{also } q^2 = 2r^2.$$

Das bedeutet, daß q^2 und damit auch q gerade ist, und das kann nicht sein, denn p und q sollten ja keinen gemeinsamen Teiler haben.

Die Pythagoräer müssen von diesem Widerspruch stark konsterniert gewesen sein. Sie empfanden ihn als „logischen Skandal". Wie sollten sie sich entscheiden?

Logik oder **Intuition** ?

Sie entschieden sich für die Logik und die Existenz irrationaler Zahlen (die übrigens in anderen Kulturkreisen auch schon früher entdeckt worden war)! Das Problem, mit irrationalen Zahlen zu rechnen, war damit natürlich noch nicht gelöst. Das blieb später dem Mathematiker
Eudoxus von Cnidus (ca. 400 – 347 v.Chr.)
vorbehalten, der mit seiner „Proportionenlehre" ein geeignetes Instrument erfand. Zunächst allerdings führte die Krise der irrationalen Zahlen zu einer Ablösung der Zahl als Mittelpunkt des Universums, und es begann eine 2000 Jahre lange Vorherrschaft der Geometrie.

Wir werden später sehen, daß die Intuition nicht vollständig aus der Mathematik verbannt wurde. Z.B. wurden intuitiv als wahr erkannte Axiome als Grundannahmen mathematischer Theorien akzeptiert, und natürlich wurde die Intuition benutzt, um Beweisideen zu entwickeln. Die Strenge der Beweise stützte sich aber allein auf die Logik.

Wir sind so an dieses Bild der Mathematik gewöhnt, daß wir es kaum noch wahrnehmen. Man beachte aber: Alle Phänomene, die mit dem Unendlichen zu tun haben, bekommen wir nur mit dem logischen Prinzip des Widerspruchsbeweises in den Griff. Das ist ein sehr großer, mit der Intuition kaum erfaßbarer Bereich, den wir beherrschen, weil sich die griechischen Mathematiker zur Zeit des Pythagoras dazu entschlossen haben, mathematische Wissenschaft nur noch mit den Mitteln der Logik zu betreiben.

Hippokrates von Chios (nicht der Mediziner!) lebte um 430 v.Chr. Er befaßte sich mit dem Problem der Quadratur des Kreises und entdeckte als einer der ersten, daß die Kreisfläche proportional zum Quadrat des Durchmessers ist. Er schrieb eines der ersten mathematischen Lehrbücher mit dem Titel „Elemente", und er benutzte auch als einer der ersten Buchstaben zur Bezeichnung geometrischer Objekte.

Während die pythagoräische Schule an Bedeutung verlor, entwickelte sich in Athen ein neues Zentrum griechischer Wissenschaft. Die berühmte *Akademie* des
Platon (ca. 429 – 348 v.Chr.)
zog viele Mathematiker und Philosophen an. Da *Kreis* und *Gerade* als elementarste und zugleich vollkommenste geometrische Formen betrachtet wurden, ließ man nur noch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu. Viele Ergebnisse der Athener entstanden beim vergeblichen Bemühen, die drei klassischen Probleme zu lösen:

- Quadratur des Kreises
- Dreiteilung des Winkels
- Würfelverdopplung (sog. „Delisches Problem")

Alle diese drei Probleme sind mit Zirkel und Lineal unlösbar, aber der Beweis dafür konnte erst in der Moderne erbracht werden.

Noch viele „Elemente" folgten den Elementen des Hippokrates. Und die Serie gipfelte schließlich in den berühmten „Elementen" des **Euklid**.

Nach dem Tode Alexanders des Großen (323 v.Chr.) wurde einer seiner führenden Generale, Ptolemaeus, Gouverneur von Ägypten, und später König. Er vollendete den Aufbau der neuen Hauptstadt Alexandria, die sich sehr schnell zu einem Haupthandelszentrum entwickelte und für fast 1000 Jahre ein Mittelpunkt hellenistischer Kultur blieb. Unter den Ptolemaeern lebten zeitweise 1 Million Menschen in Alexandria.

Um 300 v.Chr. wurde eine Universität gebaut, das sogenannte „Museion“. Die führenden Gelehrten der Zeit wurden eingeladen. Sie hatten Gelegenheit zu forschen, bekamen Zugang zu den besten Bibliotheken und konnten mit anderen Kollegen dikutieren. Für ihren Lebensunterhalt war gesorgt, sie wurden gut bezahlt und ihre einzige Verpflichtung bestand darin, regelmäßig Vorlesungen zu halten.

Einer der ersten Wissenschaftler in Alexandria muß Euklid gewesen sein. Über seine Person ist so gut wie nichts bekannt, aber er war es, der die „Elemente“ zusammenstellte, das einflußreichste Lehrbuch in der Geschichte der Zivilisation. Die „Elemente“ enthalten die wichtigsten mathematischen Fakten, die zu jener Zeit bekannt waren, organisiert in 13 Bänden. Die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie. Sie sind in über 1700 Ausgaben erschienen, nach der Bibel stellen sie das verbreitetste Buch der Erde dar.

Dabei stammt sicherlich viel von dem Material aus früheren Quellen. Die große Leistung des Autors bestand in der hervorragenden logischen Anordnung der Sätze und der Entwicklung der Beweise. Euklid vereinigte eine Sammlung isolierter Entdeckungen zu einem einzigen gewaltigen deduktiven System, das auf wenigen Postulaten, Axiomen und Definitionen beruht.

Man muß sich aber klar machen, was es bedeutet, wenn man von den „Elementen“ des Euklid spricht: Schon ihre Entstehung ist unklar! Vielleicht handelte es sich nur um Mitschriften seiner Schüler. Da das Werk sehr rasch zur Standard-Einführung in die Geometrie wurde, mußten viele Kopien angefertigt werden. Jede solche handgemachte Abschrift kann sich schon wieder von der Vorlage unterschieden haben. Änderungen im Text häuften sich wahrscheinlich im gleichen Maße, in dem Kopien und Kopien von Kopien über den Mittelmeerraum verteilt wurden, und das Jahrhunderte lang.

Fast alle bekannten Versionen stammten von einer redigierten Ausgabe von **Theon von Alexandria** (um 370 *nach* Chr.) ab. Das war schon fast 700 Jahre nach Euklid. Im Jahre 641 wurde Alexandria von den Moslems eingenommen und die Bibliothek endgültig zerstört (nachdem die Christen zuvor schon ihren Teil dazu beigetragen hatten). Ungefähr 400 Jahre nach Theon wurde eine Kopie (oder die Kopie einer Kopie ...) ins Arabische übersetzt. Damals war Bagdad eines der größten Zentren der Wissenschaften, und dort wurde erstmals die Algebra stärker vorangetrieben.

Über Sizilien und Spanien kam das arabische Wissen wieder nach Europa. Um 1120 wurde eine Kopie der arabischen Version von dem englischen Philosophen und Mönch **Adelard of Bath** ins Lateinische übersetzt. Er hatte auf seinen Reisen mathematische Lektionen in Cordoba gehört und dort die arabische Ausgabe der „Elemente“ erhalten.

150 Jahre später gab der italienische Wissenschaftler **Johannes Campanus** eine neue Übersetzung heraus, die andere arabishe Quellen benutzte und etwas klarer und vollständiger war. Diese Version war schließlich auch Grundlage für die erste 1482 in Venedig er-

schienene gedruckte Auflage. Wegen der Schwierigkeit, die Figuren zu setzen, hatte die erste Drucklegung so lange auf sich warten lassen.

1808 entdeckte F.Peyrard in der vatikanischen Bibliothek eine vollständige Handschrift, die auf ältere und bessere Unterlagen als die von Theon zurückging, und in der die theonische Fassung erwähnt wurde. Der dänische Philologe **J.L.Heiberg** benutzte nun die vorhandenen Versionen, um eine möglichst originalgetreue griechische Version von Euklids „Elementen" zu rekonstruieren. Sie wurde zwischen 1883 und 1888 veröffentlicht und bildete die Basis für alle späteren Übersetzungen, z.B. die von **Sir Thomas L. Heath** ins Englische (1908).

Kurz sollte noch darauf eingegangen werden, wie sich die griechische Mathematik nach Euklid weiterentwickelte:

Eratosthenes (ca. 276 – 194 v.Chr.) war einer der gelehrtesten Männer der Antike. Er ist bekannt wegen seiner relativ genauen Ermittlung des Erdumfanges, aber auch wegen vieler Beiträge zur Mathemathik (z.B. die Siebmethode zur Bestimmung von Primzahlen).

Noch bekannter ist **Archimedes** (ca. 285 – 212 v.Chr.), der größte Mathematiker der Antike, zu vergleichen mit Gauss und Newton. Neben vielem anderen entwickelte er gewisse Vorstufen zur Integralrechnung.

Schließlich ist noch **Apollonius von Perge** (ca. 260 – 200 v.Chr.) zu nennen, mit seinen umfangreichen Untersuchungen über Kegelschnitte.

Um 200 v.Chr. war die Mathematik auf einer Stufe angekommen, von der aus mit den alten Hilfsmitteln (also ohne Infinitesimalrechnung) ein Höhersteigen kaum mehr möglich war.

§ 2 Axiomatische Mathematik

Stellen Sie sich vor, ich möchte Sie davon überzeugen, daß eine gewisse Aussage (A1) richtig ist! Wenn Sie zweifeln, werde ich Ihnen stattdessen eine offensichtlichere Aussage (A2) anbieten, aus der (A1) logisch folgt. Wenn Ihnen auch das nicht reicht, werde ich nach einer noch unbedenklicheren Aussage (A3) suchen, aus der wiederum (A2) folgt. Und wenn wir viel Geduld haben, können wir so fortfahren und eine endlose Kette von Folgerungen aufbauen:

$$\ldots \Longrightarrow (A_{n+1}) \Longrightarrow (A_n) \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow (A_3) \Longrightarrow (A_2) \Longrightarrow (A_1).$$

Das ist die deduktive Methode, aber so führt sie nicht zum Ziel.

Irgendwann müssen wir bei Aussagen ankommen, die jeder als wahr akzeptiert. Eine solche Aussage nennt man ein **Axiom** oder **Postulat**.

Beispiel: Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.

Auf den ersten Blick ist das eine einfache, klare Aussage, die durch den Umgang mit dem Lineal täglich bestätigt wird. Also wird wohl niemand daran zweifeln. Und wenn doch? Die Axiome sind ein Teil der Regeln, nach denen das Spiel „Mathematik" gespielt wird. Auch bei anderen Spielen können Zweifel auftreten, ob eine Regel gilt oder nicht. Wenn in einer Skatrunde nach verlorenem Grand-Hand und angesagtem Schneider Zweifel aufkommen, wie das Spiel gezählt werden soll, dann kann es zu Streitigkeiten kommen. Aber letztlich wird man in einem Regelbuch nachschlagen und sich an das halten, was dort ausgesagt wird. Und jeder, der sich mit einer bestimmten mathematischen Theorie beschäftigen möchte, muß auch die dafür festgelegten Axiome anerkennen. So sind die Spielregeln.

Ein anderes Problem tritt auf, wenn man das Beispiel näher betrachtet. Jeder weiß, was ein Punkt und was eine Gerade ist. Wirklich? Wie dick ist denn ein Punkt? Unendlich dünn? Was heißt „unendlich dünn" ? Tatsächlich haben wir von den verwendeten Begriffen nur eine recht vage Vorstellung. Wir müßten sie erklären. Eine solche Erklärung nennt man bekanntlich **Definition**. Aber in der Definition müssen wir ja wieder Wörter benutzen, und die müssen wieder definiert werden usw. Da tut sich erneut eine unendliche Kette auf, die zu nichts führt.

Wir müssen daher auch akzeptieren, daß gewisse Begriffe nicht definiert werden können. Solche Begriffe nennt man **undefinierte Begriffe** oder **primitive Terme**. „Punkt" und „Gerade" wären z.B. solche primitiven Terme. Und die Aufgabe der Axiome ist es unter anderem, die Eigenschaften der primitiven Terme festzulegen.

Ein sogenanntes „materielles" oder „klassisches" Axiomensystem sieht nun folgendermaßen aus:

1. Zunächst werden die Grundbegriffe (die *primitiven Terme*) der Theorie festgelegt. Zur Bequemlichkeit des Lesers oder Benutzers können die Grundbegriffe erklärt werden, aber diese Erklärungen sind nicht Bestandteil der Theorie und dürfen später auch nicht verwendet werden.

2. Es wird eine Liste grundlegender Aussagen (*Axiome*) über die primitiven Terme angegeben. Die Axiome sollten möglichst einfach gehalten werden, und über ihre Wahrheit sollte allgemeine Einigkeit herrschen.

3. Alle anderen benötigten Begriffe werden mit Hilfe der primitiven Terme und der Axiome erklärt (*Definitionen*). Es ist auch erlaubt, daß ein Axiom Begriffe verwendet, die zuvor definiert worden sind.

4. Alle weiteren Aussagen (*Theoreme*, *Propositionen* usw.) werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet.

Beispiel:

Wir wollen Untersuchungen über eine Gruppe[1] von Bäumen anstellen, die ein Gärtner gepflanzt hat. Die Bäume sind so angeordnet, daß manche von ihnen in einer Reihe stehen, und dabei meinen wir natürlich keine leeren Reihen. Bei unseren Betrachtungen spielt es keine Rolle, daß es um Bäume geht, und es braucht auch niemand so genau zu wissen, was eine Reihe ist. Aber bei jedem Baum t und jeder Reihe A können wir entscheiden, ob t zu A gehört oder nicht.

Die primitiven Terme sind also „Baum“, „Reihe“ und „gehört zu“.

Axiom I: Jeder Baum gehört zu (wenigstens) einer Reihe.

Axiom II: Zwei verschiedene Bäume gehören zu genau einer (gemeinsamen) Reihe.

Definition: Eine Reihe heißt zu einer anderen *disjunkt*, falls kein Baum beiden gleichzeitig angehört.

Axiom III: Jede Reihe ist zu genau einer anderen Reihe disjunkt.

Soweit die primitiven Terme, Axiome und Definitionen. Natürlich haben wir noch immer Wörter benutzt, die nirgends eingeführt oder erklärt werden, z.B. „ein“, „zwei“, „beide“, „genau“ usw. Will man auch noch solche Begriffe als primitive Terme einführen, so wird vernünftige mathematische Arbeit nahezu unmöglich gemacht. Es steht also im Hintergrund immer noch ein Axiom der folgenden Art:

> *Zahlwörter, logische Begriffe und alle diejenigen Wörter, die nötig sind, um aus den primitiven Termen vernünftige deutsche Sätze zu bilden, werden als bekannt vorausgesetzt. Sie werden in der üblichen Bedeutung benutzt.*

Nun können wir Sätze beweisen. Dabei werden wir Zeichen aus der Mengenlehre benutzen, ohne sie noch einmal extra zu definieren.

Satz 1: Jeder Baum gehört zu mindestens zwei Reihen.

Beweis: Es sei ein Baum t gegeben. (Hypothese)

(1) Es gibt eine Reihe A mit $t \in A$. (Axiom I)

(2) Es gibt genau eine Reihe B mit $A \cap B = \varnothing$. (Axiom III)

(3) Sei $u \in B$ (Reihen sind nicht leer!). Dann ist $u \neq t$. (nach Definition)

[1] „Gruppe“ im umgangssprachlichen Sinne

(4) Es gibt genau eine Reihe C mit $t, u \in C$. (Axiom II)

(5) Da $u \in C$ und $u \notin A$ ist, ist $C \neq A$. (Logische Folgerung)

(6) Wir haben gezeigt, daß es zwei verschiedene Reihen A und C gibt, die beide den Baum t enthalten. (Zusammenfassung).

Wir haben damit sogleich ein Musterbeispiel für einen mathematischen Beweis. Wir werden etwas später versuchen, die einzelnen Schritte noch etwas genauer zu klassifizieren.

Satz 2: Jede Reihe enthält wenigstens 2 Bäume.

Beweis: Es sei eine Reihe A gegeben. (Hypothese)

(1) Es sei ein $t \in A$ gewählt. (Reihen sind nicht leer)

(2) Es gibt dann eine Reihe $B \neq A$ mit $t \in B$. (nach Satz 1)

(3) Es gibt genau eine Reihe C mit $C \cap B = \varnothing$. (Axiom III)

(4) C enthält nicht den Baum t. (Logische Folgerung)

(5) Annahme: A enthält nur den Baum t. (zusätzliche Hypothese, um einen Widerspruchsbeweis zu führen)

(6) Dann ist $A \cap C = \varnothing$. (Logische Folgerung aus (4) und (5))

(7) Es gibt genau eine Reihe D mit $D \cap C = \varnothing$. (Axiom III)

(8) Es muß $D = B$ und $D = A$ sein. (Folgerung aus (3) und (6))

(9) Also ist $A = B$. (logische Folgerung)

(10) Das ist ein Widerspruch zu (2), die Annahme ist falsch.

(11) A enthält wenigstens 2 Bäume. (Zusammenfassung).

Nun kann man schon eine recht weitgehende Folgerung ziehen:

Satz 3: Es gibt mindestens 6 Reihen.

Beweis:

(1) Es sei t ein beliebiger Baum. (Die Menge der Bäume ist nicht leer!)

(2) Es gibt zwei Reihen $A \neq B$ mit $t \in A$ und $t \in B$. (Satz 1)

(3) Es gibt einen Baum $s \neq t$ mit $s \in A$ und $s \notin B$. (Satz 2 und Axiom II)

(4) Es gibt einen Baum $q \neq t$ mit $q \in B$ und $q \notin A$. (Satz 2 und Axiom II)

(5) Für zwei Bäume a, b werde die dadurch eindeutig bestimmte Reihe mit $\overline{ab}$ bezeichnet. Dann definieren wir $F := \overline{sq}$. Offensichtlich ist $F \neq A$ und $F \neq B$.

(6) Es gibt genau eine zu B disjunkte Reihe C, und genau eine zu A disjunkte Reihe D.

(7) C und D können nicht disjunkt sein, denn dann wäre z.B. $D = B$, und das ist unmöglich!

(8) Es kann auch nicht $C = D$ sein, denn dann müßte $A = B$ sein.

(9) Also ist $C \neq D$, aber es gibt einen Baum $r \in C \cap D$.

(10) Es gibt schließlich genau eine zu F disjunkte Reihe E. Dies kann weder A, noch B, C oder D sein.

(11) Offensichtlich sind die Reihen A, B, C, D, E und F alle voneinander verschieden.

Satz 4: Jede Reihe enthält genau 2 Bäume. Insgesamt gibt es genau 4 Bäume und 6 Reihen.

Den Beweis überlasse ich den Lesern als Übungsaufgabe.

Tatsächlich haben wir nie besondere Eigenschaften von Bäumen oder Reihen benutzt. Deshalb ist es möglich, die Axiome auch völlig anders zu interpretieren:

Der Schildkröten-Club

Die Mitglieder des Schildkröten-Clubs sind natürlich alles Schildkröten. Sehr gerne finden sich eine oder mehrere Schildkröten zusammen, um einen Ausschuß zu bilden. Zur Zeit verhält es sich folgendermaßen:

1. Jede Schildkröte gehört mindestens einem Ausschuß an.
2. Je zwei Schildkröten gehören genau einem gemeinsamen Ausschuß an.
3. Zu jedem Ausschuß findet sich genau ein anderer Ausschuß, dessen Mitglieder alle dem zuerst genannten Ausschuß nicht angehören.

Folgerung: Der Club umfaßt genau 4 Mitglieder, und es gibt genau 6 Ausschüsse.

Sie ahnen jetzt vielleicht, wie die berühmten Logeleien von Zweistein entstehen!

Wir wollen zum Ernst des Lebens zurückkehren. Was man aus dem obigen Beispiel lernen kann: Ein Axiomensystem braucht gar nicht „materiell“ zu sein. Es kann sinnvoll sein, ohne daß die primitiven Terme mit ihren axiomatisch festgelegten Eigenschaften irgendwelchen Dingen in der Wirklichkeit entsprechen. David Hilbert , der 1899 in seinen *Grundlagen der Geometrie* erstmals ein aus heutiger Sicht einigermaßen befriedigendes Axiomensystem für die Euklidische Geometrie aufgestellt hat, drückte es einmal recht drastisch so aus:

> *Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Bänke, Bierseidel“ sagen können.*

Warum diese Erkenntnis so lange auf sich hat warten lassen, werden wir an anderer Stelle diskutieren. Hier wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, welche Eigenschaften wir von einem modernen Axiomensystem erwarten.

A) **Widerspruchsfreiheit**

Natürlich soll das Deduzieren innerhalb eines Axiomensystems nicht zu Widersprüchen führen. Aber wie kann man beweisen, daß kein Widerspruch auftritt? Am besten konstruiert man ein Modell!

Wenn man statt von Bäumen und Reihen von Ecken und Kanten eines Polyeders spricht, sieht man sehr schnell, daß die Ecken und Kanten eines Tetraeders ein Modell für unser Beispiel-Axiomensystem abgeben. Also ist das System widerspruchsfrei.

Die kartesische Koordinaten-Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ergibt ein Modell für die ebene Euklidische Geometrie. Mit Hilfe der Formeln der Analytischen Geometrie kann man nachweisen, daß alle Axiome erfüllt sind. Allerdings benutzt man dabei implizit das Axiomensystem für die reellen Zahlen. Um nun dessen Widerspruchsfreiheit zu beweisen, muß man ein Modell für $\mathbb{R}$ konstruieren. Das ist möglich, etwa mit Hilfe von rationalen Cauchy-Folgen. Allerdings ist dieser Weg kompliziert, und irgendwann erkennt man, daß man dabei ein Axiomensystem für die Mengenlehre und die natürlichen Zahlen braucht. Der Schwarze Peter kommt immer wieder zurück! Von der Mengenlehre zur Logik, zur Meta-Logik usw.

Es scheint so zu sein, daß man die Widerspruchsfreiheit eines etwas höheren Axiomensystems nicht beweisen kann, ohne die eines etwas primitiveren Systems als gegeben hinzunehmen. Kurt Gödel, der Meister der mathematischen Grundlagenforschung, hat gezeigt, daß es tatsächlich so ist.

B) **Unabhängigkeit**

Kein Axiom soll aus den anderen hergeleitet werden können. Diese Forderung spiegelt den Wunsch nach einem möglichst einfachen Axiomensystem wieder. Leider führt der Versuch, sie zu erfüllen, eher zu unpraktischen Systemen. Um das näher erläutern zu können, muß ich erst sagen, wie man beweist, daß ein Axiom von den anderen unabhängig ist.

Um zu zeigen, daß Axiom A von einem System S von Axiomen unabhängig ist, muß man ein Modell konstruieren, in dem alle Axiome von S gelten, nicht aber das Axiom A.

Beispiel: Die Axiome I und II für Bäume und Reihen sind genauso für Punkte und Geraden der Ebene erfüllt. Also ist die Euklidische Ebene ein passendes Modell. Allerdings ist Axiom III dort nicht erfüllt. Das zeigt die Unabhängigkeit von III.

Beispiel: Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$, deren Elemente folgende Axiome erfüllen:

1. $\forall\, x, y, z \in G\ :\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

2. $\forall\, a, b \in G\ \exists\, x, y \in G$ mit $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$.

Die Axiome sind unabhängig: $G_1 := \mathbb{R}$ mit $x \circ y := \frac{x+y}{2}$ erfüllt das 2. Axiom (es ist $a \circ (2b - a) = b$ und $(2b - a) \circ a = b$), aber nicht das 1. Axiom. Hingegen erfüllt $G_2 := \mathbb{R}$ mit $a \circ b := a$ das erste Axiom, aber offensichtlich nicht das zweite.

Obwohl das genannte Axiomensystem widerspruchsfrei und unabhängig ist, ist es nicht so gut, denn es ist z.B. schon mühsam, die Existenz eines neutralen Elementes zu beweisen. Deshalb benützt man viel lieber das etwas redundante bekannte Axiomensystem:

G1 $\forall\, x, y, z\, :\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

G2 $\exists\, e$, s.d. $\forall\, x\, :\, x \circ e = e \circ x = x$.

G3 $\forall\, x\ \exists\, y$ mit $x \circ y = y \circ x$.

C) **Vollständigkeit**

Ein System ist vollständig, wenn man kein unabhängiges Axiom hinzufügen kann (das nur die schon bekannten Terme benutzt), ohne Widersprüche zu erzeugen. Das bedeutet, daß jeder Satz, der mit den Termen des Systems formuliert werden kann, entweder bewiesen oder widerlegt werden kann.

Die Vollständigkeit eines Systems ist i.a. sehr schwer nachzuweisen.

D) **Kategorizität**

Ein Axiomensystem heißt *kategorisch*, wenn es widerspruchsfrei ist, und wenn je zwei Modelle „isomorph“ sind, wenn also das Modell im Wesentlichen eindeutig festgelegt ist.

Die Axiome der Gruppentheorie sind nicht kategorisch, z.B. gibt es endliche und unendliche Gruppen. Das Beispiel mit den Bäumen und Reihen ist kategorisch. Das Axiomensystem der Euklidischen Geometrie nach Hilbert ist kategorisch, das von Euklid aber nicht, wie wir noch sehen werden. Läßt man das Parallelen-Axiom weg, ist auch das Hilbertsche System nicht mehr kategorisch. Das ist das Thema dieser Vorlesung.

Ein kategorisches System ist übrigens automatisch vollständig: Sei S ein kategorisches System und A ein weiteres mit S verträgliches Axiom, das unabhängig von S ist. Dann gibt es ein Modell M_1 für $S \cup \{A\}$ und ein Modell M_2 für S, in dem A falsch ist. Das liefert zwei nicht-isomorphe Modelle für S, und das ist nicht möglich.

Umgekehrt folgt allerdings aus der Vollständigkeit nicht die Kategorizität.

Immer wieder war oben von *Logik* die Rede. Gemeint ist die formale Aussagenlogik, die heute allen mathematischen Schlußfolgerungen zu Grunde liegt. Das entsprechende Regelwerk ist Teil eines jeden Axiomensystems. Aber woher nehmen wir die Gewißheit, daß wir mit der richtigen Logik arbeiten? Die Antwort ist: Es gibt keine Gewißheit! Es gibt lediglich die Jahrtausende lange Erfahrung, daß es mit dieser Logik ganz gut klappt. Wo das Problem liegt, will ich an Hand eines einfachen Beispiels erläutern. Wir betrachten drei einfache Aussagen:

(A) Zwei Dinge, die einem dritten gleich sind, sind auch einander gleich.

(B) Die beiden Seiten a und b eines gegebenen Dreiecks sind einer gegebenen Strecke gleich.

(C) Die Seiten a und b des gegebenen Dreiecks sind gleich.

Offensichtlich gilt dann die Aussage

$$\text{(Z)}: \quad \text{(A)} \land \text{(B)} \implies \text{(C)}.$$

Jeder, der die Aussagen (A) und (B) akzeptiert, muß auch (C) akzeptieren. Aber die Aussagenlogik geht noch weiter: Auch jemand, der (A) oder (B) nicht akzeptiert, muß zumindest die Implikation (Z) akzeptieren.

Doch was ist mit dem, der zwar (A) und (B) glaubt, aber nicht die Gültigkeit der Implikation (Z) ? Der braucht natürlich auch (C) nicht zu akzeptieren! Also führen wir eine weitere Aussage ein:

$$\text{(Z')}: \quad \text{(A)} \land \text{(B)} \land \text{(Z)} \implies \text{(C)}.$$

Wir haben neben (A) und (B) nun auch (Z) zu einer Hypothese gemacht, die unser Gegenüber des lieben Friedens willen akzeptiert, und nun braucht er nur noch an (Z') zu glauben, um (C) zu akzeptieren. Doch das tut er nicht!

Wir können jetzt natürlich eine Aussage (Z") einführen:

$$\text{(Z")}: \quad \text{(A)} \land \text{(B)} \land \text{(Z)} \land \text{(Z')} \implies \text{(C)}.$$

Aber besser ist es wohl, die Diskussion an dieser Stelle abzubrechen. Gewisse traditionelle Regeln müssen einfach ohne Begründung benutzt werden.

Schließlich wollen wir noch einmal die möglichen Schritte eines Beweises auflisten:

1. Nach Hypothese gilt ...,
2. Nach einem Axiom gilt ...,
3. Nach Definition gilt ...,
4. Nach einem vorangegangenen Schritt des Beweises gilt ...,
5. Nach einem früher bewiesenen Satz gilt ...,
6. Nach einer logischen Regel folgt ...,
7. Nach Annahme der verneinten Folgerung gilt ....

Einzig der letzte Schritt ist ungewöhnlich. Es handelt sich um die Einleitung eines Widerspruchsbeweises („reductio ad absurdum“, kurz RAA). Dahinter steckt folgendes logisches Prinzip:

Es soll eine Implikation $A \implies B$ bewiesen werden. Das ist äquivalent zu der Aussage $B \vee (\neg A)$. Und diese Aussage ist genau dann wahr, wenn ihre Verneinung $(\neg B) \wedge A$ falsch ist. Zeigt man nun eine Implikation

$$A \wedge (\neg B) \implies C,$$

mit einer offensichtlich falschen Aussage C, so muß die Prämisse tatsächlich falsch gewesen sein, und $A \implies B$ ist wahr. Dies ist die stärkste Waffe, die dem Mathematiker zur Verfügung steht.

Das Ganze funktioniert natürlich nur auf Grund unserer zweiwertigen Logik, die außer „wahr“ und „falsch“ keine Wahrheitswerte kennt. Nur so sind wir auch in der Lage, den Begriff „Unendlichkeit“ zu erfassen. Ich illustriere das an einem Beispiel von Euklid:

Im 7. Buch definiert Euklid:

- Eine *Zahl* ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Größe.

  Bei Euklid werden auch algebraische Rechnungen stets geometrisch interpretiert. Die Eins galt bei den Griechen nicht als Zahl, aber man konnte eine Strecke als Einheit festlegen. Eine „Zahl“ im obigen Sinne ist dann eine Strecke, die ganzzahliges Vielfaches der Einheitsstrecke ist. Genauso verfährt man mit anderen Größen, z.B. Flächen. Schwierigkeiten bereitete die Multiplikation. Ganzzahlige Vielfache konnte man durch Addition von Strecken bilden, aber ein beliebiges Produkt von Strecken wurde als Fläche interpretiert, ein dreifaches Produkt als räumliches Gebilde. Vierfache Potenzen waren dann nicht mehr möglich.

- Eine *Primzahl* ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen läßt.

  Das entspricht der modernen Definition: Eine Primzahl ist eine Zahl, die außer der 1 keine echten Teiler besitzt.

Im 9. Buch findet sich nun der folgende berühmte Satz:

> Proposition 20: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*

Wir sagen heute: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* Aber die Griechen haben den Begriff „Unendlich“ in der Mathematik nicht zugelassen, weder im Großen, noch im Kleinen. Also mußte Euklid eine Formulierung finden, die den Gebrauch von „Unendlich“ umgeht. Der Witz ist, daß wir auch heute noch nicht wissen, was „unendlich viele“ Primzahlen sind. Ihre Existenz beweisen wir durch Widerspruch: Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele, und dann zeigen wir genau nach Euklid, daß es doch noch wenigstens eine Primzahl mehr gibt. Dieser Widerspruch ist für uns der Ausdruck dafür, daß die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Bei Euklid sieht das folgendermaßen aus:

Es seien Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ vorgelegt und der Größe nach sortiert, $q := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ und $x := q + 1$. Ist x eine Primzahl, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist x keine Primzahl, so besitzt x wenigstens einen Primteiler y.

Annahme: y ist eine der vorgelegten Primzahlen. Dann teilt y die Zahl q und die Zahl x, also auch die Differenz $x - q = 1$. Aber das ist absurd. Q.e.d.

§ 3 Die „Elemente“ des Euklid

Der Inhalt der 13 Bücher der „Elemente“ kann kurz wie folgt beschrieben werden:

I) Anfänge der ebenen Geometrie, bis zum Lehrsatz des Pythagoras.

II) Polygone, geometrische Algebra (z.B. binomische Formel).

III) Kreislehre (aber ohne Inhalt und Umfang, die erst von Archimedes gefunden wurden).

IV) Reguläre Polygone.

V) Proportionenlehre nach Eudoxus (gewissermaßen eine Einführung in die „reellen Zahlen“; in Definition 4 taucht sogar schon das „Axiom des Archimedes“ auf).

VI) Ähnlichkeitslehre, Flächen, Anfänge der Theorie der Kegelschnitte, die erst von Apollonius vollendet wurde, dann aber in einer Form, die bis zur Einführung der Analytischen Geometrie (von Descartes, 1596 - 1650, einem Zeitgenossen Galileis) gültig blieb.

VII) Zahlentheorie (Primzahlen, ggT und kgV, „Euklidischer Algorithmus“, vollkommene Zahlen).

VIII) und

IX) Potenzen und Wurzeln, Primfaktorzerlegung, endliche geometrische Reihen.

X) Rechnen mit irrationalen Zahlen.

XI) Anfänge der Stereometrie.

XII) Rauminhalte, Exhaustions-Methode.

XIII) Einführung der 5 regulären Polyeder (Würfel, Pyramide, Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder), Kantenberechnungen, Beweis dafür, daß es keine weiteren regulären Polyeder gibt.

Die „Elemente“ haben kein Vorwort, keine Einführung, keine Motivation, keinen Kommentar und keine Erklärungen. Sie beginnen im 1. Buch mit 23 „Definitionen“, 5 „Postulaten“ und einigen „Axiomen“. Danach folgen unmittelbar die Sätze.

In den weiteren Büchern gibt es noch allerlei Definitionen, aber keine Postulate oder Axiome mehr.

Wir werden jetzt einige Teile des ersten Buches studieren, um daraus die Anregungen für ein Axiomensystem zu gewinnen, das den Ideen Euklids möglichst nahe steht.

Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.

   Hier versucht Euklid, einen undefinierbaren Begriff einzuführen. Heute sagen wir, der erste primitive Term wird eingeführt. Es ist gut möglich, daß Euklid in seinen Vorlesungen an dieser Stelle eine ausführliche Einführung gegeben hat, die von seinen Schülern nie aufgeschrieben wurde.

   Es gibt allerdings einen Zusammenhang zu der Grundlagen-Krise um die nicht kommensurablen Größen. Wenn ein Punkt keine Ausdehnung hat, dann ist nur schwer zu verstehen, daß man eine Linie aus Punkten zusammensetzen kann. Wenn ein Punkt hingegen eine Ausdehnung besitzt, dann liefert uns das genau diejenige Elementarlänge, mit der man jede Strecke messen kann. Daß das nicht möglich ist, folgt aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$.

2. Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.

   Anschaulich bedeutet das, daß eine „Linie“ immer ein 1-dimensionales Gebilde ist. Für den Aufbau einer axiomatischen Theorie ist die Aussage aber wertlos. Wir können sie höchstens als Einführung eines weiteren primitiven Terms auffassen. Mit „Linien“ können übrigens auch gekrümmte Linien gemeint sein.

3. Die Enden einer Linie sind Punkte.

   Hier wird kein neuer Begriff eingeführt, oder höchstens das Wort „Ende“. Der Satz hat eher die Form eines Axioms, ist dafür aber nicht klar genug. Immerhin lernen wir, daß es bei Euklid keine unendlich weit ausgedehnten Linien gibt.

4. Eine Linie ist **gerade** (also eine „Strecke“), wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.

   Hier wird der primitive Term „Gerade“ eingeführt, der bei Euklid mit dem Begriff „Strecke“ zusammenfällt. Die Erklärung ist recht seltsam und schwer zu interpretieren. Zum einen könnte man sich vorstellen, daß die Gerade durch Anpeilen zweier Punkte festgelegt wird, also dem Verlauf der Lichtstrahlen entspricht. Das wäre eine recht moderne Deutung. Zum anderen könnte man die Eindeutigkeit der Gerade durch zwei Punkte herauslesen.

5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.

   Eine „Fläche“ ist also immer ein 2-dimensionales Gebilde.

6. Die Enden einer Fläche sind Linien.

   Aus diesem Satz kann man entnehmen, daß auch Flächen bei Euklid stets nur begrenzte Flächen sind, wie z.B. das Innere eines Dreiecks oder eines Kreises.

7. Eine Fläche ist **eben**, wenn sie zu den geraden Linien auf ihr auf einerlei Art gelegen ist.

Diese „Definition“ führt die „Ebene“ als primitiven Term ein. Die anschauliche Erklärung könnte bedeuten, daß eine Ebene festgelegt ist, wenn man zwei Geraden in ihr anpeilt. Wir nehmen das hier als Eindeutigkeitsforderung: Zwei (sich schneidende) Geraden bestimmen eindeutig eine Ebene.

8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.

   Auf den ersten Blick wird hier der Begriff „Winkel“ als primitiver Term festgelegt. Daß auch Winkel zwischen krummen Linien zugelassen werden, hat später zu langen Kontroversen um den Winkel zwischen einem Kreis und seiner Tangente geführt.

   Vergessen wir die krummen Linien und den überflüssigen nicht erklärten Begriff „Neigung“, so können wir eine halbwegs anständige Definition daraus machen:

   > *Ein (ebener) Winkel besteht aus 2 Strecken einer Ebene, die vom gleichen Punkt ausgehen und nicht auf der gleichen Geraden liegen.*

   Tatsächlich ist weder ein Winkel von $0°$, noch ein Winkel von $180°$ zugelassen. Von den beiden Winkeln, die zwischen den Strecken gebildet werden, soll stets der kleinere genommen werden. Diese Information versteckt sich wohl hinter dem Wort „Neigung“. Um das exakt zu formulieren, muß man einige Anstrengungen unternehmen (vgl. nächster Paragraph!).

   Es fällt aber auf, daß durch die Reihenfolge der Euklidschen Definitionen doch eine Trennung zwischen der Einführung primitiver Terme und den echten Definitionen stattfindet.

9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.

10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**;
    und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.

    Das bedeutet: Ist AB eine Strecke und P ein Punkt dieser Strecke, der zwischen A und B liegt (dieses „zwischen“ muß eigentlich auch erst axiomatisch eingeführt werden), sowie Q ein weiterer Punkt, der nicht auf AB liegt, so entstehen zwei Winkel, nämlich $\angle APQ$ zwischen AP und PQ und $\angle QPB$ zwischen QP und PB. Dann ist die Strecke QP auf die Strecke AB gestellt, und die genannten Winkel heißen „Nebenwinkel“. Sind sie gleich (und auch dieses „gleich“ muß noch erklärt werden), so nennt man beide „rechte Winkel“, und QP steht im Punkt P senkrecht auf AB.

11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.

    Diese Definition ist erst dann sinnvoll, wenn geklärt ist, wie man Winkel miteinander vergleicht.

12. **Spitz** ist ein Winkel, wenn er kleiner als ein Rechter ist.

15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind.

    Diese Definition enthält zahlreiche Annahmen, die weder durch Festlegung primitiver Terme, noch durch Axiome oder Sätze gesichert sind. Insbesondere wird benutzt, daß ein Kreis die Ebene in einen inneren und einen äußeren Bereich unterteilt, und daß Strecken vom Inneren zum Äußeren die Kreislinie treffen. Schließlich wird auch noch der Vergleich von Strecken benutzt.

16. Der in Definition 15 genannte Punkt heißt **Mittelpunkt** des Kreises.

17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von der Kreislinie begrenzte Strecke;
    eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

    Wieder werden unbewiesene Annahmen gemacht, und der etwas vage formulierte Zusatz hat die Form eines Axioms oder Satzes. Er würde an späterer Stelle folgen, wird hier aber zur Definition des „Halbkreises“ benötigt (Def. 18).

19. - 22. definiert verschiedene Figuren, insbesondere Dreiecke (auch gleichschenklige, gleichseitige, rechtwinklige, spitz- und stumpfwinklige Dreiecke), sowie Rechtecke, Quadrate und andere Vierecke.

    Unter einem Dreieck versteht Euklid die Fläche des Dreiecks, zusammen mit den begrenzenden Strecken. Er argumentiert dann später in seinen Beweisen auch häufig mit der Fläche. Gemeint ist die Fläche mit all ihren unter Deck-Abbildungen invarianten Eigenschaften, insbesondere auch mit dem Flächeninhalt, ohne daß für letzteren eine saubere Erklärung gegeben wird.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

    Diese Definition ist erstaunlich klar formuliert. Im Originaltext steht sicher nicht „ins Unendliche verlängert“, denn die Griechen haben den Begriff des Unendlichen in der Mathematik nicht verwendet. Es handelt sich wohl um einen Übersetzungsfehler in der deutschen Ausgabe von Clemens Thaer. In der englischen Ausgabe von Sir Thomas Heath heißt es „unbeschränkt verlängert“, und in den Beweisen wird in diesem Zusammenhang immer mit dem Widerspruchsprinzip gearbeitet. Dann ist natürlich auch nur eine Verlängerung im Endlichen notwendig.

    In einem modernen Axiomensystem würde man die Existenz von Parallelen und die Möglichkeit der Verlängerung von Strecken vor dieser Definition behandeln.

Postulate

Gefordert soll sein:

I. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;

II. Daß man eine berenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann;

III. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.

IV. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind;

V. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Die fünf Postulate sind geometrische Forderungen und als solche die entscheidenden Axiome der Euklidischen Geometrie.

Postulat I führt die Möglichkeit ein, mit einem unmarkierten Lineal die Strecke zwischen zwei Punkten zu zeichnen. Aus den vorhandenen Texten ist eine Forderung nach Eindeutigkeit nicht klar herauszulesen. Die Definition der geraden Linie und der konstruktive Aspekt des ersten Postulats legen aber die Vermutung nahe, daß die eindeutige Existenz der Verbindungsstrecke gemeint war.

Da Strecken begrenzte Figuren sind, wird in Postulat II die Verlängerbarkeit einer Strecke über einen Endpunkt hinaus gefordert. Später wird in den Beweisen eine viel stärkere Eigenschaft benutzt („Axiom des Archimedes“). Ich vermute daher, daß es hier weniger um die Existenz der Verlängerung geht, die wurde als selbstverständlich erachtet, sondern vielmehr um eine Auflistung erlaubter Konstruktionsmethoden (im Sinne der Konstruktion mit „Zirkel“ und „Lineal“).

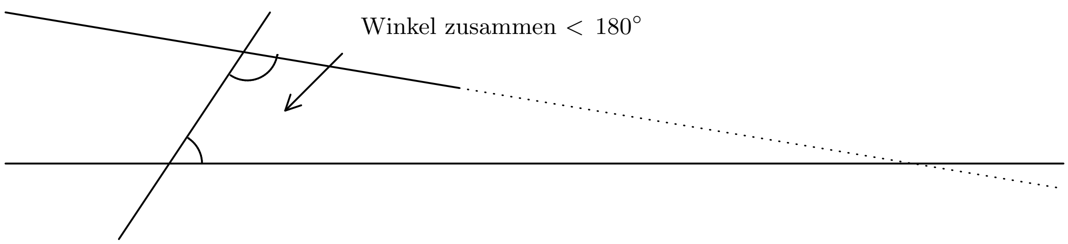
Postulat III führt den Zirkel ein. Erst aus den späteren Beweisen ergibt sich, wie das genau gemeint ist: Ist ein Punkt P und eine bei P angelegte Strecke PQ gegeben, so kann der Kreis um P durch Q gezeichnet werden. Durch Schnitt mit einer anderen konstruierbaren Linie kann man dann im Prinzip jeden Punkt auf der Kreislinie erreichen.

Nimmt man den Zirkel weg, muß man ihn zusammenklappen. Er kann also nicht benutzt werden, um Strecken zu übertragen.

Postulat IV ist überraschend. Hier wird ausdrücklich die Eindeutigkeit gefordert, die sonst meist nur stillschweigend vorausgesetzt wird. Auch unterscheidet sich Postulat IV von den ersten drei im Abstraktheitsgrad. Es gibt Deutungen, wonach hier die Homogenität der Ebene gefordert wird, damit Deckungs-Beweise überhaupt erst möglich werden.

Aber vielleicht steckt doch etwas einfacheres dahinter: Unverkennbar ist die Bedeutung des rechten Winkels als Eichmaß für Winkel. Für das Messen von Strecken steht ja ein solches Maß nicht zur Verfügung, es sei denn, man wählt willkürlich eine Strecke als Einheitsstrecke (was Euklid ja später tatsächlich macht, um z.B. Sätze über Primzahlen zu beweisen). Nun kann der rechte Winkel als Eichmaß nur dann genutzt werden, wenn auch tatsächlich an jeder gewünschten Stelle ein solcher zur Verfügung steht. Zwar wird die Existenz in Postulat IV nicht gefordert, das erledigt vielmehr später ein Satz. Aber es wird eine Konstruktionsvorschrift gegeben! Wenn man nämlich wie in der Definition des rechten Winkels verfährt, erhält man – auf Grund des Postulats – einen genormten rechten Winkel. Man braucht nicht erst einen anderswo gegebenen an die gewünschte Stelle zu übertragen. Und genau so geht Euklid später in den Beweisen vor. Wird ein beliebiger vorgegebener Winkel benötigt, muß er angetragen werden. Wie das geschieht, erfährt man im Beweis zu Proposition 23. Dazu ist es jedoch erforderlich, ein Dreieck zu übertragen; und daß das wiederum möglich ist, liegt an der „Dreiecksungleichung“ (Proposition 20). Diese folgt aus dem berühmten Außenwinkelsatz (Proposition 16), in dessen Beweis die Gleichheit von Scheitelwinkeln benutzt wird, und diese beruht auf der Tatsache, daß Nebenwinkel zusammen immer zwei Rechten entsprechen (Proposition 13). Also ist es erforderlich, schon sehr frühzeitig rechte Winkel konstruieren bzw. als solche erkennen zu können. Da dort aber noch keine Winkelübertragung zur Verfügung steht, braucht man Postulat IV.

Die Aufstellung von Postulat V gilt als große Leistung Euklids. Wir wollen die Situation erst einmal anschaulich betrachten:



Der Terminus „Verlängerung ins Unendliche“ ist sicher wieder falsch übersetzt. In Wirklichkeit geht es ja um die Existenz eines Schnittpunktes im Endlichen.

Es fällt auf, daß die Formulierung viel komplizierter als bei den anderen Axiomen ist, und der Sachverhalt ist auch nicht unmittelbar einleuchtend, denn der geforderte Schnittpunkt kann so weit entfernt sein, daß man ihn nicht beobachten kann. Insofern entspricht Postulat V nicht den Vorstellungen, die man im Altertum von Axiomen hatte.[2]

Von Anfang an gab es daher Zweifel, ob es sich wirklich um ein Axiom handelte, oder ob nicht vielmehr Euklid es nur nicht geschafft habe, die Aussage zu beweisen. Für diese Theorie sprach unter anderem, daß Euklid selbst gezögert hat, das Postulat anzuwenden. Er benutzt es zum ersten Mal in Proposition 29 und beweist vorher etliche Sätze mit großer Mühe, die mit Hilfe von Postulat V fast trivial wären. Ein weiteres Indiz für die Beweisbarkeit scheint die Tatsache zu sein, daß die Umkehrung ein Satz ist:

> Proposition 17: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.*

Das kann man auch so formulieren:

> *Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten getroffen werden, so bildet die schneidende mit den beiden anderen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*

[2] Eine andere Deutung des Parallelenaxioms, die dieses wieder in den Bereich der Konstruktionsmethoden rückt, werde ich an späterer Stelle geben!

Über die Versuche, das Postulat V zu beweisen, werde ich später berichten. Wozu braucht aber Euklid das Postulat, und warum wird es das „Parallelenpostulat“ genannt? Es kommen ja gar keine Parallelen vor.

Die Existenz einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt wird in Proposition 31 bewiesen, aber ohne Postulat V. In Proposition 32 wird u.a. gezeigt, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechten entspricht. Das geht nur mit der Information, daß Wechselwinkel an Parallelen gleich sind. Und das wiederum wird in Proposition 29 bewiesen. Die Annahme, daß diese Aussage falsch ist, führt nämlich zu einem Widerspruch zum Parallelenaxiom. Und nun ist der Weg frei für eine Behandlung der Geometrie in der Weise, wie man es von der Schule her kennt.

Wir werden wohl nie wissen, ob Euklid selbst Zweifel an seinem fünften Postulat hatte, oder ob er vielmehr ganz bewußt eine Trennung zwischen dem Teil der Geometrie, der das Postulat benötigt, und dem, der davon unabhängig ist, herbeiführen wollte. Auf jeden Fall ist der so festgelegte Aufbau der Geometrie eine hervorragende Leistung.

Axiome

Während die Postulate rein geometrische Forderungen enthalten, sind die Axiome von grundlegenderer Natur und behandeln in erster Linie logische und besonders offensichtliche Annahmen:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Was einander deckt, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.
6. Zwei Strecken umfassen keine Fläche.

Die ersten drei Aussagen kann man leicht in Formeln schreiben:

$$\begin{aligned} a = c \quad &\wedge \quad b = c \quad \Longrightarrow \quad a = b \\ a = b \quad &\wedge \quad c = d \quad \Longrightarrow \quad a + c = b + d \\ a = b \quad &\wedge \quad c = d \quad \Longrightarrow \quad a - c = b - d. \end{aligned}$$

Dabei sind mit a, b, c, d wohl stets Größen gleicher Art gemeint, wie etwa Strecken, Flächen oder Körper. Natürlich fehlen viele Relationen ähnlicher Art, die dann später benutzt werden. Es ist möglich, daß es im Original tatsächlich mehr waren.

Was mit der Gleichheit eigentlich gemeint ist, wird erst mit Aussage 4 klar. Gleichheit bedeutet Deckungsgleichheit. Damit tritt ein neuer undefinierter Begriff auf, mit dem Euklid erhebliche Schwierigkeiten hatte. Er hat ja viel Material früherer Generationen benutzt, und da wurden oft Beweise mit Hilfe der Deckungsgleichheit geführt. Er hat versucht, das zu vermeiden, wo es ging. Aber an einigen Stellen konnte er auf diese

Methode nicht verzichten, etwa beim Beweis gewisser „Kongruenzsätze“. Diese Beweise sind meist recht unbefriedigend.

Aussage 5. beschreibt, wie Größen verglichen werden müssen. Man versucht, sie zur Deckung zu bringen, und wenn es sich dann zeigt, daß die eine Größe in der anderen enthalten ist, dann gilt sie als die kleinere. Alles wird über geometrische Konstruktionen abgewickelt.

Die 6. Aussage gehört nicht in allen Quellen zu den Axiomen, aber sie wird später in einem Beweis benötigt.

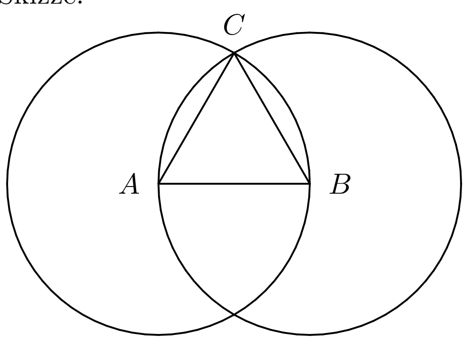
Nun folgen die

Sätze

Proposition 1. *Über einer gegebenen Strecke kann ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.*

Beweis: Die Formulierung ist etwas eigenartig. Aber viele der Euklidischen Sätze sind reine Konstruktionsvorschriften.

Verwendet wird folgende Skizze:



1. AB sei die gegebene Strecke.
2. Schlage Kreis um A mit Radius AB.
3. Schlage Kreis um B mit Radius AB.
4. Sei C ein Punkt, wo sich die Kreise treffen.
5. Verbinde C mit A zur Strecke AC.
6. Verbinde C mit B zur Strecke BC.
7. Es ist $AC = AB$ (Radien eines Kreises).
8. Es ist $BC = AB$ (Radien eines Kreises).
9. Also ist auch $AC = BC$. (Axiom)
10. Somit ist gezeigt, daß ABC ein gleichseitiges Dreieck ist. ∎

Die Formulierung habe ich in unserer Sprache abgefaßt, aber die einzelnen Schritte entsprechen dem Originalbeweis von Euklid. Er benutzt Postulat I und III, sowie Axiom 1.

Aber es gibt ein großes Problem bei Schritt 4:

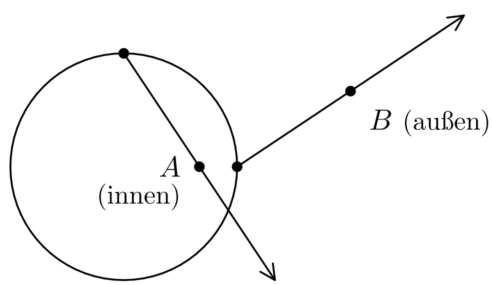
Abgesehen von dem weniger bedeutenden Problem, daß es zwei Seiten von AB gibt, ist durch nichts gesichert, daß sich die Kreise tatsächlich schneiden. Würde man als Modell der Ebene z.B. die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wählen, so würde man keinen Schnittpunkt erhalten!

Also müssen wir ein neues Postulat einfügen:

provisorisches Postulat VI

1. Ein Kreis (oder ein Dreieck) trennt die Punkte der Ebene, die nicht auf dem Kreis (oder Dreieck) liegen, in zwei Gebiete (Teilmengen), die man Äußeres und Inneres nennt.

2. Ein Punkt A liegt genau dann im Inneren eines Kreises (oder Dreiecks), wenn jede Strecke, die von einem Punkt auf dem Kreis (oder Dreieck) nach A gezogen und dann über A hinaus beliebig verlängert wird, den Kreis (oder das Dreieck) genau ein weiteres Mal trifft.



(Im Gegenzug dazu liegt dann ein Punkt B im Äußeren, wenn es eine Strecke von einem Punkt des Kreises (Dreiecks) nach B gibt, die auch nach beliebiger Verlängerung über B hinaus den Kreis (das Dreieck) nicht mehr trifft.)

3. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt im Inneren des Kreises, und jede Gerade durch den Mittelpunkt trifft auf beiden Seiten den Kreis. (Diese Aussage macht Definition 17 erst sinnvoll!)

4. Jede Linie, die von einem Punkt im Äußeren zu einem Punkt im Inneren gezogen wird, trifft den Kreis (bzw. das Dreieck).

Daß derartige Aussagen gefordert oder bewiesen werden müssen, war den Mathematikern bis ins vorige Jahrhundert kaum bewußt geworden. Erst Moritz Pasch stellte 1882 ein Axiomensystem für die ebene Geometrie auf, das in seiner Logik wesentlich strenger als das Euklidische war und insbesondere die Probleme der Anordnung von Punkten sehr viel besser berücksichtigte. David Hilbert hat in seinen „Grundlagen der Geometrie“ dann das „Axiom von Pasch“ aufgenommen, das im wesentlichen besagt: *Wenn eine Gerade ins Innere eines Dreiecks eintritt, tritt sie auch wieder heraus.* Damit können auch Probleme wie das Schneiden von Kreisen erledigt werden.

Wir versuchen jetzt, den Euklidschen Beweis von Proposition 1 zu verbessern:

Schritt 4: Es sei $\mathcal{K}_1$ der Kreis um A und $\mathcal{K}_2$ der Kreis um B. Dann liegt A auf $\mathcal{K}_2$ und B im Innern von $\mathcal{K}_2$.

4a. Verlängere AB über B hinaus bis zu einem Punkt D auf $\mathcal{K}_2$.

4b. Da AB ein Teil von AD ist, ist $AD > AB$. Also ist AD kein Radius von $\mathcal{K}_1$, und D liegt nicht auf $\mathcal{K}_1$.

4c. Annahme, D liegt im Innern von $\mathcal{K}_1$.

4d. Dann kann man BD über D hinaus verlängern, bis zu einem Punkt E auf $\mathcal{K}_1$.

4e. Da durch B und D nur eine Gerade geht, ist AB in AE enthalten, also $AB < AE$.

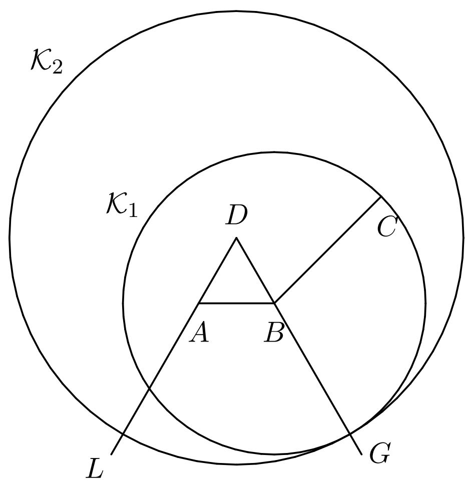
4f. AE kann demnach kein Radius von $\mathcal{K}_1$ sein, und E nicht auf $\mathcal{K}_1$ liegen. Widerspruch!

4g. D liegt also im Äußeren von $\mathcal{K}_1$, und da A im Inneren von $\mathcal{K}_1$ liegt, muß die Kreislinie $\mathcal{K}_2$, die sowohl A als auch D enthält, den Kreis $\mathcal{K}_1$ in einem Punkt C treffen.

Proposition 2. *An einem gegebenen Punkt kann man eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke anlegen. (die Richtung der angelegten Strecke kann man dabei nicht festlegen)*

Beweis:

1. Sei A der gegebene Punkt und BC die gegebene Strecke.



2. Verbinde A mit B (Postulat I)

3. Errichte ein gleichseitiges Dreieck ABD über AB (Prop. 1)

4. Zeichne den Kreis $\mathcal{K}_1$ um B mit Radius BC. (Postulat III)

5. Verlängere DB nach beiden Seiten und wähle auf der Seite von B einen Schnittpunkt G mit dem Kreis $\mathcal{K}_1$. (Postulat VI.3)

6. Zeichne den Kreis $\mathcal{K}_2$ um D mit Radius DG.

7. Verlängere DA nach beiden Seiten und wähle auf der Seite von A einen Schnittpunkt L mit dem Kreis $\mathcal{K}_2$. (Postulat VI.3)

8. Es ist $BC = BG$ (Radien von $\mathcal{K}_1$)

9. Es ist $DL = DG$ (Radien von $\mathcal{K}_2$)

10. Es ist $DA = DB$ (gleichseitiges Dreieck),
DA ein Teil von DL und DB ein Teil von DG.

11. Also ist $AL = BG$. (Axiom 3)

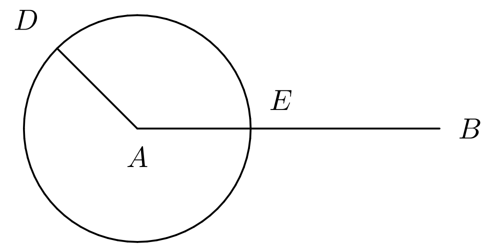
12. Aus (8) und (11) folgt: $AL = BC$ (Axiom 1).

13. Damit ist AL eine BC gleiche und bei A angetragene Strecke. ∎

Proposition 3. *Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, kann man auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke abtragen.*

Beweis: (nur angedeutet):

Sei $AB > XY$. Trage bei A eine Strecke $AD = XY$ an (nach Prop. 2). Zeichne den Kreis um A mit Radius AD.



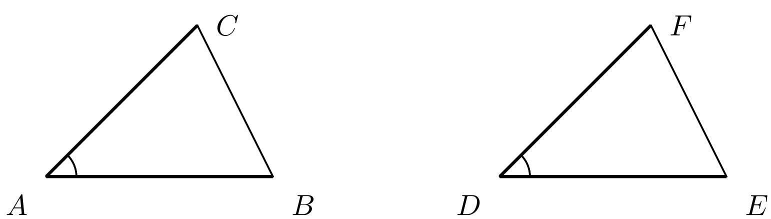
Da $AB > AD$ ist, liegt B im Äußeren des Kreises (kann und sollte man mit Hilfe von Postulat VI in einem Hilfssatz beweisen).

Also muß AB den Kreis in einem Punkt E treffen. Es ist $AE = AD$, also auch $AE = XY$. ∎

Proposition 4. *Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreiecks entsprechend zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines anderen Dreiecks gleich sind, dann stimmen die Dreiecke auch in allen anderen einander entsprechenden Größen überein.*

(In moderner Sprache ist das der SWS-Kongruenzsatz)

Beweis: Hier ist schon die Formulierung des Satzes etwas problematisch, aber darauf wollen wir nicht näher eingehen.



Sei $AB = DE$ und $AC = DF$.

Nun schreibt Euklid:

> *Deckt man nämlich ΔABC auf ΔDEF und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie die gerade Linie AB auf DE, so muß auch Punkt B E decken, weil $AB = DE$.*

Hier und im folgenden wird intensiv das Überdecken von Figuren benutzt. Euklid sagt aber nie, wie das funktioniert oder welchen Axiomen es genügt. Kein Wunder, mehr als 2000 Jahre vor Einführung eines brauchbaren Mengen- und Abbildungskalküls! Heute sprechen wir von Deck-Abbildungen, Bewegungen oder Kongruenzabbildungen. Im Prinzip kann man sie auch bei Euklid schon sehen, und aus Beweisen wie diesen kann man versuchen, ihre Eigenschaften abzulesen.

provisorisches Postulat VII:

1. Es gibt gewisse eineindeutige Zuordnungen der Ebene auf sich, Deck-Abbildungen genannt, die geraden Linien wieder gerade Linien zuordnen und dabei die Anordnung der Punkte auf diesen Linien nicht verändern. Zwei Figuren, die sich in dieser Weise entsprechen, werden *kongruent* (bei Euklid sogar *gleich*) genannt.

2. Zwei Deck-Abbildungen hintereinander ergeben wieder eine. Macht man eine Deck-Abbildung rückgängig, so ist auch das wieder eine.

3. Ist eine Strecke AB kongruent zu einer anderen Strecke DE, so gibt es zu jedem Punkt C, der nicht auf der Geraden durch A und B liegt, einen Punkt F, der nicht auf der Geraden durch D und E liegt, so daß der Winkel $\angle BAC$ kongruent zum Winkel $\angle EDF$ ist.

   Legt man dabei fest, auf welcher Seite von DE der Punkt F liegen soll, so ist die zugehörige Deck-Abbildung eindeutig bestimmt.

4. Sind die Ränder zweier Figuren kongruent, so auch das Innere.

5. Die Strecke AB ist zur Strecke BA kongruent, der Winkel $\angle BAC$ ist zum Winkel $\angle CAB$ kongruent.

Die Postulate und Axiome von Euklid liefern noch weitere Forderungen, z.B.: Alle rechten Winkel sind zueinander kongruent.

Nun kann der Beweis fortgeführt werden.:

Der Winkel $\angle BAC$ ist kongruent zu einem Winkel $\angle EDG$, aber auch zu $\angle EDF$, und wenn man fordert, daß G und F auf der gleichen Seite von DE liegen sollen, so muß $F = G$ sein, und die zugehörige Deck-Abbildung ist eindeutig bestimmt. Sie bildet offensichtlich den Rand des Dreiecks ABS kongruent auf den Rand des Dreiecks DEF ab, und damit auch das Innere.

(Euklid folgert schließlich so: es wird B auf E und C auf F abgebildet, und da 2 gerade Linien keine Fläche umfassen können, müssen die Verbindungsstrecken gleich sein, also CB kongruent zu FE. Mit der Eindeutigkeit der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten wäre er zum gleichen Ziel gekommen) ∎

Euklid schien zu zögern, die „Superposition“ (das Decken von Figuren) zu benutzen. Er vermied sie, wo ein anderer - wenn auch komplizierterer - Beweis möglich war. Aber er war in einer Zwangslage, denn er benötigte die SWS-Kongruenz als fundamentale Aussage. Er hätte sie als Axiom fordern können (wie es heutzutage gemacht wird), aber seine Vorgänger hatten die entsprechenden Sätze alle mit Superposition bewiesen, und so sah er sich gezwungen, das auch zu tun. Außerdem wäre ein derartig kompliziertes und uneinsichtiges Axiom zu seiner Zeit auch nicht akzeptiert worden.

Proposition 5. *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.*

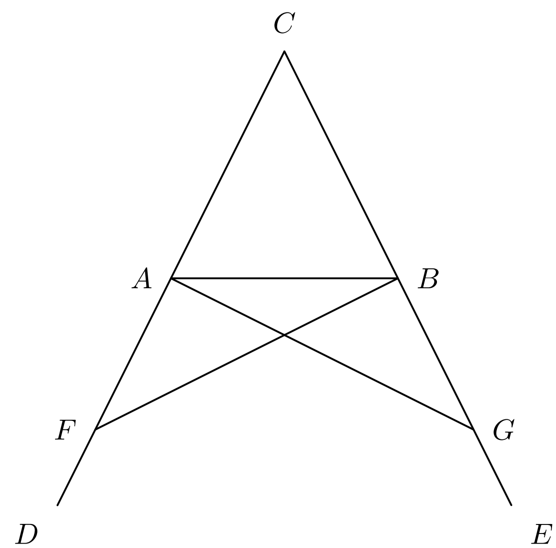
Beweis: Euklid bezeichnet meist eine Seite des Dreiecks als Grundlinie. Bei uns ist das nicht üblich.

Der recht komplizierte Beweis, den Euklid hier liefert, ist typisch für die deduktive Methode. Er beginnt mit irgendwelchen schwer durchschaubaren Aktionen und fügt dann Folgerung an Folgerung, bis irgendwann ganz überraschend das Ergebnis auftaucht. Man nennt so etwas einen *synthetischen Beweis*, im Gegensatz zum *analytischen Beweis*, bei dem die zu beweisende Aussage zerlegt und auf einfachere Aussagen zurückgeführt wird.

Synthetische Beweise sind besonders schwer zu lesen und i.a. das Ergebnis einer vorangegangenen Analyse.

1. Es sei ΔABC das gleichschenklige Dreieck, mit der Grundlinie AB und den Schenkeln $AC = BC$.

2. Verlängere CA über A hinaus zu einer Strecke CD, und verlängere CB über B hinaus zu einer Strecke CE. Man kann annehmen, daß $CE \geq CD$ ist, also $BE \geq AD$.



3. Wähle F auf AD.
Dann ist $AF < BE$.

4. Trage AF auf BE bei B an. Das ergibt die Strecke $BG = AF$.

5. Verbinde A mit G und F mit B.

6. Es ist $CF = CG$, $CA = CB$ und $\angle FCB = \angle ACG$, also $\Delta FBC \mathrel{\widehat{=}} \Delta AGC$. („$\widehat{=}$“ steht für „kongruent“)

7. Daher ist auch $FB = AG$, $\angle GAC = \angle FBC$ und $\angle BFC = \angle AGC$.

8. Da außerdem $AF = BG$ ist, ist $\Delta FBA \mathrel{\widehat{=}} \Delta AGB$.

9. Also ist $\angle FBA = \angle GAB$.

10. Durch Subtraktion erhält man aus (7) und (9): $\angle BAC = \angle ABC$. ∎

Wegen der brückenartigen Figur spricht man auch von der „Eselsbrücke“ („pons asinorum“). Es ist ein wenig verwunderlich, daß Euklid einen derartig komplizierten Weg gewählt hat. Auf Pappus, den letzten bedeutenden griechischen Mathematiker in Alexandria (um 300 n.Chr.), geht der folgende einfache Beweis zurück:

Es ist $AC = BC$, $BC = AC$ und $\angle ACB = \angle BCA$. Also ist $\Delta ABC \mathrel{\widehat{=}} \Delta BAC$, und insbesondere $\angle BAC = \angle ABC$. Q.e.d!

Einen Hinweis, warum Euklid diesen simplen Beweis vielleicht übersehen hat, gibt die folgende Anekdote:

Eine Gruppe von Informatikern versuchte einmal, einen Computer so zu programmieren, daß er geometrische Beweise findet. Bei einem Test mit dem Pons-Asinorum-Problem fand der Computer auf Anhieb die Lösung von Pappus. Die Programmierer waren sehr überrascht, denn sie kannten diese Lösung auch noch nicht. Aber niemand hatte dem Computer gesagt, daß die beiden Dreiecke im SWS-Kongruenzsatz verschieden sein sollen, was dieser dann auch nicht annahm. Ein Mensch ist durch die Formulierung des SWS-Satzes auf den Gedanken fixiert, es müsse sich um zwei verschiedene Dreiecke handeln. Auch Euklid spricht von *zwei* Dreiecken.

Proposition 6. *Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.*

Das ist die Umkehrung zu „Pons asinorum“.

Proposition 7 und 8 liefern den SSS-Kongruenzsatz. Der Beweis wird wieder mit Superposition geführt.

Proposition 9. *Ein gegebener Winkel kann halbiert werden.*

Proposition 10. *Eine gegebene Strecke kann halbiert werden.*

Beim Bweis geht das provisorische Postulat VI (das „Pasch-Axiom“) ein.

Proposition 11. *Auf einer gegebenen Strecke kann in einem gegebenen Punkt eine Senkrechte errichtet werden.*

Dies ist die Stelle, wo ein rechter Winkel produziert werden muß, und wo sich Euklid vermutlich auf sein Postulat IV bezieht.

Proposition 12. *Von einem gegebenen Punkt aus kann man auf eine gegebene Gerade, auf der der Punkt nicht liegt, das Lot fällen.*

Im Beweis werden wieder allerlei Annahmen bezüglich der Anordnung der Punkte in der Ebene gemacht. Implizit werden verschiedene Sätze vom Pasch-Typ benutzt. Außerdem muß wieder ein rechter Winkel als solcher identifiziert werden.

Proposition 13. *Nebenwinkel ergeben zusammen zwei Rechte.*

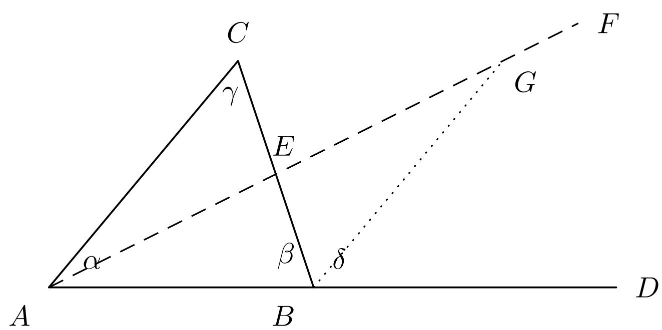
Proposition 14 ist die Umkehrung zu 13.

Proposition 15. *Scheitelwinkel sind gleich.*

Proposition 16. (Außenwinkelsatz)
An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Dieser Satz gilt als einer der Höhepunkte des ersten Bandes. Er spielt auch eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der „neutralen Geometrie“, von der im 2. Kapitel die Rede sein wird.

Beweis:
1. Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit den Innenwinkeln α, β und γ.



2. Verlängere AB über B hinaus zu AD. Dadurch entsteht der Außenwinkel δ.
3. Halbiere BC und bezeichne den Mittelpunkt mit E.
4. Verlängere AE über E hinaus so weit zu AF, daß $EF > AE$ ist.
5. Schneide von EF eine Strecke $EG = AE$ ab und verbinde G mit B.
6. Es ist $\angle AEC = \angle BEG$ (Scheitelwinkel), also $\Delta AEC \cong \Delta BGE$ (SWS).
7. Also ist $\gamma = \angle EBG$, und da $\angle EBG < \delta$ ist, ist auch $\gamma < \delta$.
8. Analog zeigt man, daß α kleiner als der Scheitelwinkel von δ ist, und damit $\alpha < \delta$. ■

Problematisch ist der Schritt 4. Eine beliebige Verlängerung ist nur möglich, wenn die Geraden unendlich lang sind. In der Geometrie auf der Sphäre ist das z.B. nicht der Fall. In unserem provisorisch reparierten Axiomensystem folgt die beliebige Verlängerbarkeit der Strecken aus den Postulaten zum Kreis.

Auf die weiteren Sätze von Euklid will ich zunächst nicht eingehen.

§ 4 Ein modernes Axiomensystem

Motiviert von den „Elementen“ des Euklid, wollen wir jetzt ein modernes Axiomensystem für die Ebene Geometrie aufstellen.

Primitive Terme „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ und „Inzidenz“:

Wir benutzen einige Begriffe aus der elementaren Mengenlehre (Element- und Teilmengenbeziehung, leere Menge, endliche Durchschnitte und Vereinigungen, Differenzen). Man könnte auch darauf noch verzichten und alles mit den Methoden der formalen Logik beschreiben, aber dann würde die ganze Darstellung recht unverständlich.

Die *Ebene* ist eine Menge $\mathcal{E}$, ihre Elemente heißen *Punkte*. Gewisse Teilmengen von $\mathcal{E}$ werden *Geraden* genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man: *X liegt auf g*, oder: *g enthält X*, oder: *X inzidiert mit g*. Für diese Relation zwischen Punkten, Geraden und der Ebene gilt:

Inzidenz-Axiome:

I-1) Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.

I-2) Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.

Das Axiom I-1 hätte Euklid sicher für überflüssig gehalten, weil bei ihm eine gerade Linie immer die Verbindungsstrecke zwischen zwei (verschiedenen) Punkten ist. Axiom I-2 entspricht dem Postulat I, nur wird die Eindeutigkeit besonders hervorgehoben.

Definition.

1. Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnet AB die dadurch eindeutig bestimmte Gerade.
2. Punkte $A, B, C, \ldots$, die auf einer Geraden liegen, heißen *kollinear*.

Offensichtlich ist $AB = BA$.

I-3) Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht kollinear sind.

Man nennt I-3 auch das „Dimensions-Axiom“. Eine Gerade enthält mindestens 2 verschiedene Punkte, eine Ebene mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und im Raum wird man die Existenz von 4 Punkten fordern, die nicht alle in einer Ebene liegen.

In Beweisen benötigt man oft eine Folgerung aus Axiom I-2:

> *Stimmen zwei Geraden in wenigstens zwei verschiedenen Punkten überein, so müssen sie gleich sein.*

Daraus ergibt sich insbesondere:

4.1 Satz. *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Definition. Haben die Geraden g und h genau einen Punkt X gemeinsam, so sagt man, sie *schneiden sich in* X. Wenn sie gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man sie *parallel*.

4.2 Satz. *Es gibt mindestens drei paarweise verschiedene Geraden in* $\mathcal{E}$.

BEWEIS: Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind (Axiom I-3), so sind die drei Geraden AB, AC und BC paarweise verschieden. ∎

Ein Modell für die Inzidenz-Axiome kann schnell angegeben werden. Man nehme für $\mathcal{E}$ eine beliebige Menge mit 3 Elementen A, B, C. Die Geraden seien die 2-elementigen Teilmengen $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ und $\{B, C\}$. Dieses Modell, das wir mit $\mathcal{M}_1$ bezeichnen wollen, zeigt schon die Widerspruchsfreiheit der Inzidenz-Axiome.

Als Modell $\mathcal{M}_2$ bezeichnen wir die gewöhnliche Ebene der analytischen Geometrie:

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Geraden sind die Mengen

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = r\},$$

wobei a, b, r reelle Zahlen mit $(a, b) \neq (0, 0)$ sind. Die Theorie der linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zeigt, daß die Inzidenz-Axiome erfüllt sind.

Wenn wir als Ebene die Einheits-Sphäre

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

nehmen, und als Geraden die „Großkreise", die sich als Schnitte von S^2 mit Ebenen durch den Nullpunkt ergeben, so sind die Inzidenz-Axiome nicht erfüllt! Es gehen z.B. durch Nord- und Südpol unendlich viele verschiedene „Längenkreise". Man kann das Modell aber etwas modifizieren und bekommt dann ein echtes Modell $\mathcal{M}_3$:

Ein „projektiver Punkt" soll eine 2-elementige Menge der Gestalt $\{\vec{x}, -\vec{x}\}$ sein, mit $\vec{x} \in S^2$. Wir verwenden dabei die Vektor-Schreibweise. Es wird also jeweils ein Punkt der Sphäre mit seinem Antipodenpunkt zusammengefaßt. Als Ebene $\mathcal{E}$ nehmen wir die Menge aller projektiven Punkte. Da ein Großkreis mit jedem Punkt der Sphäre auch den entsprechenden Antipodenpunkt enthält, kann man sagen: Eine Gerade in $\mathcal{E}$ ist die Menge aller projektiven Punkte $X = \{\vec{x}, -\vec{x}\}$, wo $\vec{x}$ einen Großkreis durchläuft. Nun kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Inzidenz-Axiome für das Modell $\mathcal{M}_3$ erfüllt sind.

Primitiver Term „zwischen":

Euklid benutzt immer wieder Annahmen über die Lage von Punkten, die er höchstens aus der Anschauung her rechtfertigen kann. Um nun die Anschauung ganz aus dem Axiomensystem verbannen zu können, müssen wir einen weiteren primitiven Term einführen:

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ besteht eine Beziehung $A - B - C$. Wir sagen dann: *B liegt zwischen A und C.*

Anordnungs-Axiome:

A-1) Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden, und sie liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

A-2) Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.

A-3) Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei folgenden Beziehungen:

$$A - B - C \quad \text{oder} \quad B - C - A \quad \text{oder} \quad C - A - B.$$

Die Axiome A-1 bis A-3 sind die Formulierungen ganz simpler und anschaulicher Sachverhalte. Von Euklid wären sie sicher als überflüssig abgetan worden. Weiter unten folgen noch zwei etwas weniger triviale Anordnungsaxiome.

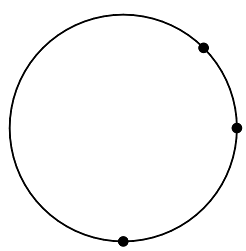
Im Modell $\mathcal{M}_1$ sind die Axiome A-1 bis A-3 gegenstandslos, weil nie mehr als 2 Punkte auf einer Geraden liegen. Im Modell $\mathcal{M}_2$ kann man jede Gerade parametrisieren:

$$t \mapsto \varphi(t) = \vec{x} + t\vec{v},$$

wobei t in $\mathbb{R}$ läuft. Setzt man nun

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_2) - \varphi(t_3) \;:\Longleftrightarrow\; t_1 < t_2 < t_3 \text{ oder } t_1 > t_2 > t_3,$$

so sind $A - 1$ bis $A - 3$ sicher erfüllt. Die Widerspruchsfreiheit ist damit gesichert. Im Modell $\mathcal{M}_3$ haben die Geraden kreisförmige Gestalt:



Daher liegt von drei Punkten auf einer Geraden **jeder** zwischen den beiden anderen. Also sind in diesem Modell die Anordnungsaxiome zumindest für den üblichen „zwischen“-Begriff nicht erfüllt. Die Unabhängigkeit der Axiome ist damit aber noch nicht gezeigt.

Definition. Seien $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$.

1. $\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\}$ heißt *Strecke mit den Endpunkten* A und B.
2. $\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - B - X\}$ heißt der *Strahl von A in Richtung B.*

4.3 Satz. *Sind $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$, so gilt:*

1. $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset AB$.
2. $\overline{AB} = \overline{BA}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ *und* $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = AB$.

Beweis: 1) und 2) sind trivial. Außerdem ist offensichtlich

$$\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset AB.$$

Sei nun $X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Wäre $X \notin \overline{AB}$, so müßte zugleich $A - B - X$ und $B - A - X$ gelten. Das ist aber nicht möglich.

Ist $X \in AB$, so ist entweder $X \in \overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, oder es muß $X - A - B$ oder $A - B - X$ gelten. In jedem Fall liegt X in $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. ∎

Nun müssen wir noch zwei weitere Anordnungsaxiome einfügen:

A-4) Für alle $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.

A-5) Ist l eine Gerade, sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf l liegen und ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$, so gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} \text{Entweder ist} \quad & \overline{AC} \cap l = \varnothing, \\ \text{oder} \quad & \overline{BC} \cap l = \varnothing. \end{aligned}$$

Das Axiom A-4 entspricht dem Postulat II von Euklid, über die Verlängerbarkeit von Geraden über einen Punkt hinaus. Hier wird nur etwas genauer gesagt, was das bedeuten soll. Das Axiom A-5 ist eine Version des Pasch-Postulates und schließt eine echte Lücke im Euklidischen Axiomensystem. Anschaulich bedeutet es folgendes: Liegen die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten von l, so muß jeder weitere Punkt C entweder auf der gleichen Seite wie A oder auf der gleichen Seite wie B liegen. Wir werden auch das gleich noch präzisieren.

4.4 Satz. *Es sei l eine Gerade, und A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf l liegen.*

1. *Ist $\overline{AB} \cap l = \varnothing$ und $\overline{BC} \cap l = \varnothing$, so ist auch $\overline{AC} \cap l = \varnothing$.*
2. *Ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ und $\overline{BC} \cap l \neq \varnothing$, so ist $\overline{AC} \cap l = \varnothing$.*

Beweis:

1) Man vertausche im Axiom die Namen der Punkte. Wäre $\overline{AC} \cap l \neq \varnothing$, so wäre die Hypothese des Axioms erfüllt, und es könnte nicht gleichzeitig $\overline{AB} \cap l = \varnothing$ und $\overline{BC} \cap l = \varnothing$ gelten.

2) Ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ und $\overline{BC} \cap l \neq \varnothing$, so muß nach Axiom A-5 zwingend $\overline{AC} \cap l = \varnothing$ sein. ∎

Für Punkte $A, B \in \mathcal{E} \setminus l$ erklären wir eine Relation

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap l = \varnothing.$$

Wir sagen dafür auch: A und B liegen auf der gleichen Seite von l.

4.5 Satz. *„Auf der gleichen Seite von l liegen" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Offensichtlich ist $A \sim A$ (Reflexivität), und mit $A \sim B$ ist auch $B \sim A$ (Symmetrie).

Sei nun $A \sim B$ und $B \sim C$. Ist $A = B$ oder $B = C$, so ist offensichtlich auch $A \sim C$. Wir können uns also auf den Fall beschränken, daß A, B, C paarweise verschieden sind. Aber dann folgt aus dem vorigen Satz (und damit aus A-5), daß $A \sim C$ ist. Also ist die Relation auch transitiv. ∎

Liegen A und B nicht auf der gleichen Seite von l, so sagen wir, sie *liegen auf verschiedenen Seiten von l*. Wir wollen nun zeigen, daß jede Gerade genau zwei Seiten hat.

Definition. Ist $l \subset \mathcal{E}$ eine Gerade und $A \in \mathcal{E} \setminus l$, so heißt

$$H(l, A) := \{X \in \mathcal{E} \setminus l \mid X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } l \text{ wie } A\}$$

die durch A bestimmte Seite von l.

$H(l, A)$ ist nichts anderes als die Äquivalenzklasse von A bezüglich der oben betrachteten Äquivalenzrelation. Damit ist schon einmal klar, daß $\mathcal{E} \setminus l$ in disjunkte derartige Klassen zerfällt.

4.6 Satz. *Jede Gerade hat genau zwei Seiten.*

Beweis: Sei l die gegebene Gerade.

Es gibt einen Punkt A, der nicht auf l liegt (Axiom I-3).
Es gibt einen Punkt $O \in l$ (Axiom I-1).
Es gibt einen Punkt B mit $A - O - B$ (Axiom A-4).
Dann ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$, also nicht $A \sim B$.
Demnach gibt es wenigstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

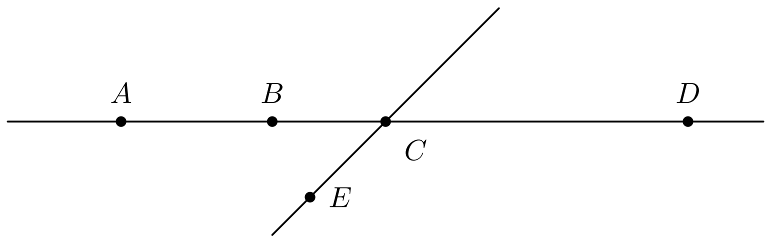
Seien A und B die Repräsentanten zweier verschiedener Äquivalenzklassen und C irgendein Punkt aus $\mathcal{E} \setminus l$. Ist $C = A$ oder $C = B$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $C \neq A$ und $C \neq B$. Wenn C nicht äquivalent zu A ist, dann ist $\overline{AC} \cap l \neq \varnothing$. Da außerdem $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ ist, muß $\overline{BC} \cap l = \varnothing$ sein, nach Axiom A-5. Also ist C äquivalent zu B. Damit gibt es nur die beiden durch A und B repräsentierten Klassen. ∎

4.7 Satz (4er-Relationen).

Ist $A - B - C$ und $A - C - D$, so ist auch $B - C - D$ und $A - B - D$.

Beweis:
1) A, B, C, D liegen offensichtlich alle auf einer Geraden l.

2) Sei E ein Punkt, der nicht auf l liegt.



3) Sei $g := EC$. Wegen $g \cap l = \{C\}$ und $A - C - D$ liegen A und D auf verschiedenen Seiten von g.

4) Würden auch A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen, so müßte $\overline{AB} \cap g = \{C\}$ sein, also $A - C - B$. Das steht im Widerspruch zur Vorraussetzung $A - B - C$.

5) Also liegen A und B auf der gleichen Seite von g, und damit B und D auf verschiedenen Seiten. Da $BD \cap g = \{C\}$ ist, folgt: $B - C - D$.

Die Relation $A - B - D$ wird analog bewiesen, indem man E mit B verbindet. ∎

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ heißt *konvex*, wenn gilt:

$$\text{Für alle } A, B \in \mathcal{M} \text{ mit } A \neq B \quad \text{ist} \quad \overline{AB} \subset \mathcal{M}.$$

4.8 Satz. *Die Mengen $H(l, A)$ sind konvex.*

Beweis: Sind $X, Y \in H(l, A)$, so ist $X \sim A$ und $Y \sim A$. Also ist auch $A \sim Y$ und dann $X \sim Y$. Das bedeutet, daß $\overline{XY} \subset \mathcal{E} \setminus l$ ist.

Sei $Z \in \overline{XY}$, $Z \neq X$ und $Z \neq Y$. Wir nehmen an, es gibt einen Punkt $R \in l$ mit $\overline{XZ} \cap l = \{R\}$. Dann ist $X - R - Z$ und $X - Z - Y$. Mit den 4er-Relationen folgt: $X - R - Y$. Aber das ist unmöglich. Also ist $X \sim Z$, und damit $A \sim Z$. Ganz $\overline{XY}$ liegt in $H(l, A)$. ∎

Zusammenfassend können wir sagen:

> *Eine Gerade teilt den Rest der Ebene in zwei disjunkte nicht-leere konvexe Teilmengen. Diese Teilmengen werden auch als Halbebenen bezeichnet.*

4.9 Satz. *Wenn der Punkt O zwischen den beiden Punkten A und B liegt, dann gilt:*

1. $AB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.
2. $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \{O\}$.

Beweis: Sei $l := AB$ und $Z \notin l$ ein Punkt, sowie $g := OZ$. Dann ist $\overline{AB} \cap g = \{O\}$. Also liegen A und B auf verschiedenen Seiten von g.

1) Sei $P \in l$. Ist $P \in \overrightarrow{OA}$, so ist nichts weiter zu zeigen. Sei also $P \notin \overrightarrow{OA}$. Dann muß $A - O - P$ gelten. Das heißt, daß A und P auf verschiedenen Seiten von g liegen, also P und B auf der gleichen Seite. Damit muß $B = P$ oder $O - B - P$ oder $O - P - B$ gelten. In jedem dieser Fälle liegt aber P in $\overrightarrow{OB}$.

2) Sei $P \in \overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB}$. Dann muß $P = O$ sein, oder P liegt zugleich auf beiden Seiten von g, aber das ist unmöglich. ■

Ein Punkt O auf einer Geraden l teilt also den Rest der Geraden in zwei disjunkte Halbgeraden. Man kann dann sagen, wann zwei Punkte von l auf der gleichen Seite oder auf zwei verschiedenen Seiten von O liegen.

4.10 Satz. *Sind $O \neq A$ zwei Punkte, so gilt für jeden Punkt $X \in \overrightarrow{OA}$:*

$$X = O \quad \textit{oder} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}.$$

Beweis: Ist $X \neq O$ und $X \neq A$, so ist $O - X - A$ oder $O - A - X$.

Sei $Y \in \overrightarrow{OX}$. Wir wollen zeigen, daß Y dann auch in $\overrightarrow{OA}$ liegt. Für $Y = O$ oder $Y = X$ ist das klar. Ist $O - Y - X$ oder $O - X - Y$, so liegen Y und X auf der gleichen Seite von O, und das ist die Seite, auf der auch A liegt. Also gehört Y zu $\overrightarrow{OA}$.

Analog zeigt man, daß auch $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{OX}$ ist. ■

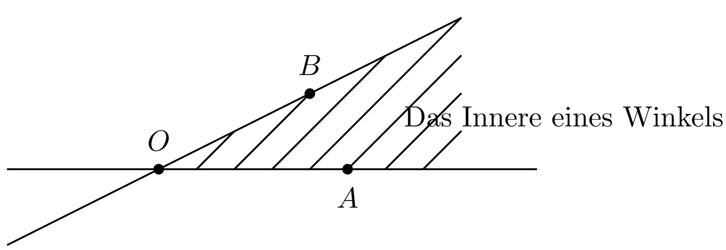
Wir sind nun in der Lage, Winkel und Dreiecke zu definieren.

Definition. Es seien O, A, B drei nicht-kollineare Punkte. Unter dem *Winkel* $\angle AOB$ versteht man die Vereinigung der Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$.

Der Punkt O heißt *Scheitel* des Winkels, die beiden Strahlen heißen die *Schenkel* des Winkels.

Es kommt beim Winkel nicht auf die Reihenfolge der Schenkel an, und statt der Punkte A und B kann man auch beliebige andere Punkte auf den Schenkeln zur Beschreibung heranziehen.

Definition. Sei $\alpha = \angle AOB$. Dann nennt man $I(\alpha) := H(OA, B) \cap H(OB, A)$ *das Innere des Winkels* α. Die Menge $A(\alpha)$ aller Punkte, die weder auf α noch in $I(\alpha)$ liegen, bezeichnet man als *das Äußere des Winkels*.



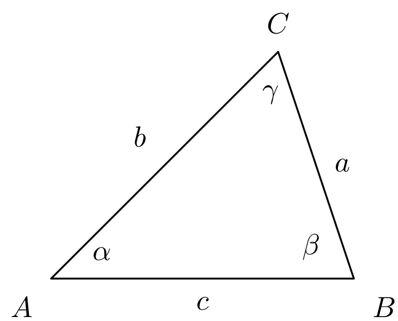
Das Innere eines Winkels ist immer eine echte nicht-leere konvexe Teilmenge einer Halbebene. Anschaulich bedeutet das, daß wir nur Winkel α mit $0° < \alpha < 180°$ betrachten. Das Äußere eines Winkels ist niemals konvex.

Definition. A, B, C seien drei nicht-kollineare Punkte. Dann heißt

$$\triangle ABC := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

das *Dreieck* mit den *Ecken* A, B und C, den *Seiten* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ und den *Winkeln* $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle ACB$. Oft schreibt man auch nur kurz ABC für das Dreieck.

Die Menge $I(ABC) := I(\alpha) \cap I(\beta) \cap I(\gamma)$ nennt man *das Innere des Dreiecks*. Die Menge $A(ABC)$ aller Punkte, die nicht auf dem Dreieck und nicht im Inneren liegen, bezeichnet man als *das Äußere des Dreiecks*.

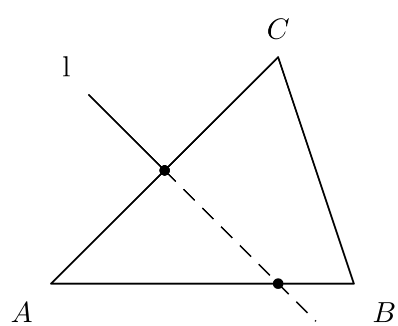


Das Innere eines Dreiecks ist konvex, das Äußere nicht.

4.11 Satz von Pasch. *Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks trifft, aber keine der Ecken, so trifft die Gerade notwendigerweise noch eine andere Seite des Dreiecks.*

Eine Gerade, die die Ecken eines Dreiecks nicht trifft, kann nicht gleichzeitig alle drei Seiten des Dreiecks treffen.

Beweis:



O.B.d.A. können wir annehmen, daß die Gerade l das Dreieck $\triangle ABC$ auf der Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt O trifft. Es ist $l \neq AC$, denn sonst lägen A und C auf l. A und C liegen auf verschiedenen Seiten von l. Da auch B nicht auf l liegt, gibt es zwei (sich gegenseitig ausschließende) Möglichkeiten:

Entweder liegen A und B auf verschiedenen Seiten von l. Dann ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$.

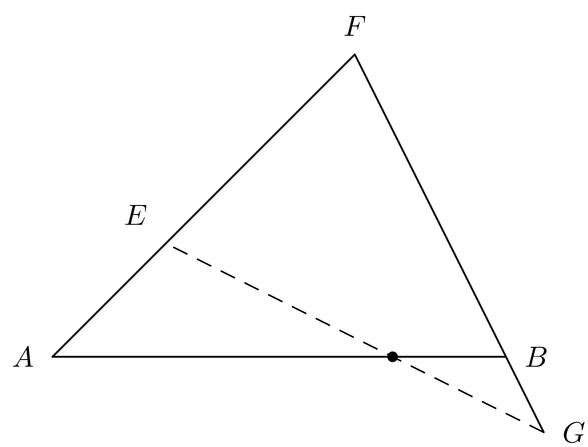
Oder A und B liegen auf der gleichen Seite von l. Dann müssen aber B und C auf verschiedenen Seiten liegen, und es ist $\overline{BC} \cap l \neq \varnothing$. ∎

Jede Ecke eines Dreiecks gehört gleichzeitig zu zwei Seiten. Die dritte Seite, die die Ecke nicht enthält, nennt man auch *die der Ecke gegenüberliegende Seite.*

4.12 Folgerung. *Für beliebige Punkte $A \neq B$ gibt es ein D mit $A - D - B$.*

BEWEIS: Sei $g = AB$ und E ein Punkt, der nicht auf g liegt.

Es gibt nach Axiom A-4 einen Punkt F mit $A-E-F$ und einen Punkt G mit $F-B-G$ (da $AE \cap g = \{A\}$ und $F \neq A$ ist, kann F nicht auf AB liegen und insbesondere nicht $= B$ sein).

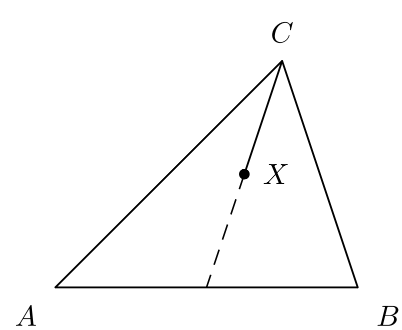


Wir wollen zeigen, daß EG einen Punkt zwischen A und B enthält. Zunächst trifft EG die Seite $\overline{AF}$ des Dreiecks $\triangle ABF$, aber nicht die Seite $\overline{BF}$, denn es ist ja $F - B - G$. Nach dem Satz von Pasch haben wir nur noch zu zeigen, daß keine der drei Ecken A, B und F auf EG liegt.

Würde B oder F auf EG liegen, so wäre $EG = BF$, also $EF = BF$ und damit $A \in BF$, also $AB = BF = EF$ und $E \in AB$. Das ist ein Widerspruch.

Wäre $A \in EG$, so wäre $AF = AE = EG$ und damit $F \in EG$. Das ist jedoch nicht möglich, weil EG die Seite $\overline{BF}$ nicht trifft. ■

4.13 Folgerung. *Eine Gerade, die durch eine Ecke und einen inneren Punkt eines Dreiecks geht, schneidet die der Ecke gegenüberliegende Seite.*



BEWEIS:

Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ und ein Punkt $X \in I(ABC)$. Wir betrachten die Gerade $l = CX$. Würde l zwei Ecken des Dreiecks $\triangle ABC$ enthalten, so könnte X nicht im Innern des Dreiecks liegen. Also befinden sich die Punkte A und B nicht auf l.

Nach Axiom A-4 gibt es ein S mit $B - C - S$. Dann liegen B und S auf verschiedenen Seiten von AC. Außerdem liegt S auf der Geraden BC und damit nicht im Innern des Dreiecks.

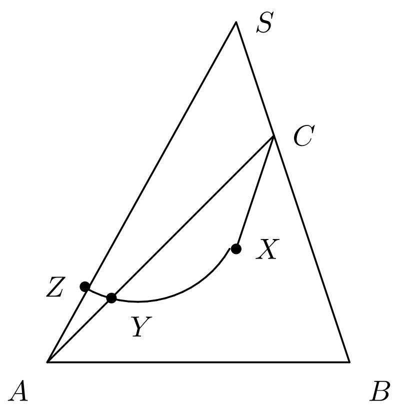
Es ist nun ein neues Dreieck entstanden, $\triangle ABS$. Da $BS \cap l = \{C\}$ ist, trifft l die Seite $\overline{BS}$ des neuen Dreiecks, aber keine der Ecken. Nach Pasch muß l dann noch eine andere Seite treffen. Ist dies die Seite $\overline{AB}$, so sind wir fertig. Also nehmen wir an:

$$l \cap \overline{AB} = \varnothing \quad \text{und} \quad l \cap \overline{AS} \neq \varnothing.$$

Es gibt dann ein Z mit

$$A - Z - S \text{ und } Z \in l.$$

Da $SA \neq CA$ ist, treffen sich SA und CA nur im Punkte A. Wegen $S - Z - A$ liegen S und Z auf der gleichen Seite von AC und damit Z im Äußeren von $\triangle ABC$.



Weil nun Z und X auf verschiedenen Seiten von AC liegen, gibt es ein Y mit $\overline{ZX} \cap AC = \{Y\}$. Wir haben damit:

$$Z - Y - X \quad \text{und} \quad Z - X - C.$$

Mit der 4er-Relation folgt daraus:

$$Y - X - C \quad \text{und } Z - Y - C.$$

Insbesondere ist $Y \neq C$. Also ist $AC = YC = l$. Das kann aber nicht sein! Die Annahme war demnach falsch. ∎

Wir wollen nun das Pasch-Axiom und die Folgerungen daraus benutzen, um die Lage eines Punktes relativ zu einem Winkel untersuchen:

4.14 Satz. *Sei $\alpha = \angle BAC$ und $P \in BC$. Dann gilt:*

$$P \in I(\alpha) \iff B - P - C.$$

Beweis: Es ist $P \in I(\alpha) \iff P \in H(AB, C) \cap H(AC, B)$. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$P \neq B,\ P \neq C, \text{ nicht } P - C - B \quad \text{und nicht } C - B - P.$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

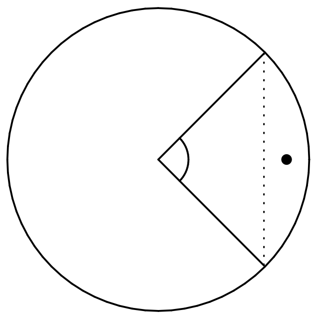
Man beachte aber: Ist $P \in I(\alpha)$, so braucht es keine Punkte $B' \in \overrightarrow{AB}$ und $C' \in \overrightarrow{AC}$ zu geben, so daß $P \in \overline{B'C'}$ liegt.

Um das zu belegen, konstruieren wir ein weiteres Modell:[3] Im Modell $\mathcal{M}_8$ benutzen wir als Ebene die Menge

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

also das Innere des Einheitskreises. Und als Geraden nehmen wir einfach diejenigen Abschnitte von gewöhnlichen Geraden im $\mathbb{R}^2$, die innerhalb von $\mathcal{D}$ liegen. Dann ist sofort klar, daß die Inzidenz-Axiome gelten, und man sieht leicht, daß auch die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

Es gibt jedoch bei diesem Modell Punkte im Innern eines Winkels, die nicht auf einer Sehne liegen:



Mit einem Punkt gehört auch immer gleich ein ganzer Strahl zum Inneren eines Winkels:

4.15 Satz. *Sei $\alpha = \angle BAC$, P ein Punkt, der nicht auf α liegt.*

Liegt P im Inneren (bzw. Äußeren) von α, so auch alle Punkte $X \neq A$ auf $\overrightarrow{AP}$.

Beweis: Liegt P in $I(\alpha)$, so liegt P nicht auf den Geraden AB und AC. Also ist $AP \cap AB = \{A\}$ und $AP \cap AC = \{A\}$.

Für $X \in \overrightarrow{AP}$ und $X \neq A$, $X \neq P$ muß gelten: $A - X - P$ oder $A - P - X$. Das bedeutet aber, daß $X \in H(AB, C) \cap H(AC, B) = I(\alpha)$ ist.

Da $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AX}$ ist, folgt durch Widerspruch analog: Mit P liegt auch X im Äußeren von α. ∎

4.16 Folgerung. *Sei $\alpha = \angle BAC$ und $P \in I(\alpha)$. Dann liegen B und C auf verschiedenen Seiten von AP.*

Beweis: AP geht durch die Ecke A des Dreiecks $\triangle ABC$, aber nicht durch B oder C.

a) Ist $P \in H(BC, A)$, also in $I(ABC)$, so muß AP nach Pasch die Seite $\overline{BC}$ treffen.

b) Ist $P \in \overline{BC}$, so ist alles klar.

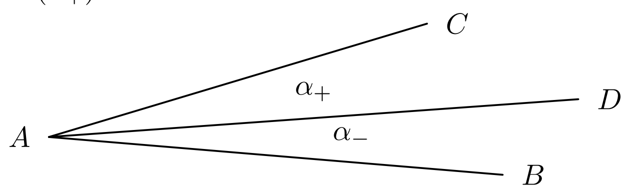
c) Sind A und P auf verschiedenen Seiten von BC, so gibt es einen Punkt $X \in \overrightarrow{AP} \cap BC$. Nach dem vorigen Satz liegt X auch in $I(\alpha)$, und daher muß $B - X - C$ gelten. Daraus folgt die Behauptung. ∎

[3] Die Modelle $\mathcal{M}_4$ bis $\mathcal{M}_7$ werden im Rahmen der Übungsaufgaben eingeführt.

4.17 Satz. *Sei $\alpha = \angle BAC$ und D ein weiterer Punkt, sowie $\alpha_- := \angle BAD$ und $\alpha_+ := \angle DAC$. Dann gilt:*

$$D \in I(\alpha) \iff C \in A(\alpha_-) \text{ und } B \in A(\alpha_+).$$

BEWEIS: a) Ist $D \in I(\alpha)$, so gibt es ein $X \in \overrightarrow{AD} \cap \overline{BC}$. Also ist $B - X - C$ und damit $C \in A(\alpha_-)$ und $B \in A(\alpha_+)$.



b) Ist das Kriterium erfüllt, so liegen B und C auf verschiedenen Seiten von AD, und es gibt ein $X \in \overline{BC} \cap AD$. Dann liegt X – und damit auch D – in $I(\alpha)$. ∎

Primitiver Term „Bewegung":

Wir müssen nun eine exakte Formulierung für Euklids vage Vorstellungen vom „Zur Deckung bringen" finden. Denken wir dabei daran, ein zweites transparentes (und starres) Exemplar der Ebene zu bewegen und in einer anderen Position zurückzulegen, so fallen uns folgende Möglichkeiten ein: Verschieben (Translation), Drehen (Rotation) und Spiegeln (Reflektion): Wir können die zweite Ebene so verschieben, daß ein Punkt A über einen Punkt A' zu liegen kommt. Haben wir A' fixiert, so bleibt uns die Möglichkeit, die Ebene so lange zu drehen, bis ein gegebener Punkt B auf der selben Halbgerade liegt wie ein anderer gegebener Punkt B'. Fixieren wir auch noch B', so können wir die Ebene nur noch an der Geraden $A'B'$ spiegeln, so daß ein gegebener Punkt C in einer gewünschten Halbebene liegt.

Wir fordern daher die Existenz gewisser bijektiver Abbildungen von $\mathcal{E}$ auf sich, die wir *Bewegungen* nennen.

Bewegungs-Axiome:

B-1) Die Menge $\mathcal{B}$ aller Bewegungen bildet eine Gruppe.

Insbesondere ist die identische Abbildung eine Bewegung.

B-2) Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden ab, und sie erhalten die Anordnung auf den Geraden. Insbesondere werden auch Strecken auf Strecken und Strahlen auf Strahlen abgebildet, denn all diese Mengen wurden mit Hilfe der „zwischen"-Beziehung definiert.

B-3) Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(A) = O$.
2. $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$.
3. $\varphi(C) \in H(OP, Q)$.

Dieses Axiom wird von der (anschaulich klaren) Existenz von Translationen, Rotationen und Reflektionen motiviert, sowie von den oben angestellten Betrachtungen.

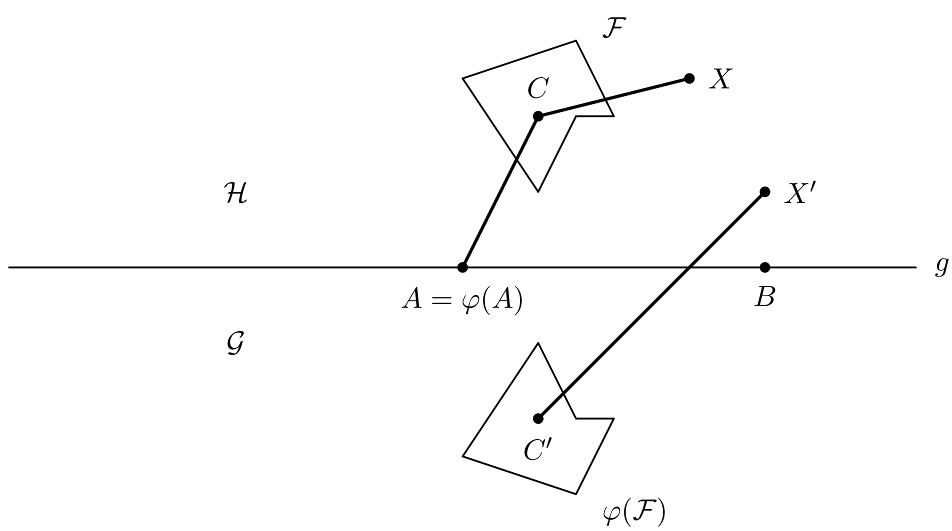
Axiom B-3 ist sehr weitreichend!

Sei etwa $g = AB$ eine feste Gerade und $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ die beiden durch g bestimmten Halbebenen. Unter einer *geometrischen Figur* verstehen wir eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{E}$. Es sei $\mathcal{F}$ eine solche Figur, und wir setzen zusätzlich voraus, daß $\mathcal{F}$ ganz in $\mathcal{H}$ liegt.

Ist C ein beliebiger Punkt von $\mathcal{F}$, so gibt es genau eine Bewegung φ, die A auf A, B auf einen Punkt $B' \in \overrightarrow{AB}$ und C nach $\mathcal{G}$ abbildet.

4.18 Satz. *Unter den gerade beschriebenen Bedingungen gilt:*

1. *Für alle $X \in \mathcal{E} \setminus g$ liegen X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von g.*
2. *Es ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.*
3. *Für alle $X \in g$ ist $\varphi(X) = X$.*



Beweis: φ bildet offensichtlich die Gerade g auf sich ab, und das gilt dann auch für φ^{-1}.

1) Sei $X \in \mathcal{H}$, $X \neq C$. Dann ist $\overline{CX} \cap g = \varnothing$.

Annahme: $X' := \varphi(X) \in \mathcal{H}$. Für $C' := \varphi(C)$ gilt dann: $\overline{C'X'} \cap g \neq \varnothing$. Also gibt es ein $Y' \in g$ mit $C' - Y' - X'$. Weil $\varphi(\overline{CX}) = \overline{C'X'}$ ist, muß es ein $Y \in \overline{CX}$ mit $\varphi(Y) = Y'$ geben. Da auch φ^{-1} die Gerade g auf sich abbildet, muß Y auf g liegen. Das ist ein Widerspruch!

Jedes $X \in \mathcal{H}$ wird also nach $\mathcal{G}$ abgebildet. Da φ bijektiv ist, muß es ein $D \in \mathcal{G}$ mit $\varphi(D) \in \mathcal{H}$ geben. Wie oben folgt dann, daß $\varphi(X) \in \mathcal{H}$ ist, für alle $X \in \mathcal{G}$.

2) $\psi := \varphi \circ \varphi$ ist eine Bewegung, die A fest läßt, B nach $\overrightarrow{AB}$ und $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ abbildet. Das tut auch die Identität. Aber es gibt nach Axiom B-3 nur eine Bewegung mit dieser Eigenschaft. Also ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

3) **Annahme:** Es gibt ein $X \in g$, so daß $X' := \varphi(X) \neq X$ ist. Dann ist $\varphi(X') = X$, und es gibt drei Möglichkeiten:

a) Ist $A - X - X'$, so ergibt nochmalige Anwendung von φ: $A - X' - X$. Beides zugleich kann aber nicht gelten.

b) Ist $A - X' - X$, so führt das auf die gleiche Weise zu einem Widerspruch.

c) $X' - A - X$ kann aber auch nicht gelten, weil φ den Strahl $\overrightarrow{AB}$ auf $\overrightarrow{AB}$ abbildet. Also war die Annahme falsch. ∎

Definition. Eine Bewegung, die eine Gerade g punktweise festläßt und die durch g bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht, heißt *(Geraden-)Spiegelung* (an g).

4.19 Satz. *Zu jeder Geraden gibt es genau eine Spiegelung.*

Beweis: Die Existenz haben wir oben gezeigt, die Eindeutigkeit folgt direkt aus Axiom B-3. ∎

Ist $\mathcal{F}$ wie oben eine geometrische Figur und φ eine Spiegelung, so nennt man $\varphi(\mathcal{F})$ das *Spiegelbild* von $\mathcal{F}$.

Definition. Zwei geometrische Figuren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ heißen *kongruent* (in Zeichen: $\mathcal{F} \widehat{=} \mathcal{F}'$), falls es eine Bewegung $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt.

Aus den Gruppeneigenschaften von $\mathcal{B}$ folgt trivial:

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

4.20 Folgerung.
Ist $\mathcal{F} \widehat{=} \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}' \widehat{=} \mathcal{F}^*$, so ist auch $\mathcal{F} \widehat{=} \mathcal{F}'$.

Das ist Axiom 1 von Euklid: *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*

4.21 Satz.

1. *Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$ und $\psi(B) = C$ gibt.*

2. *Sind die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kongruent vermöge einer Bewegung φ, so ist auf jeden Fall $\varphi(A) = C$.*

Beweis: 1) Da jede Bewegung bijektiv ist und die „zwischen"-Beziehung respektiert, ist die erste Aussage klar.

2) Wir nehmen an, es wäre $\varphi(A) \neq C$. Dann muß es ein $Y \in \overrightarrow{AB}$ mit $Y \neq A$ und $\varphi(Y) = C$ geben. Für jedes X mit $X - A - Y$ ist dann

$$\varphi(X) - \varphi(A) - \varphi(Y) = C,$$

wobei $\varphi(X)$ nicht auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegt. Das kann aber nicht sein! ■

Wir konnten nicht beweisen, daß es – wenn $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$ ist – eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ gibt. Die Anschauung sagt uns jedoch, daß das der Fall sein müsste. Wir brauchen ja notfalls nur die Strecke $\overline{CD}$ einmal um 180° zu drehen. Es ist daher Zeit für ein weiteres Bewegungs-Axiom:

B-4) Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

Jetzt ist klar:

Ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

Man kann sogar noch mehr sagen: Die Werte von φ auf $\overline{AB}$ sind schon eindeutig festgelegt und nicht von φ abhängig:

4.22 Satz über das Abtragen von Strecken. *Es sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OQ}$.*

BEWEIS:

1) Existenz: Nach Axiom B-3 existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = O$ und $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$. Setzt man $Q := \varphi(B)$, so ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OQ}$.

2) Eindeutigkeit: Es gebe zwei Punkte $Q, Q' \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OQ}$ und $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OQ'}$. Nach Axiom B-4 gibt es dann zwei Bewegungen φ und ψ mit $\varphi(A) = \psi(A) = O$, $\varphi(B) = Q$ und $\psi(B) = Q'$. Aber dann ist auch $\varrho := \psi \circ \varphi^{-1}$ eine Bewegung, und es gilt:

$$\varrho(O) = O \quad \text{und} \quad \varrho(Q) = Q'.$$

Damit bildet ϱ die Gerade OP auf sich ab, und es gibt nur noch zwei Möglichkeiten:

1. Bildet ϱ einen Punkt $R \in \mathcal{E} \setminus OP$ auf einen Punkt der gleichen Halbebene ab, so muß $\varrho = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, also $\varphi = \psi$ sein. Dann ist natürlich $Q = Q'$.

2. Bildet ϱ alle Punkte der einen Halbebene in die andere Halbebene ab, so ist ϱ die Spiegelung an der Geraden OP. Dann läßt ϱ die Gerade OP punktweise fest, und auch in diesem Falle ist $Q = Q'$.

Also bilden alle Bewegungen, die A auf O und B auf einen Punkt von $\overrightarrow{OP}$ abbilden, B auf den gleichen Punkt ab. ■

Dieser Satz ist recht wichtig, und wir werden bald sehen, daß er etwas mit Euklids Vorstellungen vom Kreis und mit seinem Postulat III zu tun hat.

Zuvor müssen wir jedoch auf den Vergleich und die Addition von Strecken eingehen.

Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, so gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{CD}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CQ}$, und dann muß genau eine der drei folgenden Aussagen zutreffen:

1. $Q = D$. Dann ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$.
2. Es ist $C - Q - D$. Dann sagt man: $\overline{AB} < \overline{CD}$.
3. Es ist $C - D - Q$. Dann sagt man: $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Das entspricht genau Euklids Vorstellung vom Vergleich zweier Strecken. *Das Ganze ist größer als der Teil.*

Der Vollständigkeit halber definieren wir außerdem:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \le \overline{CD} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \overline{AB} < \overline{CD} \quad \text{oder} \quad \overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD} \\ \overline{AB} \ge \overline{CD} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \overline{AB} > \overline{CD} \quad \text{oder} \quad \overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}. \end{aligned}$$

4.23 Satz über die Addition und Subtraktion von Strecken.
Sei $A - B - C$ und $A' - B' - C'$.

1. *Ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$.*
2. *Ist $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$.*

Das entspricht Euklids Axiomen 2 und 3: *Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.*

Beweis: 1) Nach Voraussetzung existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Dann gilt aber:

$$A' - B' - \varphi(C) \quad \text{und} \quad A' - B' - C'.$$

Die Gerade $g' = A'B'$ wird durch B' in zwei Halbgeraden aufgeteilt. Dabei liegen $\varphi(C)$ und C' auf der gleichen Halbgeraden. Mit anderen Worten:

$$\text{Es ist} \quad \varphi(C) \in \overrightarrow{B'C'}.$$

Da $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$ und auch $\mathrel{\widehat{=}} \overline{B'\varphi(C)}$ ist, muß $\varphi(C) = C'$ sein. Also ist auch $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$.

2) Ist $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$, so wird das durch eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(C) = C'$ bewerkstelligt. Da die Werte von φ auf allen Zwischenpunkten eindeutig festgelegt sind, muß auch $\varphi(B) = B'$ sein. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Man könnte das salopp auch so formulieren:

> Sind s, t und s', t' Strecken mit $s \mathrel{\widehat{=}} s'$ und $t \mathrel{\widehat{=}} t'$, so ist $s + t \mathrel{\widehat{=}} s' + t'$. Ist umgekehrt $s + t \mathrel{\widehat{=}} s' + t'$ und $t \mathrel{\widehat{=}} t'$, so ist auch $s \mathrel{\widehat{=}} s'$.

Definition. Es seien ein Punkt $O \in \mathcal{E}$ und eine Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Die Menge

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{OP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}\}$$

heißt der *Kreis um O mit Radius $\overline{AB}$.*

Ein Punkt $Q \in \mathcal{E}$ *liegt im Inneren* des Kreises, wenn $Q = O$ oder $\overline{OQ} < \overline{AB}$ ist, und er liegt *im Äußeren* des Kreises, wenn $\overline{OQ} > \overline{AB}$ ist.

Ein *Durchmesser* des Kreises ist eine Strecke $\overline{XY}$ mit $X, Y \in \mathcal{K}$ und $X - O - Y$.

Unsere Definition des Kreises entspricht recht gut derjenigen von Euklid. Aber was besagt dann sein Postulat III ? Die Existenz eines Kreises bei gegebenem Mittelpunkt und Radius ist trivial. Anscheinend müssen wir Euklid doch noch etwas anders interpretieren.

Die Schwierigkeit liegt in dem Begriff „Linie“. Nehmen wir einmal an, daß Euklid in seiner Definition 15 eigentlich folgendes sagen wollte:

Revidierte Version von Euklids Definition 15.

Ein *Kreis mit Mittelpunkt O* ist eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Auf jedem von O ausgehenden Strahl liegt genau ein Punkt von $\mathcal{K}$.
2. Für je zwei Punkte $A, B \in \mathcal{K}$ ist $\overline{OA} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OB}$.

Bei dieser Formulierung ist die Existenz des Kreises nicht mehr selbstverständlich, aber es sind die typischen Eigenschaften einbezogen. Auch Euklids Definition 17 bekommt nun einen Sinn: Jede durch O gehende Gerade besteht aus zwei verschiedenen von O ausgehenden Strahlen. Diese beiden Strahlen müssen einen Kreis $\mathcal{K}$ um O in Punkten A und B treffen, für die gilt: $A - O - B$. Die Strecke $\overline{AB}$ nennt man dann einen *Durchmesser* von $\mathcal{K}$.

Euklid könnte nun mit Hilfe seines Postulats III unseren Satz 4.22 beweisen. Bei uns dagegen folgt mit Satz 4.22 die Existenz des Kreises im Sinne von Euklid und damit das Postulat III.

Ist g eine Gerade durch O, so teilt sie den Rest der Ebene in zwei Halbebenen $\mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_+$. Die beiden Figuren $\mathcal{K}_- := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{K}_+ := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_+$ nennt man die durch g bestimmten *Halbkreise*. Ist φ die Spiegelung an g und $P \in \mathcal{K}_+$, so liegt $\varphi(P)$ in der Halbebene $\mathcal{H}_-$, und es ist $\overline{O\varphi(P)} = \overline{\varphi(O)\varphi(P)} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OP}$. Also bildet φ die Halbkreise aufeinander ab, sie sind zueinander kongruent.

Als nächstes untersuchen wir die Kongruenz von Winkeln!

4.24 Satz. *Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$, $\psi(B) \in \overrightarrow{DF}$ und $\psi(C) \in \overrightarrow{DE}$ gibt.*

Beweis: Die eine Richtung ist trivial.

Sei $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \beta$, vermöge einer Bewegung φ. Wir nehmen an, es sei $\varphi(A) \neq D$. Dann gibt es (o.B.d.A.) ein $X \in \overrightarrow{AB}$ mit $X \neq A$ und $\varphi(X) = D$. (Der Fall $X \in \overrightarrow{AC}$ wird analog behandelt)

Wir wählen ein E mit $A - X - E$. Dann gehört auch E zu $\overrightarrow{AB}$, und es ist

$$\varphi(A) - \varphi(X)\,(= D)\; - \varphi(E).$$

Also liegen $\varphi(A)$ und $\varphi(E)$ weder beide in $\overrightarrow{DE}$ noch beide in $\overrightarrow{DF}$. Aber sie liegen beide auf einer Geraden durch D. Das ist nicht möglich, da $DE \neq DF$ ist!

Wir wissen somit, daß $\varphi(A) = D$ sein muß. Liegt $\varphi(B)$ in $\overrightarrow{DE}$, so muß $\varphi(C)$ in $\overrightarrow{DF}$ liegen, und umgekehrt. ■

Die Situation ist so ähnlich wie bei der Kongruenz von Strecken. Um zeigen zu können, daß es ein φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ gibt, brauchen wir noch ein weiteres Bewegungsaxiom:

B-5) Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$.

Damit ist die Liste der Bewegungsaxiome vollständig!

4.25 Folgerung. *Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sich ihre Ecken so mit A, B, C bzw. A', B', C' bezeichnen lassen, daß es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ gibt.*

Einander entsprechende Seiten und Winkel sind dann automatisch zueinander kongruent.

Beweis: Auch hier ist nur eine Richtung zu zeigen.

Sind die Dreiecke kongruent, so folgt wie im obigen Beweis, daß es (nach geeigneter Bezeichnung) eine Bewegung φ gibt, die A auf A', B auf B' und C auf C' abbildet. Der Rest ist dann klar. ■

4.26 Satz (SWS). *Es seien zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle B'A'C'$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

Beweis: Weil $\alpha = \angle BAC$ und $\alpha' = \angle B'A'C'$ kongruent sind, gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$. Weil $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ und $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'\varphi(B)}$ ist, folgt mit Satz 4.22, daß $\varphi(B) = B'$ ist. Und analog ergibt sich, daß $\varphi(C) = C'$ ist. ■

Damit haben wir zugleich Euklids Proposition 4 bewiesen.

Definition. Ein Dreieck $\triangle ABC$ heißt *gleichschenklig*, wenn $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$ ist. Die Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle ABC$ nennt man die *Basiswinkel* des Dreiecks.

4.27 Folgerung (Euklids Proposition 5, „pons asinorum“). *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent.*

Der Beweis kann nach Pappus geführt werden.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Vergleich von Winkeln:

Es seien zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ gegeben. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in H(DE, F)$. Drei Fälle sind möglich:

1. Ist $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$, so ist $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \beta$.
2. Liegt $\varphi(C)$ in $H(DF, E)$, also in $I(\beta)$, so sagen wir: $\alpha < \beta$.
3. Liegen $\varphi(C)$ und E auf verschiedenen Seiten von DF, so liegt $\varphi(C)$ in $A(\beta)$, und wir sagen: $\alpha > \beta$.

Es ist klar, daß sich die drei Möglichkeiten gegenseitig ausschließen.

4.28 Satz.

1. $\alpha < \beta \iff \beta > \alpha$.
2. $\alpha < \beta$ *und* $\beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$.

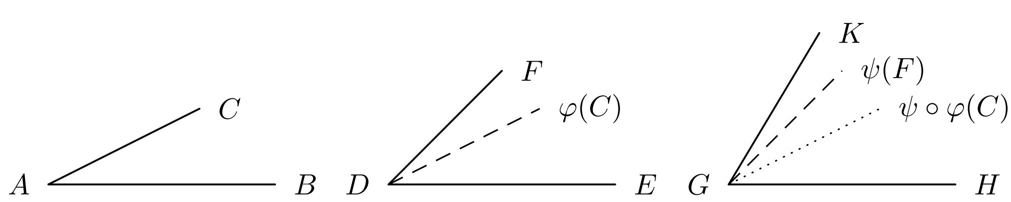
Beweis: 1) folgt aus 2):

Ist $\alpha < \beta$, so kann nicht $\beta \mathrel{\widehat{=}} \alpha$ sein. Wäre $\beta < \alpha$, so wäre $\alpha < \alpha$ (nach (2)), und das kann nicht sein, denn es ist ja $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \alpha$. Also muß $\beta > \alpha$ sein.

2) Sei $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$.

Ist $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle EDF$ und $\gamma = \angle HGK$, so gibt es Bewegungen φ und ψ mit

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DE} \text{ und } \varphi(C) \in I(\beta), \quad \text{sowie } \psi(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{GH} \text{ und } \psi(F) \in I(\gamma).$$



Es ist nur zu zeigen, daß es ein $C' \in \overrightarrow{AC}$ mit $\psi \circ \varphi(C') \in I(\gamma)$ gibt.

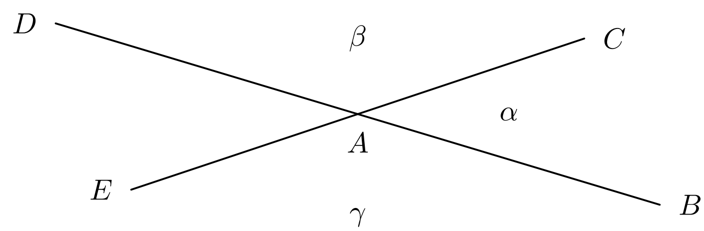
Dazu betrachten wir den (eindeutig bestimmten) Punkt $X \in \overrightarrow{G\psi(F)} \cap \overline{HK}$. Sei $X' := \psi^{-1}(X) \in \overrightarrow{DF}$ und $H' := \psi^{-1}(H) \in \overrightarrow{DE}$. Es gibt dann genau einen Punkt $Y' \in \overrightarrow{D\varphi(C)} \cap \overline{H'X'}$. Aus $H' - Y' - X'$ folgt: $H - \psi(Y') - X$. Mit $H - X - K$ ergibt sich daraus:

$$H - \psi(Y') - K.$$

Sei $C' := \varphi^{-1}(Y') \in \overrightarrow{AC}$. Dann ist $\psi \circ \varphi(C') = \psi(Y') \in I(\gamma)$. ∎

Definition. Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle CAD$ mit der Eigenschaft $D - A - B$ heißen *Nebenwinkel*.

Ist ein Winkel $\alpha = \angle BAC$ gegeben, so existiert nach Axiom A-4 ein Punkt D mit $B - A - D$, und $\beta := \angle CAD$ ist automatisch Nebenwinkel zu α. Wählt man noch einen Punkt E mit $E - A - C$, so ist auch $\gamma := \angle BAE$ ein Nebenwinkel zu α.



4.29 Satz. *Kongruente Winkel haben kongruente Nebenwinkel.*

BEWEIS: Wir betrachten zwei Paare von Nebenwinkeln:

$$\begin{array}{rlcll} & \alpha = \angle BAC & \text{und} & \beta = \angle CAD & (\text{mit } D - A - B\,) \\ \text{und} & \alpha' = \angle B'A'C' & \text{und} & \angle C'A'D' & (\text{mit } D' - A' - B'\,). \end{array}$$

Es sei $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \alpha'$. Dann gibt es (genau) eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, und es ist $\varphi(A) = A'$.

Wegen $D - A - B$ folgt: Ist $X \in \overrightarrow{AD}$, so gilt auch $X - A - B$, und daher $\varphi(X) - A' - \varphi(B)$ mit $\varphi(B) \in \overrightarrow{A'B'}$. Also ist $\varphi(X) - A' - B'$, und daher $\varphi(X) \in \overrightarrow{A'D'}$. Das heißt, φ bildet auch β auf β' ab. ∎

Definition. Sei $D - A - B$ und $E - A - C$. Sind die Geraden DB und EC voneinander verschieden, so nennt man die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DAE$ *Scheitelwinkel*.

4.30 Folgerung (Euklids Proposition 15). *Scheitelwinkel sind kongruent.*

BEWEIS: Wir benutzen die Bezeichnungen aus der Definition. Dann ist $\angle CAD$ Nebenwinkel zu $\angle BAC$ und auch zu $\angle DAE$. Also ist $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle DAE$. ∎

Definition. Ein *rechter Winkel* ist ein Winkel, der zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

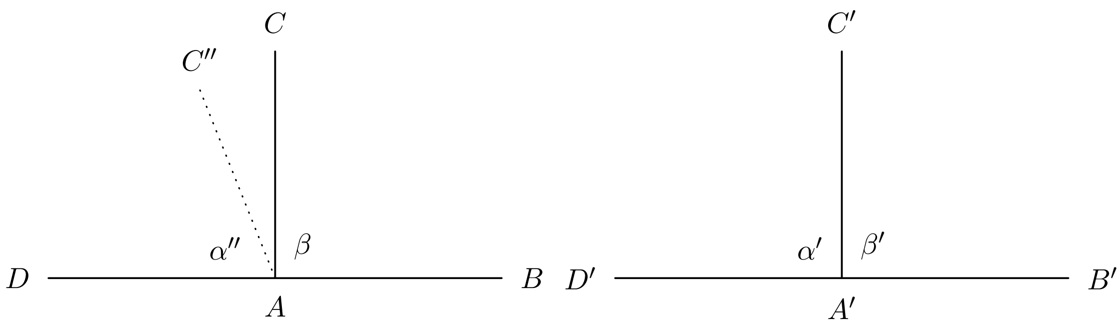
Wir können leicht rechte Winkel erzeugen:

4.31 Satz. *Sei g eine Gerade, φ die Spiegelung an g und $X \in \mathcal{E} \setminus g$. Weiter sei A der (eindeutig bestimmte) Punkt in $\overline{X\varphi(X)} \cap g$. Sind $B, D \in g$ mit $D - A - B$, so ist $\angle BAX$ ein rechter Winkel.*

Beweis: φ bildet A auf A und X auf $\varphi(X)$ ab, also $\overrightarrow{AX}$ auf $\overrightarrow{A\varphi(X)}$. Außerdem bildet φ den Strahl $\overrightarrow{AB}$ auf sich ab. Damit ist $\angle XAB \mathrel{\widehat{=}} \angle BA\varphi(X)$. Wegen $X - A - \varphi(X)$ handelt es sich um Nebenwinkel. ∎

4.32 Satz. *Je zwei rechte Winkel sind kongruent.*

Beweis: Wir betrachten zwei Paare von Nebenwinkeln (α, β) und (α', β'), mit $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \beta$ und $\alpha' \mathrel{\widehat{=}} \beta'$.



Wir nehmen an, α sei nicht kongruent zu α'. O.B.d.A. sei $\alpha' < \alpha$. Dann gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A') = A$, $\varphi(\overrightarrow{A'D'}) = \overrightarrow{AD}$ und C”$:=\varphi(C') \in I(\alpha)$. Sei $\alpha'' = \angle DAC'' = \varphi(\angle D'A'C')$ und $\varepsilon := \angle C''AB$. Dann ist ε Nebenwinkel zu α''.

Es ist $\beta < \varepsilon$ (da $C \in I(\varepsilon)$) und $\beta \mathrel{\widehat{=}} \alpha$, also auch $\alpha < \varepsilon$. Mit $\alpha' < \alpha$ und $\alpha'' \mathrel{\widehat{=}} \alpha'$ ist andererseits $\alpha'' < \alpha$. Zusammen ergibt das die Beziehung $\alpha'' < \varepsilon$.

Weil $\alpha' \mathrel{\widehat{=}} \alpha''$ und β' Nebenwinkel zu α' ist, folgt: $\beta' \mathrel{\widehat{=}} \varepsilon$. Es ist aber auch $\beta' \mathrel{\widehat{=}} \alpha'$, und damit $\alpha'' \mathrel{\widehat{=}} \alpha' \mathrel{\widehat{=}} \varepsilon$. Das steht im Widerspruch zu der oben gefundenen Aussage. ∎

Euklids Postulat IV kann also als Satz bewiesen werden. Der Beweis geht auf Hilbert zurück. Nun sind wir auch in der Lage, den rechten Winkel als universelles Winkelmaß zu benutzen.

Definition. Ein *spitzer Winkel* ist ein Winkel, der kleiner als ein Rechter ist. Ein *stumpfer Winkel* ist einer, der größer als ein Rechter ist.

Im Gegensatz zur Situation bei den Strecken ist die Addition von Winkeln problematisch. Aus zwei nebeneinander liegenden Winkeln $\angle BAC$ und $\angle CAD$ möchte man gerne einen großen Winkel $\angle BAD$ machen. Das ist aber nur dann sinnvoll, wenn anschließend C im Innern des Winkels $\angle BAD$ liegt, und das ist nur möglich, wenn C und D auf der gleichen Seite von AB liegen. Außerdem soll natürlich D nicht im Innern von $\angle BAC$ liegen, also müssen wir fordern, daß B und C auf der gleichen Seite von AD liegen. Andernfalls ist die Winkeladdition nicht durchführbar.

Da es keine gestreckten Winkel gibt, kann man auch nicht zwei Winkel zu einem gestreckten Winkel addieren. Euklid spricht statt von einem gestreckten Winkel immer von zwei Rechten. Wir können dieses Konzept präzisieren:

Definition. Zwei Winkel $\angle BAC$ und $\angle CAD$ mit einem Strahl $\overrightarrow{AC}$ als gemeinsamem Schenkel *liegen nebeneinander*, wenn D und B auf verschiedenen Seiten von AC liegen. Zwei solche nebeneinander liegenden Winkel sind *zusammen gleich zwei Rechten* (bzw. *zusammen kleiner als zwei Rechte*), wenn sie Nebenwinkel sind (bzw. wenn C und D auf der gleichen Seite von AB liegen).

Zwei beliebige Winkel $\angle BAC$ und $\angle FEG$ sind zusammen gleich zwei Rechten (bzw. kleiner als zwei Rechte), wenn $\angle FEG$ kongruent zu einem neben $\angle BAC$ gelegenen Winkel $\angle CAD$ ist, so daß $\angle BAC$ und $\angle CAD$ zusammen gleich zwei Rechten (bzw. kleiner als zwei Rechte) sind.

Wie geht es jetzt weiter?

Wir haben Euklids Axiomensystem „repariert“, aber wenn wir nun in seinem Stile weitermachen wollen, dann brauchen wir immer noch ein Axiom über das Schneiden von Kreisen. Andererseits beweist Hilbert mit den oben bereitgestellten Axiomen und Sätzen schon ohne weitere Hilfsmittel einen großen Teil der Sätze Euklids (vor Proposition 29). Brauchen wir also gar – abgesehen von Postulat V – gar kein weiteres Axiom?

Man muß bei Euklid schon etwas genauer hinsehen. Da gibt es nämlich

Proposition 22: *Aus drei gegebenen Strecken a, b, c mit*

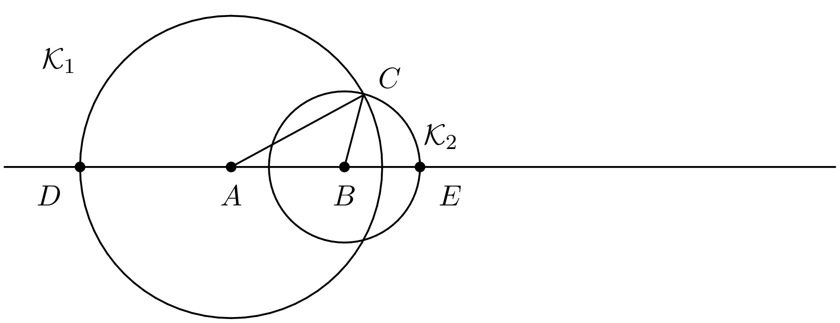
$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

kann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Die Beweisidee ist die folgende:

Man ordnet die Strecken in der Reihenfolge b, c, a auf einer Geraden an, so daß Punkte D, A, B, E entstehen.

Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius $b = \overline{DA}$ und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius $a = \overline{BE}$. Wählt man einen Schnittpunkt C der beiden Kreise aus, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.



Für Euklid ist der Satz kein Problem, die Methode der zwei Kreise hat er ja schon häufig angewandt. Bei Hilbert sucht man den Satz (als Folgerung aus den Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenz-Axiomen) vergeblich. Woran liegt das? Vielleicht reichen die bisherigen Axiome tatsächlich noch nicht aus.

Wir machen ein kleines Gedankenexperiment. Wir lassen den alten Pythagoras ein Modell für die Ebene konstruieren:

Ausgangspunkt ist die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, zu Ehren der von den Pythagoräern gelehrten Harmonie der Zahlen. Aber es gibt ja auch irrationale Längen, die z.B. als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Katheten auftreten können. Normiert man eine Kathete zu 1 und hat die zweite Kathete die Länge ω, so hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1+\omega^2}$. Solche Zahlen müssen also auch zugelassen werden.

Es sei K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, und $\alpha \in K$, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$. Dann setzen wir

$$K(\sqrt{\alpha}) := \{a + b\sqrt{\alpha} \mid a, b \in K\}.$$

Man rechnet leicht nach, daß $K(\sqrt{\alpha})$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, d.h. die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ führen aus $K(\sqrt{\alpha})$ nicht heraus. Aber es gilt noch mehr: Ist $x := a + b\sqrt{\alpha} \neq 0$, so muß $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sein, und damit auch $a - b\sqrt{\alpha} \neq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{a - b\sqrt{\alpha}}{(a + b\sqrt{\alpha})(a - b\sqrt{\alpha})} \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2\alpha} - \frac{b}{a^2 - b^2\alpha}\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $K(\sqrt{\alpha})$ sogar ein Körper ist. Man nennt $K(\sqrt{\alpha})$ eine *quadratische Körpererweiterung* von K. Diese Erweiterung ist zugleich ein 2-dimensionaler K-Vektorraum, mit der Basis $\{1, \sqrt{\alpha}\}$.

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *pythagoräisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{1 + \omega_i^2})$ mit $\omega_i \in K_{i-1}$ gibt, so daß x in K_n liegt.

Eine pythagoräische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\omega \mapsto \sqrt{1+\omega^2}$ anwendet.

Mit $\text{Pyth}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller pythagoräischen Zahlen.

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\text{Pyth}(\mathbb{Q})$ ein Körper ist.

Die Ebene in dem neuen Modell $\mathcal{M}_9$ sei nun die Menge

$$\mathcal{E} := \text{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \text{Pyth}(\mathbb{Q}).$$

Die Geraden seien die Mengen der Gestalt

$$g = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid ax + by = r\}, \quad a, b, r \in \text{Pyth}(\mathbb{Q}), \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Man rechnet leicht nach, daß die Inzidenz-Axiome erfüllt sind. Die Größen a, b, r der Geraden durch zwei gegebene Punkte erhält man über rein rationale Operationen.

Die Zwischen-Beziehung vererbt sich von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathcal{E}$, und es ist klar, daß dann auch das Pasch-Axiom gilt. Als nächstes benötigt man Bewegungen:

$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ ergibt eine Translation um (a, b),

$(x, y) \mapsto (x, -y)$ ergibt die Spiegelung an der x-Achse

und

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bx}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

ergibt eine Drehung um den Nullpunkt $O := (0, 0)$, die $E := (1, 0)$ auf einen Punkt $P \in \overrightarrow{OC}$ abbildet, $C := (a, b)$.

Da $\sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2}$ ist, spielt sich alles im Körper der pythagoräischen Zahlen ab. Aus den hier angegebenen Abbildungen kann man alle Bewegungen konstruieren, die nötig sind, um die Bewegungs-Axiome zu erfüllen.

Wir haben also ein fast perfektes Modell für die Euklidische Ebene gefunden und können nachprüfen, ob das Kreisaxiom erfüllt ist oder nicht.

Dazu betrachten wir allgemeine Wurzel-Ausdrücke der Form

$$q = q_n(\sqrt{q_{n-1}(\sqrt{\ldots \sqrt{q_1(\sqrt{\alpha})} \ldots})}),$$

mit rationalen Funktionen $q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$ und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$. Tauscht man eine oder mehrere der Wurzeln gegen ihr Negatives, so erhält man einen sogenannten *konjugierten* Ausdruck zu q.

Ist das Argument jeder Wurzel von der Form $1+\omega^2$ (wobei ω wieder ein zusammengesetzter Ausdruck sein kann), so sind der ursprüngliche Ausdruck und alle dazu konjugierten Ausdrücke reelle Zahlen. Sind die Argumente der Wurzeln dagegen von beliebiger Form, so können auch nicht-reelle komplexe Zahlen entstehen.

Ein Beispiel ist etwa der reelle Ausdruck $\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$. Der dazu konjugierte Ausdruck $\sqrt{2(-\sqrt{2} - 1)} = \mathrm{i} \cdot \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$ ist tatsächlich rein imaginär. Das bedeutet, daß $\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ nicht pythagoräisch sein kann!

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist pythagoräisch, also auch $2(\sqrt{2} - 1)$. Wir werden später sehen, daß das Kreisaxiom genügt, um auch die nicht-pythagoräische Wurzel daraus zu konstruieren.

Das Kreis-Axiom:

S-1) Sind $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathcal{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch aus dem Äußeren von $\mathcal{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Jetzt können wir das Programm Euklids durchführen:

4.33 Satz (Euklids Proposition 1). *Sind zwei Punkte A, B gegeben, so gibt es Punkte P und Q auf den beiden Seiten von AB, so daß die Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle ABQ$ beide gleichseitig sind (also drei paarweise zueinander kongruente Seiten besitzen).*

Der Beweis wird so ausgeführt, wie wir es in §3 in der verbesserten Version getan haben.

Euklids **Propositionen 2 und 3**, die sich mit dem Antragen von Strecken beschäftigen, sind überflüssig geworden, dank Satz 4.22. Allerdings liefert dieser Satz kein Konstruktionsverfahren! Da er aber zeigt, daß jeder Strahl, der vom Mittelpunkt eines Kreises ausgeht, auch den Kreis selbst trifft, kann man Euklids Beweise nachvollziehen.

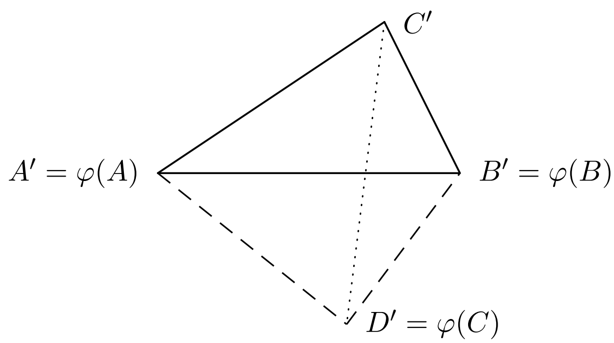
Euklids **Proposition 4** (SWS-Kongruenz) und **5** (Pons asinorum) haben wir bereits bewiesen (Satz 4.26 und 4.27). **Proposition 6** ist die Umkehrung zu Proposition 5 („Ein Dreieck mit gleichen Basiswinkeln ist gleichschenklig“) und kann ganz leicht durch Widerspruch bewiesen werden.

Proposition 7 stellt einen Hilfssatz für Proposition 8 zur Verfügung, den wir direkt beweisen:

4.34 Satz (SSS, Euklids Proposition 8). *Es seien zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

Beweis: Sei φ die eindeutig bestimmte Bewegung, die A auf A' abbildet, B auf einen Punkt von $\overrightarrow{A'B'}$ und C so, daß $D' := \varphi(C)$ und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'B'$ liegen. Da $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ ist, muß $\varphi(B) = B'$ sein.



Da $\overline{B'D'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$ ist, ist $\triangle C'D'B'$ gleichschenklig, und die Basiswinkel $\angle C'D'B'$ und $\angle D'C'B'$ sind kongruent. Genauso folgt auch, daß $\angle D'C'A'$ und $\angle C'D'A'$ kongruent sind. Mit Winkeladdition (oder -Subtraktion, je nach Gestalt der Dreiecke) erhält man:

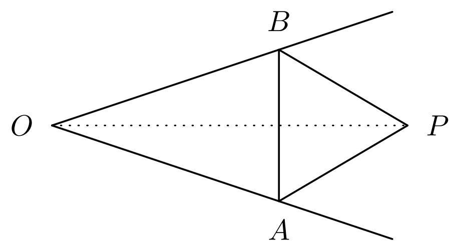
$$\angle A'C'B' \mathrel{\widehat{=}} \angle A'D'B'.$$

Mit dem SWS-Kongruenzsatz folgt: $\triangle A'B'C' \mathrel{\widehat{=}} \triangle A'B'D' \mathrel{\widehat{=}} \triangle ABC$. ∎

4.35 Satz (Eulids Proposition 9, „Winkelhalbierung“).

Zu einem gegebenen Winkel $\alpha = \angle AOB$ kann man genau einen Strahl $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$ mit $P \in I(\alpha)$ finden, so daß $\angle AOP \mathrel{\widehat{=}} \angle POB$ ist.

Beweis: O.B.d.A. sei $\overline{OA} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OB}$.



Es gibt einen Punkt P, auf der zu O entgegengesetzten Seite von AB, so daß $\triangle BAP$ gleichseitig ist. Nach dem Satz von der SSS-Kongruenz sind dann $\triangle OPB$ und $\triangle OPA$ kongruent, und damit auch die einander entsprechenden Winkel $\angle POB$ und $\angle POA$.

Wäre P nicht in $I(\alpha)$, so wäre $\angle POB < \angle POA$ oder umgekehrt. Das kann nicht sein.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nimmt man die Existenz zweier Strahlen der gewünschten Art an und führt dann durch Vergleich aller auftretenden Winkel einen Widerspruch herbei. ∎

4.36 Satz (Euklids Proposition 10, „Streckenhalbierung").

Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau einen Punkt M mit

$$A - M - B \quad \text{und} \quad \overline{AM} \cong \overline{MB}.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt auch hier sehr einfach durch Streckenvergleiche.

Zum Nachweis der Existenz des Punktes M konstruieren wir auf beiden Seiten von AB gleichseitige Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$. Da C und C' auf verschiedenen Seiten von AB liegen, muß die Verbindungsstrecke $\overline{CC'}$ die Gerade AB in einem Punkt M treffen.

Aus dem Satz von der SSS-Kongruenz folgt, daß $\triangle CC'B \cong \triangle C'CA$ ist, insbesondere auch $\angle C'CA \cong \angle C'CB$.

Aus dem Satz von der SWS-Kongruenz folgt, daß $\triangle AMC \cong \triangle MBC$ ist, und insbesondere $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Wäre $M - A - B$, so wäre $\overline{MA} < \overline{MB}$, und genauso führt man die Beziehung $A - B - M$ zum Widerspruch. Also muß $A - M - B$ gelten. ∎

Definition. Sind g und h Geraden, die sich (genau) im Punkt O schneiden und dabei einen rechten Winkel einschließen, und ist $P \in h$ ein Punkt $\neq O$, so sagt man:

1. h ist eine *Senkrechte* zu g im Punkte O.
2. h ist ein *Lot* von P auf g mit Fußpunkt O.

4.37 Satz (Euklids Proposition 11, „Senkrechte errichten").

Ist g eine Gerade und $O \in g$, so kann man auf eindeutige Weise in O die Senkrechte zu g errichten.

Beweis: Man konstruiere Punkte $A, B \in g$ mit $A - O - B$ und $\overline{AO} \widehat{=} \overline{OB}$. Dann errichte man über $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABP$ und setze $h := OP$. Weil $\triangle AOP \widehat{=} \triangle OBP$ ist (SSS), muß auch $\angle AOP \widehat{=} \angle BOP$ sein.

Die Eindeutigkeit ergibt sich wie im Beweis der Kongruenz aller rechten Winkel. ∎

Definition. Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und h die Senkrechte zu AB in M, so nennt man g auch die *Mittelsenkrechte* zu $\overline{AB}$.

Mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man leicht zeigen: Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} \mid \overline{AX} \widehat{=} \overline{BX}\}.$$

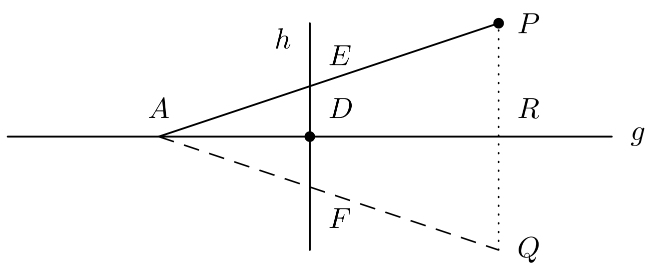
4.38 Satz (Euklids Proposition 12, „Lot fällen“). *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt, so kann man von P aus ein Lot auf g fällen.*

Beweis: Hier heißt es aufpassen! Euklid verwendet zum Beweis eine weitere Eigenschaft des Kreises, die er nie gezeigt hat: *Eine Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises schneidet diesen Kreis auf beiden Seiten des Punktes.*

Wir wollen diese Eigenschaft nicht als Axiom fordern, denn sie läßt sich aus dem Kreisaxiom herleiten. Allerdings braucht man dazu die Möglichkeit, ein Lot zu fällen. Also müssen wir für Proposition 12 einen anderen Beweis finden.

Wir wählen einen Punkt D auf g und errichten dort die Senkrechte h zu g. Liegt zufällig P auf h, so sind wir fertig.

Sei also $P \notin h$. Wir wählen einen Punkt $A \in g$, so daß A und P auf verschiedenen Seiten von h liegen. Dann trifft $\overline{AP}$ die Gerade h in einem Punkt E.



Wir suchen den Punkt $F \in h$ mit $E - D - F$ und $\overline{DE} \widehat{=} \overline{DF}$. Anschließend verlängern wir $\overline{AF}$ über F hinaus bis zu einem Punkt Q, so daß $\overline{AQ} \widehat{=} \overline{AP}$ ist.

Behauptung: PQ ist das gesuchte Lot.

Beweis dafür: Da P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen, schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in einem Punkt R. Da die Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle ADF$ kongruent sind (SWS), ist $\angle RAP \widehat{=} \angle RAQ$. Daraus folgt, daß auch $\triangle ARP \widehat{=} \triangle ARQ$ ist. Insbesondere ist dann $\angle ARP \widehat{=} \angle ARQ$, also PQ senkrecht zu g. ∎

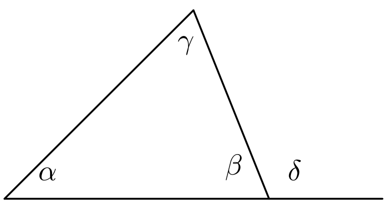
Proposition 13 und 14 besagen, daß nebeneinander liegende Winkel genau dann Nebenwinkel sind, wenn sie zusammen zwei Rechte ergeben. Diese Aussage ist für uns bedeutungslos, weil sie in den Definitionen enthalten ist. **Proposition 15** behandelt die Gleichheit von Scheitelwinkeln, das haben wir schon erledigt.

4.39 Satz (Euklids Proposition 16, „Außenwinkelsatz).

Bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Der Beweis kann wie bei Euklid geführt werden (vgl. §3), es müssen nur einige Begründungen eingefügt werden.

4.40 Satz (Euklids Proposition 17). *In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte.*



Beweis: Nach dem Außenwinkelsatz ist $\delta > \alpha$. Trägt man also α neben β an, so ragt der freie Schenkel des angetragenen Winkels ins Innere von δ. In salopper Schreibweise kann man dafür sagen: $\alpha + \beta < \beta + \delta$. Aber $\beta + \delta$ entspricht zwei Rechten.

Bei den anderen Winkeln geht's genauso. ■

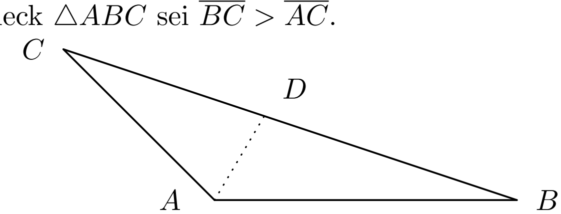
4.41 Folgerung. *Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.*

4.42 Folgerung. *Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade, die den Punkt nicht enthält, ist immer eindeutig bestimmt.*

Definition. Ein *rechtwinkliges Dreieck* ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt *Hypotenuse*, die beiden anderen Seiten nennt man *Katheten*.

4.43 Satz (Euklids Proposition 18). *In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.*

Beweis: Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei $C - D - B$, mit $\overline{CD} \widehat{=} \overline{CA}$. Nach dem Außenwinkelsatz ist $\angle CDA > \angle CBA$. Aber da $\triangle CAD$ gleichschenklig ist, ist $\angle CAD \widehat{=} \angle CDA$. Erst recht ist dann $\angle CAB > \angle CBA$. ■

4.44 Satz (Euklids Proposition 19). *In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel stets die größere Seite gegenüber.*

Beweis: Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$, es sei $\angle CAB > \angle CBA$. Wäre $\overline{CA} \widehat{=} \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zum Basiswinkelsatz. Wäre $\overline{CA} > \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zu Proposition 18. ■

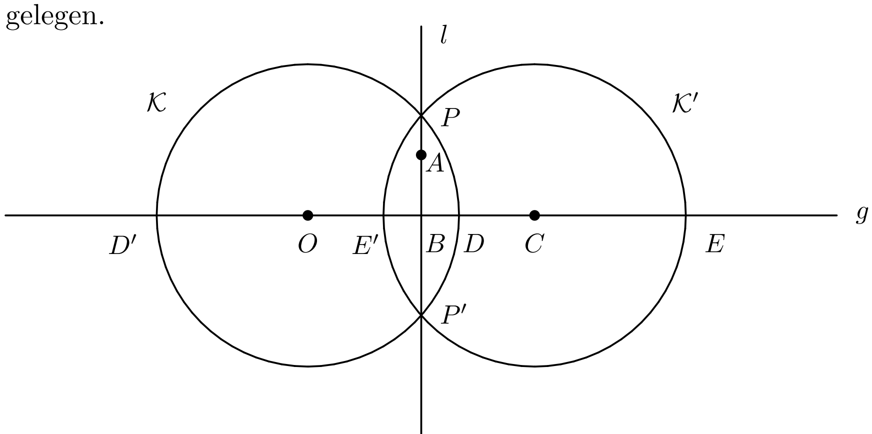
4.45 Folgerung. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse stets die größte Seite.*

Jetzt können wir den Satz über das Schnittverhalten von Kreis und Gerade beweisen, den Euklid schon beim Beweis der Existenz eines Lotes benötigt hatte:

4.46 Satz. *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis um den Punkt O, A ein Punkt im Innern von $\mathcal{K}$ und l eine Gerade durch A. Dann schneidet l den Kreis in zwei Punkten (auf verschiedenen Seiten von A).*

Beweis: Die Aussage ist trvial, wenn O auf l liegt. Also können wir o.B.d.A. annehmen, daß $O \notin l$ ist. Dann sei g das Lot von O auf l mit Fußpunkt B. Weiter sei C der Punkt auf g mit $O - B - C$ und $\overline{OB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$, so daß l die Mittelsenkrechte zu $\overline{OC}$ ist. Da das Dreieck OBA bei B rechtwinklig ist, ist $\overline{OA} > \overline{OB}$, also B im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ gelegen.

Die Gerade g schneidet $\mathcal{K}$ in zwei Punkten D und D', es gelte $D' - O - D$ und $D \in \overrightarrow{OB}$. Wählen wir $E \in \overrightarrow{OB}$ mit $B - C - E$ und $\overline{CE} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OD}$, so liegt E auf dem Kreis $\mathcal{K}'$ um C mit Radius $\overline{OD}$. Wegen $O - C - E$ ist $\overline{OE} > \overline{CE} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OD}$, also E im Äußeren von $\mathcal{K}$ gelegen.



Der Kreis $\mathcal{K}'$ schneidet g in E und in einem Punkt E', mit $E' - C - E$. Wegen $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OB} < \overline{OD} = \overline{E'C}$ ist $E' - B - C$. Wegen $\overline{D'O} \mathrel{\widehat{=}} \overline{E'C}$ und $D' - O - B$ ist $D' - E' - B$. Aber jeder Punkt zwischen D' und B (und damit insbesondere E') liegt im Innern von $\mathcal{K}$.

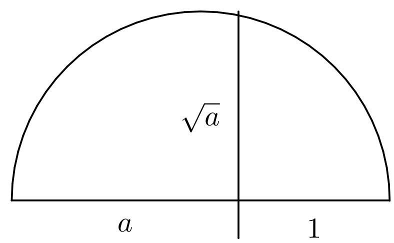
Aus dem Kreisaxiom folgt nun, daß sich $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ auf beiden Seiten von g je in einem Punkt treffen. Sei P der Schnittpunkt, der auf der gleichen Seite von g wie A liegt. Dann ist $\overline{OP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CP}$. Außerdem ist $\overline{OB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$. Nach dem SSS-Kongruenzsatz ist dann $\triangle OBP \mathrel{\widehat{=}} \triangle BCP$, also $\angle OBP \mathrel{\widehat{=}} \angle CBP$. Da es sich um Nebenwinkel handelt, sind sie rechte Winkel, und das bedeutet, daß $BP = l$ ist, also $P \in l$.

Der Punkt P' mit $P - B - P'$ und $\overline{PB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BP'}$ ist offensichtlich der zweite Schnittpunkt der Kreise, und auch er liegt auf l. Somit ist $l \cap \mathcal{K} = \{P, P'\}$, mit $P - A - P'$. ■

Wir können nun auch beweisen, daß das Kreis-Axiom im Modell $\mathcal{M}_9$ nicht erfüllt ist!

Sei a irgendeine pythagoräische Zahl. Dann liegen die Punkte $O := (0,0)$, $P := (a,0)$ und $Q := (a+1,0)$ in der pythagoräischen Ebene $\mathcal{E} = \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$. Da die Bewegungen in diesem Modell zugleich isometrische Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ auf sich sind, kann man sagen: Zwei Strecken sind genau dann kongruent, wenn sie die gleiche euklidische Länge haben. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OQ}$ ist also der Punkt $M := (\frac{a+1}{2}, 0)$, und der Kreis um M mit Radius $\overline{OM}$ ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid (x - \frac{a+1}{2})^2 + y^2 = (\frac{a+1}{2})^2\,\}.$$



Schneidet man $\mathcal{K}$ mit der Geraden $g := \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid x = a\}$, so erhält man Punkte (x,y) mit $x = a$ und $y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = a$, also $X_\pm := (a, \pm\sqrt{a})$. Nach dem Kreisaxiom wäre jeder solche Punkt konstruierbar, aber im Falle $a = 2(\sqrt{2} - 1)$ haben wir schon gesehen, daß $\sqrt{a}$ nicht pythagoräisch ist.

Nun ist auch halbwegs klar, wie wir den Mangel beheben können:

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *platonisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit $\alpha_i \in K_{i-1}$ und $\alpha_i > 0$ gibt, so daß x in K_n liegt.

Eine platonische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{}$ anwendet.

Mit $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller platonischen Zahlen.

Ein Modell $\mathcal{M}_{10}$ gewinnen wir, indem wir als Ebene die kartesische Ebene der platonischen Zahlen benutzen: $\mathcal{E} := \mathrm{Plat}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$. Es ist klar, daß auch hier die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome gelten. Und da mit jeder positiven platonischen Zahl auch deren Wurzel wieder platonisch ist, sind die Schnittpunkte von Kreisen immer konstruierbar, d.h., es gilt das Kreisaxiom.

Die Platonische Ebene ist das Modell für die Geometrie, in der alle Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Und das ist die Geometrie, die Euklid betrieben hat. In der Ebene gibt es noch viele Lücken, insbesondere ist die Zahl π keine platonische Zahl. Deshalb konnte den Alten auch die Quadratur des Kreises nicht gelingen.

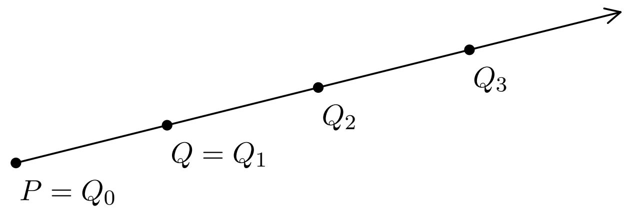
Das Archimedes-Axiom:

4.47 Satz. *Zu zwei Punkten $P \neq Q$ und einer natürlichen Zahl n kann man stets Punkte $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n \in \overrightarrow{PQ}$ finden, so daß gilt:*

1. $Q_0 = P$, $Q_1 = Q$ *und* $\overline{Q_iQ_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ *für* $i = 1, \ldots, n-1$.

2. $Q_{i-1} - Q_i - Q_{i+1}$ *für* $1 \leq i \leq n-1$.

Der BEWEIS ist trivial.



Definition. In der Situation des obigen Satzes sagt man: Der Punkt Q_n wird durch n-maliges Antragen der Strecke $\overline{PQ}$ erreicht. An Stelle der Strecke $\overline{Q_0Q_n}$ schreibt man auch $n \cdot \overline{PQ}$.

Ist zu der Strecke $\overline{PQ}$ noch eine weitere Strecke $\overline{AB} > \overline{PQ}$ gegeben, so erwartet man, daß $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$ ist, wenn man nur n groß genug wählt. Eigenartigerweise läßt sich das aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen. Man muß es fordern:

S-2) Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

Man nennt die Axiome S-1 und S-2 auch die *Stetigkeitsaxiome*, aus Gründen, die weiter unten erläutert werden.

Das Axiom S-2 taucht bei Euklid nicht explizit auf. In der Proportionenlehre betrachtet er allerdings nur Verhältnisse von solchen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$, die das Archimedes-Axiom erfüllen.

In der platonischen Ebene gilt S-2, so einfach ist die Frage nach der Unabhängigkeit also nicht zu entscheiden. Aber es gibt sogenannte *nicht-archimedische Körper* mit „unendlich kleinen" und „unendlich großen" Elementen, und in der mit Hilfe eines solchen Körpers modellierten Ebene gelten in gewissen Fällen alle bisherigen Axiome der Geometrie, nur nicht S-2.

An entscheidender Stelle werden wir das Archimedische Axiom später in der Neutralen Geometrie verwenden. Hier wollen wir es aber schon einmal zur Einführung des Längenbegriffs benutzen.

Bisher haben wir ja völlig auf das Messen von Strecken und Winkeln verzichtet und uns dafür manche Unbequemlichkeit eingehandelt. Jetzt werden wir sehen, wie sich aus den vorhandenen Axiomen ein Maßbegriff ableiten läßt.

Die Kongruenz von Strecken liefert ja eine Äquivalenzrelation. Die allen Elementen einer Äquivalenzklasse gemeinsame Eigenschaft ist das, was wir uns anschaulich unter einer „Länge" vorstellen. Deshalb wollen wir eine solche Äquivalenzklasse auch als *Länge* bezeichnen. Λ sei die Menge aller Längen.

Die Äquivalenzklasse einer Strecke $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit $[AB]$. Ist $\overline{CD}$ eine weitere Strecke, so kann man einen Punkt E mit $A - B - E$ finden, so daß $[BE] = [CD]$ ist. Wir schreiben dann:

$$[AE] = [AB] + [CD].$$

Man überlegt sich leicht, daß diese Definition unabhängig von den Repräsentanten ist. Und offensichtlich ist diese Addition auf Λ auch kommutativ und assoziativ. Also ist Λ eine kommutative Halbgruppe. Weiter gibt es zwischen den Elementen von Λ eine $<$-Beziehung mit folgenden Eigenschaften:

1. Für je zwei Elemente $a, b \in \Lambda$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.
2. Ist $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$.
3. Ist $a < b$, so ist auch $a + c < b + c$, für jedes $c \in \Lambda$.

Wir sagen dann: Λ ist eine *angeordnete kommutative Halbgruppe.*

Definition. Eine *Längenfunktion* ist eine Funktion $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b)$.
2. Es gibt ein $e \in \Lambda$ mit $\lambda(e) = 1$.

Jede Strecke $\overline{AB}$ mit $\lambda([AB]) = 1$ wird als *Einheitsstrecke* (bezüglich λ) bezeichnet.

4.48 Satz. *Ist λ eine Längenfunktion, so gilt:*

1. Ist $a < b$, so ist auch $\lambda(a) < \lambda(b)$.

2. Ist (a_n) eine Folge von Längen, die man derart durch Strecken $\overline{AB_n}$ repräsentieren kann, daß B_{n+1} jeweils der Mittelpunkt von $\overline{AB_n}$ ist, so ist

$$\lambda(a_{n+1}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n) \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda(a_n) = 0.$$

3. Die Einheitslänge e ist eindeutig bestimmt, d.h. je zwei Einheitsstrecken für λ sind zueinander kongruent.

Beweis:

1) Seien $a, b \in \Lambda$ mit $a < b$. Dann ist a die Klasse einer Strecke $\overline{AB}$ und b die Klasse einer Strecke $\overline{AC}$, mit $A - B - C$. Bezeichnen wir noch die Klasse der Strecke $\overline{BC}$ mit c, so ist $a + c = b$, also $\lambda(a) + \lambda(c) = \lambda(b)$. Da $\lambda(c) > 0$ ist, ist auch $\lambda(b) > \lambda(a)$, bzw. $\lambda(a) < \lambda(b)$.

2) Es ist $\overline{AB_{n+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B_{n+1}B_n}$ und $A - B_{n+1} - B_n$, also

$$a_{n+1} + a_{n+1} = a_n.$$

Daraus folgt: $2 \cdot \lambda(a_{n+1}) = \lambda(a_n)$, oder $\lambda(a_{n+}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n)$.

Sukzessive folgt: $\lambda(a_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\lambda(a_1)$. Im Grenzwert strebt $\lambda(a_n)$ gegen 0.

3) Seien e, e' zwei Längen mit $\lambda(e) = \lambda(e') = 1$. Wäre $e \neq e'$, etwa $e < e'$, so müßte $\lambda(e) < \lambda(e')$ sein. ∎

Eine Längenfunktion ist also ein Homomorphismus $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ zwischen angeordneten Halbgruppen.

4.49 Satz. *Zu jeder beliebigen Strecke $\overline{PQ}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Längenfunktion λ, so daß $\overline{PQ}$ eine Einheitsstrecke für λ ist.*

Beweis: Sei $a \in \Lambda$ eine Länge, repräsentiert durch eine Strecke $\overline{AB}$. Wir wählen Punkte $Q_0, Q_1, \ldots$ auf $\overrightarrow{AB}$, so daß gilt:

1. $Q_0 = A$ und $Q_{i-1} - Q_i - Q_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $\overline{Q_iQ_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ für alle i.

Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß entweder $Q_N = B$ ist, oder $A - Q_N - B$ und $Q_N - B - Q_{N+1}$.

Im ersten Fall ist $[AB] = [Q_0Q_1] + \cdots + [Q_{N-1}Q_N]$, und wir müssen $\lambda(a) := N$ setzen.

Im zweiten Fall konstruieren wir induktiv Folgen von Punkten (X_n), (Y_n) und Zahlen (ε_n) wie folgt:

<u>$n = 1$</u>: Sei M der Mittelpunkt von $\overline{Q_NQ_{N+1}}$. Ist $M = B$ oder $M - B - Q_{N+1}$, so setzen wir $X_1 := M$ und $Y_1 := Q_{N+1}$, sowie $\varepsilon_1 := 1$.

Ist $Q_N - B - M$, so setzen wir $X_1 := Q_N$, $Y_1 := M$ und $\varepsilon_1 := 0$.

<u>$n \to n+1$</u>: Es seien X_n, Y_n mit $2^n \cdot \overline{X_nY_n} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ und $B = X_n$ oder $X_n - B - Y_n$ konstruiert, sowie Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$. Dann sei M der Mittelpunkt von $\overline{X_nY_n}$.

Ist $B = M$ oder $M - B - Y_n$, so setzen wir $X_{n+1} := M$, $Y_{n+1} := Y_n$ und $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Ist $B = X_n$ oder $X_n - B - M$, so setzen wir $X_{n+1} := X_n$, $Y_{n+1} := M$ und $\varepsilon_{n+1} := 0$.

In jedem Fall ist $\varepsilon_{n+1} \in \{0, 1\}$ und $2^{n+1} \cdot \overline{X_{n+1}Y_{n+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$, sowie $B = X_{n+1}$ oder $X_{n+1} - B - Y_{n+1}$.

Nach $n+1$ Schritten steht fest:

$$N + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} < \lambda(a) < N + 1.$$

Und wenn man immer so weiter macht, erhält man schließlich:

$$\lambda(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}.$$

Dabei ist zu bemerken, daß es nicht passieren kann, daß $\varepsilon_n = 1$ für alle $n \geq 1$ ist. Nach Voraussetzung ist $Q_N - B - Q_{N+1}$. Es gibt daher ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $2^k \cdot \overline{PQ} > \overline{PQ}$ ist. Man kann sich dann leicht überlegen, daß beim fortgesetzten Halbieren der Intervalle der Punkt B irgendwann einmal im „linken“ Intervall liegen muß.

Da alle ε_n in $\{0, 1\}$ liegen und wenigstens ein $\varepsilon_n = 0$ ist, folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} < \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n - 1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 1.$$

Die Reihe ist konvergent und hat einen Wert < 1.

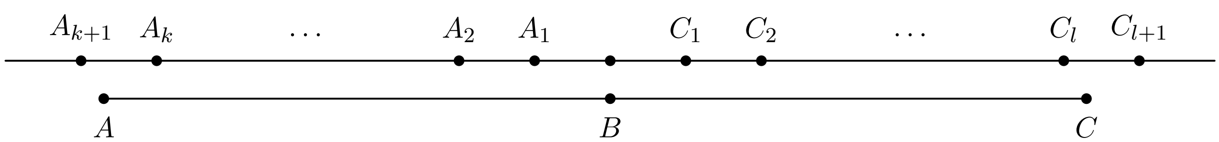
Wir haben jetzt gesehen, daß die Werte einer etwaigen Längenfunktion eindeutig bestimmt sind. Wir nehmen die gefundene Formel als Definition und haben für die Existenz dann nur noch die Additivität von λ zu zeigen. Unser Vorteil dabei ist, daß wir aus der Konstruktion schon die Monotonie von λ erkennen können.

Betrachten wir drei Punkte A, B, C mit $A - B - C$. Die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ repräsentieren Klassen $a, b, c \in \Lambda$. Es soll gezeigt werden, daß $\lambda(a) + \lambda(b) = \lambda(c)$ ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Durch fortgesetztes Halbieren können wir uns eine Strecke $\overline{XY}$ mit $2^n \cdot \overline{XY} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ verschaffen.

Dann konstruieren wir auf $\overrightarrow{BA}$ Punkte $A_1, A_2, \ldots$, so daß $A_{i+1} - A_i - B$ und $\overline{A_1B} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_{i+1}A_i} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$ ist. Es gibt dann nach Archimedes ein k mit $A_k = A$ oder $A_{k+1} - A - A_k$.

Genauso konstruieren wir Punkte $C_1, C_2, \ldots$ auf $\overrightarrow{BC}$ mit $B - C_i - C_{i+1}$ und $\overline{BC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{C_iC_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$. Wieder gibt es ein l mit $C_l = C$ oder $C_l - C - C_{l+1}$.



Nun gilt:

$$\begin{array}{rrcccl} & \overline{A_kB} & \leq & \overline{AB} & < & \overline{A_{k+1}B}, \\ & \overline{BC_l} & \leq & \overline{BC} & < & \overline{BC_{l+1}}, \\ \text{und} & \overline{A_kC_l} & \leq & \overline{AC} & < & \overline{A_{k+1}C_{l+1}}. \end{array}$$

Das ergibt folgende Ungleichungen:

$$\begin{array}{rrcccl} & \dfrac{k}{2^n} & \leq & \lambda(a) & < & \dfrac{k+1}{2^n}, \\ & \dfrac{l}{2^n} & \leq & \lambda(b) & < & \dfrac{l+1}{2^n}, \\ \text{und} & \dfrac{k+l}{2^n} & \leq & \lambda(c) & < & \dfrac{k+l+2}{2^n}. \end{array}$$

Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt:

$$\frac{k+l}{2^n} \leq \lambda(a) + \lambda(b) < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

Zusammen mit der dritten Ungleichung ergibt das:

$$|\lambda(a) + \lambda(b) - \lambda(c)| < \frac{k+l+2}{2^n} - \frac{k+l}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da n beliebig war, folgt: $\quad \lambda(a) + \lambda(b) = \lambda(c)$. ∎

Im Modell $\mathcal{M}_{10}$ liegt es nahe, $\overline{OE}$ mit $O := (0,0)$ und $E := (1,0)$ als Einheitsstrecke zu wählen. Die dazu konstruierte Längenfunktion liefert die gewöhnliche euklidische Länge. Natürlich erhält man nur Zahlen, die in $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ liegen.

Bei der Messung von Winkeln ergeben sich ein paar Probleme:

1. Wir wollen kein Archimedes-Axiom für Winkel einführen. Also müssen wir versuchen, ein entsprechendes Resultat aus dem Archimedes-Axiom für Strecken herzuleiten.

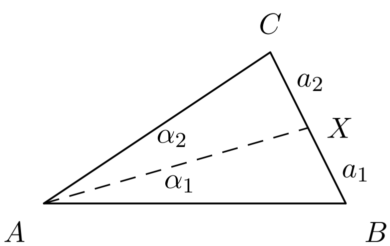
2. Winkel können nicht beliebig addiert werden, das Ergebnis muß immer noch kleiner als zwei Rechte sein.

3. Bei der Streckenmessung konnten wir uns eine Einheitsstrecke wählen. Bei den Winkeln ist der rechte Winkel als universelles Maß vorgegeben.

4.50 Satz. *Im Dreieck ABC sei $\overline{AC} < \overline{AB}$, sowie X ein Punkt zwischen B und C. Wir setzen $\alpha_1 := \angle BAX$ und $a_1 := \overline{BX}$, sowie $\alpha_2 := \angle XAC$ und $a_2 := \overline{XC}$. Dann gilt:*

1. *Ist $\alpha_1 \geq \alpha_2$, so ist $a_1 > a_2$.*

2. *Ist $a_1 \widehat{=} a_2$, so ist $\alpha_1 < \alpha_2$.*

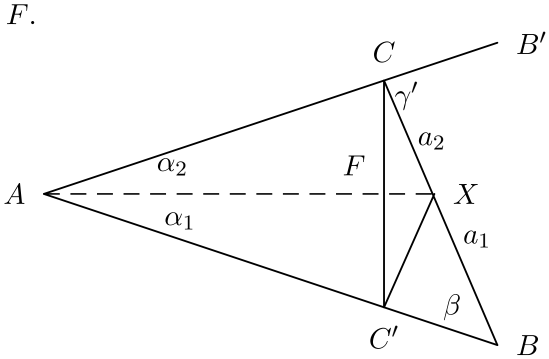


Beweis: (2) folgt trivial aus (1).

1) Ist $\alpha_1 > \alpha_2$, so trage man α_2 auf der anderen Seite von AX an. Der freie Schenkel liegt im Inneren von α_1 und trifft daher die Strecke $\overline{BX}$ in einem Punkt Y mit $B - Y - X$. Ist schon $\overline{YX} > \overline{XC}$, so ist erst recht $\overline{BX} > \overline{CX}$.

Es bleibt also zu zeigen: Ist $\alpha_1 \widehat{=} \alpha_2$, so ist $a_1 > a_2$.

Dazu wähle man C' mit $A - C' - B$ und $\overline{AC'} \widehat{=} \overline{AC}$. Die Verbindungsstrecke $\overline{CC'}$ trifft AX in einem Punkt F.



Wählt man B' auf AC mit $A - C - B'$, so ist $\gamma' := \angle BCB'$ Außenwinkel für $\triangle ABC$, also $\gamma' > \beta$.

Weiter ist $\triangle C'CA$ gleichschenklig, also $\angle AC'C \widehat{=} \angle ACC'$. Die Winkel bei F sind alle rechte Winkel, also ist $\triangle FXC \widehat{=} \triangle FXC'$ und damit $\angle FCX \widehat{=} \angle FC'X$. Das bedeutet, daß $\angle AC'X \mathrel{\widehat{=}} \angle ACX$ ist, und auch die Nebenwinkel γ' und $\angle BC'X$ müssen kongruent sein.

Wir haben damit gezeigt, daß im Dreieck $\triangle C'BX$ gilt: $\angle BC'X > \beta$, also $a_1 = \overline{BX} > \overline{C'X} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CX} = a_2$. ∎

Da auch die Kongruenz von Winkeln eine Äquivalenzrelation ist, können wir Äquivalenzklassen von Winkeln betrachten. Die Menge dieser Klassen sei mit W bezeichnet, R sei die Äquivalenzklasse des rechten Winkels. Die Addition von Klassen wird durch Aneinanderlegen der Winkel erklärt. Sind α und β Nebenwinkel und $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ deren Klassen, so schreibt man: $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 2R$. Zwei Klassen a und b können nur dann addiert werden, wenn gilt:

1. Entweder $a < R$ und $b < R$,
2. oder $a < R < b$, und es gibt Klassen a', b' mit $a = R + a'$, $b + b' = R$ und $a' < b'$ (denn dann ist $a + b = R + a' + b < R + b' + b = 2R$). Dabei können die Rollen von a und b natürlich auch vertauscht werden.

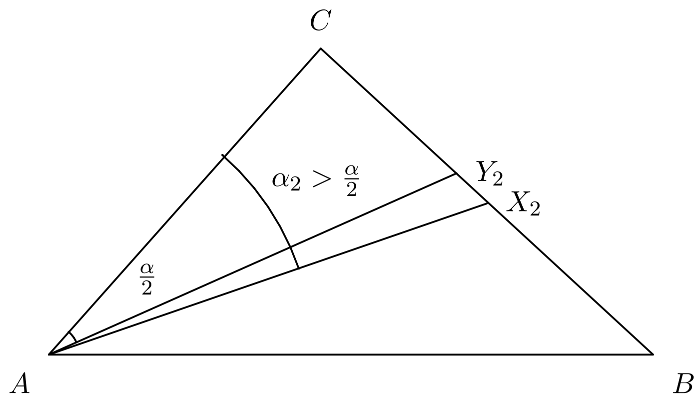
Man schreibt auch $n \cdot a := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{n-mal}}$, sofern die Addition erlaubt ist.

4.51 Satz (Archimedes-Eigenschaft der Winkel).

Sind α, β Winkel mit $\beta < \alpha \leq R$, so gibt es ein n mit $2^n \cdot \beta > \alpha$.

Beweis: Man beachte: Ist $2^k \cdot \beta \leq \alpha < R$, so ist $2^{k+1} \cdot \beta < 2R$ noch immer ein gültiger Winkel. Wir müssen deshalb bei der Bildung der Vielfachen von β nicht besonders aufpassen.

Wir konstruieren ein Dreieck ABC mit einem rechten Winkel bei C und $\angle BAC = \alpha$



Der Winkel β werde im Innern des Dreiecks an $\overline{AC}$ angetragen, der Schnittpunkt des freien Schenkels mit $\overline{BC}$ sei mit X bezeichnet.

Weiter sei X_2 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und Y_2 der Schnittpunkt des freien Schenkels des an $\overline{AC}$ angetragenen Winkels $\frac{\alpha}{2}$ mit der Strecke $\overline{BC}$.

Nach dem vorigen Satz ist $\overline{BY_2} > \overline{Y_2C}$, also $C - Y_2 - X_2$ und $\angle CAX_2 > \frac{\alpha}{2}$.

Wir fahren mit dem Dreieck AX_2C fort. Es ist auch $\overline{AC} > \overline{AX_2}$, und $\alpha_2 := \angle X_2AC > \frac{\alpha}{2}$. Sei X_4 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{X_2C}$ und Y_4 der Schnittpunkt des freien Schenkels des an $\overline{AC}$ angetragenen Winkels $\frac{\alpha_2}{4}$ mit $\overline{X_2C}$. Wieder folgt, daß $\overline{X_2Y_4} > \overline{Y_4C}$ ist, also $C - Y_4 - X_4$ und $\angle CAX_4 > \frac{\alpha_2}{2} > \frac{\alpha}{4}$.

So geht es weiter. Nach k Schritten erreicht man durch fortgesetztes Halbieren den Punkt X_{2^k}, und es ist $\angle CAX_{2^k} > \dfrac{\alpha}{2^k}$.

Nun bemühen wir noch einmal Archimedes: Es gibt ein (kleinstes) n, so daß $2^n \cdot \overline{CX} > \overline{CB}$ ist. Dann muß aber $C - X_{2^n} - X$ gelten, und es ist $\beta > \angle CAX_{2^n} > \dfrac{\alpha}{2^n}$, also $2^n \cdot \beta > \alpha$. ∎

Die Einführung eines Winkelmaßes verläuft nun genauso wie die Einführung einer Längenfunktion. Allerdings gibt man sich keinen Einheitswinkel vor, sondern man ordnet dem rechten Winkel eine Zahl zu (wahlweise 90 oder $\frac{\pi}{2}$, je nachdem, ob man im Grad- oder im Bogenmaß rechnen will). Man muß dabei in Kauf nehmen, daß das Maß eines Winkels nicht mehr notwendig eine platonische Zahl ist.

In der modernen Literatur wird an Stelle der Stetigkeitsaxiome S-1 und S-2 meist ein anderes Axiom angegeben:

Das Dedekind-Axiom:

S) Sind ein Punkt O, ein von O ausgehender Strahl $\vec{s}$ und zwei Teilmengen $m_u, m_o \subset \vec{s}$ gegeben, so daß für alle $X \in m_u$ und alle $Y \in m_o$ die Beziehung $O - X - Y$ gilt, so gibt es einen Punkt S mit folgender Eigenschaft:

Für alle $X \in m_u \setminus \{S\}$ und alle $Y \in m_o \setminus \{S\}$ ist $X - S - Y$.

Die Dedekind-Eigenschaft läßt sich leicht auf Geraden und Winkel übertragen, und sie sorgt dafür, daß jede positive reelle Zahl als Streckenlänge und jede Zahl zwischen 0 und π als Winkelgröße vorkommt. Also ist das Axiom S von den bisherigen Axiomen unabhängig. Allerdings kann man die Axiome S-1 und S-2 ohne große Mühe aus S herleiten. Ein passendes Modell ist dann die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$.

Für Euklid und seine Zirkel-und-Lineal-Geometrie reichen die Axiome S-1 und S-2 aus. Das Dedekind-Axiom S paßt überhaupt nicht in die Antike Welt, es gehört in die Mathematik nach Cantor, in der mengentheoretische Begriffsbildungen keine Probleme mehr bereiten. Wir wollen hier vorerst beim Standpunkt Euklids bleiben, denn die gesamte historische Entwicklung bis zur Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie am Anfang des 19. Jahrhunderts ist damit ausgekommen.

Wir haben jetzt alle Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms kennengelernt.

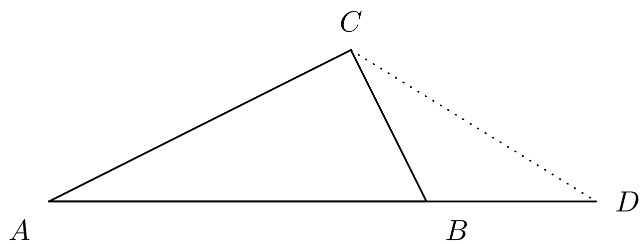
§ 5 Neutrale und Euklidische Geometrie

Es folgen einige Sätze, die noch mit den bisherigen Mitteln bewiesen werden können:

5.1 Satz (Euklids Proposition 20, „Dreiecks-Ungleichung“).

In einem Dreieck sind zwei beliebige Seiten zusammen größer als die dritte Seite.

BEWEIS: Wir wollen zeigen, daß im $\triangle ABC$ gilt: $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei D mit $A - B - D$ so gewählt, daß $\overline{BD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$ ist. Im Dreieck ADC ist $\angle ACD > \angle BCD \mathrel{\widehat{=}} \angle ADC$, also $\overline{AD} > \overline{AC}$. (gegenüberliegende Seiten) Es ist aber $\overline{AD}$ so lang, wie $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ zusammen genommen. ∎

Wir können in der Ebene $\mathcal{E}$ eine *Metrik* einführen, indem wir zunächst eine Längenfunktion λ wählen und dann $d(X,Y) := \lambda([XY])$ setzen.

Für drei nicht-kollineare Punkte X, Y, Z ist dann $d(X,Z) < d(X,Y) + d(Y,Z)$. Gilt hingegen $X - Y - Z$, so ist $d(X,Z) = d(X,Y) + d(Y,Z)$. Und wenn X, Y, Z in anderer Reihenfolge auf einer Geraden liegen, so gilt auch die Ungleichung. Zusammen ergibt das für beliebige Punkte X, Y, Z:

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z).$$

Das ist die „Dreiecks-Ungleichung“, die in beliebigen metrischen Räumen gilt und insbesondere in $\mathbb{R}$ die Gestalt $|z - x| \leq |y - x| + |z - y|$ annimmt. Setzt man $a := y - x$ und $b := z - y$, so ist $a + b = z - x$, und daher

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

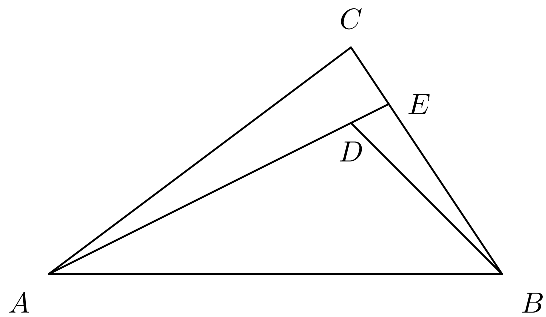
5.2 Satz (Euklids Proposition 21).

Sei D im Innern des Dreiecks ABC. Dann gilt:

1. $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AD} + \overline{BD}$.

2. $\angle ACB < \angle ADB$.

BEWEIS:



Verlängert man $\overline{AD}$ über D hinaus, so erreicht man einen Punkt E auf der Seite $\overline{BC}$.

Wir verwenden zweimal die Dreiecks-Ungleichung: Im Dreieck AEC ist $\overline{AC}+\overline{CE} > \overline{AE}$, und daher ist $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AE} + \overline{EB}$. Im Dreieck DBE ist $\overline{BE} + \overline{ED} > \overline{DB}$. Daraus folgt: $\overline{AE} + \overline{BE} > \overline{AD} + \overline{BD}$.

Zusammen ist dann $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AD} + \overline{DB}$.

Für den Winkelvergleich benutzen wir den Außenwinkelsatz: Beim Dreieck $\triangle DBE$ ist $\angle ADB > \angle AEB$. Beim Dreieck $\triangle AEC$ ist $\angle AEB > \angle ACB$.

Insgesamt ist also $\angle ADB > \angle ACB$. ■

5.3 Satz (Euklids Proposition 22).

Sind drei Strecken a, b, c mit $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$ gegeben, so kann man ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruieren.

Beweis: Es sei $\overline{AB} = c$. Man kann die Strecke über A hinaus um b bis zu einem Punkt X und über B hinaus um a bis zu einem Punkt Y verlängern. Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius b und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius a.

$\mathcal{K}_2$ trifft AB in zwei Punkten Y und Y', mit $Y' - B - Y$. Da $\overline{AB} + \overline{BY} > b$ ist, liegt Y im Äußeren von $\mathcal{K}_1$.

Zur Lage von Y' unterscheiden wir mehrere Fälle: Ist $Y' = A$, so liegt Y' auf jeden Fall im Inneren von $\mathcal{K}_1$. Ist $A - Y' - B$, so folgt aus $a + b > c$, daß $\overline{AY'} < b$ ist. Ist $Y' - A - B$, so folgt aus $b + c > a$, daß $\overline{Y'B} < \overline{XB}$ ist, also $\overline{Y'A} < \overline{XA} = b$. Jedesmal zeigt sich, daß Y' im Innern von $\mathcal{K}_1$ liegt.

Aus dem Kreisaxiom folgt, daß sich $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ in einem Punkt C treffen, und ABC ist das gesuchte Dreieck. ■

In **Proposition 23** zeigt Euklid, daß man Winkel antragen kann. Das haben wir zumindest theoretisch schon im Rahmen der Bewegungsaxiome erledigt. Die praktische Ausführung benutzt Proposition 22.

5.4 Satz (Euklids Proposition 24).

Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

Ist $\angle ACB > \angle A'C'B'$, so ist $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Beweis: Trägt man den kleineren Winkel $\angle A'C'B'$ an $\overline{AC}$ an, mit Scheitel in C, so verläuft der freie Schenkel des angetragenen Winkels im Innern des Winkels $\angle ACB$. Wir wählen einen Punkt X auf diesem Schenkel, mit $\overline{CX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CB}$.

Dann ist $\triangle AXC \mathrel{\widehat{=}} \triangle A'B'C'$ (SWS), und $\triangle XBC$ ist gleichschenklig.

1. Fall: X außerhalb von $\triangle ABC$. Dann ist $\angle AXB > \angle CXB \mathrel{\widehat{=}} \angle XBC$ und $\angle ABX < \angle CBX$, also $\angle AXB > \angle ABX$. Daraus folgt, daß $\overline{AB} > \overline{AX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ ist.

2. Fall: Liegt X auf $\overline{AB}$, so ist die Aussage trivial. Liegt X innerhalb $\triangle ABC$, so argumentiert man ähnlich wie im 1. Fall. ∎

5.5 Satz (Euklids Proposition 25).

Ist – in der Situation des vorigen Satzes – $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, so ist auch $\angle ACB > \angle A'C'B'$.

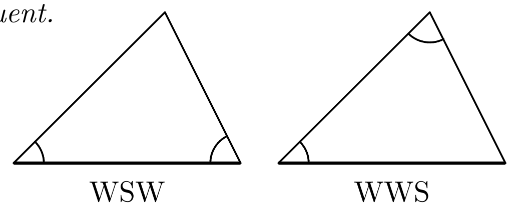
Der Beweis ergibt sich ganz einfach aus dem vorigen Satz, durch Widerspruch.

5.6 Satz (Euklids Proposition 26, WSW- und WWS-Kongruenz).

Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben.

Entweder sei $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$, $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle B'A'C'$ und $\angle ABC \mathrel{\widehat{=}} \angle A'B'C'$,
oder es sei $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$, $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle B'A'C'$ und $\angle ACB \mathrel{\widehat{=}} \angle A'C'B'$.

In jedem Fall sind die beiden Dreiecke kongruent.



Beweis:

1) WSW-Kongruenz: Wir wollen die SWS-Kongruenz ausnutzen. Dazu müssen wir z.B. zeigen, daß $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ ist.

Wir nehmen an, das wäre nicht der Fall. Dann ist o.B.d.A. $\overline{A'C'} < \overline{AC}$. Wir können einen Punkt C'' mit $A - C'' - C$ und $\overline{AC''} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ finden. Offensichtlich ist $\triangle ABC'' \mathrel{\widehat{=}} \triangle A'B'C'$, insbesondere $\angle A'B'C' \mathrel{\widehat{=}} \angle ABC'' < \angle ABC$. Das ist ein Widerspruch.

2) WWS-Kongruenz:

Die Innenwinkel bei A, B, C bzw. A', B', C' seien mit α, β, γ und $\varepsilon, \varphi, \delta$ bezeichnet. Nach Voraussetzung sei $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$, $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \varepsilon$ und $\gamma \mathrel{\widehat{=}} \delta$. Wieder wollen wir die SWS-Kongruenz nachweisen.

Annahme, $\overline{AC} > \overline{A'C'}$. Wir finden ein G mit $A - G - C$ und $\overline{AG} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$. Dann ist $\triangle ABG \mathrel{\widehat{=}} \triangle A'B'C'$, und insbesondere $\angle AGB \mathrel{\widehat{=}} \angle A'C'B' = \delta \mathrel{\widehat{=}} \gamma$. Das ist ein Widerspruch, denn $\angle AGB$ ist Außenwinkel zum Dreieck $\triangle GBC$, muß also größer als der nicht-anliegende Innenwinkel γ sein. ∎

Die Kongruenzsätze bleiben natürlich richtig, wenn man die Bezeichnungen vertauscht. Welche Möglichkeit, drei Größen vorzugeben, haben wir jetzt noch nicht betrachtet?

Der Fall SSW: Sind zwei Seiten und ein nicht von den Seiten eingeschlossener Winkel gegeben, so ist das Dreieck i.a. noch nicht eindeutig bestimmt (Ausnahme: das Dreieck enthält einen rechten Winkel), es gibt zwei Möglichkeiten. Merkwürdigerweise taucht ein entsprechender Satz bei Euklid nicht auf.

Der Fall WWW: Aus der Schulgeometrie ist bekannt, daß ein Dreieck durch seine drei Winkel nicht festgelegt ist. Dabei wird allerdings das Parallelen-Axiom benutzt. Es steht also zu vermuten, daß aus unseren bisher eingeführten Axiomen ein WWW-Kongruenzsatz nicht hergeleitet werden kann. Diese Frage werden wir später noch einmal untersuchen.

Offen ist auch noch die Frage der Konstruierbarkeit! Ist SWS gegeben, so trivialerweise auch das zugehörige Dreieck. Aus SSS kann ein Dreieck konstruiert werden, wenn die gegebenen Seiten gewisse Ungleichungen erfüllen (vgl. Proposition 22). Aber wie sieht es mit WSW aus?

In einem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte. Ein Konstruktionssatz zur WSW-Kongruenz müßte demnach lauten:

> *Sind eine Strecke c und zwei anliegende Winkel α und β mit $\alpha + \beta < 2R$ gegeben, so kann man daraus ein Dreieck konstruieren.*

Um den fehlenden dritten Punkt des Dreiecks zu erhalten, muß man lediglich den Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel aufsuchen. Doch woher weiß man, daß ein solcher Schnittpunkt existiert? Man weiß es eben nicht! Genau hierfür braucht man Euklids Postulat V. Das sichert die Existenz des Schnittpunktes (unter den gegebenen Bedingungen) und damit die Konstruierbarkeit des Dreiecks. Im Fall WWS treten übrigens die gleichen Probleme auf.

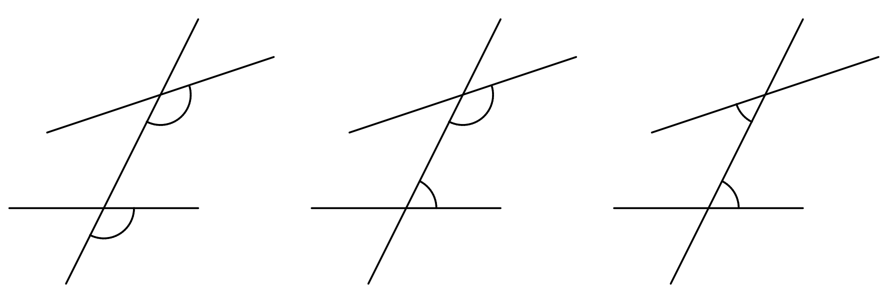
Tatsächlich beginnt Euklid mit Proposition 27 seine Theorie der Parallelen, und in Proposition 29 benutzt er zum ersten Mal sein Postulat V.

Definition. Die Gerade h werde von zwei verschiedenen Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten. Dabei entstehen 8 Winkel.

1. Liegen zwei Winkel auf der gleichen Seite von h und auf der gleichen Seite einer der Geraden g_1, g_2 und nicht auf der gleichen Seite der anderen Geraden, so spricht man von *Stufenwinkeln (F-Winkeln)*.

2. Liegen zwei Winkel auf der gleichen Seite von h und auch jeweils auf der gleichen Seite von g_1 und g_2, so nennt man sie *Ergänzungswinkel (E-Winkel)*.

3. Liegen zwei Winkel auf verschiedenen Seiten von h und jeweils auf der gleichen Seite von g_1 und g_2, so heißen sie *Wechselwinkel (Z-Winkel)*.



F-Winkel E-Winkel Z-Winkel

Wir sagen, in der gegebenen Situation gilt

eine Bedingung (F),	falls zwei Stufenwinkel gleich sind,
eine Bedingung (E),	falls zwei Ergänzungswinkel zusammen 180° ergeben,
eine Bedingung (Z),	falls zwei Wechselwinkel gleich sind.

5.7 Lemma.

Gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so gelten auch alle anderen.

Beweis: Man benutze die Definition von Nebenwinkeln, sowie Satz 4.29 (Nebenwinkel) und Satz 4.30 (Scheitelwinkel), und die Addition und Subtraktion von Winkeln. ∎

5.8 Satz (Euklids Proposition 27 und 28).

Wird die Gerade h von zwei Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen und gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so sind g_1 und g_2 parallel.

Beweis: Es seien E und F die Schnittpunkte von h mit g_1 bzw. g_2. Wir nehmen an, g_1 und g_2 seien nicht parallel. Dann müssen sie sich auf einer Seite von h treffen, G sei der Schnittpunkt. Wir wählen noch einen Punkt A auf g_1 mit $A - E - G$.

Nach dem Lemma können wir voraussetzen, daß die Wechselwinkel $\angle AEF$ und $\angle EFG$ gleich sind. Aber $\angle AEF$ ist Außenwinkel zum Dreieck $\triangle EFG$, und $\angle EFG$ ein nicht anliegender Innenwinkel. Das ist ein Widerspruch! ∎

5.9 Satz (Euklids Proposition 31).

Ist eine Gerade g und ein nicht auf g gelegener Punkt P gegeben, so kann man durch P eine Gerade g' ziehen, die parallel zu g ist.

Beweis: Wir wählen auf g drei verschiedene Punkte A, X, B mit $A - X - B$. An die Strecke $\overline{XP}$ tragen wir bei P einen Winkel $\angle XPE \mathrel{\widehat{=}} \angle BXP$ an und setzen $g' := EP$. Die Geraden g, g' treffen dann $h := XP$ in zwei verschiedenen Punkten und haben gleiche Wechselwinkel. Nach dem vorigen Satz müssen sie parallel sein. ∎

Man beachte: Der Beweis liefert ein Konstruktionsverfahren, aber nicht die Eindeutigkeit der Parallelen zu g durch P. Es kann nicht – wie in der sphärischen Geometrie – passieren, daß eine Gerade überhaupt keine Parallele besitzt. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß durch P mehrere Parallelen zu g gezogen werden können.

Das Euklidische Parallelenaxiom:

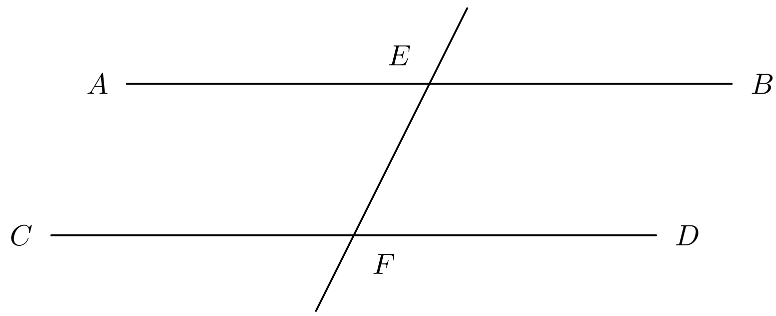
E-P) Wenn eine Gerade h von zwei verschiedenen Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen wird und dabei auf einer Seite von h Ergänzungswinkel entstehen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h.

Wie oben schon bemerkt, ist es nun möglich, ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

5.10 Satz (Euklids Proposition 29).

Trifft eine Gerade zwei verschiedene Parallelen, so gelten die Bedingungen (F), (E) und (Z).

Beweis: Die Schnittpunkte der Geraden h mit den Parallelen g_1, g_2 seien mit E und F bezeichnet. Außerdem seien Punkte $A, B \in g_1$ und $C, D \in g_2$ gewählt, mit $A - E - B$ und $C - F - D$.



Es genügt zu zeigen, daß $\angle AEF \hat{=} \angle EFD$ ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall, es wäre etwa $\angle AEF > \angle EFD$.

Dann ist $\angle EFD + \angle BEF < \angle AEF + \angle BEF$, und letztere ergeben als Nebenwinkel zusammen zwei Rechte. Also sind die Voraussetzungen des Parallelenaxioms erfüllt, $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$ müssen sich auf der Seite von h, auf der B und D liegen, treffen. Das ist ein Widerspruch zur Parallelität. ∎

5.11 Satz (Euklids Proposition 30).

Sind zwei Geraden parallel zu einer dritten Geraden, so sind sie auch untereinander parallel.

Beweis: Die Geraden AB und CD seien jeweils parallel zur Geraden EF. Wir können annehmen, daß alle drei Geraden paarweise verschieden sind.

1. Fall: Es gibt Punkte X, Y mit $A - X - B$ und $C - Y - D$, die auf verschiedenen Seiten von EF liegen. Dann schneidet XY die Gerade EF in einem Punkt H, d.h. es ist $X - H - Y$.

2. Fall: Die Geraden AB und CD liegen vollständig auf der gleichen Seite von EF. Wir wählen $H \in EF$ beliebig und fällen das Lot auf die beiden anderen Geraden, mit Fußpunkten $X \in AB$ und $Y \in CD$. Wegen der Parallelität zu EF müssen die Lote auch in H auf EF senkrecht stehen (hier geht das Parallelenaxiom ein!) Wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten müssen die Lote übereinstimmen. Auch in diesem Fall können wir daher o.B.d.A. annehmen, daß es Punkte X, Y mit $A - X - B$ und $C - Y - D$ gibt, so daß XY die Gerade EF in einem Punkt H schneidet. Allerdings ist diesmal $H - X - Y$ oder $H - Y - X$.

Indem man nun mehrfach die Z-Winkel-Relationen (in beiden Richtungen) anwendet, erhält man die gewünschte Parallelität von AB und CD. Man benutzt dabei erneut das Parallelenaxiom. ∎

Wir wissen nun, daß die Parallelität eine Äquivalenzrelation ist!

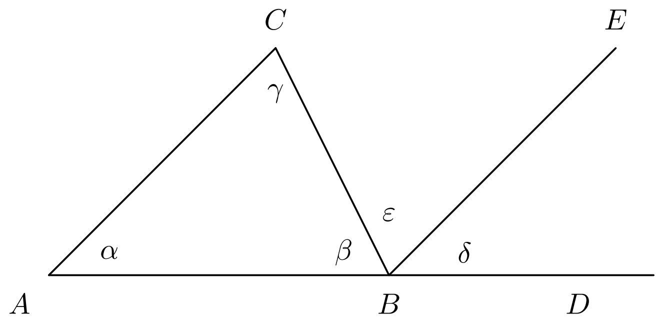
Besonders wichtig ist der folgende Satz:

5.12 Satz (Euklids Proposition 32).

Bei jedem Dreieck gilt:

1. *Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.*
2. *Die Summe der drei Innenwinkel ergibt zwei Rechte.*

BEWEIS:



Zur Vereinfachung rechnen wir ab sofort mit Winkeln in herkömmlicher Weise und verwenden dabei auch das Gradmaß.

Die Winkel im Dreieck $\triangle ABC$ seien wie üblich mit α, β, γ bezeichnet. Zieht man durch B die Parallele zu AC und wählt man darauf einen Punkt E (auf der gleichen Seite von AB wie C), so erhält man den Winkel $\varepsilon := \angle CBE$. Verlängert man $\overline{AB}$ über B hinaus bis zu einem Punkt D, so erhält man den Winkel $\delta := EBD$.

Nun ist $\gamma = \varepsilon$ (Z-Winkel an Parallelen) und $\alpha = \delta$ (Stufenwinkel an Parallelen). Also ist $\alpha + \gamma = \varepsilon + \delta =: \varphi$ der Außenwinkel, der α und γ gegenüberliegt.

Weiter ist $\alpha + \beta + \gamma = \beta + \varphi = 180°$ (Nebenwinkel). Das war zu zeigen. ■

Definition. Es seien Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegeben. $s_i := \overline{A_{i-1}A_i}$ seien die Verbindungsstrecken aufeinander folgender Punkte, für $i = 1, \ldots, n$. Dann nennt man die Vereinigung $\Sigma = s_1 \cup \ldots \cup s_n$ einen *Streckenzug*. Wenn die Punkte explizit genannt werden sollen, schreibt man auch $A_0A_1A_2\ldots A_n$ an Stelle von Σ.

Σ heißt *geschlossen*, wenn $A_n = A_0$ ist.

Σ heißt *einfach*, wenn gilt:

a) Jeder innere Punkt einer Strecke gehört nur zu dieser Strecke.

b) Jeder der Punkte A_i gehört zu höchstens zwei Strecken.

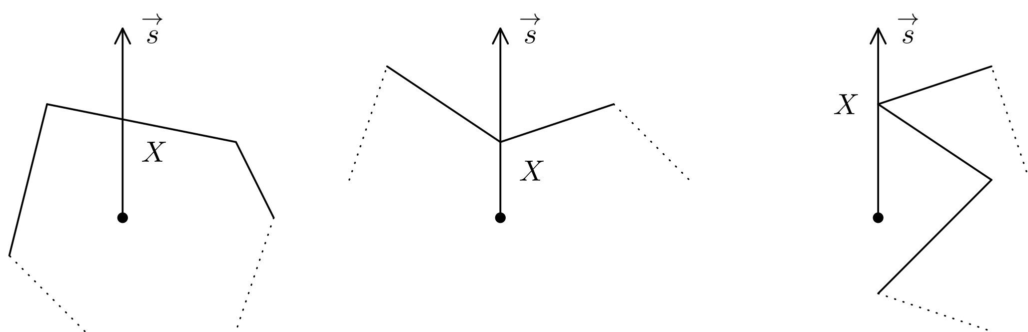
Ein *Polygon* ist ein einfacher geschlossener Streckenzug. Die Strecken s_i nennt man die *Seiten* des Polygons, die Punkte A_i die *Ecken* des Polygons. Zwei Ecken A_i, A_j heißen *benachbart*, wenn $|i-j| = 1$ oder $|i-j| = n-1$ ist. Ein Polygon mit den Ecken $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = A_0$ wird auch als $n - Eck$ bezeichnet.

Ein Polygon trennt die Ebene in zwei Bereiche, die Menge der „inneren“ Punkte und die Menge der „äußeren“ Punkte. Leider ist es ziemlich kompliziert, zu sagen, was innere Punkte sind.

Definition. Sei Σ ein Polygon, $P \notin \Sigma$ und $\vec{s}$ ein von P ausgehender Strahl, der keine Seite von Σ in mehr als einem Punkt trifft. (Von jedem Punkt gehen höchstens endlich viele Strahlen aus, die nicht in Frage kommen)

Sei $X \in \vec{s} \cap \Sigma$. Man sagt, $\vec{s}$ trifft Σ in X *transversal*, wenn eine der beiden folgenden Situationen vorliegt:

1. X liegt zwischen zwei benachbarten Ecken von Σ.
2. X ist eine Ecke von Σ, und die beiden zu X benachbarten Ecken von Σ liegen auf verschiedenen Seiten von $\vec{s}$.



transversal transversal nicht transversal

5.13 Satz. *Sei Σ ein Polygon und $P \notin \Sigma$. Die Anzahl der Punkte, in denen ein von P ausgehender Strahl Σ transversal trifft, ist entweder immer gerade oder immer ungerade.*

Beweis: Man betrachte zwei zulässige Strahlen $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α. Liegt kein Punkt von Σ in $I(\alpha)$, so trifft Σ keinen der beiden Strahlen transversal.

Liegt ein Punkt von Σ in $I(\alpha)$, so verfolgt man von dort den Streckenzug. Jedesmal, wenn Σ das Innere von α verläßt, muß Σ beim nächsten Treffen wieder ins Innere von α zurückkehren, und in beiden Fällen ist das Treffen transversal. Also ist die Gesamtzahl der Punkte auf $\vec{s}_1 \cup \vec{s}_2$, in denen Σ transversal getroffen wird, gerade. Eine gerade Zahl ist aber entweder Summe von zwei geraden oder von zwei ungeraden Zahlen. ∎

Definition. Für $P \notin \Sigma$ sei $o(P) := 0$, falls jeder von P ausgehende zulässige Strahl Σ in einer geraden Anzahl von Punkten transversal trifft. Andernfalls sei $o(P) := 1$.

Der Punkt P *liegt im Innern von* Σ, falls $o(P) = 1$ ist. Er *liegt auf dem Rand von* Σ, falls er auf Σ selbst liegt. Die Menge der inneren Punkte von Σ sei mit $I(\Sigma)$ bezeichnet, die der Randpunkte mit $\partial\Sigma$.

Man nennt $I(\Sigma)$ auch ein *offenes Polygongebiet* und $I(\Sigma) \cup \partial\Sigma$ ein *abgeschlossenes Polygongebiet*.

Bei Dreiecken ergibt das die bekannten Begriffe, wie man leicht mit Hilfe der Sätze von Pasch erkennt.

Schon bei Vierecken wird es schwieriger. Ist $ABCD$ ein Viereck, so nennt man die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ die *Diagonalen* dieses Vierecks. Wir setzen außerdem stets voraus, daß keine drei Ecken kollinear sind.

5.14 Satz.

a) *In jedem Viereck $ABCD$ gibt es wenigstens eine Diagonale d mit der Eigenschaft, daß die beiden nicht auf d gelegenen Ecken auf verschiedenen Seiten von d liegen.*

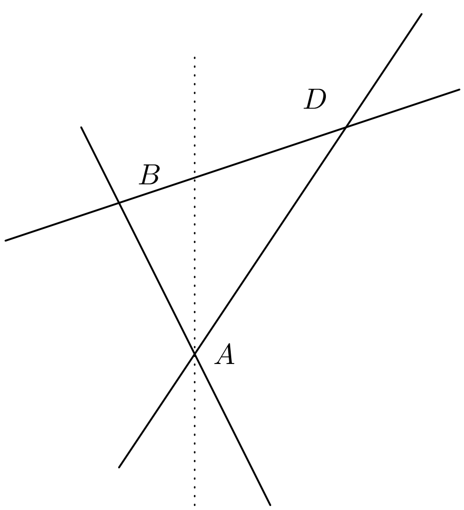
b) *Liegen im Viereck $ABCD$ die Ecken B und D auf verschiedenen Seiten der Diagonalen AC, so ist*

$$I(ABCD) = I(ABC) \cup I(ACD) \cup \{X \mid A - X - C\}.$$

BEWEIS:

Um a) zu beweisen, nehmen wir an, daß A und C auf der gleichen Seite von BD liegen, andernfalls wären wir ja schon fertig.

Wir behaupten, daß dann B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen. Wir nehmen an, auch das wäre nicht der Fall, und versuchen, daraus einen Widerspruch zu konstruieren: Aus den Annahmen folgt, daß C in $H(BD, A)$ liegt und AC nicht die Strecke $\overline{BD}$ trifft. Dann kann C nicht im Innern des Dreiecks BAD liegen, und auch nicht im Innern des Scheitelwinkels zu $\angle BAD$. So bleiben nur noch zwei Möglichkeiten:



C liegt in $H(AD, B)$, also in $I(\angle BDA)$. Dann muß $\overline{CD} \cap \overline{AB} \neq \varnothing$ sein, was unmöglich ist.

Oder C liegt in $H(AB, D)$, also in $I(\angle DBA)$. Aber dann muß $\overline{BC} \cap \overline{AD} \neq \varnothing$ sein, und das ist ebenfalls nicht möglich.

Damit war die Annahme falsch, und die Behauptung ist bewiesen.

Die Formel in (b) sieht man folgendermaßen ein:

1) Ist $A - X - C$, so trifft $\overrightarrow{XB}$ das Viereck in B transversal, aber keinen der Punkte auf $\overline{AD} \cup \overline{CD}$, weil B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen. Also gehört X zu $I(ABCD)$. Liegt X in $I(ABC)$ oder in $I(ACD)$, so argumentiert man ähnlich.

2) Sei umgekehrt $X \in I(ABCD)$. Wir brauchen nur den Fall $X \notin \overline{AC}$ zu betrachten. Dann liegt X auch nicht auf der Geraden AC, und wir können o.B.d.A. annehmen,

daß $X \in H(AC,B)$ liegt (der Fall $X \in H(AC,D)$ geht analog). Unter den von X ausgehenden Strahlen kann man sicher einen Strahl $\vec{s}$ finden, der AC nicht trifft, aber $ABCD$ wenigstens einmal und nur transversal schneidet (weil X im Innern des Vierecks liegt). Wir können etwa annehmen, daß $\vec{s}$ die Seite $\overline{AB}$ trifft, aber nicht in A oder B, sondern in einem Punkt U mit $A-U-B$. Die Gerade XU muß dann das Dreieck ABC in einem weiteren Punkt V treffen.

Liegt V auf $\overline{AC}$, so ist $U-X-V$ und daher $X \in I(ABC)$. Liegt V im Innern der Strecke $\overline{BC}$, so kann UV das Dreieck ABC in keinem weiteren Punkt treffen, der Strahl $\vec{s}$ also das Viereck $ABCD$ höchstens in den 2 Punkten U und V. Da X im Innern des Vierecks liegt, kommt nur ein Schnittpunkt in Frage, und deshalb muß auch hier $U-X-V$ gelten, also $X \in I(ABCD)$. ∎

5.15 Satz. *In einem Viereck $ABCD$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Je zwei gegenüberliegende Ecken liegen auf verschiedenen Seiten einer Diagonalen.*
2. *Die beiden Diagonalen treffen sich in einem Punkt $M \in I(ABCD)$.*
3. *Das offene Polygongebiet $I(ABCD)$ ist konvex.*
4. *Jede Ecke liegt im Innern des gegenüberliegenden Winkels.*

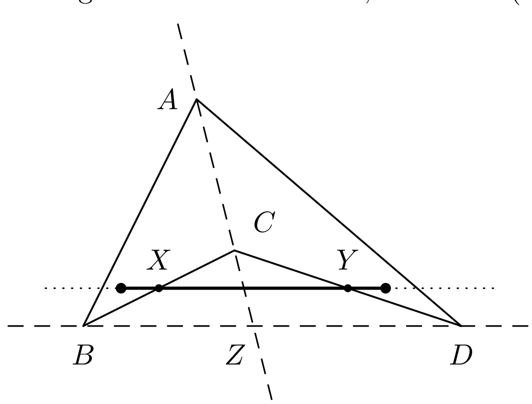
Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2): Es mögen A und C auf verschiedenen Seiten von DB liegen, und D und B auf verschiedenen Seiten von AC. Dann gibt es einen Punkt M mit $\overline{AC} \cap DB = \{M\}$, und dann ist auch $AC \cap \overline{DB} = \{M\}$, also $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$. Es muß $A-M-C$ und $D-M-B$ gelten, und das bedeutet, daß M in $I(ABCD)$ liegt.

(2) $\Longrightarrow$ (4): Diese Implikation ist fast trivial.

(4) $\Longrightarrow$ (3): Die Punkte B und D mögen auf verschiedenen Seiten von AC liegen, so daß $I(ABCD) = I(ABC) \cup I(ACD) \cup \{X \mid A-X-C\}$ ist. Dann kann man aber leicht sehen, daß $I(ABCD) = I(\angle ADC) \cap I(\angle ABC)$ ist (weil D in $I(\angle ABC)$ und B in $I(\angle ADC)$ liegt). Aber der Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist wieder konvex.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Wir zeigen: Wenn B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen, aber A und C auf der gleichen Seite von BD, dann ist $I(ABCD)$ nicht konvex.



Die Gerade AC trifft $\overline{BD}$ in einem Punkt Z. Wählen wir X mit $B - X - C$ und Y mit $C - Y - D$, so trifft XY zwei Seiten des Dreiecks BDC, also nicht die dritte Seite $\overline{BD}$. Weiter trifft XY eine Seite (nämlich $\overline{BC}$) des Dreiecks BZC, aber nicht $\overline{BZ}$. Also muß XY noch $\overline{ZC}$ treffen, etwa in einem Punkt U. Ähnlich folgert man, daß XY die Strecke $\overline{AB}$ in einem Punkt V und die Strecke $\overline{AD}$ in einem Punkt W trifft.

Wir wählen Punkte S und T mit $V - S - X$ und $Y - T - W$. Dann liegen S und T jeweils im Innern von $ABCD$, aber ihre Verbindungsstrecke enthält den Punkt U mit $A - C - U$, der nicht im Innern des Vierecks liegt. Also ist $ABCD$ nicht konvex. ∎

Als Übungsaufgabe überlasse ich den Lesern den Beweis der folgenden Aussagen:

5.16 Folgerung 1. *Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn jede Seite ganz in der durch die gegenüberliegende Seite bestimmten Halbebene liegt.*

5.17 Folgerung 2. *Sind in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so ist das Viereck konvex.*

Definition. Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Ein *Rechteck* ist ein Viereck mit 4 rechten Winkeln.

Ein *Quadrat* ist ein Rechteck, in dem alle Seiten gleich lang sind.

Nach Folgerung 2 ist jedes Parallelogramm konvex. Und nach Euklids Proposition 27/28 ist jedes Rechteck ein Parallelogramm.

Ein Parallelogramm zu konstruieren, ist kein Problem, dank Proposition 31. Aber wir werden sehen, daß die Existenz von Rechtecken wesentlich von der Gültigkeit des Parallelenaxioms abhängt.

5.18 Satz (Euklids Proposition 33).

$\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ seien parallel und gleich lang, A und D mögen auf der gleichen Seite von BC, B und C auf der gleichen Seite von AD liegen. Dann sind auch $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel und gleich lang.

Zum Beweis verbinde man B mit D und zeige, daß $\triangle DBC$ und $\triangle BDA$ kongruent sind. Zweimal benutzt man Z-Winkel an Parallelen.

5.19 Satz (Euklids Proposition 34).

In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang, und die Diagonale halbiert die Fläche.

Beweis: Ist $ABCD$ das Parallelogramm, so folgt leicht mit Z-Winkeln und WSW, daß $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ kongruent sind. Insbesondere sind dann auch die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

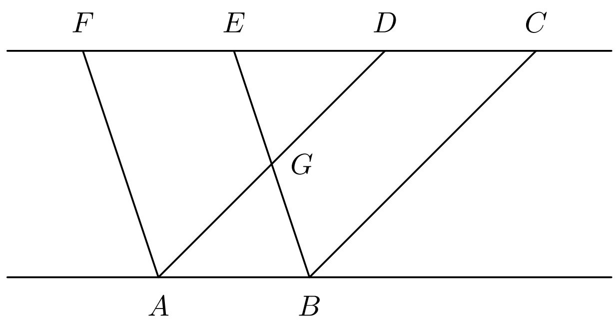
Bei der Aussage über die Fläche stutzen wir. Nirgends wurde bisher definiert, was unter „Fläche“ oder „Flächeninhalt“ zu verstehen ist. Euklid hat zwar eine Definition gegeben, aber die hat nur den Charakter einer Einführung eines primitiven Terms.

Allerdings können wir uns auf andere Weise aus der Affaire ziehen: Mit Hilfe der Diagonalen gewinnen wir zwei kongruente Dreiecke, ABC und CDA. Daher sind die zugehörigen Dreiecksgebiete ebenfalls kongruent, und zusammen ergeben sie - fast - das Gebiet $I(ABCD)$. ■

Richtig problematisch wird es erst beim folgenden Satz:

5.20 Satz (Euklids Proposition 35). *Es seien zwei Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ zwischen den Parallelen AB und $CD = EF$ gegeben, mit gleicher Grundlinie $\overline{AB}$. Dann haben sie die gleiche Fläche.*

Beweis: Man muß eigentlich verschiedene Fälle untersuchen. Wir betrachten nur den Fall $F - E - D$ und $E - D - C$.



Euklid argumentiert folgendermaßen: Da $\triangle ADF$ und $\triangle BCE$ kongruent sind, haben sie die gleiche Fläche. Subtrahiert man von beiden die Dreiecksfläche GDE, so erhält man gleiche Vierecksflächen $AGEF$ und $BCDG$. Fügt man nun die Dreiecksfläche ABG hinzu, so erhält man die Gleichheit der Parallelogrammflächen. ■

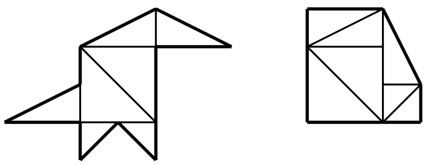
Hier können wir uns nicht mehr auf Kongruenz zurückziehen, denn die beiden Parallelogramme sind i.a. keineswegs kongruent. Andererseits ist aber auch nie von einem numerischen Flächenmaß die Rede. Bei Euklid haben zwei Polygone den gleichen Flächeninhalt, wenn sie durch Weglassen oder Hinzufügen von kongruenten Dreiecken in kongruente Figuren überführt werden können.

Wir sagen, ein abgeschlossenes Polygongebiet $\mathcal{G}$ wird in (abgeschlossene) Teilgebiete $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ *zerlegt*, wenn $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_n$ ist, und wenn $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$ für $i \neq j$ keine inneren Punkte von $\mathcal{G}_i$ oder $\mathcal{G}_j$ enthält. Ohne Beweis sei hier angegeben, daß man jedes abgeschlossene Polygongebiet in endlich viele abgeschlossene Dreiecksgebiete zerlegen kann. Unter einer Zerlegung eines offenen Polygongebietes verstehen wir eine Zerlegung des zugehörigen abgeschlossenen Gebietes. Wir brauchen uns dann nicht mit den lästigen Rändern und Trennungslinien zu beschäftigen.

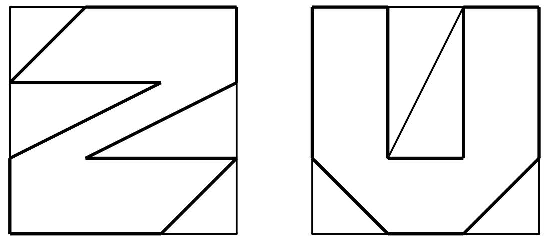
Definition. Zwei Polygongebiete heißen *zerlegungsgleich*, wenn sie in endlich viele paarweise kongruente Dreiecksgebiete zerlegt werden können.

Zwei Polygongebiete heißen *ergänzungsgleich*, wenn man sie durch endlich viele paarweise zerlegungsgleiche Polygongebiete zu zerlegungsgleichen Polygongebieten ergänzt werden können.

Hier sind zwei Beispiele:



zerlegungsgleiche Figuren



ergänzungsgleiche Figuren

Man kann zeigen, daß beide Bedingungen Äquivalenzrelationen auf der Menge der Polygongebiete definieren. Zerlegungsgleiche Figuren sind automatisch auch ergänzungsgleich. Die Umkehrung ist auch richtig, aber keineswegs trivial.

Den Beweis von Euklids Proposition 35 kann man geringfügig abändern, um zu zeigen, daß zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und zwischen den gleichen Parallelen ergänzungsgleich sind:

Wir betreiben etwas Notationsmißbrauch und unterscheiden nicht zwischen den Polygonen und den von ihnen bestimmten Polygongebieten. Da die Dreiecke ADF und BCE kongruent sind, sind die Polygone $\Sigma := ABGDF$ und $\Sigma' := ABCEG$ zerlegungsgleich. Nimmt man von ihnen jeweils das Dreieck GDE weg, so bleiben die Parallelogramme übrig. Das ergibt ihre Ergänzungsgleichheit.

Man kann ziemlich leicht zeigen, daß die Parallelogramme auch zerlegungsgleich sind (vgl. David Hilberts „Grundlagen der Geometrie"), aber beim Beweis geht entscheidend das Archimedes-Axiom ein! An dieser Stelle drängt sich einem die Vermutung auf, daß generell aus der Ergänzungsgleichheit die Zerlegungsgleichheit folgt. Das ist auch tatsächlich der Fall, aber der Beweis ist schwierig. Wir lassen den Beweis weg, da wir das Ergebnis ohnehin nicht brauchen. Dennoch soll hier kurz über die Zusammenhänge berichtet werden:

Definition. Eine Flächenfunktion ordnet jedem beschränkten Polygongebiet $\mathcal{G}$ eine reelle Zahl $\mu(\mathcal{G}) \geq 0$ zu, so daß gilt:

1. (Bewegungsinvarianz) Ist φ eine Bewegung, so ist $\mu(\varphi(\mathcal{G})) = \mu(\mathcal{G})$.
2. (Additivität) Kann $\mathcal{G}$ in die Gebiete $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ zerlegt werden, so ist $\mu(\mathcal{G}) = \mu(\mathcal{G}_1) + \mu(\mathcal{G}_2)$.

Man beachte, daß diese Definition einer Flächenfunktion unabhängig vom Parallelenaxiom ist! Wir wissen dafür aber auch zunächst nichts über Existenz oder Eindeutigkeit.

Eines ist jedoch klar: Wenn es eine Flächenfunktion gibt, dann stimmt sie auf zwei zerlegungsgleichen (und damit auch auf zwei ergänzungsgleichen) Polygongebieten überein.

5.21 Satz von W. Bolyai. *Es sei μ eine Flächenfunktion. Dann gilt für Polygongebiete $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$:*

Ist $\mu(\mathcal{G}_1) = \mu(\mathcal{G}_2)$, so sind $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ zerlegungsgleich.

Der Beweis ist recht tiefliegend und benutzt die Konstruktion von Flächenfunktionen im euklidischen und im nichteuklidischen Fall. Der Satz gehört demnach in die neutrale

Geometrie, aber er benötigt erwartungsgemäß das Archimedes-Axiom! Ganz trivial ergibt sich nun:

5.22 Folgerung. *Ergänzungsgleiche Polygongebiete sind auch zerlegungsgleich.*

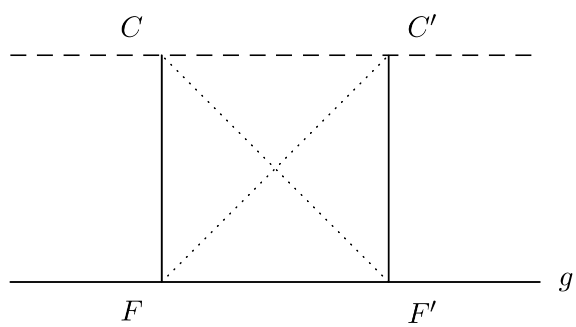
Wir können – ganz im Sinne Euklids – sagen, daß zwei Polygongebiete die gleiche Fläche haben, wenn sie in der gleichen Äquivalenzklasse von ergänzungs- oder zerlegungsgleichen Gebieten liegen. Ein numerischer Wert für den Flächeninhalt ist dafür nicht erforderlich, und bei Euklid kommt ein solcher auch nicht vor.

Ab sofort wird wieder das Parallelenaxiom vorausgesetzt!

Aus Proposition 34 kann man leicht ableiten, daß Parallelogramme zwischen gleichen Parallelen schon dann flächengleich sind, wenn nur ihre Grundlinien kongruent sind, aber auf der gleichen Geraden liegen (Euklids **Proposition 36**).

5.23 Satz. *Sei g eine Gerade, C, C' zwei Punkte $\notin g$, aber auf der gleichen Seite von g. Die Lote von C bzw. C' auf g sind genau dann kongruent, wenn C und C' auf einer Parallelen zu g liegen.*

Beweis: Es liegt folgende Situation vor:



Die Geraden FC und $F'C'$ sind zueinander parallel, wegen der rechten Winkel bei F und F' (Satz 5.8).

Ist CC' parallel zu FF', so ist $FF'C'C$ ein Parallelogramm. Nach Satz 5.14 ist dann $\overline{FC} \widehat{=} \overline{F'C'}$.

Wird umgekehrt die Kongruenz von $\overline{FC}$ und $\overline{F'C'}$ vorausgesetzt, so sind $\triangle FF'C$ und $\triangle FF'C'$ kongruent. Also ist $\overline{F'C}$ kongruent zu $\overline{FC'}$ und $\angle FF'C \widehat{=} \angle F'FC'$, und damit auch $\angle CF'C' \widehat{=} \angle C'FC$. Das bedeutet, daß auch $\triangle FC'C$ kongruent zu $\triangle CF'C'$ ist. Das bedeutet, daß $\angle FCC' \widehat{=} \angle F'C'C$ ist. Bis hierhin gilt diese Schlußrichtung auch ohne Parallelenaxiom! Mit Parallelenaxiom folgt, daß die Summe aller Innenwinkel im Viereck $FF'C'C$ $360°$ beträgt, die Summe der beiden oberen Winkel $\angle FCC'$ und $\angle F'C'C$ also $180°$. Jeder einzelne muß demnach jeweils $90°$ betragen. Also ist $\angle F'FC + \angle FCC' = 180°$, und die Geraden FF' und CC' sind nach Satz 5.8. parallel. ∎

Wir haben übrigens gezeigt:

Zwei Geraden, die überall den gleichen Abstand haben, sind parallel.

Definition. In einem Dreieck nennt man das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite eine *Höhe*.

5.24 Satz (Euklids Proposition 37).

Zwei Dreiecke, die in einer Seite übereinstimmen, und deren Höhen auf diese Seite kongruent sind, haben die gleiche Fläche.

Beweis: Man kann annehmen, daß beide Dreiecke ihre Spitze auf der selben Seite der Grundlinie haben. Nach Voraussetzung und wegen des vorigen Satzes liegen diese Spitzen auf einer Parallelen zur Grundlinie. Ergänzt man die Dreiecke zu Parallelogrammen, so erhält man flächengleiche Parallelogramme. Also sind auch die Dreiecke flächengleich. ∎

Der Satz bleibt richtig, wenn die Grundlinien der Dreiecke nur kongruent sind, aber auf der gleichen Geraden liegen (Euklids Proposition 38).

5.25 Satz (Euklids Proposition 46). *Über einer Strecke kann man ein Quadrat errichten.*

Der Satz liefert sowohl die Existenz von Quadraten, als auch eine Konstruktionsbeschreibung.

Beweis: Sei $\overline{AB}$ die gegebene Strecke. Man errichte in A die Senkrechte zu AB, und schneide von ihr eine Strecke $\overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$ ab. Dann ziehe man die Parallele zu AB durch D.

Nach Satz 5.10 muß die Parallele mit der Senkrechten zu AD in D übereinstimmen. Nun schneide man von ihr auf derjenigen Seite von AD, auf der B liegt, eine Strecke $\overline{DC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$ ab. So entsteht ein Viereck $ABCD$.

Nach Satz 5.19 ist BC parallel zu AD. Also ist $ABCD$ ein Parallelogramm und $\overline{CD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$. Es sind also alle Seiten gleich lang, und nach den Sätzen über Winkel an Parallelen sind auch alle Winkel rechte Winkel. Damit ist $ABCD$ ein Quadrat. ∎

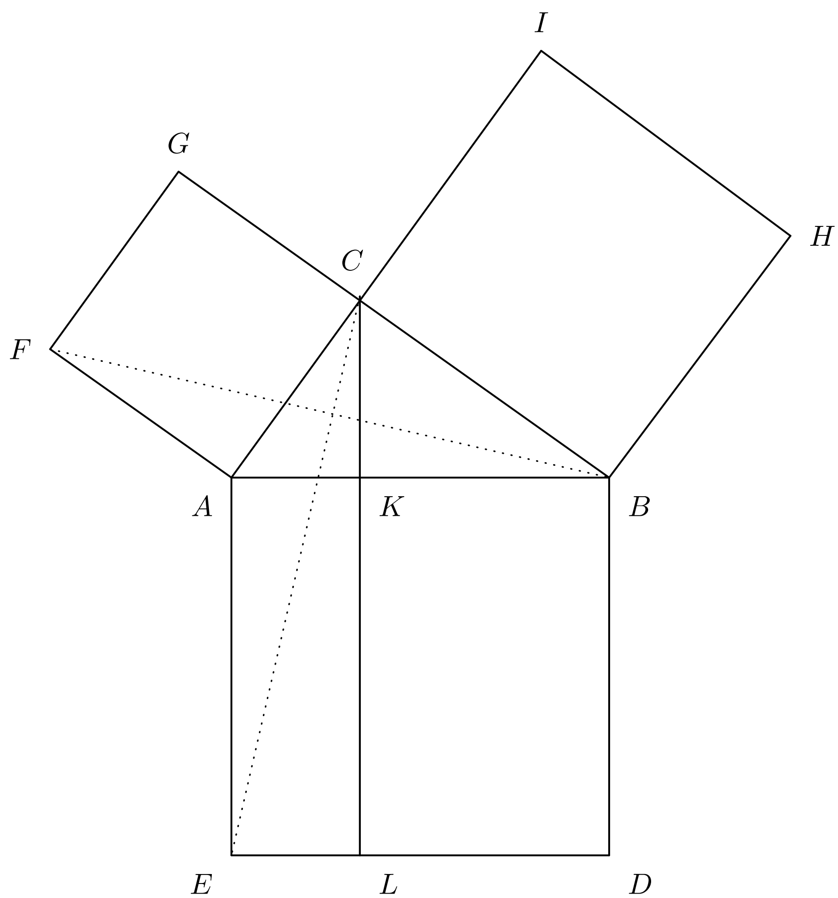
5.26 Euklids Proposition 47: Der Satz des Pythagoras.

An einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse die gleiche Fläche wie die Quadrate über den Katheten zusammen.

Betreibt man Flächenmessung ohne Zahlen, so ist nicht ganz klar, was die Summe zweier Flächen ist. Gemeint ist hier: Man kann das Quadrat über der Hypotenuse so in zwei Polygone zerlegen, daß diese flächengleich zu den Quadraten über den Katheten sind.

Beweis: Das Dreieck $\triangle ABC$ habe seinen rechten Winkel bei C, so daß $\overline{AB}$ die Hypotenuse ist.

Es sei $AEDB$ das Quadrat über der Hypotenuse, $ACGF$ und $CBHI$ die Quadrate über den Katheten.



Man fälle das Lot von C auf AB, es trifft dort einen Punkt K mit $A - K - B$ und kann über K hinaus bis zu einem Punkt L mit $E - L - D$ verlängert werden.

Da CL die Geraden AB und ED jeweils senkrecht trifft, ist CL parallel zu AE.

Die Dreiecke $\triangle AEC$ und $\triangle ABF$ sind kongruent (SWS, es ist $\angle FAB \mathrel{\widehat{=}} \angle CAE$), also haben sie die gleiche Fläche.

Das Dreieck $\triangle FAB$ und das Quadrat $FACG$ haben die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe. Genauso haben $\triangle AEC$ und das Rechteck $AELK$ die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe. Daraus folgt, daß $FACG$ und $AELK$ die gleiche Fläche haben. Und genauso folgt, daß $CBHI$ und $KLDB$ die gleiche Fläche haben.

Nimmt man alles zusammen, so erhält man die Behauptung. ■

Weiter wollen wir die Geometrie Euklids nicht verfolgen. Für den Satz des Pythagoras kennt man heute einfachere Beweise, und vor allem formuliert man ihn einprägsamer. Dazu braucht man aber die numerische Längen- und Flächenmessung. Wie man zu einer Längenfunktion kommt, haben wir im vorigen Paragraphen dargelegt. Aber wie erhalten wir eine Flächenfunktion?

5.27 Satz. *Es sei eine Längenfunktion ausgezeichnet (was schon innerhalb der neutralen Geometrie möglich ist). Dann gibt es (bei Einbeziehung des Euklidischen Parallelenaxioms) genau eine Flächenfunktion μ, so daß für jedes Quadrat $\mathcal{Q}$ der Seitenlänge a gilt:* $\mu(\mathcal{Q}) = a^2$.

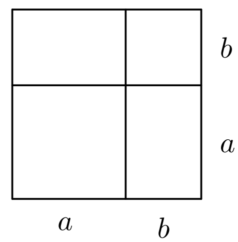
Die Motivation ist klar: Am Beginn jeder Flächenmessung steht die Vorschrift, wie die Fläche eines Quadrates (oder eines Rechteckes) zu messen ist. Die entscheidende Aussage ist, daß allein dadurch die Flächenfunktion schon eindeutig bestimmt ist.

Beweis-Andeutung:

Beginnen wir mit der Eindeutigkeit, denn dabei können wir eventuell auch erfahren, wie die Flächenfunktion definiert werden muß.

1) Fläche eines Rechtecks:

Aus zwei Rechtecken der Seitenlängen a und b, sowie einem Quadrat der Seitenlänge a und einem der Seitenlänge b kann man ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ zusammensetzen. Wegen $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ muß $a \cdot b$ die Fläche des Rechtecks sein.



2) Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks:

Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b kann durch ein dazu kongruentes Dreieck zu einem Rechteck mit den Seiten a und b ergänzt werden. Also beträgt die Fläche des Dreiecks $\frac{1}{2} a \cdot b$.

3) Fläche eines beliebigen Dreiecks:

Ein Dreieck mit Grundlinie c und Höhe h kann entweder als Summe zweier rechtwinkliger Dreiecke mit den Katheten a und h bzw. b und h (und $a+b=c$) oder als Differenz zweier solcher Dreiecke (mit $a-b=c$) dargestellt werden. In beiden Fällen ergibt sich als Fläche für das ursprüngliche Dreieck der bekannte Wert $\frac{1}{2} c \cdot h$.

4) Fläche eines beliebigen Polygons:

Kann man das Polygon in Dreiecke zerlegen, so ist die Fläche des Polygons einfach die Summe der Flächen der beteiligten Dreiecke.

Um nun die Existenz der gewünschten Flächenfunktion zu zeigen, muß man folgendes beweisen:

- Jedes Polygon besitzt eine Triangulisierung (eine Zerlegung in Dreiecke).
- Zwei verschiedene Triangulisierungen desselben Polygons führen zum gleichen Flächeninhalt.

Gerade die zweite Aussage ist relativ schwer zu zeigen, wir müssen hier auf den Beweis verzichten. Es handelt sich hierbei übrigens um einen Teil des Beweises des Satzes von Bolyai. ■

Als Folgerung ergibt sich nun der Satz des Pythagoras in der gewohnten Form:

> *Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b ist* $a^2 + b^2 = c^2$.

Kapitel 2 Nichteuklidische Geometrie

§ 1 Beweisversuche

Schon früh störte Euklids Postulat V die ihm nachfolgenden Mathematiker, vor allem aus ästhetischen Gründen. Man kam zu der Auffassung, das Postulat müßte beweisbar sein, nicht zuletzt auch deswegen, weil Euklid in seinem ersten Buch so lange zögerte, es anzuwenden, und weil er manche Sätze recht mühsam bewies, obwohl es mit dem Parallelenaxiom sehr viel einfacher ging.

Posidonius, Philosoph, Astronom, Historiker und Mathematiker (ca. 135 - 50 v.Chr.), war einer der ersten, von denen Beweisversuche bekannt sind. Er schlug vor, Definition 23 wie folgt zu ändern:

> **Parallel** sind gerade Linien, die in der selben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten.

Die Schwierigkeiten werden hier natürlich in die Definition verlagert. Zur besseren Unterscheidung nennen wir Geraden, die immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten, *äquidistant*, und das Wort *parallel* benutzen wir weiterhin für Geraden, die sich nicht treffen. (Daß man Geraden auch dann parallel nennen kann, wenn sie gleich sind, spielt hier keine Rolle)

Was sind äquidistante Geraden? Gemeint war wohl folgendes:

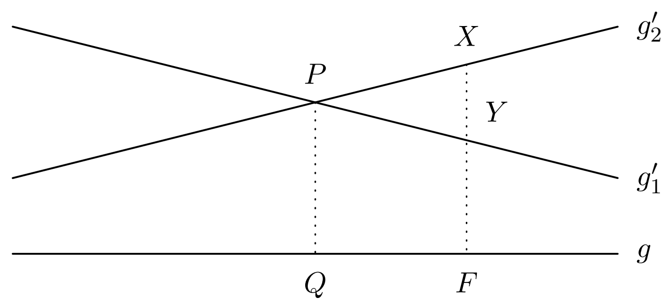
Definition. Zwei Geraden heißen *äquidistant*, wenn alle Lote, die man von einem Punkt auf einer der beiden Geraden auf die andere Gerade fällt, zueinander kongruent sind.

Offensichtlich gilt, daß zwei (verschiedene) äquidistante Geraden parallel sind. Der Plan des Posidonius sah nun folgendermaßen aus:

1.1 Satz P_1. *Durch einen gegebenen Punkt P, der nicht auf einer gegebenen Geraden g liegt, kann höchstens eine zu g äquidistante Gerade g' gehen.*

Beweis: Annahme, es gibt zwei verschiedene Geraden g'_1, g'_2 durch P, die beide äquidistant zu g sind. Dann zerfällt $g'_2 \setminus \{P\}$ in zwei kongruente Teile, die auf verschiedenen Seiten von g'_1 liegen. g liegt dagegen ganz auf einer Seite von g'_1. Es gibt also einen Punkt $X \in g'_2$, der auf einer anderen Seite von g'_1 liegt als die Gerade g.

Wir fällen nun das Lot von P auf g mit Fußpunkt Q, und das Lot von X auf g, mit Fußpunkt F.



Auf jeden Fall ist dann $Q \neq F$, und es muß einen Punkt $Y \in \overline{XF} \cap g_1'$ geben. Damit gilt:

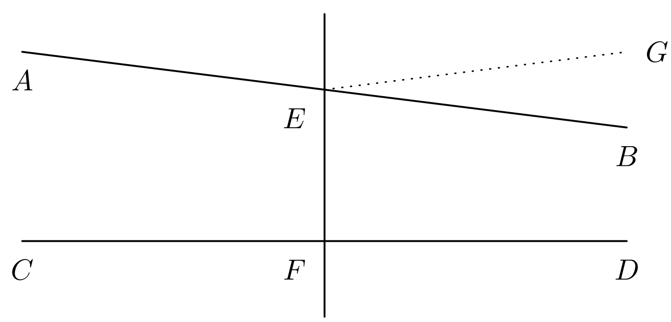
$$X - Y - F, \qquad \text{aber } \overline{YF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XF}.$$

Das ist ein Widerspruch. ∎

Dieser Satz kann irgendwo vor Euklids Proposition 29 stehen!

1.2 Satz P_2**.** *Wenn eine Gerade h zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten E und F trifft und dabei mit ihnen auf einer Seite von h Ergänzungswinkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so treffen sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h.*

Beweis: Sei $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$, sowie $A - E - B$ und $C - F - D$. Es sei $\angle BEF + \angle EFD < 180°$.



Da $\angle AEF + \angle FEB = 180°$ und $\angle CFE + \angle DFE = 180°$ ist, muß $\angle AEF + \angle EFC > 180°$ sein.

Wir tragen nun $\angle EFC$ bei E an EF an. Das ergibt einen Winkel $\angle FEG$. Nun gilt:

$$\angle GEF = \angle EFC = 180° - \angle DFE > \angle BEF.$$

Also sind GE und $BE = g_1 = AB$ zwei verschiedene Geraden durch E. Wegen der Wechselwinkelbeziehung ist EG parallel zu CD.

Nun schließt Posidonius, daß EG auch äquidistant zu CD ist. Nach P_1 gibt es nur eine Gerade durch E, die äquidistant zu CD ist. Also kann AB es nicht sein. Und wieder benutzt Posidonius die versteckte Annahme, daß parallele Geraden äquidistant sind, und folgert, daß AB auch nicht parallel zu CD sein kann. Also müssen sich AB und CD treffen, und man kann sich leicht überlegen, daß das dann auf der Seite von h geschehen muß, auf der B und D liegen. ∎

Der Fehler, den Posidonius macht, besteht darin, daß er einen neuen Parallelitätsbegriff einführt, aber mit den Eigenschaften des alten arbeitet. In Wirklichkeit hat er das Axiom $E - P$ (Euklids Postulat V) durch ein anderes ersetzt:

P-P) Parallele Geraden sind äquidistant.

Bezeichnen wir die neutrale Geometrie mit (N), so folgt aus den (dann korrekten) Sätzen P_1 und P_2:

$$(N) \wedge (P - P) \quad \Longrightarrow \quad (E - P).$$

Hat sich damit etwas gebessert? Nein, denn es gilt auch:

1.3 Satz. $(N) \wedge (E - P) \Longrightarrow (P - P)$.

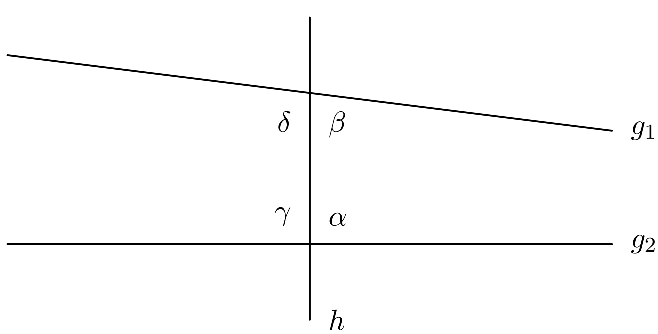
BEWEIS: Siehe Satz 5.23 in Kapitel I. ∎

Die korrigierte Version des Posidonius-Versuchs liefert also lediglich ein zu Postulat V äquivalentes Axiom. Und da ist Euklids Axiom vorzuziehen, denn seine Voraussetzungen sind überprüfbar. Ob zwei gegebene Geraden äquidistant sind, ist dagegen schwer zu sagen.

Der griechische Philosoph **Proklos Diadochos** (ca. 410 - 485 n.Chr.), Haupt der Schule des Neuplatonismus, hatte noch Zugang zu vielen Quellen, die für uns längst verloren sind, z.B. zur Großen Geschichte der Geometrie des Eudemus, eines Schülers des Aristoteles. In seinem Kommentar zum ersten Buch der Elemente gibt Proklos einen kurzen Überblick über das Werk des Eudemus, der selbst in seiner fragmentarischen Form für uns von unschätzbarem Wert ist.

In diesem Kommentar finden sich auch Hinweise auf frühere Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, insbesondere wird ein Versuch des berühmten ägyptischen Naturwissenschaftlers **Claudius Ptolemäus** (ca. 85 - 165 n.Chr.) beschrieben, der übrigens auch die Grundlagen der Trigonometrie geschaffen hat.

Ptolemäus soll folgendermaßen argumentiert haben:



Euklids Proposition 29 besagt: Sind g_1, g_2 parallel, so gelten die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z).

Daraus folgt – durch logische Kontraposition – sofort das Parallelenaxiom. Es genügt also, Proposition 29 zu beweisen, ohne (E-P) zu benutzen.

Ptolemäus nimmt nun an, daß g_1, g_2 parallel sind, daß aber $\alpha + \beta < 180°$ ist. Und dann folgert er sehr eigenartig: Da g_1 und g_2 auf der einen Seite von h genauso parallel wie auf der anderen sind, muß $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ sein. Aber dann ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 360°$, was ein Widerspruch dazu ist, daß $\gamma + \alpha = 180°$ und $\delta + \beta = 180°$ ist.

Dieser „Beweis“ ist natürlich unsinnig, wie Proklos auch feststellte. In Wirklichkeit ist die benutzte Winkelbeziehung äquivalent zum Postulat V.

Proklos gibt nun selbst einen „Beweis“ an:

1.4 Satz Pr_1**.** *Wenn sich zwei verschiedene Geraden in einem Punkt schneiden, dann wird der Abstand zwischen ihnen beliebig groß.*

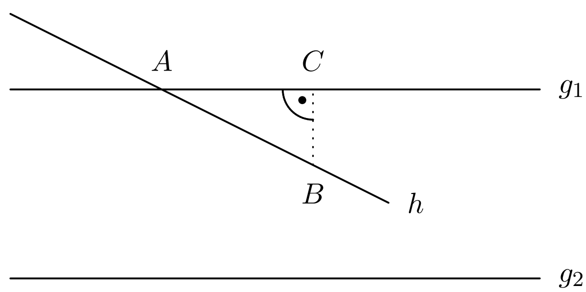
Mit „Abstand“ ist die Länge des Lots gemeint, das man von einem Punkt der einen Geraden auf die andere Gerade fällen kann. Der Satz ist richtig und kann ohne Parallelenaxiom bewiesen werden. Allerdings führt Proklos den Beweis nicht aus, und wir werden ihn auch erst an späterer Stelle nachtragen. Unter anderem wird das Archimedes-Axiom benutzt!

1.5 Satz Pr_2**.** *Der Abstand zwischen zwei Parallelen, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, kann nicht über alle Grenzen wachsen.*

Auch dieser Satz wird von Proklos nicht bewiesen.

1.6 Satz Pr_3**.** *Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, so muß sie auch die andere schneiden.*

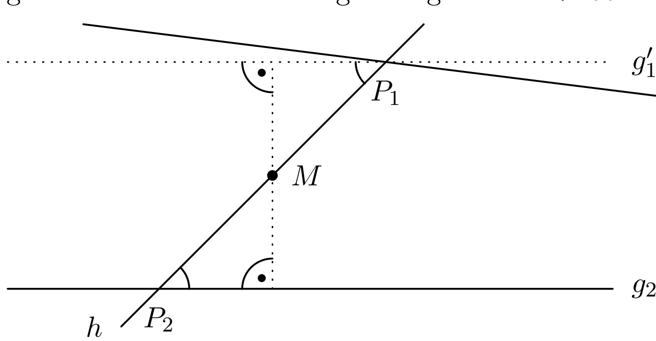
Beweis:



Nach Satz Pr_1 wird die Länge des Lotes $\overline{BC}$ beliebig groß. Nach Satz Pr_2 kann der Abstand von g_2 zu g_1 nicht über alle Grenzen wachsen. Das ist nur möglich, wenn h irgendwann Punkte auf der anderen Seite von g_2 erreicht, also insbesondere g_2 schneidet. ■

1.7 Satz Pr_4**.** *Aus Satz* Pr_3 *folgt Postulat V.*

Beweis: Wir betrachten die Standard-Situation: Zwei Geraden g_1, g_2 werden von h in P_1 bzw. P_2 geschnitten und bilden Ergänzungswinkel $< 180°$.



Wir tragen den Winkel $180° - \alpha$ bei P_1 an $\overline{P_1P_2}$ an und erhalten so eine neue Gerade g_1', die parallel zu g_2 ist und von g_1 geschnitten wird.

Vom Mittelpunkt M der Strecke $\overline{P_1P_2}$ fällen wir jeweils das Lot auf g_1' und g_2. Es entstehen zwei kongruente Dreiecke (WWS), und daraus kann man folgern, daß die Lote auf einer Geraden liegen. Also besitzen die Parallelen eine gemeinsame Senkrechte, und g_1 muß auch g_2 schneiden. ■

Dieser „Beweis“ des Parallelenaxioms ist schon recht trickreich, aber sein Schwachpunkt ist natürlich der Satz Pr_2, der nicht ohne Postulat V bewiesen werden kann. In Wirklichkeit ist er äquivalent dazu.

Über **Theon von Alexandria**, der eine der wichtigsten Euklid-Editionen herausgegeben hat, haben wir schon am Anfang von Kapitel I gesprochen. Wir sollten seine Tochter **Hypatia** (370 - 415 n.Chr.) erwähnen, eine der ersten bekannten Mathematikerinnen der Geschichte. Bezeichnend ist, daß sie in den Straßen von Alexandria von aufgebrachten christlichen Fanatikern regelrecht in Stücke gerissen wurde. Mit ihr starb auch die griechische Wissenschaft in Alexandria.

Im Jahre 622 floh Mohammed von Mekka nach Medina und begründete die Religion des Islam. Bereits 641 eroberten die Araber Alexandria. Angeblich hat der Kalif Omar damals befohlen, die Reste der Bibliothek zu vernichten. Er soll gesagt haben: Entweder enthalten die dort gelagerten Schriften dasselbe wie der Koran, dann sind sie überflüssig. Oder sie enthalten etwas, das im Widerspruch zum Koran steht, dann sind sie schädlich. Es ist nicht auszuschließen, daß diese Geschichte von den Christen erfunden wurde, die ja selbst viel zur Zerstörung der Bibliothek beigetragen haben.

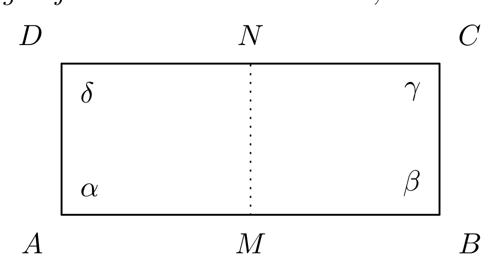
Zwischen 750 und 850 n.Chr. beginnt die Geschichte der Mathematik bei den Arabern. Bagdad und Damaskus wurden zu Zentren der Wissenschaft, Wörter wie „Algebra“ oder „Algorithmus“ fanden ihren Weg in die Mathematik.

Viele arabische Wissenschaftler beschäftigten sich mit dem Parallelenproblem. Wir wollen hier nur über die zwei bedeutendsten sprechen:

Omar al-Hayyam (auch Khayyam oder Chajjam geschrieben, ca. 1050 – 1130) war ein persischer Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter. Noch mehr als durch seine wissenschaftlichen Untersuchungen wurde er durch seine Lyrik bekannt. Bei Untersuchungen des Parallelenproblems ging er sorgfältiger als seine Vorgänger vor.

1.8 Omar Khayyams Theorem. *Betrachtet wird ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:*

Bei A und B liegen jeweils rechte Winkel vor, und es ist $\overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$.



Die Strecke $\overline{AB}$ *wird* Basis *genannt, die Strecke* $\overline{DC}$ Gipfellinie. *Die Winkel* γ *und* δ *heißen* Gipfelwinkel. *Nun gilt:*

1. *Die Gipfelwinkel sind kongruent.*
2. *Errichtet man im Mittelpunkt* M *der Basis eine Senkrechte, so trifft diese die Gipfellinie in ihrem Mittelpunkt* N *und bildet mit ihr einen rechten Winkel.*

Beweis:

1) Die erste Aussage haben wir schon einmal bewiesen, innerhalb des Beweises von Satz I.5.23.

2) Sei g die Senkrechte zu AB in M. Nach Satz I.5.8 ist g sowohl zu AD als auch zu BC parallel. Da A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen, muß das auch für D und C gelten. Also trifft g die Gipfellinie $\overline{DC}$ in einem inneren Punkt N.

Da $\triangle AMD \cong \triangle MBC$ ist (SWS), ist $\overline{DM} \cong \overline{MC}$ und $\angle ADM \cong \angle MCB$. Weil aber die Gipfelwinkel kongruent sind, muß auch $\angle MDN \cong \angle MCN$ sein. Und schließlich ist

$$\angle DMN = 90° - \angle AMD \cong 90° - \angle BMC = \angle CMN.$$

Also ist $\triangle DMN \cong \triangle MCN$ und insbesondere $\overline{DN} \cong \overline{NC}$. Und da $\angle DNM \cong \angle CNM$ ist, trifft g senkrecht auf die Gipfellinie. ■

In der Euklidischen Geometrie würde nun sehr schnell (etwa mit den Sätzen über Winkelsummen) folgen, daß die Gipfelwinkel ebenfalls rechte Winkel sind. Wenn das Parallelenaxiom nicht zur Verfügung steht, kann man zunächst nicht ausschließen, daß die Gipfelwinkel spitze oder stumpfe Winkel sind. Wenn wir solchen „verallgemeinerten Rechtecken“ einen Namen geben wollen, sollten wir sie eigentlich *Khayyam-Vierecke* nennen. Aus Gründen, die im nächsten Paragraphen klar werden, heißen sie jedoch *Saccheri-Vierecke*, nach dem italienischen Wissenschaftler Saccheri.

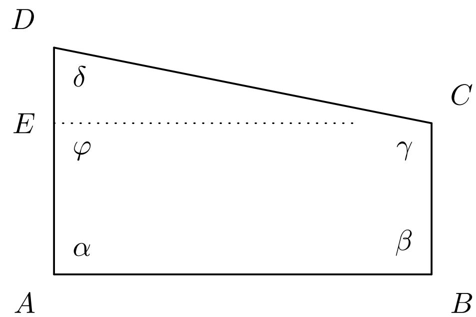
Mit Hilfe eines sogenannten „philosophischen Prinzips“, das angeblich auf Aristoteles zurückgeht und nicht mathematisch begründet werden kann, schließt Omar Khayyam dann, daß zwei Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten äquidistant sind. Diese Hypothese ist sogar stärker als der Satz Pr_2 von Proklos, und es ist klar, daß daraus das Parallelenpostulat folgt. Allerdings benutzt Khayyam beim Beweis die Saccheri-Vierecke. Ich gebe seine Überlegungen hier in modernisierter Form wieder:

1.9 Satz. *Im Viereck* $ABCD$ *mit den Winkeln* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sei* $\alpha = \beta = 90°$. *Dann gilt:*

1. $\overline{AD} > \overline{BC} \iff \delta < \gamma$.
2. $\overline{AD} = \overline{BC} \iff \delta = \gamma$.
3. $\overline{AD} < \overline{BC} \iff \delta > \gamma$.

Beweis: Nach Khayyams Theorem gilt: $\overline{AD} = \overline{BC} \implies \delta = \gamma$.

Sei nun $\overline{AD} > \overline{BC}$. Dann kann man einen Punkt E mit $A - E - D$ und $\overline{AE} = \overline{BC}$ finden.



Es ist $\varphi := \angle AEC = \angle BCE < \angle BCD = \gamma$, und da φ Außenwinkel zum Dreieck $\triangle ECD$ ist, ist $\varphi > \delta$. Insgesamt ist also $\delta < \gamma$.

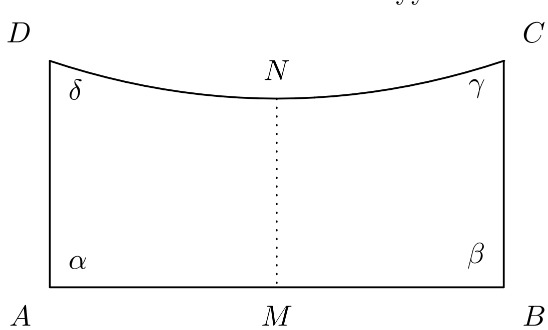
Der Fall $\overline{AD} < \overline{BC}$ kann analog behandelt werden.

Da sich die drei Möglichkeiten auf beiden Seiten der Äquivalenzen gegenseitig ausschließen, erhält man sofort auch die umgekehrten Implikationen. ■

1.10 Satz von den drei Hypothesen. *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dann gilt:*

1. *Ist $\delta < 90°$, so ist $\overline{DC} > \overline{AB}$.*
2. *Ist $\delta = 90°$, so ist $\overline{DC} = \overline{AB}$.*
3. *Ist $\delta > 90°$, so ist $\overline{DC} < \overline{AB}$.*

Beweis: Wir stellen die Situation von Khayyams Theorem her:



Da die Winkel bei M und N Rechte sind, ist $MNDA$ ein Viereck, das die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt. Da auch α ein rechter Winkel ist, folgt aus diesem Satz:

Ist $\delta < 90°$, so ist $\overline{DN} > \overline{AM}$, usw.

Da $\delta = \gamma$ ist, führt die Betrachtung des rechten Teil-Vierecks zu den gleichen Ergebnissen, und man erhält die Behauptung. ■

Nun schließt Khayyam folgendermaßen weiter:

Da die Geraden AD und BC eine gemeinsame Senkrechte besitzen, nämlich AB, müssen sie äquidistant sein. Das bedeutet aber, daß die beiden Hypothesen $\delta < 90°$ und $\delta > 90°$ auszuschließen sind. Jedes Saccheri-Viereck ist schon ein Rechteck.

Nach diesem nebulösen Schlenkerer kann er wieder korrekt weiterarbeiten, und mit ähnlichen Schlüssen, wie wir sie schon bei Proklos gesehen haben, folgert er schließlich:

Wenn die Gipfelwinkel in jedem Saccheri-Viereck Rechte sind, dann folgt das Postulat V.

Damit hat Khayyam eine weitere zu Postulat V äquivalente Bedingung gefunden (denn die Umkehrung ist klar, wie oben schon bemerkt wurde). Sein Fehler liegt im mystischen Beweis der Hypothese von den rechten Gipfelwinkeln.

Nasir ad-Din at-Tusi (auch Nasir al-Din al-Tusi oder Nasir Eddin geschrieben, 1201 – 1274) war zunächst Astrologe bei den Assasinen im Iran, kam dann aber als Hofastronom des Bruders des Mongolenherrschers Kublai Khan in die Gegend von Bagdad. Bekannt wurde er durch seine Forschungen auf dem Gebiet der Trigonometrie. Beim Parallelenproblem knüpfte er an die Ergebnisse von Khayyam an. Da seine Arbeiten später ins Lateinische übersetzt wurden, wurden so die arabischen Forschungen im Abendland bekannt.

Er kommt auf anderem, aber genauso suspektem Wege zu der Aussage: Die Gipfelwinkel in einem Saccheri-Viereck sind immer rechte Winkel. Daraus folgt nun leicht, daß Grundlinie und Gipfellinie kongruent sind, und daraus folgt zweierlei:

- Die Winkelsumme in einem Saccheri-Viereck beträgt 360°.
- Aus jedem rechtwinkligen Dreieck kann man durch Hinzufügen eines kongruenten rechtwinkligen Dreiecks ein Saccheri-Viereck (=Rechteck) machen.

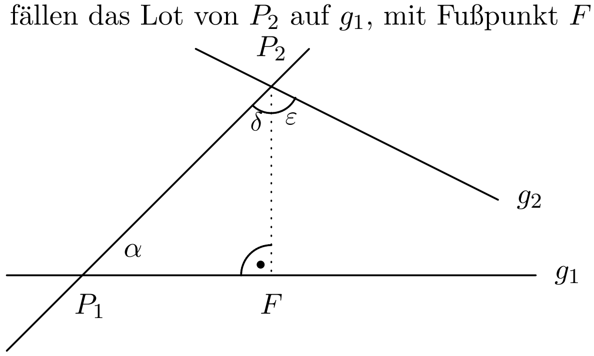
Jetzt sieht man, daß die Winkelsumme in einem rechtwinkligen Dreieck immer 180° beträgt, und daraus erhält man leicht, daß die Winkelsumme in *jedem* Dreieck 180° beträgt.

Nasir ad-Dins letzter Schritt besteht aus dem folgenden durchaus korrekten Satz:

1.11 Satz.

Wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist, dann gilt Euklids fünftes Postulat.

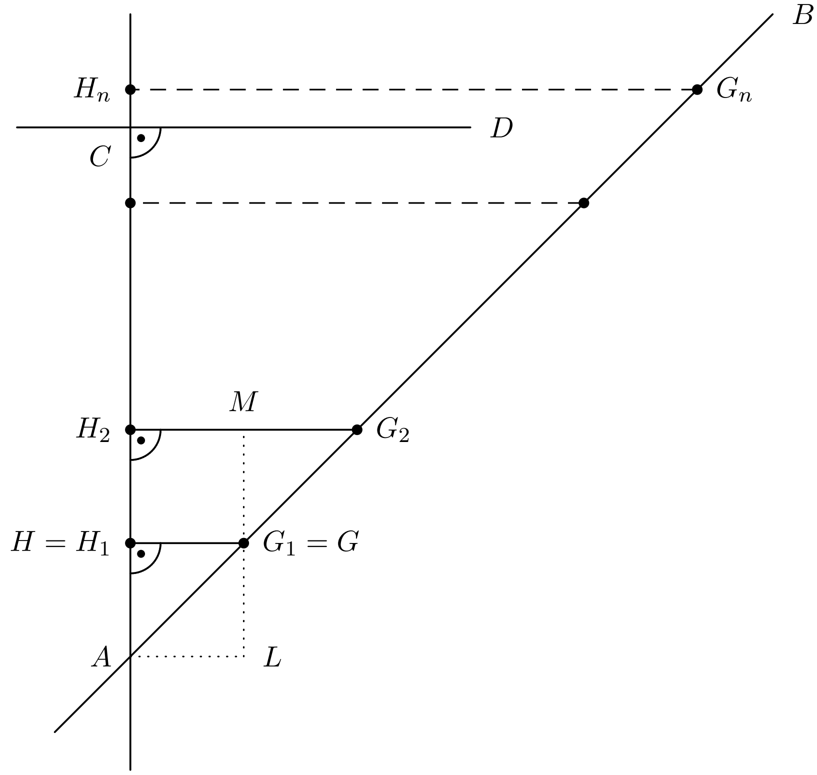
Beweis: Die Gerade h werde von den beiden Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 getroffen und bilde dabei die Ergänzungswinkel α (bei P_1) und β (bei P_2). Es sei $\alpha + \beta < 180°$. Dann muß wenigstens einer der beiden Winkel ein spitzer sein, etwa α. Wir fällen das Lot von P_2 auf g_1, mit Fußpunkt F.



Da in dem Dreieck P_1FP_2 nicht zwei Winkel $\geq 90°$ vorkommen können, muß F auf der gleichen Seite von h liegen wie die Winkel α und β. Nun sei $\delta := \angle P_1P_2F$. Offensichtlich ist $\delta < 90°$. Ist $\beta < \delta$, so ist der Winkel $\varepsilon := \delta - \beta$ zwischen P_2F und g_2 erst recht ein spitzer Winkel. Ist dagegen $\beta > \delta$ und sogar $\varepsilon := \beta - \delta > 90°$, so ist der Nebenwinkel von ε bezüglich g_2 ein spitzer Winkel.

Damit ist – ohne Verwendung der Voraussetzung über die Winkelsumme im Dreieck – gezeigt, daß g_1 und g_2 mit P_2F auf einer geeigneten Seite einen rechten und einen spitzen Winkel als Ergänzungswinkel bilden.

Wir brauchen uns nur noch mit diesem Spezialfall zu befassen: Die Gerade AC werde von AB unter einem spitzen und von CD unter einem rechten Winkel getroffen.



Wir wählen einen Punkt G mit $A - G - B$ und fällen das Lot von G auf AC mit Fußpunkt H. Dann ist klar, daß H auf der gleichen Seite von A liegt wie der Punkt C.

Ist $H = C$, so stimmt das Lot mit CD überein, und wir sind fertig. Gilt $A - C - H$, so muß CD nach Pasch außer $\overline{AH}$ noch eine weitere Seite des Dreiecks AGH treffen. Dies kann nicht $\overline{HG}$ sein (Parallelität), also trifft CD die Gerade $AG = AB$.

Es bleibt der Fall $A - H - C$ zu untersuchen.

Wir konstruieren Punkte $G_1 := G, G_2, G_3, \ldots$ auf AB mit $\overline{AG_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1G_2} \mathrel{\widehat{=}} \ldots$.

Sei H_2 der Fußpunkt des Lots von G_2 auf AC. Wir behaupten, daß $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HH_2}$ ist.

Zu diesem Zwecke errichten wir in A die Senkrechte AL zu AC (mit $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HG_1}$). Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist $\angle LAG_1 \mathrel{\widehat{=}} 90° - \angle G_1AH \mathrel{\widehat{=}} \angle AG_1H$. Daher ist $\triangle AG_1H \mathrel{\widehat{=}} \triangle G_1AL$ (SWS), und damit $\angle ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} \angle AHG_1 = 90°$, sowie $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LG_1}$. Dann ist aber auch

$$\angle HG_1L = \angle HG_1A + \angle AG_1L = \angle LAG_1 + (90° - \angle LAG_1) = 90°.$$

Wählt man noch $M \in H_2G_2$ mit $\overline{H_2M} \cong \overline{HG_1}$, so ist H_2HG_1M ein Saccheri-Viereck, und es folgt, daß $\angle H_2MG_1 = \angle HG_1M$ ist. Wegen des Satzes von der Winkelsumme muß dann $\angle H_2MG_1 = \angle HG_1M = 90°$ und daher $\overline{MG_1} = \overline{H_2H}$ sein.

Da sich $\angle HG_1L$ und $\angle HG_1M$ zu 180° ergänzen, sind M, G_1 und L kollinear. Aber dann sind $\angle AG_1L$ und $\angle MG_1G_2$ Scheitelwinkel, also kongruent. Und da $\angle G_1AL = \angle G_1G_2M$ ist (Winkelsumme im Dreieck), ist $\triangle ALG_1 \cong \triangle G_1G_2M$ (WSW), und daher $\overline{LG_1} = \overline{G_1M}$. So folgt:

$$\overline{HH_2} \cong \overline{G_1M} \cong \overline{G_1L} \cong \overline{AH}.$$

Genauso folgt allgemein für den Fußpunkt H_i des Lotes von G_i auf AC, daß $\overline{AH_i} \cong n \cdot \overline{AH}$ ist. Nach Archimedes gibt es aber ein n, so daß $n \cdot \overline{AH} > \overline{AC}$ ist. Dann gilt $A - C - H_n$, und wir sind fertig. ∎

1.12 Folgerung. *Postulat V gilt genau dann, wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt.*

1482 erschien die erste gedruckte Version der „Elemente" in Europa. Der aus Bamberg kommende Christoph Schlüssel, genannt **Christopher Clavius** (1537 – 1612), der in Rom an der Ausarbeitung des Gregorianischen Kalenders beteiligt war, veröffentlichte 1574 eine Euklid-Ausgabe, in der er alles damals Bekannte zusammenfaßte. Auch er versuchte (vergeblich) einen Beweis des Parallelenaxioms, indem er anschaulich begründete, warum die Menge der zu einer gegebenen Geraden äquidistanten Punkte wieder eine Gerade ist.

Giordano Vitale (1633 – 1711) veröffentlichte im Rahmen einer überarbeiteten Euklid-Ausgabe einen Beweis, in dem er etwas ähnliches versuchte. Immerhin konnte er zeigen: Wenn zwei Geraden an drei verschiedenen Stellen den gleichen Abstand voneinander haben, sind sie äquidistant.

In England machte 1621 **Sir Henry Savile** in Vorlesungen über Euklid auf zwei angebliche Makel in den „Elementen" aufmerksam: Die Theorie der Parallellinien und die Lehre von den Proportionen.

Er stiftete daraufhin einen mathematischen Lehrstuhl an der Universität Oxford mit der Auflage, daß der jeweilige Inhaber Vorlesungen über Euklid zu halten habe.

Einer der ersten „Professores Saviliani" war **John Wallis** (1616 – 1703). Er kannte und kritisierte die Probleme seiner Vorgänger mit den äquidistanten Linien und versuchte es auf anderem Wege:

Zwei Dreiecke werden *ähnlich* genannt, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen. Wallis stellte nun folgendes Postulat auf:

W-P) Zu jedem Dreieck ABC kann man (bei vorgegebener Seite $\overline{A'B'}$ ein ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruieren.

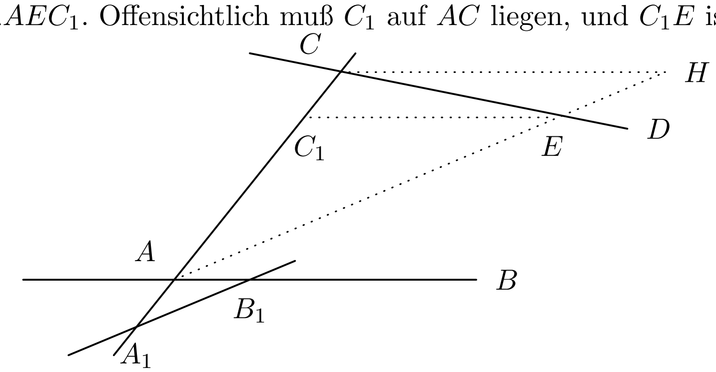
Ob dieses Postulat einsichtiger als Euklids Parallelenpostulat ist, sei erst einmal dahingestellt. Wallis zeigt nun (1663):

1.13 Satz. (W – P) $\implies$ (E – P)

Beweis: AC werde von den Geraden AB und CD getroffen und bilde mit ihnen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner als 180° sind.

Wir wählen A_1 mit $C - A - A_1$ und B_1 mit $A - B_1 - B$ willkürlich und konstruieren das zu $\triangle A_1B_1A$ ähnliche Dreieck AHC. Dann ist CH parallel zu AB.

CD tritt ins Innere des Winkels $\angle ACH$ ein, muß also die gegenüberliegende Seite $\overline{AH}$ des Dreiecks AHC treffen, etwa in E. Nun konstruiert man das zu $\triangle A_1B_1A$ ähnliche Dreieck $\triangle AEC_1$. Offensichtlich muß C_1 auf AC liegen, und C_1E ist parallel zu AB.



Schließlich konstruiere man das zu $\triangle C_1EC$ ähnliche Dreieck $\triangle AXC$. Da $AX = AB$ und $CX = CD$ sein muß, ist X der gesuchte Schnittpunkt von AB und CD. ■

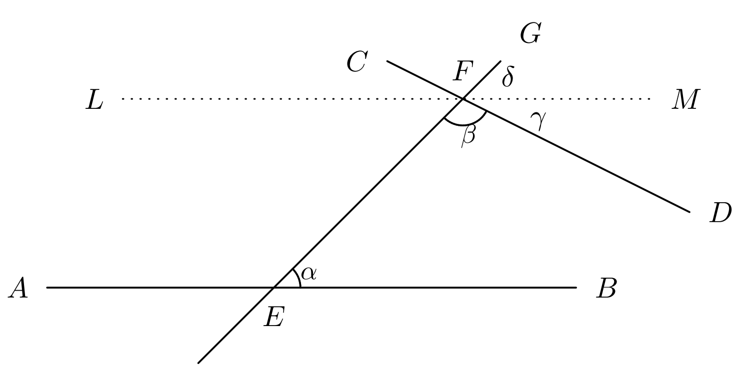
Der Beweis ist korrekt, hinterläßt aber Unbehagen, weil die postulierte Konstruierbarkeit von ähnlichen Dreiecken ein sehr starkes Werkzeug ist. In Wirklichkeit folgt fast trivial, daß das Postulat von Wallis äquivalent zum Parallelenaxiom ist.

John Playfair (1748 – 1819), Professor für Mathematik und Physik an der Universität Edinburgh, schrieb 1796 ein Buch mit dem Titel „Elements of Geometry“. Darin formulierte er das Parallelenaxiom in der heute üblichen Form:

PA) Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so geht durch P genau eine Parallele zu g.

1.14 Satz. (PA) $\iff$ (E – P)

Beweis: Sei zunächst (PA) vorausgesetzt.



EF werde von AB in E und von CD in F geschnitten. G liege auf der Verlängerung von EF über F hinaus. Wir konstruieren die Gerade LM durch F so, daß $\delta := \angle MFG = \angle BEF =: \alpha$ ist. Dann ist LM parallel zu AB.

Setzt man $\beta := \angle EFD$ und $\gamma := \angle DFM$, so ist

$$\beta + \gamma + \delta = 180^\circ, \text{ also } \gamma = 180^\circ - (\beta + \alpha) > 0.$$

Also ist $LM \neq CD$, und nach (PA) kann CD nicht parallel zu AB sein. AB und CD müssen sich schneiden.

Umgekehrt sei nun (E-P) vorausgesetzt. Die Existenz einer Parallelen g' zu g durch $P \notin g$ haben wir schon an früherer Stelle bewiesen:

Man fälle das Lot h von P auf g und wähle für g' die Senkrechte zu dem Lot in P.

Ist g'' eine weitere Gerade durch P, also $g'' \neq g'$, so müssen g'' und g auf einer Seite von h zusammen innere Winkel $< 180^\circ$ bilden. Nach (E-P) schneiden sich g'' und g, d.h., g'' ist keine Parallele. ∎

Zusammengefaßt haben wir jetzt folgende äquivalente Formulierungen für das Parallelenaxiom gefunden:

1. Euklids Postulat V.
2. Playfairs Postulat: Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so gibt es genau eine Parallele zu g durch P.
3. Die Winkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180°.
4. Jedes Saccheri-Viereck ist ein Rechteck.
5. Werden zwei Geraden g_1, g_2 von einer dritten geschnitten, so sind sie genau dann parallel, wenn die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z) gelten.
6. Parallele Geraden sind äquidistant.
7. Zu jedem Dreieck gibt es ähnliche Dreiecke beliebiger Größe.

§ 2 Die Hypothese vom spitzen Winkel

Girolamo Saccheri wurde am 5. September 1667 in San Remo in der Republik Genua geboren. 1685 wurde er in den Jesuitenorden aufgenommen. Als Lehrer für Grammatik wirkte er in Mailand und lernte dort bei dem Mathematiker Tommaso Ceva die Euklidische Geometrie kennen. 1694 wurde er in Como zum Priester geweiht. Nach einem Aufenthalt in Turin kam er 1697 nach Pavia, wo er am Jesuitenkollegium und an der Universität Vorlesungen hielt. Er soll ein großes Rechengenie und ein guter Schachspieler gewesen sein.

Wie der Engländer Savile war auch Saccheri der Meinung, daß es zwei Makel in Euklids Werk gäbe. Sein Hauptwerk trägt daher den Titel:

Euclides ab omni naevo vindicatus
sive Conatus Geometricus quo stabiliuntur
Prima ipsa universae Geometriae Principia.

Der von jedem Makel befreite Euklid
oder
Ein geometrischer Versuch zur Begründung
der Grundsätze der ganzen Geometrie.

Von dem 2-bändigen Werk interessiert nur der 1. Teil über die Parallelen. Saccheri gewinnt diesem Problem eine völlig neue Seite ab. Alle bisherigen Versuche beruhten auf dem Grundgedanken, daß man das fünfte Postulat unmittelbar aus der neutralen Geometrie herleiten könne. Bei allen wurde jedoch – mehr oder weniger offen – ein neues Axiom an Stelle des alten eingeführt.

Saccheri hatte nun bei Untersuchungen über Logik besonderen Gefallen an der Methode der „reductio ad absurdum“ gefunden. Er kannte die Untersuchungen der Araber und führte erneut die von diesen betrachteten Vierecke ein, die wir im Vorgriff schon als „Saccheri-Vierecke“ bezeichnet haben. Einige seiner Sätze kennen wir schon von Khayyam und Nadir ad-Din, darauf brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Saccheri unterscheidet nun – wie schon Khayyam, aber mit größerer Deutlichkeit – drei Hypothesen, je nach Art der Gipfelwinkel im Saccheri-Viereck:

Die Hypothese des rechten Winkels, die Hypothese des stumpfen Winkels und die Hypothese des spitzen Winkels.

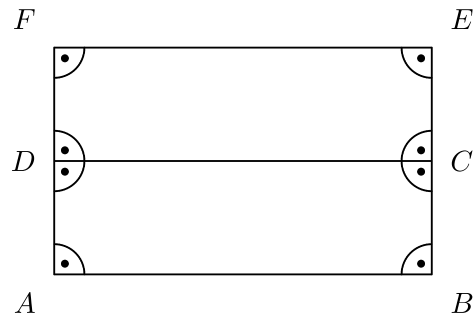
Wie wir im Folgenden ausführen werden, zeigt er, daß diese Hypothesen, wenn sie nur für ein Saccheri-Viereck gelten, dann auch zugleich für alle. Sie schließen sich also gegenseitig aus, und da die Hypothese vom rechten Winkel äquivalent zum Parallelenaxiom ist, gilt es nur, die beiden anderen Hypothesen nach dem Widerspruchsprinzip auszuschließen.

2.1 Satz V, VI und VII von Saccheri.

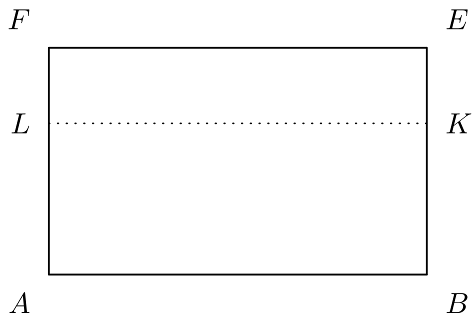
Gilt in einem Falle die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel, so gilt sie auch in jedem anderen Fall.

Beweis: 1) Es sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit 4 rechten Winkeln. Dann ist dies ein Rechteck und insbesondere $\overline{DC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$.

Wir spiegeln das Rechteck an der Geraden DC und erhalten auf der anderen Seite wieder ein Rechteck $DCEF$. Das Viereck $ABEF$ ist ein Saccheri-Viereck, in dem ebenfalls die Hypothese vom rechten Winkel erfüllt ist. Indem man dieses Verfahren wiederholt, gewinnt man über der Basis $\overline{AB}$ Saccheri-Vierecke mit beliebig großer Höhe und vier rechten Winkeln.



Ist nun $ABEF$ ein solches Viereck, $A-L-F$, $B-K-E$ und $\overline{AL}=\overline{BK}$, so ist auch $\overline{FL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{EK}$, d.h., $ABKL$ und $EFLK$ sind beides Saccheri-Vierecke.



Wäre $\angle ALK > 90°$, so wäre $\overline{LK} < \overline{AB}$. Zugleich ist dann aber $\angle FLK < 90°$, und es müßte $\overline{LK} > \overline{FE} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$ sein. Das ist ein Widerspruch, und genauso führt die Annahme $\angle ALK < 90°$ zum Widerspruch. Damit ist gezeigt, daß es über $\overline{AB}$ Rechtecke beliebiger Höhe gibt.

Nun ist aber $LABK$ auch ein Saccheri-Viereck über der Basis $\overline{LA}$. Also gibt es auch Rechtecke beliebiger Breite.

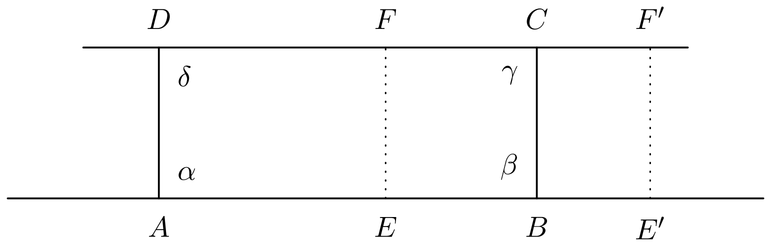
Der Fall des stumpfen Winkels wird von Saccheri recht trickreich behandelt, er benutzt dabei aber das Dedekind-Axiom (ohne dieses als Axiom zu formulieren). Wir hatten uns nun vorgenommen, möglichst lange ohne das Dedekind-Axiom auszukommen. Wir werden daher einen 1905 von Bonola veröffentlichten Beweis nachtragen.

Der Fall des spitzen Winkels kann schließlich mit Hilfe der schon bewiesenen Fälle und mit dem Ausschlußprinzip erledigt werden. ∎

Zur Behandlung der Hypothese vom stumpfen Winkel müssen wir einige Hilfssätze vorausschicken.

2.2 Hilfssatz 1. *Betrachtet werde ein Saccheri-Viereck $ABCD$ mit den Winkeln α, β, γ und δ. Es sei $A-E-B$ und $A-B-E'$. Die Senkrechten zu AB in E bzw. E' mögen DC in F bzw. F' treffen. Dann ist auch $D-F-C$ und $D-C-F'$, und es gilt:*

1. *Ist $\overline{EF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$, so ist $\delta = 90°$.*
2. *Ist $\overline{EF} > \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} < \overline{AD}$, so ist $\delta > 90°$.*
3. *Ist $\overline{EF} < \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} > \overline{AD}$, so ist $\delta < 90°$.*

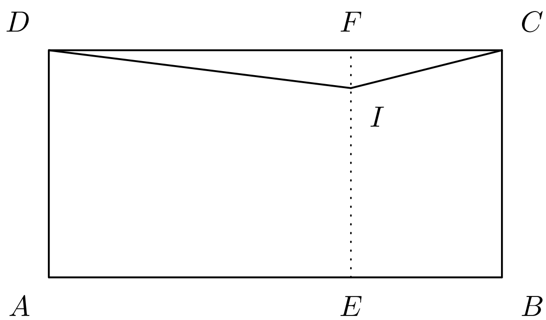


Beweis: Die Senkrechte in E muß noch eine weitere Seite des Saccheri-Vierecks treffen, und da es keine Dreiecke mit zwei rechten Winkeln gibt, kann dies nur die Gipfellinie sein. Ob die Senkrechte in E' die Gerade DC trifft, kann man nicht sagen. Doch wenn sie es tut, dann muß die geforderte Zwischen-Beziehung gelten.

1) Sei zunächst $\overline{EF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$. Dann ist $\angle ADF \mathrel{\widehat{=}} \angle EFD$ und $\angle EFC \mathrel{\widehat{=}} \angle BCF$. Also ist $\angle EFD \mathrel{\widehat{=}} \angle EFC = 90°$, und dann ist auch $\delta = 90°$.

Ähnlich kann man schließen, wenn $\overline{E'F'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ ist. Es muß dann $\gamma = \angle BCD \mathrel{\widehat{=}} \angle BCF'$ sein, also $= 90°$.

2) Ist $\overline{EF} > \overline{AD}$, so gibt es ein I mit $E - I - F$ und $\overline{EI} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$.



Dann ist $\angle ADI = \angle EID$ und $\angle EIC = \angle BCI$. Mit dem Außenwinkelsatz folgt:

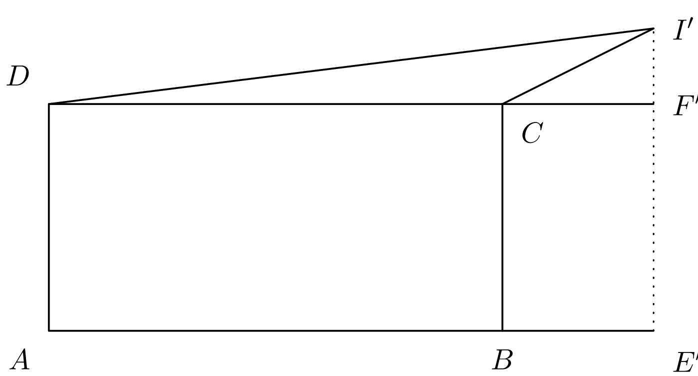
$$\angle EID + \angle EIC > \angle EFD + \angle EFC = 180°,$$

also

$$\angle ADC + \angle BCD > \angle ADI + \angle BCI > 180°.$$

Das ist nur möglich, wenn $\delta > 90°$ ist.

Ähnlich kann man schließen, wenn $\overline{E'F'} < \overline{AD}$ ist: Es gibt dann einen Punkt I' mit $E' - F' - I'$ und $\overline{E'I'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$.

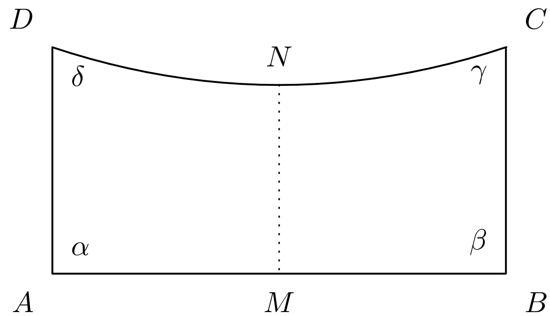


Es ist $\angle ADI' \mathrel{\widehat{=}} \angle E'I'D$ und $\angle BCI' \mathrel{\widehat{=}} \angle E'I'C$. Da offensichtlich $\angle E'I'C < \angle E'I'D$ ist, muß $\angle BCI' < \angle ADI'$ sein. Und da nach dem Außenwinkelsatz $\angle I'CF' > \angle I'DF'$ ist, ergibt die Winkel-Subtraktion, daß $\angle BCF' < \angle ADF' = \delta$ ist. Also ist $\delta \mathrel{\widehat{=}} \angle BCD \mathrel{\widehat{=}} 180° - \angle BCF' > 180° - \delta$. Das bedeutet, daß $\delta > 90°$ ist.

3) Der Fall $\overline{EF} < \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} > \overline{AD}$ wird analog erledigt. ∎

2.3 Hilfssatz 2. *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit Winkeln α, β, γ und δ und mit Mittellinie $\overline{MN}$. Dann gilt:*

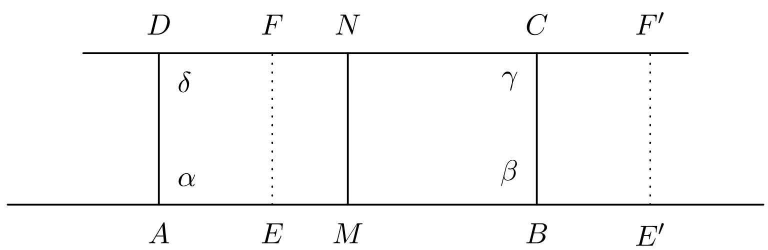
1. $\delta = 90° \implies \overline{MN} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$.
2. $\delta > 90° \implies \overline{MN} > \overline{AD}$.
3. $\delta < 90° \implies \overline{MN} < \overline{AD}$.



Zum Beweis wende man Satz II.1.9 auf das Viereck $AMND$ an.

2.4 Hilfssatz 3. *Die Bezeichnungen seien wie in Hilfssatz 2 gewählt. Weiter sei E ein Punkt zwischen A und M, und die Senkrechte zu AB in E treffe CD in F zwischen D und N, und E' sei ein Punkt mit $A - B - E'$, so daß die Senkrechte zu AB in E' die Gerade DC in einem Punkt F' mit $D - C - F'$ trifft (vgl. Hilfssatz 1). Dann gilt:*

1. *Ist $\delta = 90°$, so ist $\angle EFN = \angle E'F'N = 90°$.*
2. *Ist $\delta > 90°$, so ist $\angle EFN > 90°$ und $\angle E'F'N > 90°$.*
3. *Ist $\delta < 90°$, so ist $\angle EFN < 90°$ und $\angle E'F'N < 90°$.*



Beweis: 1) Der Fall des rechten Winkels ist besonders einfach. Da dann $\overline{EF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ ist, sind $AEFD$ und $EBCF$ Saccheri-Vierecke, und es muß $\angle DFE = \angle CFE = 90°$ sein. Analog behandelt man die Winkel bei F'.

2) Sei nun die Hypothese des stumpfen Winkels erfüllt. Nach Hilfssatz 1 muß dann $\overline{EF} > \overline{AD}$ sein. Wir spiegeln E und F an der Geraden MN und erhalten Punkte E^* und F^*. Offensichtlich ist EE^*F^*F ein Saccheri-Viereck, und da $\overline{AD} < \overline{EF}$ ist, folgt erneut aus Hilfssatz 1 (angewandt auf die außerhalb von EE^*F^*F gelegenen Punkte A und D), daß die Gipfelwinkel dieses Vierecks stumpf sind. Auch hier kann man das Beweisprinzip problemlos auf F' anwenden.

3) Der Fall des spitzen Winkels kann analog bearbeitet werden. ∎

Nun können wir den Beweis von Satz 2.1. vervollständigen:

In einem Saccheri-Viereck $ABCD$ gelte die Hypothese vom stumpfen Winkel. Wir führen die Mittellinie $\overline{MN}$ ein. Die Spiegelung an der Geraden MN bildet die Geraden AB und CD jeweils auf sich selbst ab. Indem man spiegelbildlich auf CD gelegene Punkte wählt und von ihnen das Lot auf AB fällt, kann man - nach Hilfssatz 3 - Saccheri-Vierecke beliebiger Breite und fester Mittellinie konstruieren, in denen ebenfalls die Hypothese vom stumpfen Winkel gilt.

Spiegelt man andererseits $MBCN$ an der Geraden AB, so erhält man ein Saccheri-Viereck NN^*C^*C mit Basis $\overline{NN^*}$, Mittellinie $\overline{MB}$ und stumpfen Gipfelwinkeln. Dieses wiederum läßt sich beliebig verbreitern und dann an der Achse MN spiegeln. Der Teil der so erhaltenen Figur, der oberhalb AB liegt, ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{AB}$ und beliebiger Mittellinie, und wieder gilt die Hypothese vom stumpfen Winkel.

Sei nun ein beliebiges Saccheri-Viereck $A'B'C'D'$ mit Mittellinie $\overline{M'N'}$ gegeben. Wir können dazu ein weiteres Saccheri-Viereck $A''B''C''D''$ mit gleicher Grundlinie und gleicher Mittellinie konstruieren, in dem die Hypothese vom stumpfen Winkel erfüllt ist. Dann ist $\triangle A'M'N' \mathrel{\widehat{=}} \triangle A''M''N''$ (SWS), also auch $\overline{A'N'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A''N''}$, $\angle N'A'M' \mathrel{\widehat{=}} \angle N''A''M''$ und $\angle M'N'A' \mathrel{\widehat{=}} \angle M''N''A''$. Da $\angle D'A'N' = 90° - \angle N'A'M'$ und $\angle D'N'A' = 90° - \angle M'N'A'$ ist, folgt auch, daß $\triangle A'N'D' \mathrel{\widehat{=}} \triangle A''N''D''$ ist (WSW). Also sind die Gipfelwinkel in den beiden Vierecken kongruent, und damit gilt auch in $A'B'C'D'$ die Hypothese vom stumpfen Winkel.

Ein Teil der Ergebnisse von Saccheri wurde später wiederentdeckt und auf andere Weise, zum Teil einfacher, bewiesen. Besonders tat sich dabei der französische Mathematiker Legendre hervor.

2.5 1. Satz von Saccheri-Legendre.

1. *Die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel ist genau dann erfüllt, wenn es ein Dreieck mit Winkelsumme* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$ *gibt.*

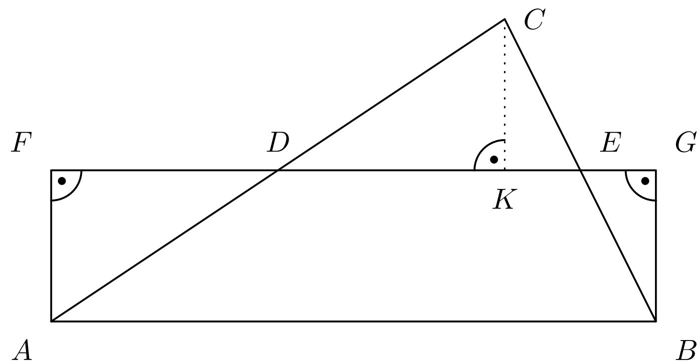
2. *Ist die Winkelsumme in einem Dreieck* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$, *so ist sie das auch in jedem anderen Dreieck.*

Beweis:

1) Definitionsgemäß gilt:

Die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel ist genau dann erfüllt, wenn es ein Saccheri-Viereck mit Winkelsumme $= 360°$, $> 360°$ oder $< 360°$ gibt.

Sei nun ABC ein beliebiges Dreieck, D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Fällt man noch das Lot von A auf DE mit Fußpunkt F und das Lot von B auf DE mit Fußpunkt G, so erhält man folgende Figur:



Dann gilt:

1. $GFAB$ ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{GF}$.
2. $\overline{GF} = 2 \cdot \overline{ED}$.
3. Die Summe der beiden Gipfelwinkel $\angle FAB$ und $\angle GBA$ stimmt mit der Summe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC überein.

Zum Beweis dieser Aussagen:

Fällt man noch das Lot von C auf DE mit Fußpunkt K, so sieht man:

$$\triangle ADF \widehat{=} \triangle DKC \quad \text{ und } \triangle BGE \widehat{=} \triangle KEC.$$

Also ist $\overline{AF} \widehat{=} \overline{KC} \widehat{=} \overline{BG}$ (also $GFAB$ ein Saccheri-Viereck), und $\overline{FD} + \overline{EG} = \overline{DK} + \overline{KE} = \overline{DE}$ (also $\overline{FG} = 2 \cdot \overline{DE}$).

Schließlich ist $\angle FAD \widehat{=} \angle DCK$ und $\angle GBE \widehat{=} \angle ECK$, also $\angle FAB + \angle GBA = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$. Die Winkelsumme des beliebig ausgewählten Dreiecks ABC ist also gleich der Summe der Gipfelwinkel eines Saccheri-Vierecks. Daraus folgt die Behauptung.

2) Da das Dreieck beliebig gewählt werden konnte, die Winkel-Hypothesen aber jeweils für alle Saccheri-Vierecke gleichzeitig gelten, stimmt das Kriterium mit der Winkelsumme für alle Dreiecke, wenn es nur für eins gilt. ∎

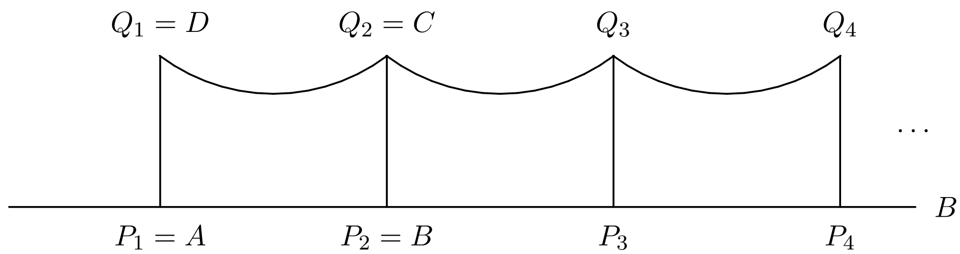
2.6 2. Satz von Saccheri-Legendre.

1. *In jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$.*
2. *In jedem Dreieck ist die Winkelsumme $\leq 180°$.*

Beweis: 2) folgt aus (1): Ist in einem Saccheri-Viereck die Gipfellinie nicht kleiner als die Grundlinie, so müssen nach dem Satz von den 3 Hypothesen die Gipfelwinkel in diesem Viereck $\leq 90°$ sein. Nach dem 1. Satz von Saccheri-Legendre folgt dann die Behauptung über die Winkelsumme im Dreieck.

Nun zum Beweis von (1):

Auf der Geraden AB konstruieren wir Punkte $P_1 = A$, $P_2 = B$, P_3, ... mit $\overline{P_iP_{i+1}} \widehat{=} \overline{AB}$, und wir errichten Senkrechte $\overline{P_iQ_i}$ zu AB in P_i mit $\overline{P_iQ_i} \widehat{=} \overline{AD}$ für alle i.



Wir erhalten so eine Folge von kongruenten Saccheri-Vierecken $P_iP_{i+1}Q_{i+1}Q_i$, insbesondere ist also $\overline{Q_iQ_{i+1}} \widehat{=} \overline{DC}$ für alle i.

Aus der Dreiecksgleichung folgt:

$$\overline{Q_1Q_{n+1}} \leq \overline{Q_1Q_2} + \cdots + \overline{Q_nQ_{n+1}} = n \cdot \overline{DC}.$$

Und ebenso folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\overline{P_1P_{n+1}} \leq \overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1Q_{n+1}} + \overline{Q_{n+1}P_{n+1}} \leq \overline{AD} + n \cdot \overline{DC} + \overline{BC}.$$

Da $\overline{P_1P_{n+1}} = n \cdot \overline{AB}$ ist, erhalten wir insgesamt:

$$n \cdot \overline{AB} \leq n \cdot \overline{DC} + 2 \cdot \overline{AD}.$$

Annahme: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

Dann ist $\overline{AB} - \overline{DC} > 0$, also eine echte Strecke, aber $n \cdot (\overline{AB} - \overline{DC}) \leq 2 \cdot \overline{AD}$ für alle n. Das widerspricht dem Archimedes-Axiom! Also war die Annahme falsch, es ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$. ∎

2.7 Folgerung (Satz von Saccheri).

Die Hypothese vom stumpfen Winkel kann nicht gelten.

Beweis: Trivial! Würde die Hypothese vom stumpfen Winkel gelten, so müßte in jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ gelten: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

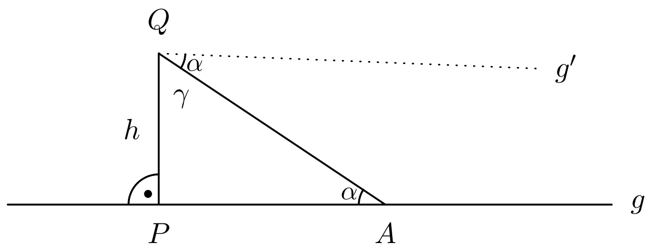
Und Saccheri verkündet an dieser Stelle stolz: *Die Hypothese des stumpfen Winkels ist ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört!* ∎

Der Originalbeweis von Saccheri verläuft etwas anders, er benutzt die Methode, die Nasir ad-Din schon bei der Behandlung der Hypothese vom rechten Winkel verwendet hatte. Es wird oft kritisiert, daß Saccheri dabei den Außenwinkelsatz benutzt, der unter der Hypothese des stumpfen Winkels gar nicht gelten kann, aber da er schließlich zu einem Widerspruch gelangt, ist das kein wirklicher Mangel. Man muß sich vorstellen, welche Gefühle Saccheri bewegt haben mögen, als er – fast 2000 Jahre nach Euklid – diesen ersten nennenswerten Fortschritt beim Parallelenproblem erzielt hatte. Um das fünfte Postulat zu beweisen, mußte er nur noch die Hypothese des spitzen Winkels zum Widerspruch führen. Und er stürzte sich in eine regelrechte Schlacht.

Ab jetzt sei die Hypothese vom spitzen Winkel vorausgesetzt.

2.8 Satz. *Gegeben sei eine Gerade g und dazu eine Senkrechte h. Dann gibt es eine Gerade g', die h mit spitzem Winkel schneidet und parallel zu g ist.*

Beweis: Sei $P \in g$ und $h = PQ$ die Senkrechte. Weiter sei $A \neq P$ ein anderer Punkt auf g. Das Dreieck PAQ hat einen rechten Winkel bei P und zwei spitze Winkel bei A und Q.



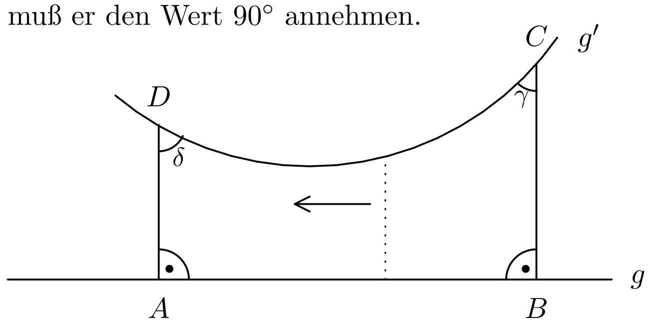
Trägt man $\alpha := \angle PAQ$ bei Q an QA an, so erhält man eine Gerade g', die wegen der Z-Winkel-Beziehung parallel zu g ist. Da die Winkelsumme im Dreieck PAQ kleiner als zwei Rechte sein muß, ist $\alpha + \gamma < 90°$, also schneidet g' h in einem spitzen Winkel. ∎

Saccheri untersucht nun das Verhalten paralleler Geraden genauer:

Sei g' parallel zu g, man fälle Lote von $D \in g'$ und $C \in g'$ jeweils auf g, mit Fußpunkten A bzw. B. Es sei $\delta := \angle ADC$ und $\gamma := \angle DCB$. Zumindest einer der beiden Winkel muß ein spitzer sein, o.B.d.A. sei das der Winkel δ. Wir unterscheiden nun 3 Möglichkeiten:

1. Fall: γ ist ebenfalls ein spitzer Winkel.

Dann ist der Nebenwinkel zu γ stumpf. Saccheri argumentiert nun folgendermaßen: Verschiebt man die Senkrechte zu g von B nach A, so ändert sich der Winkel auf der rechten Seite der Senkrechten stetig von einem stumpfen zu einem spitzen Winkel. Irgendwann dazwischen muß er den Wert 90° annehmen.



Dieses Argument können wir nur nachvollziehen, wenn wir das Dedekind-Axiom zulassen. Wieweit man das umgehen kann, werden wir vielleicht noch an späterer Stelle erörtern. Im Augenblick halten wir fest:

Ab sofort benutzen wir das Dedekind-Axiom! Das Kreisaxiom und das Archimedes-Axiom gelten dann automatisch auch.

Damit ist das Saccherische Argument in Ordnung, und wir sehen, daß g und g' eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

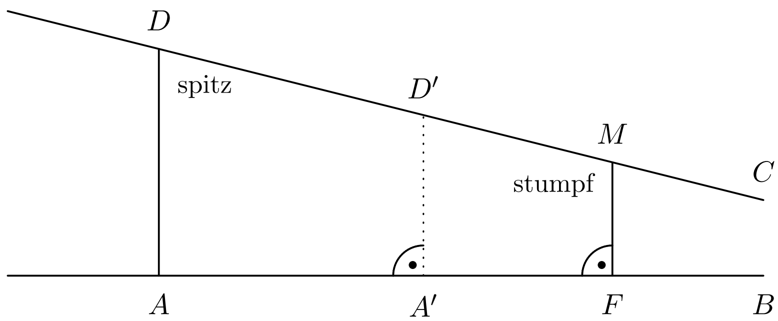
2. Fall: γ ist ein rechter Winkel, oder γ ist stumpf, und rechts von C gibt es noch eine gemeinsame Senkrechte von g und g'.

3. Fall: γ ist stumpf, und rechts von γ gibt es keine gemeinsame Senkrechte von g und g'.

Es soll gezeigt werden, daß sich g und g' in diesem Falle asymptotisch nähern!

Der Beweis erfordert einige Vorbereitungen. Wir gehen von folgender Situation aus: AD schneide AB in A senkrecht und DC in D unter einem spitzen Winkel. Die Geraden AB und CD seien parallel. Für jedes Lot von einem Punkt $M \in DC$ auf AB sei der Winkel bei M auf der Seite von D stumpf.

2.9 Hilfssatz. *Ist $A - A' - B$, so schneidet die Senkrechte zu AB in A' die Gerade DC in einem Punkt D' auf der gleichen Seite von AD.*



Beweis: Wähle M auf DC, so daß $\overline{DM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}$ ist und fälle das Lot auf AB mit Fußpunkt F.

Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{DM} < \overline{DA} + \overline{AF} + \overline{FM}$. Und weil $\angle FMD > \angle ADM$ ist, ist $\overline{FM} < \overline{AD}$. Damit folgt:

$$\overline{AF} > (\overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}) - \overline{AD} - \overline{AD} = \overline{AA'}.$$

Die Senkrechte in A' kann weder AD noch FM treffen (sonst würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen), muß nach Pasch also DC treffen, und zwar zwischen D und M. ∎

Als nächstes führen wir den *Defekt eines (konvexen) n-Ecks* $A_1A_2\dots A_n$ ein, als

$$\delta(A_1A_2\dots A_n) := (n-2) \cdot 180° - \mathrm{WS}(A_1A_2\dots A_n),$$

wobei WS(...) die Winkelsumme bezeichnet.[4]

Unter der Hypothese des spitzen Winkels ist der Defekt eines Dreiecks

$$\delta(ABC) = 180° - \mathrm{WS}(ABC)$$

eine positive Zahl $< 180°$, der Defekt eines konvexen Vierecks

$$\delta(ABCD) = 360° - \mathrm{WS}(ABCD)$$

eine positive Zahl $< 360°$. Weiter gilt:

[4] Nur bei **konvexen** Polygonen ist der Begriff der Winkelsumme unproblematisch!

2.10 Hilfssatz. *Kann das n-Eck $\mathcal{P}_n$ durch einen Streckenzug, der $\mathcal{P}_n$ außer an den Endpunkten nirgends berührt, in ein r-Eck $\mathcal{Q}_r$ und ein s-Eck $\mathcal{R}_s$ zerlegt werden, so ist $\delta(\mathcal{P}_n) = \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s)$.*

Beweis: Es müssen mehrere Fälle untersucht werden. Wir beschränken uns darauf, daß die Zerlegung durch eine einzige Strecke vonstatten geht, die zwei Ecken von $\mathcal{P}_n$ miteinander verbindet. Dann ist $r + s = n + 2$ und $\mathrm{WS}(\mathcal{P}_n) = \mathrm{WS}(\mathcal{Q}_r) + \mathrm{WS}(\mathcal{R}_s)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{P}_n) &= (n-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(\mathcal{P}_n) \\ &= (r-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(\mathcal{Q}_r) + (s-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(\mathcal{R}_s) \\ &= \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s). \end{aligned}$$

Die anderen Fälle sind ähnlich leicht zu behandeln. ■

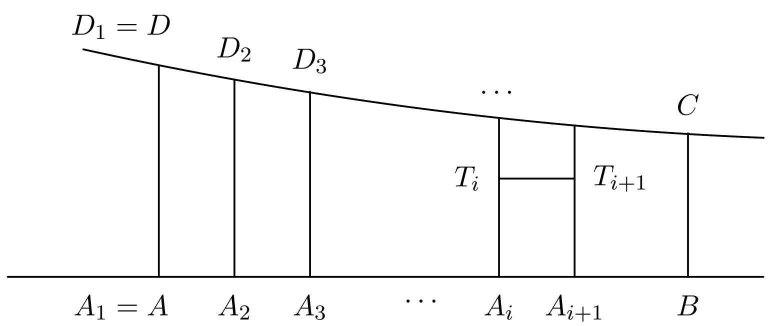
Jetzt können wir beweisen, daß die betrachteten parallelen Geraden asymptotisch aufeinander zulaufen, sich also beliebig nahe kommen.

Dazu nehmen wir an, das wäre nicht der Fall! Dann gibt es eine Größe $r > 0$, so daß der Abstand zwischen AB und DC immer größer als r bleibt. Wir wählen Punkte A_i auf AB mit $A_1 := A$ und $\overline{A_iA_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_1A_2} > r$. In jedem A_i errichten wir eine Senkrechte A_iD_i auf AB, die DC (in D_i) trifft. Dann entstehen Vierecke $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$, und für den Defekt dieser Vierecke gilt:

$$\delta(A_1A_2D_2D_1) + \cdots + \delta(A_nA_{n+1}D_{n+1}D_n) = \delta(A_1A_{n+1}D_{n+1}D_1) < 360^\circ.$$

Es muß also zu jedem n ein $i = i(n)$ geben, so daß $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) < \dfrac{360^\circ}{n}$ ist.

Andererseits enthält jedes Viereck $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$ ein Saccheri-Viereck $A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i$, dessen Seiten die Länge r haben, und alle diese Vierecke sind kongruent! Insbesondere haben sie alle den gleichen Defekt δ_0.



Nun wählen wir n so groß, daß $\dfrac{360^\circ}{n} < \delta_0$ ist, und zu diesem n das passende $i = i(n)$.

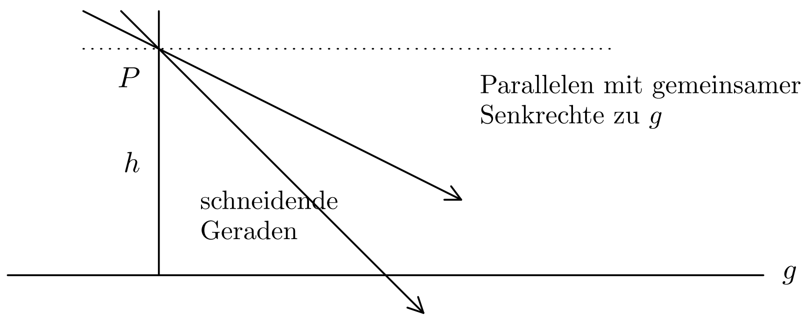
Da $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) = \delta(A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i) + \delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i)$ ist, folgt:

$$\delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i) < \frac{360^\circ}{n} - \delta_0 < 0.$$

Das ist absurd!

Damit ist gezeigt, daß Parallelen, die in einer Richtung keine gemeinsame Senkrechte besitzen, in dieser Richtung asymptotisch aufeinander zulaufen. Ob es solche Parallelen geben kann, ist damit noch nicht geklärt.

Als nächstes macht sich Saccheri daran, unter der Hypothese des spitzen Winkels die Existenz asymptotischer Parallelen zu zeigen.



Betrachten wir das Büschel aller Geraden durch $P \notin g$. Neben dem Lot h von P auf g gibt es noch viele weitere Geraden durch P, die g schneiden. Es sei Σ die Menge aller dieser Geraden, sofern sie „rechts“ von h mit h einen spitzen Winkel einschließen.

Und es gibt wenigstens eine Parallele zu g durch P, die mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzt, nämlich die Senkrechte g' zu h durch P. Es sei Γ die Menge aller solcher Geraden, sofern sie „rechts“ von h mit h einen Winkel $\leq 90°$ einschließen.

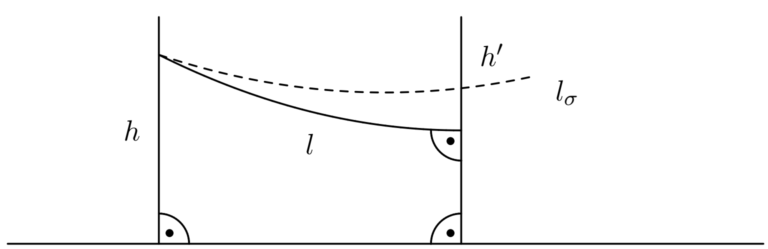
Für jeden Winkel γ mit $0 \leq \gamma \leq 90°$ sei l_γ die Gerade durch P, die h im Winkel γ schneidet. Für jede solche Gerade l sei umgekehrt $\gamma(l)$ der Schnittwinkel zu h.

2.11 Satz.

1. *Ist $l \in \Sigma$ und $\tau < \gamma(l)$, so ist auch $l_\tau \in \Sigma$.*
2. *Ist $l \in \Gamma$ und $\sigma > \gamma(l)$, so ist auch $l_\sigma \in \Gamma$.*

Beweis: Teil (1) ist trivial, nach Pasch.

(2) Sei $l \in \Gamma$, h' die gemeinsame Senkrechte, $\sigma > \gamma(l)$. Verlängert man h' über den Schnittpunkt mit l hinaus, so trifft sie dort l_σ



Nach dem Außenwinkelsatz müssen sich h' und l_σ unter einem spitzen Winkel treffen. Aber für den Fall wurde schon gezeigt, daß g und l_σ eine gemeinsame Senkrechte besitzen.
∎

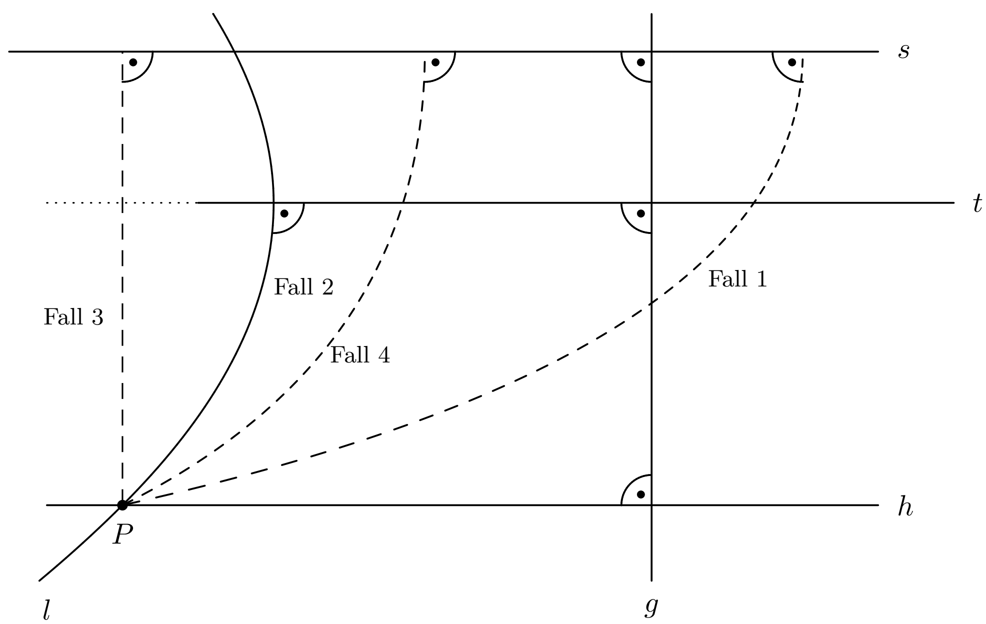
2.12 Satz.

1. *$\{\gamma \mid l_\gamma \in \Sigma\}$ besitzt kein Maximum.*
2. *$\{\gamma \mid l_\gamma \in \Gamma\}$ besitzt kein Minimum.*

BEWEIS: 1) Wenn $\gamma \in \Sigma$ ist, trifft l_γ die Gerade in einem Punkt B. Ist A der Fußpunkt des Lots von P auf g, so gibt es einen Punkt B' mit $A - B - B'$, die Gerade $l' := PB'$ liegt in Σ, und es ist $\gamma(l') > \gamma$.

2) Sei $\gamma \in \Gamma$, $l = l_\gamma$, t die gemeinsame Senkrechte von g und l. Wir errichten in weiterer Entfernung von h eine Senkrechte s zu g und fällen das Lot l' von P auf s.

Behauptung: $\gamma(l') \in \Gamma$ und $\gamma(l') < \gamma$.



Jetzt muß man einige Fälle unterscheiden.

1. Fall: l' trifft g.
Dann erhält man ein Dreieck mit 2 rechten Winkeln, was nicht sein kann.

2. Fall: $l' = l$.
Das ist nicht möglich, weil dann ein Viereck mit 4 rechten Winkeln entsteht.

3. Fall: l' verläuft „oberhalb“ von l.
Dann trifft die Verlängerung von t die Gerade l' unter einem spitzen Winkel (Außenwinkelsatz), und indem man zum Nebenwinkel übergeht, erhält man ein Viereck, in dem die Winkelsumme $> 360°$ ist. Das kann nicht sein.

4. Fall: l' verläuft „unterhalb“ von l und trifft nicht g.
Das ist die einzige Option, die übrig bleibt. l' ist eine Parallele zu g mit gemeinsamer Senkrechten, und es ist $\gamma(l') < \gamma$. ∎

Nun sei $\gamma_1 := \sup\{\gamma \mid l_\gamma \in \Sigma\}$ und $\gamma_2 := \inf\{\gamma \mid l_\gamma \in \Gamma\}$. Beides muß existieren, und es muß $\gamma_1 \le \gamma_2$ sein.

Sei $g_1 := l_{\gamma_1}$ und $g_2 := l_{\gamma_2}$. Dann ist g_1 eine Gerade, die nicht mehr g schneidet, und g_2 ist eine Gerade, die keine gemeinsame Senkrechte mit g hat. Beide sind parallel zu g.

2.13 Satz. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt:* $g_1 = g_2$.

BEWEIS: Wäre $g_1 \neq g_2$, so würde der Abstand zwischen ihnen beliebig groß. Aber da g_2 asymptotisch auf g zuläuft und g_1 immer zwischen g und g_2 bleibt, kann das nicht sein! ∎

Damit haben wir erhalten:

> *Die Geraden durch P, die g schneiden, werden durch eine asymptotische Parallele von denjenigen Parallelen zu g getrennt, die eine gemeinsame Senkrechte mit g besitzen.*

Insbesondere ist – unter der Hypothese des spitzen Winkels – die Existenz von asymptotischen Parallelen gesichert.

An dieser Stelle glaubt nun Saccheri, er sei so gut wie am Ziel. Er verstrickt sich in immer kompliziertere und immer unklarere Beweise, um zu zeigen, daß die Existenz asymptotischer Parallelen der Natur der Geraden widerspricht. Im Grunde argumentiert er wie folgt:

Eine Gerade g und eine dazu asymptotische Gerade g' treffen sich in ∞ und haben dort eine gemeinsame Senkrechte, weil sich ihre Richtungen dort nicht mehr unterscheiden. Aber wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten in einem Punkt kann das nicht sein.

Weil Saccheri selbst dem Frieden nicht so recht traut, gibt er noch einen weiteren Beweis an, in dem er zwar interessante Eigenschaften von Parallelen unter der Hypothese des spitzen Winkels herleitet, schließlich aber auch nur durch unerlaubte Verquickung von Aussagen im Endlichen und im Unendlichen den endgültigen Widerspruch herbeiführt.

Am 13. Juli 1733 erhält er die Druckerlaubnis der Inquisition, am 16. August 1733 die des Provinzials der Gesellschaft Jesu, und am 25. Oktober 1733 stirbt er nach längerer Krankheit. Es ist fraglich, ob er das Erscheinen seiner Arbeit noch erlebt hat.

Saccheris Schrift muß im 18. Jahrhundert unter den Fachleuten recht bekannt gewesen sein, später geriet sie jedoch in Vergessenheit.

Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800), ab 1756 Professor für Mathematik und Physik in Göttingen und ab 1763 Leiter der dortigen Sternwarte, schrieb zahlreiche Lehrbücher und besaß eine riesige Sammlung von Schriften, die nahezu alles umfaßte, was bis etwa 1770 über das Parallelenproblem bekannt war. Von Gauß und Lichtenberg bekam Kästner die wenig schmeichelhafte Charakterisierung, er sei der größte Mathematiker unter den Dichtern und der größte Dichter unter den Mathematikern.

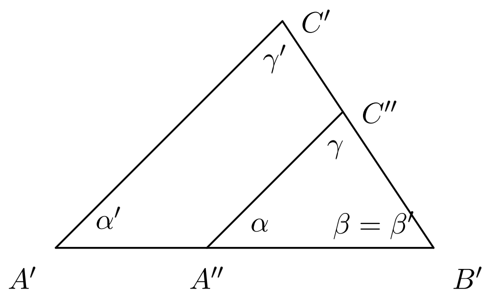
Unter seiner Anleitung entstand die Dissertation von **Georg Simon Klügel**, in der dieser die Geschichte des Parallelenproblems beschrieb und in recht scharfsinniger Weise eine große Zahl bisheriger Beweisversuche kritisierte. In einem Nachwort schrieb Kästner u.a. sinngemäß: „Niemand, der bei gesunden Sinnen ist, wird Euklids fünftes Postulat je bestreiten wollen.“

Auf dem Weg über Klügels Dissertation hat wohl auch der Schweizer Mathematiker **Johann Heinrich Lambert** (1728 – 1777) von Saccheris Ergebnissen erfahren.

Lambert betrachtete Vierecke mit 3 rechten Winkeln (die durch Halbierung eines Saccheri-Vierecks entstehen und heute auch als „Lambert-Vierecke" bezeichnet werden). Je nach Art des 4. Winkels unterschied auch er die 3 Hypothesen vom rechten, stumpfen und spitzen Winkel. Und wie Saccheri führte auch er die 2. Hypothese zum Widerspruch. Er entdeckte unter anderem den folgenden Satz:

2.14 Satz. *Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ existieren, die in allen 3 Winkeln übereinstimmen, aber nicht kongruent sind, so gilt das Euklidische Parallelenaxiom.*

BEWEIS: Wir bezeichnen die Winkel in den Dreiecken jeweils mit α, β und γ bzw. α', β' und γ'. Wenn die Dreiecke nicht kongruent sind, muß $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ sein. Wir nehmen an, es sei $\overline{A'B'} > \overline{AB}$.



Dann gibt es einen Punkt A'' mit $A' - A'' - B'$ und $\overline{A''B'} \,\widehat{=}\, \overline{AB}$. Trägt man α bei A'' an, so trifft der freie Schenkel $B'C'$ in einem Punkt C''.

Nach Konstruktion ist $\triangle A''B'C'' \,\widehat{=}\, \triangle ABC$. Also ist

$$WS(A'A''C''C') = \alpha' + (180° - \alpha) + (180° - \gamma) + \gamma' = 360°.$$

Aber dann gilt das Parallelenaxiom. ∎

Bemerkenswert ist die Umkehrung des gerade gewonnenen Ergebnisses:

2.15 Folgerung (WWW-Kongruenz). *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt: Ähnliche Dreiecke sind kongruent.*

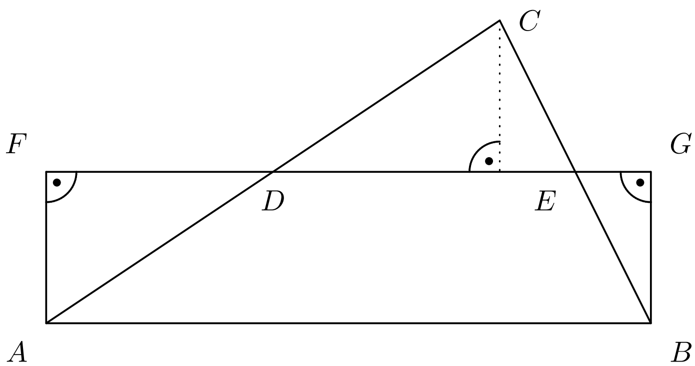
Ist μ eine Flächenfunktion, so hängt $\mu(ABC)$ nur von den Winkeln des Dreiecks ab. Diese schon erstaunliche Tatsache kann man weiter verschärfen:

2.16 Satz. *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt:*

Ist μ eine Flächenfunktion, und sind ABC, $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit gleichem Defekt, so ist $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

BEWEIS: Wir untersuchen zunächst den Fall $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Wie beim 1. Satz von Saccheri-Legendre konstruieren wir zu ABC ein Saccheri-Viereck $GFAB$ mit Basis $\overline{GF}$, so daß die Summe der Gipfelwinkel (bei A und B) gleich der Winkelsumme von ABC ist. Man überzeugt sich leicht davon, daß ABC und $GFAB$ zerlegungsgleich sind. Da kongruente Dreiecke auch den gleichen Defekt aufweisen und der Defekt sich additiv verhält, bedeutet das insbesondere, daß $\delta(GFAB) = \delta(ABC)$ ist.

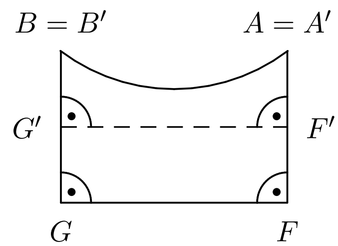


Bezeichnet ε einen der Gipfelwinkel, so ist

$$\delta(ABC) = \delta(GFAB) = 360^\circ - (180^\circ + 2\varepsilon) = 2(90^\circ - \varepsilon).$$

Ist nun $G'F'A'B'$ das analog zu $A'B'C'$ konstruierte Saccheri-Viereck mit Gipfelwinkeln ε', so folgt aus der Bedingung $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$, daß $\varepsilon = \varepsilon'$ ist.

Da auch die Gipfellinien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ kongruent sind, müssen die beiden Saccheri-Vierecke überhaupt kongruent sein, denn andernfalls könnte man das kleinere so in das größere einpassen, daß ein Rechteck übrig bleibt.



Damit ist gezeigt, daß ABC und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind, und es ist $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Im 2. Teil des Beweises setzen wir voraus, daß die Dreiecke keine zwei gleichen Seiten haben. Es sei etwa $\overline{A'C'} > \overline{AC}$.

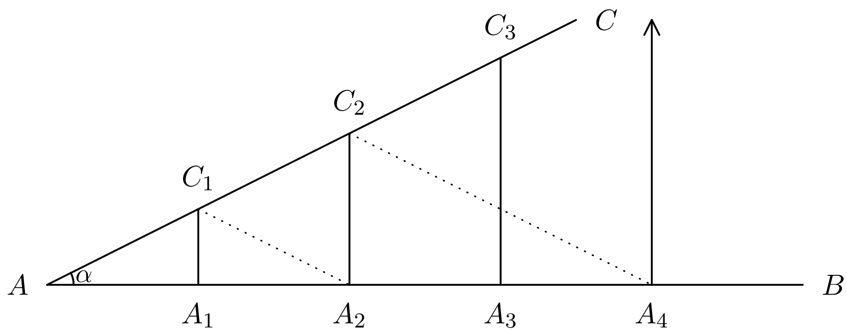
Ist D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, so ist sicher $\overline{AD} > \overline{AF}$, also $\overline{A'C'} > \overline{AC} > 2 \cdot \overline{AF}$. Man kann nun ein Dreieck ABC_1 konstruieren, das ebenfalls zerlegungsgleich zu $GFAB$ ist, aber mit $\overline{AC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$:

F liegt im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ um A mit Radius $r := \frac{1}{2} \cdot \overline{A'C'}$, also muß $\mathcal{K}$ die Gerade FG „rechts“ von F in einem Punkt D_1 treffen. Verlängert man $\overline{AD_1}$ über D_1 hinaus bis zu einem Punkt C_1 mit $\overline{AD_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{D_1C_1}$, so erhält man das gewünschte Dreieck.

Nun ist $\delta(ABC_1) = \delta(GFAB) = \delta(ABC) = \delta(A'B'C')$. Wegen $\overline{AC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ kann man die Ergebnisse des 1. Teils des Beweises auf die Dreiecke ABC_1 und $A'B'C'$ anwenden. Wir benutzen die Tatsache, daß ABC_1 und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind. Daraus folgt, daß auch ABC und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind, und daraus die Behauptung. ■

2.17 Satz. *Gegeben seien zwei Geraden AB und AC, die sich bei A unter einem spitzen Winkel α treffen. Dann gibt es auf $\overrightarrow{AB}$ eine Senkrechte zu AB, die zu AC asymptotisch parallel ist.*

Beweis: Wir wählen Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf AB mit $\overline{AA_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_1A_2} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_2A_3} \mathrel{\widehat{=}} \ldots$ und errichten dort jeweils Senkrechte zu AB.



Annahme, die Senkrechte in A_i trifft stets die Gerade AC in einem Punkt C_i.

Sei $\delta_n := \delta(AA_nC_n)$. Da jeweils $\triangle AA_kC_k \mathrel{\widehat{=}} \triangle A_kA_{2k}C_k$ ist, folgt:

$$\delta_{2n} > \delta(AA_{2n}C_n) = \delta(AA_nC_n) + \delta(A_nA_{2n}C_n) = 2 \cdot \delta_n.$$

Also ist

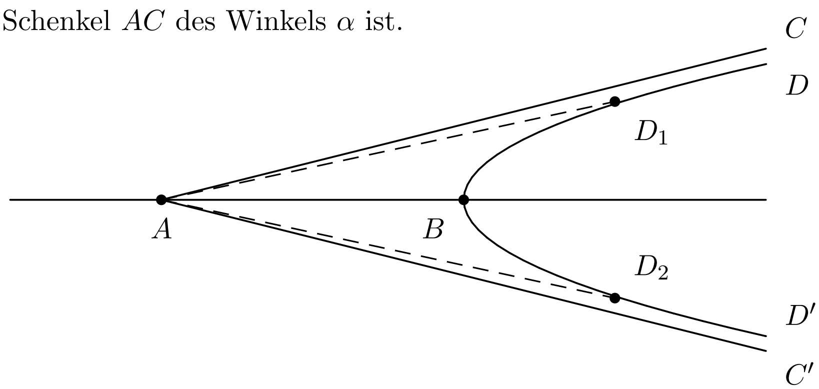
$$\delta_{2^k} > 2 \cdot \delta_{2^{k-1}} > \ldots > 2^{k-1} \cdot \delta_1.$$

Für genügend großes k wird aber $2^{k-1} \cdot \delta_1 > 180°$. So groß kann der Defekt nicht werden, das ist ein Widerspruch.

Indem man ein Lot von C auf AB fällt, erhält man wenigstens eine Senkrechte zu AB, die AC trifft. Indem man die Senkrechten in zwei Klassen einteilt, je nach ihrem Schnittverhalten mit AC, erreicht man eine Situation, in der man das Dedekind-Axiom anwenden kann. Die Grenzgerade, die es dann geben muß, kann nicht mehr schneiden (wie man sich leicht überlegt), also muß sie asymptotisch parallel sein. ∎

2.18 Folgerung. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Dreieck, dessen Winkelsumme $< \varepsilon°$ ist.*

Beweis: An die Gerade AB werde bei A ein spitzer Winkel $\alpha < (\frac{\varepsilon}{4})°$ angetragen. O.B.d.A. sei B der Punkt, bei dem die Senkrechte BD zu AB asymptotisch parallel zu dem freien Schenkel AC des Winkels α ist.



Durch Spiegeln an AB kann man die Gerade DB über B hinaus verlängern, sie ist dort asymptotisch parallel zum Spiegelbild AC' der Geraden AC.

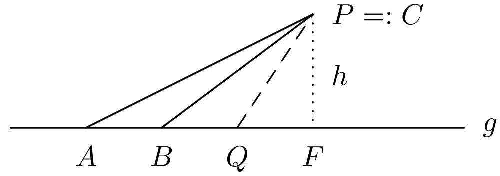
Trägt man die Strecke $\overline{AB}$ auf beiden Seiten von B auf BD ab, so erhält man Punkte D_1 und D_2. Das Dreieck ABD_1 ist gleichschenklig mit Basiswinkeln $\alpha' := \angle BAD_1 = \angle BD_1A$. Offensichtlich ist $\alpha' < \alpha$. Auf der anderen Seite von AB erhält man das kongruente Dreieck AD_2B. Nun ist AD_2D_1 ein Dreieck mit Winkelsumme $= 4\alpha' < 4\alpha < \varepsilon°$.
∎

2.19 Folgerung. *Der Defekt eines Dreiecks kann dem Wert* 180° *beliebig nahe kommen.*

Man kann allerdings zeigen, daß große Defekte nur bei Dreiecken auftreten, bei denen alle drei Seiten „sehr groß“ sind. Um die Gültigkeit der Hypothese vom spitzen Winkel experimentell nachzuweisen, müßte man also sehr große Dreiecke vermessen.

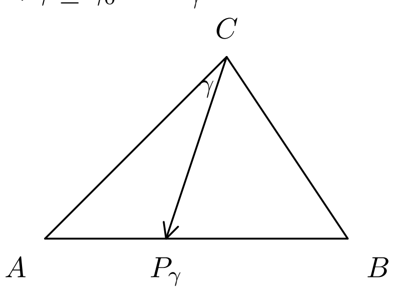
Andererseits kann man zeigen:

2.20 Satz. *Ist $\varepsilon > 0$ und eine Strecke $\overline{XY}$ vorgegeben, so gibt es ein Dreieck ABC mit $\delta(ABC) < \varepsilon°$ und $\overline{AC}, \overline{BC} > \overline{XY}$.*



Beweis: Ist eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ gegeben und h das Lot von P auf g mit Fußpunkt F, so kann man einen Punkt $Q \in g$ finden, so daß $\angle PQF < \varepsilon°$ ist (Übungsaufgabe!). Schlägt man einen Kreis um P mit einem Radius $> \max(\overline{PQ}, \overline{XY})$, so trifft dieser Kreis g in einem Punkt A mit $P - Q - A$. Wählt man schließlich noch B auf g mit $A - B - Q$ und setzt $C := P$, so ist ABC das gesuchte Dreieck. ∎

Wir wählen jetzt ein Dreieck ABC mit einem Defekt δ_0 nahe bei 180°. Es sei $\gamma_0 := \angle ACB$. Für $0 < \gamma \leq \gamma_0$ sei P_γ definiert durch $A - P_\gamma - B$ und $\angle ACP_\gamma = \gamma$.



Jetzt kann eine Funktion $f : [0, \gamma_0] \to [0, \delta_0]$ definiert werden, durch

$$f(\gamma) := \begin{cases} \delta(AP_\gamma C) & \text{falls } 0 < \gamma \leq \gamma_0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } \gamma = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Funktion f ist offensichtlich[5] streng monoton wachsend und daher injektiv. Außerdem ist $f(0) = 0$ und $f(\gamma_0) = \delta_0$. Wir werden zeigen, daß f stetig und daher auch surjektiv ist.

Dazu ist für $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$ zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau > 0, \text{ s.d. gilt: } |\gamma' - \gamma| < \tau \implies |f(\gamma') - f(\gamma)| < \varepsilon.$$

Nun ist

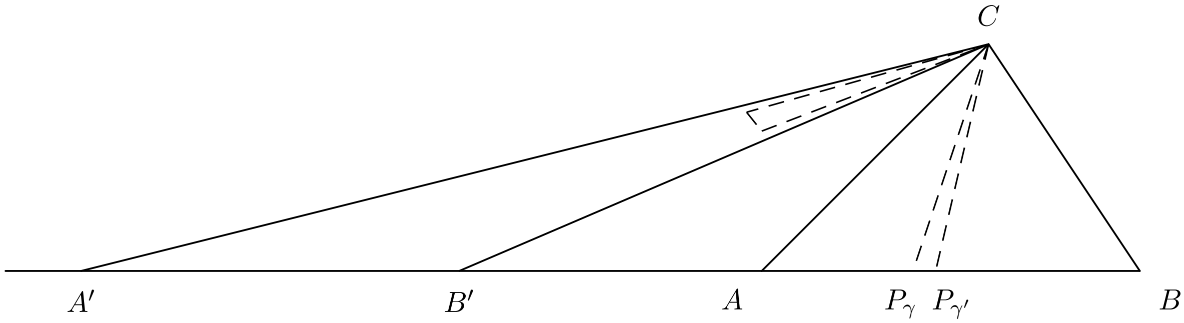
$$f(\gamma') - f(\gamma) = \delta(AP_{\gamma'}C) - \delta(AP_\gamma C) = \delta(P_\gamma P_{\gamma'} C).$$

Also bleibt zu zeigen:

[5] wegen der Additivität des Defektes

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\tau > 0, \text{ s.d gilt: } |\gamma' - \gamma| < \tau \implies \delta(P_\gamma P_{\gamma'} C) < \varepsilon.$$

Wählt man nun gemäß Satz 2.20 ein Dreieck $A'B'C$, dessen Defekt $< \varepsilon$ ist, das aber zwei genügend lange Seiten besitzt, so kann man bei geeigneter Wahl von τ ein kongruentes Exemplar von $\triangle P_\gamma P_{\gamma'} C$ im Innern von $\triangle A'B'C$ finden. Also gilt die gewünschte Ungleichung.



Der Defekt hat eigenartigerweise die Eigenschaften einer Flächenfunktion. Und es gilt noch mehr. Ist μ irgendeine Flächenfunktion (für die Geometrie, die durch die Axiome der neutralen Geometrie und die Hypothese des spitzen Winkels beschrieben wird), so kann man eine Funktion $m : [0, \delta_0] \to \mathbb{R}_+$ wie folgt definieren:

> Ist $0 < t \le \delta_0$ und $t = \delta(XYZ)$, so sei $m(t) := \mu(XYZ)$. Außerdem werde $m(0) := 0$ gesetzt.

Diese Funktion m ist wohldefiniert: Zum einen haben wir oben gesehen, daß jedes $t \in (0, \delta_0]$ Defekt eines Dreiecks ist. Und zum anderen haben wir in Satz 2.16 bewiesen: Ist $\delta(XYZ) = \delta(X'Y'Z')$, so ist auch $\mu(XYZ) = \mu(X'Y'Z')$.

Weiter gilt:

> *Ist* $0 < t_1, t_2 \le \delta_0$ *und* $t_1 + t_2 \le \delta_0$, *so ist* $m(t_1 + t_2) = m(t_1) + m(t_2)$.

Daraus folgt, daß m streng monoton wachsend ist, aber auch noch mehr:

2.21 Lemma.

Es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß $m(t) = c \cdot t$ ist.

Beweis: Wir halten ein t_0 mit $0 < t_0 < \dfrac{\delta_0}{2}$ fest und setzen $t_n := \dfrac{t_0}{n}$, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \le k \le n+1$ ist dann $k \cdot t_n \in (0, \delta_0]$, und es gilt:

$$m(k \cdot t_n) = m(t_n + \cdots + t_n) = m(t_n) + \cdots + m(t_n) = k \cdot m(t_n).$$

Insbesondere ist $m(t_0) = m(n \cdot t_n) = n \cdot m(t_n)$, also

$$\frac{k}{n} \cdot m(t_0) = k \cdot m(t_n) = m(k \cdot t_n) = m(\frac{k}{n} \cdot t_0).$$

Ist nun r eine positive reelle Zahl mit $0 < r \cdot t_0 \le \delta_0$, so kann man r durch rationale Zahlen approximieren:

$$\frac{k(n)}{n} \le r < \frac{k(n)+1}{n}.$$

Wegen der Monotonie von m folgt daraus:

$$\frac{k(n)}{n} \cdot m(t_0) = m(\frac{k(n)}{n} \cdot t_0) \leq m(r \cdot t_0) < m(\frac{k(n)+1}{n} \cdot t_0) = \frac{k(n)+1}{n} \cdot m(t_0).$$

Läßt man jetzt $n \to \infty$ gehen, so erhält man die Gleichung $r \cdot m(t_0) = m(r \cdot t_0)$.

Wir setzen $c := \dfrac{m(t_0)}{t_0}$. Dann gilt für $0 < t \leq \delta_0$:

$$m(t) = m(\frac{t}{t_0} \cdot t_0) = \frac{t}{t_0} \cdot m(t_0) = c \cdot t.$$

Das war die Behauptung. ∎

2.22 Folgerung. *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt:*

Ist μ eine Flächenfunktion, so gibt es eine Konstante k, so daß für alle Dreiecke ABC gilt:

$$\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC).$$

Beweis: Wir setzen $k := +\sqrt{c}$, wobei c die Konstante im Lemma ist. Dann ist

$$\frac{\mu(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{m(\delta(ABC))}{\delta(ABC)} = c = k^2.$$

∎

Die Flächenfunktion ist also nur bis auf die Konstante k festgelegt. Wenn es eine Geometrie gibt, in der die Hypothese des spitzen Winkels gilt, dann gibt es sogar eine ganze Schar solcher Geometrien, abhängig von k.

Es war Lambert, der hier seltsame Parallelen zur Geometrie auf einer Sphäre erkannte:

Auf der Kugeloberfläche ist die Hypothese vom stumpfen Winkel erfüllt, allerdings sind mehrere Axiome der neutralen Geometrie ungültig. Es gibt keine Zwischen-Beziehung und keine beliebig langen Geraden, und auch der Außenwinkelsatz ist falsch. Da die Winkelsumme im Dreieck immer größer als 180° ist, betrachtet man den sogenannten *Exzeß*

$$\varepsilon(ABC) := \mathrm{WS}(ABC) - 180^\circ.$$

Ein genaueres Studium der sphärischen Geometrie zeigt, daß für die Fläche eines sphärischen Dreiecks folgende Formel gilt:

$$\mu(ABC) = R^2 \cdot \varepsilon(ABC) = R^2 \cdot (\mathrm{WS}(ABC) - \pi),$$

wenn die Winkelsumme im Bogenmaß gerechnet wird. Dabei ist R der Radius der Kugel, deren Oberfläche betrachtet wird.

Lambert hatte nun die Idee, eine „Kugel“ mit imaginärem Radius $r = \mathbf{i}R$ zu betrachten. Dann ergibt sich rein formal

$$\mu(ABC) = r^2 \cdot (\pi - \mathrm{WS}(ABC)) = r^2 \cdot \delta(ABC).$$

Das ist die Flächenformel unter der Hypothese des spitzen Winkels.

Lambert machte noch eine andere Beobachtung: Da die Kongruenzklasse eines Dreiecks nur von den drei Winkeln abhängt (WWW-Kongruenz), gibt es – im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie – unter der Hypothese des spitzen Winkels eine **absolute Längeneinheit**. Konstruiert man etwa ein gleichseitiges Dreieck, dessen Winkel alle 45° betragen, so ist die Seitenlänge dieses Dreiecks festgelegt. Es erscheint im Augenblick nicht ganz klar, ob eine solche Konstruktion durchführbar ist, aber wir werden ähnliche Verfahren kennenlernen, die auf jeden Fall ausgeführt werden können.

Lambert hat zu guter Letzt doch noch einen Beweis für das Parallelenaxiom geliefert, indem er unter der Hypothese des spitzen Winkels eine absurde Situation herbeigeführt hat. Wir wollen darauf nicht näher eingehen, denn er hatte wohl selbst Zweifel und seine Arbeit nicht veröffentlicht.

Der Schauplatz wechselt nun nach Frankreich, denn es kam die Epoche der großen französischen Mathematiker d'Alembert, Lagrange, Laplace und Legendre.

Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717 – 1783) glaubte, man könnte die Schwierigkeiten überwinden, wenn man nur die richtigen Definitionen einsetzen würde, aber er schaffte das Problem nicht aus der Welt.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) dachte, er hätte Erfolg gehabt. Aber als er seine Arbeit über Parallelen vor der Französischen Akademie vortrug, unterbrach er sich plötzlich mit dem Ausruf: „Ich muß noch einmal darüber nachdenken!“ Er kam nie wieder auf das Thema zurück.

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) wollte sich auf Newtons Gesetz der Schwerkraft stützen. Er kam auch zu dem Schluß, daß das Ähnlichkeitsprinzip (vgl. Wallis) ein natürlicheres Postulat als Euklids Parallelenaxiom sei.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) beschäftigte sich ausführlich mit den Grundlagen der Geometrie. Für ihn war die Euklidische Geometrie die einzig gültige, und er versuchte mehrfach, daß Parallelenaxiom zu beweisen. Seine Nachforschungen sind über die verschiedenen Ausgaben seiner „Eléments de Géométrie“ (1794 - 1823) verstreut. Sein klarer und eleganter Stil bewirkte, daß seine Einführung in die Geometrie zu einem der erfolgreichsten Lehrbücher seiner Zeit wurde, und er machte dadurch das Parallelenproblem wieder einer breiteren Öffentlichkeit bewußt. Viele seiner Resultate finden sich allerdings schon bei Saccheri. In seinem Todesjahr (1833) erschien eine Arbeit, in der alle seine Versuche zum Parallelenproblem zusammengefaßt waren. Doch zu dem Zeitpunkt war das alles längst überholt.

Woher rühren die Probleme, die die Mathematiker bis ins 19. Jahrhundert mit den Grundlagen der Geometrie hatten, und wie kam es dann zu einem Umschwung?

Die Antike wurde von der Lehre des **Aristoteles** beherrscht, der in der Spätantike in Vergessenheit geriet, aber seit **Thomas von Aquin** (1225 - 1274) wieder zur alleinigen Autorität in nichtkirchlichen philosophischen Fragen erhoben wurde.

Nach Aristoteles gibt es zwei Erkenntnisquellen: Die *Sinne* (also die Erfahrung) und den *Verstand* (also die Logik). Die Mathematik muß man dann der zweiten Erkenntnisquelle zuordnen, denn sie lehrt keine zufälligen Tatsachen sondern die Einsicht in notwendige Gesetze. Man hoffte sogar, durch die Übertragung der logischen Form der mathematischen Schlußweise auf die Philosophie dort die gleiche Sicherheit erreichen zu können. Aber diese Bemühungen schlugen fehl.

Immanuel Kant (1724 – 1804) unterzog die Frage nach der Herkunft der mathematischen Gewißheit einer gründlichen Prüfung und kam so zu einer radikalen Revision der Aristotelischen Lehre.

Setzt man die Axiome voraus, so ergeben sich die Lehrsätze durch bloßes logisches Schließen. Aber woher kommen die Axiome? Diese Frage führte Kant auf die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen:

Eine *analytische Aussage* ist eine solche, die man allein durch Aufgliederung des betrachteten Begriffs gewinnt, also durch eine logische Analyse.

Eine *synthetische Aussage* muß dagegen über den reinen Begriffsinhalt hinausgehen.

Beispiel: Daß alle Radien eines Kreises die gleiche Länge haben, ist ein analytischer Satz. Daß das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser des Kreises den Wert 3,1415926... hat, ist eine synthetische Aussage.

Definitionen sind demnach analytisch, Axiome und die daraus folgenden Sätze synthetisch. Das bedeutet aber, daß es für die Mathematik noch eine andere Erkenntnisquelle als die Logik geben muß. Diesen Ursprung von Erkenntnis nannte Kant die *reine Anschauung*. Doch was soll man sich darunter vorstellen?

Es gibt noch eine andere Unterscheidung von Aussagen, nämlich die zwischen *apriorischen Aussagen* und *empirischen Aussagen*. Eine Aussage ist a priori wahr, wenn sie schon auf Grund ihres sprachlichen Inhalts wahr ist. Die Wahrheit empirischer Aussagen gewinnt man nur durch Erfahrung.

Nun sind vier Kombinationen denkbar. Allerdings kann eine analytische Aussage nicht zugleich eine empirische sein, „analytisch" gehört zu „a priori". Empirische Aussagen sind stets synthetisch. Auf den ersten Blick scheint es so, als müsse man auch die Kombination „a priori + synthetisch" ausschließen. Doch dann wäre man wieder bei der Aristotelischen Zweiteilung. Wenn man nun wie Kant annimmt, daß die Axiome der Geometrie auf Intuition, also einer abstrahierten Anschauung beruhen, so liefern sie etwas durchaus Neues, sind also synthetisch. Und zugleich brauchen sie nicht immer wieder überprüft zu werden, sie sind nicht empirisch, sondern a priori! Solche inhaltsvollen und sicheren Aussagen sind in gewisser Weise die vollkommensten Aussagen.

Doch woher kommt die Information, die aus den Axiomen synthetische Aussagen macht. Kant vertrat die Auffassung, daß z.B. Euklids Postulate beschreiben, wie unser Gehirn die Eindrücke vom Raum, die wir durch unsere Sinne erfahren, verarbeitet. Demnach muß das Euklidische Parallelenaxiom wahr sein, es kann keine andere Geometrie geben.

Die Autorität Kants hatte einen immensen Einfluß auf die zeitgenössischen Wissenschaftler.

§ 3 Aus Nichts eine neue Welt

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) war die dominierende mathematische Persönlichkeit seiner Zeit und sicher einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Schon in der Volksschule fiel er durch seine Rechenkünste auf, einer seiner ersten Förderer war Martin Bartels, der Gehilfe des Schullehrers, mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verband. Im Gymnasium in Braunschweig übersprang er mehrere Klassen, und der Herzog von Braunschweig, Karl Wilhelm Ferdinand, wurde auf ihn aufmerksam gemacht. Der Herzog finanzierte ihm sein Studium, zunächst (ab 1792) am Collegium Carolinum in Braunschweig, später (ab 1795) in Göttingen, wo er bei dem Physiker Georg Christoph Lichtenberg und bei dem schon erwähnten Mathematiker Kästner Vorlesungen hörte.

1796 (im Alter von 18 Jahren) entdeckte er, daß das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. In dieser Zeit lernte er auch einen jungen ungarischen Adligen kennen, Wolfgang Bolyai (1775 - 1865), woraus sich eine sehr enge Freundschaft entwickelte. Da Gauß 1798 nach Braunschweig zurückkehrte, sahen sich die Freunde 1799 zum letzten Mal, blieben aber ihr Leben lang in brieflicher Verbindung.

Am 16. Juli 1799 (im Alter von 22 Jahren) wurde Gauß auf Wunsch des Herzogs an der Landesuniversität Helmstedt promoviert, in Abwesenheit und unter Verzicht auf eine mündliche Prüfung. Seine Dissertation enthielt den ersten korrekten und vollständigen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra.

1801 erschienen seine „Disquisitiones arithmeticae“, mit denen er das Fundament für die moderne Zahlentheorie legte (Lehre von den Kongruenzen, quadratische Formen, erster Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes). Diese Arbeit machte ihn mit einem Schlag in der Fachwelt bekannt, aber noch berühmter wurde er weltweit, als es im Dezember 1801 gelang, auf Grund seiner Berechnungen den Anfang des Jahres beobachteten und wieder verlorenen Planetoiden Ceres erneut am Himmel zu entdecken. Gauß bekam Kontakt zu führenden Astronomen seiner Zeit, z.B. Olbers, Bessel und Schumacher.

Als die Franzosen 1806 im Auftrag Napoleons Braunschweig eroberten, hatte einer der Generäle den Auftrag, ganz besonders auf das Wohlergehen von Gauß zu achten, damit ihn nicht das Schicksal des Archimedes ereile. 1807 erhielt Gauß einen Ruf nach Göttingen als Professor für Astronomie und Direktor der dortigen Sternwarte. In Göttingen blieb er bis zu seinem Lebensende. 1820 erhielt er den Auftrag zur Vermessung des Königreichs Hannover, und so führte er von 1821 bis 1825 praktische Vermessungsarbeiten durch.

1828 erschien sein differentialgeometrisches Hauptwerk („Allgemeine Untersuchungen über krumme Flächen“) und 1831 eine Arbeit über Algebra, in der er die komplexe Zahlenebene einführte. Im selben Jahr kam Wilhelm Weber als Professor für Physik nach Göttingen. Mit ihm zusammen stellte Gauß Untersuchungen über elektromagnetische Induktion und den Erdmagnetismus an. 1833 erfanden sie zusammen den elektrischen Telegraphen.

Nachdem Weber 1838 wegen seiner Beteiligung am Protest der „Göttinger Sieben“ gegen einen Verfassungsbruch des Königs Ernst August von Hannover seines Amtes enthoben wurde, gab Gauß seine physikalischen Forschungen auf. In all der Zeit hatte er zahlreiche mathematische Artikel veröffentlicht und noch mehr in der Schublade vorbereitet.

In seinen letzten Jahren lernte er noch Russisch und beteiligte sich an einer Reorganisation der Universitätswitwenkasse durch Berechnung von Tafeln, mit denen der Zeitwert von Leibrenten bestimmt werden konnte. 1849 wurde er anläßlich seines 50-jährigen Doktorjubiläums zum Ehrenbürger der Stadt Göttingen ernannt. Acht Monate vor seinem Tod, am 10. 6. 1854, hörte er den berühmten Habilitationsvortrag von Bernhard Riemann: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“

Seit 1792 beschäftigte sich Gauß mit der Theorie der Parallellinien, 1794 (im Alter von 17) wußte er, daß in einer Geometrie, in der die Hypothese vom spitzen Winkel gilt, der Flächeninhalt eines Dreiecks proportional zum Defekt dieses Dreiecks ist. Beim Abschied vor seiner Heimreise nach Ungarn hatte ihm Wolfgang Bolyai angekündigt, er habe einen Beweis für das V. Postulat (der sich später natürlich als falsch herausstellte). Ende des Jahres schrieb Gauß an Wolfgang, er sei selbst in seinen Arbeiten zu diesem Thema vorangekommen, die Wahrheit der Geometrie sei dadurch aber eher zweifelhaft geworden. Wenn man beweisen könnte, daß ein Dreieck mit beliebig großem Flächeninhalt möglich wäre, dann könnte er die gesamte Geometrie daraus herleiten. Die Möglichkeit einer anderen als der euklidischen Geometrie hatte er zu diesem Zeitpunkt noch nicht erwogen. 1808 äußerte er gegenüber Schumacher: Wenn das Parallelenpostulat nicht wahr wäre, so müßte es eine absolute Längeneinheit geben.

1816 schrieb Gauß etwas ähnliches auch an Gerling, einen Marburger Professor, mit dem er einen ausgedehnten Briefwechsel, vor allem über astronomische Fragen, führte, und im selben Jahr beklagte er sich in einer Buchbesprechung darüber, daß man bei der Behandlung einer Lücke in den Anfangsgründen der Geometrie nach 2000 Jahren noch nicht weiter gekommen sei.

Friedrich Ludwig Wachter (1792 – 1817), ein Schüler von Gauß, der später Professor der Mathematik am Gymnasium von Danzig war, unternahm umfangreiche Untersuchungen zum Parallelenproblem, lieferte einige falsche Beweise und nannte die Geometrie unter der Hypothese des spitzen Winkels „Anti-Euklidische Geometrie“. Er entdeckte, daß in dieser Geometrie die Sphäre durch einen Punkt bei wachsendem Radius gegen eine Fläche strebt, auf der das Euklidische Parallelenaxiom erfüllt ist. In den Jahren 1816/17 scheint Gauß allmählich zu der Erkenntnis gekommen zu sein, daß die neue Geometrie genauso denkbar wie die Euklidische sei. Er war aber auch davon überzeugt, daß eine Veröffentlichung seiner Ansichten nur zu Hohn und Spott führen würde, und er beschränkte sich daher auf Andeutungen in Briefen an seine Freunde.

Im Januar 1819 leitete Gerling die Notizen des Marburger Juristen **Ferdinand Karl Schweikart** (1780 - 1857) an Gauß weiter:

> *„Es gibt eine zweifache Geometrie, - eine Geometrie im engeren Sinn - die Euklidische; und eine astralische Größenlehre. Die Dreiecke der letzteren haben das Eigene, daß die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist. . . . “*

Schweikart erwähnte, daß die Fläche von Dreiecken proportional zu ihrem Defekt sei, und daß die Astral-Geometrie (die er wohl deshalb so nannte, weil sie sich erst bei astronomischen Entfernungen von der Euklidischen unterscheide) von einer Konstanten abhänge. Die Euklidische Geometrie sei nur wahr, wenn diese Konstante unendlich groß sei.

Gauß antwortete sehr erfreut und bemerkte, daß die genannte Konstante sehr viel größer als der Erdradius sein müsse. Er selbst habe die Astralgeometrie so weit ausgebildet, daß er alle Aufgaben vollständig lösen könne, sobald die Konstante gegeben sei. Er gab auch eine Formel für die Obergrenze von Dreiecksflächen an (im Wesentlichen ein Vielfaches des maximalen Defektes, $k \cdot \pi$).

Schweikart kannte wahrscheinlich die Ergebnisse von Saccheri und Lambert. Er hat nichts veröffentlicht und scheint auch auf dem Gebiet nicht weiter gearbeitet zu haben. Trotzdem kann man diesen Briefwechsel zwischen Gauß und Gerling als Geburtsstunde der nichteuklidischen Geometrie auffassen, denn zum ersten Mal in der Geschichte wurde offen ausgesprochen, daß es neben der Euklidischen noch eine andere Geometrie gibt.

Franz Adolph Taurinus (1794 – 1874), ein Neffe Schweikarts, ist von diesem zu weiteren Untersuchungen angeregt worden. Im Gegensatz zu seinem Onkel glaubte er fest an das fünfte Postulat und versuchte, es zu beweisen. 1825 und 1826 veröffentlichte er seine Resultate, im Vorwort zum zweiten Buch erwähnte er auch Schweikart und den Briefwechsel mit Gauß. Er erkannte in seinen Schriften die Widerspruchslosigkeit der unter der Hypothese vom spitzen Winkel hergeleiteten Sätze, und indem er Lamberts Gedanken von einer Kugel mit imaginärem Radius aufgriff, entwickelte er sogar rein formal eine nichteuklidische Trigonometrie. Er löste eine Reihe von Aufgaben, wie etwa die Berechnung des Inhalts von Dreiecken bei gegebenen Seiten oder des Umfangs eines Kreises bei gegebenem Radius, und er kam zu den gleichen Formeln wie Gauß. Dieser hatte vorab von den Büchern erfahren und antwortete ihm 1824. Er, Gauß, hätte festgestellt, daß die Hypothese vom spitzen Winkel auf eine eigene von der Euklidischen ganz verschiedene Geometrie führe, die in sich selbst durchaus konsequent sei. Alle Bemühungen, einen Widerspruch zu finden, hätten sich als fruchtlos erwiesen. Das einzige Zweifelhafte sei die Existenz einer absoluten Länge. Er bestehe aber darauf, daß diese Mitteilungen privat seien und nicht an die Öffentlichkeit gelangen dürften.

Obwohl Taurinus mit seinen Forschungen weiter vorstieß als alle seine Vorgänger, blieb er fest der Ansicht, die Euklidische Geometrie sei die einzig richtige. Da er ohne Anerkennung blieb, resignierte er schließlich und verbrannte die restlichen Exemplare seines zweiten Buches.

Auffällig ist, wie sehr Gauß sich scheute, mit seinen nichteuklidischen Überlegungen an die Öffentlichkeit zu treten. Das Thema muß zu dieser Zeit einen ähnlichen Ruf besessen haben wie die Frage nach der Quadratur des Kreises oder der Konstruktion eines Perpetuum Mobile. Besonders berühmt ist in diesem Zusammenhang der Brief von Gauß an Bessel vom 27. 1. 1829:

> *„Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahre alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiß nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter konsolidiert, und meine Überzeugung, daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten*

nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.“

Bei den Böotiern handelte es sich um einen etwas einfältigen griechischen Stamm.

Am 17. Mai 1831 erwähnte Gauß in einem Brief an Schumacher, daß er jetzt doch angefangen habe, einiges zu dem Thema aufzuschreiben, damit es nicht mit ihm unterginge.

1832 erhielt Gauß einen Brief von seinem Jugendfreund Wolfgang Bolyai, sowie dessen Buch über Geometrie und einen Anhang von Wolfgangs Sohn **Johann Bolyai** mit sensationellem Inhalt. Doch dazu muß man etwas weiter ausholen.

Im Juni 1799 hatte Wolgang Bolyai Göttingen verlassen (aus Geldmangel zu Fuß), im September kam er nach mancherlei Abenteuern in seiner Heimat in der Nähe von Hermannstadt in Siebenbürgen an. 1801 heiratete er, 1802 wurde sein Sohn Johann geboren. 1804 erhielt Wolfgang eine Professur am evangelischen Kollegium in Maros-Vásárhely. Dort entstand sein Hauptwerk, das sogenannte „Tentamen“, ein großes Lehrbuch zur Geometrie. Sein Sohn Johann zeigte schon früh mathematische Begabung, und er äußerte gegenüber Gauß seine Hoffnung, seinen Sohn eines Tages nach Göttingen schicken zu können, damit er Schüler von Gauß würde. Am 10. 4. 1816 schien ihm der Tag gekommen zu sein, und er schrieb an seinen Jugendfreund:

„...Ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten und, wenn es möglich wäre, in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15-jährigen Jüngling nicht dalassen, und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine durch viele Prozesse geschwächten Kräfte.

Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sichs, schon entschädigen. Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. In Hinsicht auf diesen Plan berichte mir unverholen:
1. Hast Du nicht eine Tochter, welche damals gefährlich (reciproce) wäre ...
2. Seid Ihr gesund, nicht arm, zufrieden, nicht mürrisch? Besonders ist Deine Frau Gemahlin eine Ausnahme von ihrem Geschlechte? Ist sie nicht veränderlicher als die Wetterhähne und so wenig im Voraus zu berechnen wie die Barometerveränderungen? ...
3. Alle Umstände zusammengenommen kannst Du mir leichter mit einem Worte sagen, daß es nicht sein kann; denn ich werde nie daran zweifeln, daß es nicht an Deinem Herzen fehlen wird.“

Gauß muß über diesen Brief sehr befremdet gewesen sein. Zudem hatte er überhaupt kein Interesse an Schülern und den Kopf voll mit privaten und dienstlichen Problemen. Er verzichtete auf eine Antwort und ließ danach 16 Jahre lang nichts mehr von sich hören.

Johann Bolyai ging daraufhin 1818 auf die Ingenieur-Akademie in Wien und trat 1823 in den Militärdienst ein. Seit 1820 beschäftigte er sich trotz eindringlicher Warnungen seines Vaters mit dem Parallelenproblem, und gegen Ende des Jahres, in dem er seine erste Stelle in Temesvár antrat, scheint er den Durchbruch geschafft zu haben. Am 3. November 1823 schrieb er seinem Vater:

„Mein Vorsatz steht schon fest, daß ich, sobald ich es geordnet, abgeschlossen habe und eine Gelegenheit kommt, ein Werk über die Parallelen herausgeben werde.

… Ich habe es noch nicht, aber ich habe so erhabene Dinge herausgebracht, daß ich selbst erstaunt war und es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen; wenn Sie, mein teurer Vater, es sehen werden, so werden Sie es erkennen; jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur so viel: daß ich aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe. Alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Turme. …"

Wolfgang Bolyai zeigte sich bereit, die Theorie seines Sohnes als Anhang in sein Lehrbuch aufzunehmen, und er mahnte ihn zur Eile. Er ahnte, daß die Zeit reif für die neue Geometrie war und daß die Gefahr bestand, daß sie an mehreren Orten gleichzeitig gefunden wurde. Aber er verstand die Dinge nicht, die sein Sohn gefunden hatte, es kam zu Streitigkeiten, und es dauerte noch mehrere Jahre, bis der Druck vollendet war.

Anfang 1832 erschien endlich das Tentamen, zusammen mit dem Anhang von Johann Bolyai, dem berühmten „Appendix". Das Original war in Latein geschrieben, aber Johann Bolyai gab selbst 1832 eine deutsche Bearbeitung heraus. Der deutsche Titel lautet: RAUMLEHRE, unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms (gemeint ist damit natürlich das V. Postulat): Für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.

Über den Inhalt wird weiter unten berichtet werden. Mit der „Quadratur des Kreises" ist die Konstruktion eines gleichseitigen konvexen Vierecks mit 4 gleichen Winkeln gemeint, dessen Fläche gleich der eines gegebenen Kreises ist. Echte Quadrate gibt es unter der Hypothese des spitzen Winkels natürlich nicht.

Auf Umwegen (eine Postsendung war verloren gegangen) erreichte Gauß im Februar ein Exemplar des Appendix. Am 14. 2. 1832 äußerte sich Gauß in einem Brief an Gerling sehr positiv über die Arbeit und nannte den jungen Bolyai ein „Genie erster Größe". In seiner Antwort vom 6. 3. 1832 an Wolfgang Bolyai schrieb er:

„Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange, „daß ich solche nicht loben darf": so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen. Aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehend mit meinen eigenen, zum Teil schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt. …

Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, daß es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge. Sehr bin ich also überrascht, daß diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, daß gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist."

Nach einigen Verbesserungsvorschlägen schrieb er noch:

„… Jedenfalls bitte ich Dich, Deinen Sohn herzlich von mir zu grüßen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf,

> *sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, den Kubikinhalt des Tetraeders zu bestimmen. ... Man hätte erwarten sollen, daß es auch dafür einen einfachen Ausdruck geben werde; aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht. ...*
>
> *Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen den beiden geometrischen Systemen a priori zu unterscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei* nur *Form unserer Anschauung. ...* “

Der Eindruck auf Johann Bolyai war niederschmetternd. Gauß hatte nicht die erwartete begeisterte Zustimmung geäußert, sondern angeblich alles schon Jahrzehnte vorher gewußt. Er speiste ihn mit einer Übungsaufgabe ab und mit der Bemerkung, daß er sich darüber freue, daß ihm ausgerechnet der Sohn eines Freundes mit der Veröffentlichung zuvor gekommen sei. Und er verweigerte ihm die öffentliche Anerkennung. Die Enttäuschung führte zum völligen Persönlichkeitsverfall Johanns, er warf sich rastlos nur noch auf unlösbare Probleme, wurde aus dem Armeedienst entlassen und überwarf sich mit seinem Vater, der 1856 (hochgeehrt) starb. Die letzten Jahre seines Lebens verbrachte Johann verarmt und in großer Einsamkeit. Er starb 1860 unbeachtet und wurde in einem namenlosen Grab verscharrt. Erst als die Briefe von Gauß nach dessen Tod veröffentlicht wurden, erfuhr die Welt von der Entdeckung des Johann Bolyai.

Gauß, der noch in den zwanziger Jahren bei seinen Vermessungsarbeiten am Beispiel des größten vermessenen Dreiecks (zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohen Hagen) im Rahmen der Meßgenauigkeit die Winkelsumme von $180°$ bestätigt gesehen hatte, war sich im Klaren darüber, daß die neue Geometrie in der Wirklichkeit höchstens bei astronomischen Entfernungen zum Vorschein kommen könnte. Trotzdem war er fest von der Richtigkeit der Theorie überzeugt, und er wußte deshalb sicher auch die Arbeit von Johann Bolyai zu schätzen. Über seine eigenartige Reaktion ist viel spekuliert worden, wir können sie nur zur Kenntnis nehmen. In den nächsten Jahren wandte sich Gauß seinen physikalischen Untersuchungen zu. Erst 1841 kam die Parallelentheorie wieder ins Spiel, er erwähnte eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung eines Kasaner Professors namens Lobatschewski, zwei Jahre, nachdem er begonnen hatte, Russisch zu lernen. 1844 kam er in zwei Briefen an Gerling wieder auf Lobatschewski zu sprechen und 1846 äußerte er sich gegenüber Schumacher sehr positiv über Lobatschewskis Veröffentlichungen. Aber auch diesmal blieb er seinen Prinzipien treu und äußerte sich nicht in der Öffentlichkeit dazu. Wer war Lobatschewski?

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts gab es einen drastischen Rückgang der Auslandskontakte Rußlands und einen Niedergang der Wissenschaften. Die Akademie in St. Petersburg und die Universität in Moskau waren die einzigen wissenschaftlichen Zentren. Unter Zar Alexander I wurden in den Jahren 1801 – 1805 zahlreiche Reformen durchgeführt, wie z.B. die Einfuhr ausländischer Bücher, die Erlaubnis von Reisen von Russen ins Ausland und die Gründung neuer Universitäten, u.a. 1804 in Kasan. Es gab aber nur wenige Studenten, meist aus theologischen Seminaren und ohne naturwissenschaftliche Kenntnisse. 1812 zog Napoleon nach Rußland, mit den bekannten Folgen, und ab 1815 – nach dem Wiener Kongreß – versuchte man noch einmal, den inneren Aufbau voranzutreiben. Aber ab 1818 wurden viele der Reformen wieder zurück genommen.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793 - 1856), geboren in Nishni-Nowgorod, lebte ab etwa 1800 unter einfachsten Verhältnissen in Kasan, besuchte dort das Gymnasium und ab 1807 die neu gegründete Universität. Zufällig wurde 1808 der Deutsche Bartels als Vertreter der Reinen Mathematik dorthin berufen, jener Bartels, der schon als früher Förderer von Gauß in Erscheinung getreten war und der nie ganz den Kontakt zu Gauß verloren hatte.

Ab 1809 verlegte Lobatschewski seinen Arbeits-Schwerpunkt auf die Mathematik, und nachdem er schon einige kleinere Ämter inne gehabt hatte, wurde er 1816 (im Alter von 23 Jahren) in den Lehrkörper aufgenommen. Um diese Zeit begann er auch mit Untersuchungen zum Parallelenproblem.

Wegen anhaltender Streitigkeiten im Kollegium wurde 1818 der Staatsrat Magnizkij mit einer Revision beauftragt. Eine der Folgen seiner recht willkürlichen und reaktionären Maßnahmen war wohl auch der Weggang Bartels im Jahre 1820. 1822 wurde Lobatschewski zum ordentlichen Professor ernannt. Zeitweise lag die ganze Last des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften auf seinen Schultern, hinzu kamen zahlreiche Verwaltungsaufgaben. 1823 reichte er das Skript für ein Geometriebuch ein, das aber abgelehnt wurde, unter anderem deswegen, weil er als Maßeinheit das französische Meter und den 100. Teil des Rechten Winkels benutzt hatte.

Nach anfänglichen vergeblichen Versuchen zum Beweis des Parallelenpostulats entdeckte er, daß die Hypothese des spitzen Winkels auf eine in sich geschlossene und konsequente Geometrie führt. Im Februar 1826 legte er seine neue Geometrie dem Kollegium vor, 1829-30 wurden die Ergebnisse unter dem Titel „Über die Anfangsgründe der Geometrie" in der Universitätszeitung, dem „Kasaner Boten", veröffentlicht (natürlich auf Russisch). Er sprach darin klipp und klar aus, daß das Euklidische Parallelenaxiom unbeweisbar sei und es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie (die sogenannte „imaginäre Geometrie") gäbe, in der die Winkelsumme im Dreieck weniger als 180° betrage. Die schwer verständliche Arbeit fand bei den Kollegen wenig Anklang. Im Ausland blieb sie unbekannt, da der Kasaner Bote außerhalb Rußlands nicht zu haben war.

Im Rahmen einer erneuten Revision wurde der Staatsrat Magnizkij abgesetzt und ein neuer Kurator berufen. Auf dessen Betreiben hin wurde Lobatschewski 1827 (im Alter von 33 Jahren) zum Rektor der Universität gewählt. Diesen Posten hatte er 19 Jahre lang inne. Mit unermüdlichem Arbeitseifer sorgte er für Ruhe im Kollegium und ordnungsgemäße Lehre, brachte die Bibliothek und die wissenschaftlichen Sammlungen in Ordnung, förderte Neubauten und war zeitweise auch noch mit der Revision von Gymnasien beschäftigt. Nachdem der Kasaner Bote eingestellt worden war, gründete er 1834 die „Gelehrten Schriften der Kasaner Universität", in denen 1835 seine „Imaginäre Geometrie" und 1835 – 1838 seine „Neuen Anfangsgründe der Geometrie" erschienen. Ersteres wurde 1837 auch in Crelles Journal auf Französisch abgedruckt, entging aber trotzdem der allgemeinen Aufmerksamkeit.

1840 erschien in Berlin bei der Fincke'schen Buchhandlung auf Deutsch sein 61 Seiten langes kleines Buch mit dem Titel „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien", auf das Gauß 1846 Schumacher in einem Brief aufmerksam machte.

1846 wurde Lobatschewski nach 25-jähriger Diensttätigkeit von seinen Ämtern enthoben. 1855 veröffentlichte er anläßlich der 50-Jahres-Feier der Universität Kasan eine Zusammenfassung seiner Ideen unter dem Namen „Pangeometrie“, 1856 starb er nach schwerer Krankheit. Seine Verdienste um die Universität hatten ihm hohe Wertschätzung und zahlreiche Ehrungen eingebracht, doch sein wissenschaftliches Werk wurde zu seinen Lebzeiten nie anerkannt, sondern nur als verzeihliche Wahnidee belächelt. Erst nach 1863 wurde man durch die Veröffentlichung der Briefe von Gauß auf ihn aufmerksam. 1893 – zu seinem 100. Geburtstag – errichtete man ihm in Kasan ein Denkmal.

Drei große Männer der Mathematik – eine Theorie! Gauß, der berühmte Fürst der Mathematiker, scheint (in Übereinstimmung mit Schweikart) schon 1819 von der Existenz einer alternativen Geometrie überzeugt gewesen zu sein, aber er hat nie etwas darüber veröffentlicht. Nur aus Skizzen in seinem Nachlaß kann man schließen, daß seine Ideen denen von Bolyai sehr nahe waren.

Johann Bolyai hat seine neue Geometrie um 1823 gefunden, sie aber erst 1832 veröffentlicht. Der an sich schon charakterlich instabile junge Offizier zerbrach an der Enttäuschung über die mangelhafte Anerkennung seiner Entdeckung.

Der emsige russische Professor und Hochschul-Rektor Lobatschewski hat die nichteuklidische Geometrie um 1826 entwickelt und sie 1829-30 als erster veröffentlicht, auch wenn kaum jemand in der Welt Notiz davon genommen hat. Sein lebenslanges beharrliches, allen Widerständen und Mißerfolgen trotzendes Eintreten für seine Theorie rechtfertigt vielleicht, daß die nichteuklidische Geometrie heute auch oft als Lobatschewski-Geometrie bezeichnet wird.

Was unterscheidet die drei Entdecker der neuen Geometrie von Saccheri und Lambert? Alle drei haben sie sich von der Vorstellung verabschiedet, das Euklidische Parallelenaxiom könnte vielleicht doch noch durch einen Widerspruch zur Hypothese vom spitzen Winkel bewiesen werden. Sie haben explizite Formeln für geometrische Berechnungen erstellt und damit eine ausgedehnte und konsequente Theorie entwickelt, in der kein Widerspruch zu erkennen war. Vielmehr stellte sich die Euklidische Theorie als Grenzfall der neuen Geometrie dar, und man konnte sie sogar auf gewissen Flächen im nichteuklidischen Raum wiederentdecken. Und die Theorie lieferte zugleich die Erkenntnis, daß in der realen Welt eine a priori Entscheidung für die eine oder die andere Geometrie gar nicht möglich war.

Einen echten Widerspruchsbeweis konnten allerdings alle drei nicht liefern! Das blieb späteren Mathematikern vorbehalten, denen es tatsächlich gelang, Modelle für die nichteuklidische Geometrie zu konstruieren. Den Anfang machte 1868 der Italiener **Eugenio Beltrami** (1835 – 1900), der eine Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum vorstellte, auf der – zumindest lokal – die ebene nichteuklidische Geometrie verwirklicht war.

§ 4 Der Parallelitätswinkel

In diesem Paragraphen sollen – in aller Kürze – die Anfangsgründe der Geometrie dargestellt werden, die von Gauß, Bolyai und Lobatschewski gefunden wurde.

1. Die absolute Theorie der Parallelen:

Folgendes ist uns von den Untersuchungen von Euklid, Saccheri und Lambert her bekannt:

- Wenn man das fünfte Postulat nicht benutzen will, kann man nicht zeigen, daß die Parallelität transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist.
- Es kann vorkommen, daß Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden und dabei innere Winkel bilden, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.
- Man muß eventuell zwischen asymptotischen Parallelen und solchen unterscheiden, die mit der gegebenen Geraden eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

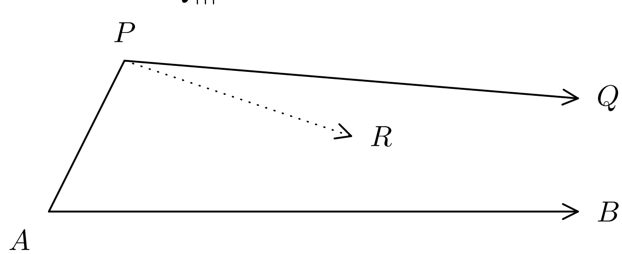
Und bei all diesen Untersuchungen kann man sich auf das Verhalten der beteiligten Geraden in einer bestimmten Richtung beschränken.

Die erste neue Idee, die anscheinend alle zugleich hatten, bestand darin, an Stelle von Geraden nur Strahlen zu betrachten.

Definition. Der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ heißt *asymptotisch parallel* zu dem Strahl $\overrightarrow{AB}$, falls gilt:

1. $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB}$ schneiden sich nicht.
2. Jeder Strahl $\overrightarrow{PR}$ innerhalb des Winkels $\angle APQ$ trifft $\overrightarrow{AB}$.

In Zeichen schreibt man dafür: $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$.



4.1 Satz. *Ist $\overrightarrow{AB}$ gegeben, so gibt es zu jedem Punkt $P \notin AB$* **genau einen** *Strahl $\overrightarrow{PQ}$, der asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist, und es ist dann*

$$\angle PAB + \angle APQ \leq 180°.$$

Diesen Satz haben wir im Grunde schon bewiesen, wenn auch nur unter der Hypothese des spitzen Winkels. Jetzt setzen wir die Neutrale Geometrie voraus, und die Tatsache, daß die Hypothese vom stumpfen Winkel ausgeschlossen werden kann. Man betrachtet alle Strahlen $\overrightarrow{PQ}$, die von P ausgehen, und unter denjenigen, für die $\angle QPA \leq 180°$ ist, unterscheidet man zwischen schneidenden und nicht schneidenden Strahlen. In gewohnter Weise schließst man mit Hilfe des Dedekind-Axioms auf die Existenz eines Grenzstrahls, der dann asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ sein muß.

Es kommt nicht auf den Anfangspunkt der Strahlen an:

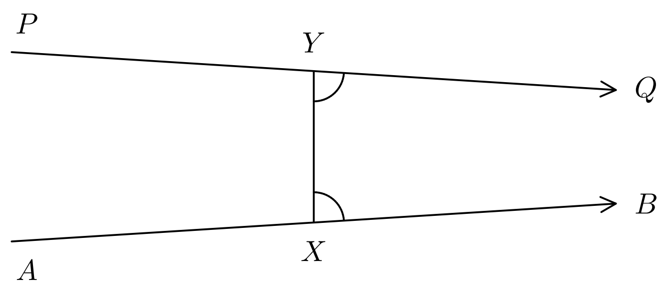
Definition. Zwei Strahlen heißen *äquivalent*, wenn sie auf der gleichen Geraden liegen und in die gleiche Richtung weisen.

4.2 Satz. *Ob der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ asymptotisch parallel zum Strahl $\overrightarrow{AB}$ ist, hängt nur von den Äquivalenzklassen der Strahlen ab.*

Der Beweis ist ein bißchen technisches Hantieren mit dem Pasch-Axiom und soll hier nicht ausgeführt werden.

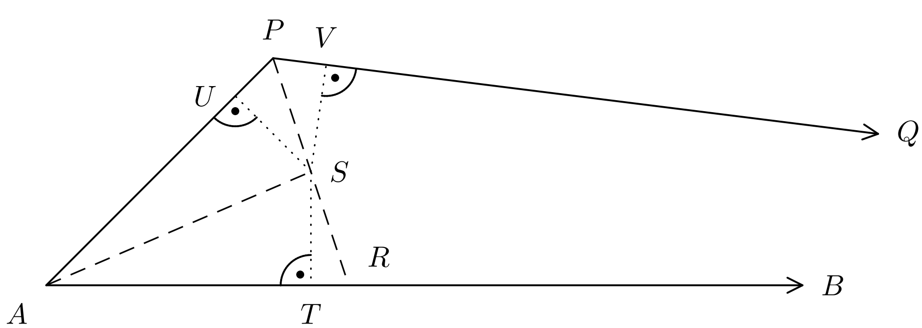
Definition. Sei $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$, $X \in \overrightarrow{AB}$ und $Y \in \overrightarrow{PQ}$ (oder jeweils aus einem äquivalenten Strahl).

X und Y heißen *korrespondierende Punkte*, falls $\angle XYQ = \angle YXB$ ist. In Zeichen schreibt man dann: $X \bumpeq Y$.



4.3 Satz. *Sei $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$. Dann gibt es einen Punkt A' auf AB, so daß A' und P korrespondierende Punkte sind.*

Zum Beweis: Ist $\overrightarrow{PR}$ die Winkelhalbierende zu $\angle APQ$, so schneidet sie – nach Definition der asymptotischen Parallelität – den Strahl $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R. Und nach Pasch trifft die Winkelhalbierende zu $\angle BAP$ den Strahl $\overrightarrow{PR}$ in einem Punkt S. Die Fußpunkte der Lote von S auf AP, PQ und AB seien jeweils mit U, V und T bezeichnet.



Jetzt ist es nicht schwer zu zeigen, daß T und V korrespondierende Punkte sind:
Zunächst ist $\triangle ASU \mathrel{\widehat{=}} \triangle AST$. Aber es ist auch $\triangle SPU \mathrel{\widehat{=}} \triangle SPV$, und daher $\triangle TVS$ gleichschenklig.

Wählt man A' auf AB, auf der gleichen Seite von VT wie P und mit $\overline{A'T} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PV}$, so sind P und A' korrespondierend. Um das zu zeigen, führt man noch den Mittelpunkt M von $\overline{TV}$ ein und überzeugt sich davon, daß $\triangle A'PM$ gleichschenklig ist. ∎

4.4 Folgerung. *Ist $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$, so ist auch $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{PQ}$.*

Beweis: Da die Parallelität nicht vom Anfangspunkt abhängt, kann man o.B.d.A. annehmen, daß P und A korrespondierende Punkte sind. Aber dann ist die ganze Situation symmetrisch zur Mittelachse (= Mittelsenkrechte zu $\overline{AP}$). ∎

Für asymptotisch parallele Strahlen kann man nun die Transitivität beweisen:

4.5 Satz. *Sei $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{EF}$.*

Dann ist entweder $AB = EF$ oder $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{EF}$.

Beweis: Bolyai beweist diesen Satz durch Übergang zur dritten Dimension. Es geht aber auch in der Ebene:

Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ liegen auf verschiedenen Seiten von CD. Dann schneidet $\overline{AE}$ die Gerade CD in einem Punkt, o.B.d.A. können wir annehmen, daß das der Punkt C ist. Jeder Strahl im Innern von $\angle FEA$ schneidet dann $\overrightarrow{CD}$ und in der Folge dann auch $\overrightarrow{AB}$.

2. Fall: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ liegen auf der gleichen Seite von CD. Die Geraden AB und EF tun das dann auch, und sie können sich nicht schneiden, weil sonst durch einen Punkt zwei asymptotische Parallelen zu CD gehen würden.

O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß $\overrightarrow{EF}$ zwischen AB und CD liegt (Pasch!), aber daraus folgt noch nicht selbstverständlich, daß AB und CD auf verschiedenen Seiten von EF liegen. In der vorliegenden speziellen Situation läßt sich das jedoch zeigen: Dazu wähle man beliebige Punkte $M \in \overrightarrow{AB}$, $N \in \overrightarrow{CD}$ und $P \in \overrightarrow{EF}$. Von den beiden Winkeln $\angle DNP$ und $\angle DNM$ suchen wir den kleineren. Ein Strahl im Innern dieses Winkels trifft wegen der vorausgesetzten Parallelität $\overrightarrow{EF}$ in einem Punkt Q und $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R. Dann liegen N und R auf verschiedenen Seiten von EF, und daraus folgt, daß auch die Strahlen $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{AB}$ auf verschiedenen Seiten von EF liegen.

Wegen der Symmetrie der Parallelität ist auch $\overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{AB}$. Ein Strahl im Innern von $\angle BNM$ trifft $\overrightarrow{CD}$, und auf dem Weg dahin muß er auch $\overrightarrow{EF}$ treffen. Also ist $\overrightarrow{EF}|||\overrightarrow{AB}$. ∎

Definition. Zwei Geraden heißen *asymptotisch parallel*, falls sie Strahlen enthalten, die asymptotisch parallel sind.

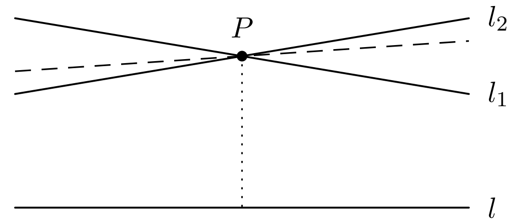
Zwei Geraden heißen *überparallel* oder *divergent*, wenn sie parallel, aber nicht asymptotisch parallel sind.

Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$, sowie zwei verschiedene zu g parallele Geraden g_1, g_2 durch P. Man kann einen Punkt $A \in g$ und Punkte $Q \in g_1$, $R \in g_2$ wählen, so daß Q und R auf der gleichen Seite von AP liegen. Wir sagen, daß eine Gerade g' durch P *zwischen* g_1 und g_2 liegt, wenn ihr Schnittwinkel mit AP (auf der Seite von AP, auf der Q und R liegen) zwischen $\angle QPA$ und $\angle RPA$ liegt.

4.6 Satz. *Es sei eine Gerade l und ein Punkt $P \notin l$ gegeben. Dann gibt es höchstens 2 asymptotische Parallelen l_1, l_2 zu l durch P.*

Gilt Postulat V, so stimmen l_1 und l_2 überein, und es gibt keine Gerade, die überparallel zu l ist.

Sind l_1 und l_2 verschieden, so sind alle dazwischen liegenden Geraden überparallel zu l. Insbesondere gilt dann Postulat V nicht.



Beweis: In jede der beiden möglichen Richtungen weist von P aus genau ein zu l asymptotisch paralleler Strahl. Gilt Postulat V, so kann man sofort über Winkelbeziehungen ablesen, daß die beiden Strahlen zusammen eine Gerade bilden, die eindeutig bestimmte Parallele zu l durch P, und jede andere Gerade muß l schneiden.

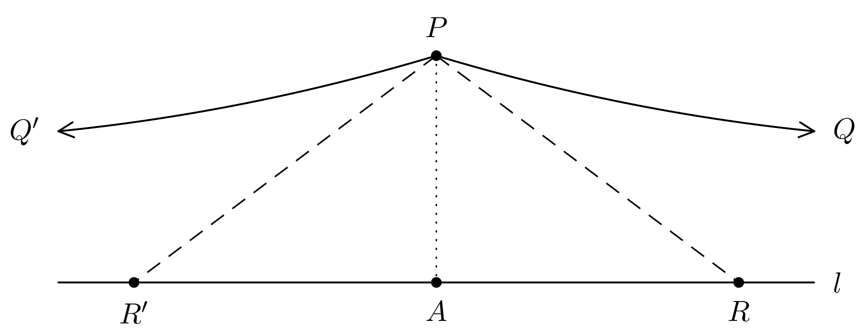
Gehören die beiden Strahlen zu verschiedenen Geraden l_1, l_2, so sind offensichtlich alle Geraden dazwischen auch parallel zu l, und da sich schneidende Geraden einen beliebig großen Abstand annehmen, können sie nicht asymptotisch parallel sein. ∎

2. Der Parallelitätswinkel:

4.7 Satz. *Sei l eine Gerade, $P \notin l$, A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Außerdem seien $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PQ'}$ die beiden asymptotisch parallelen Strahlen, die von P ausgehen.*

Dann ist $\angle APQ = \angle APQ'$.

Beweis: Wir nehmen an, es sei $\angle APQ' < \angle APQ$. Dann gibt es einen Strahl $\overrightarrow{PR}$ im Winkelraum $I(\angle APQ)$, so daß $\angle APR = \angle APQ'$ ist. Aber der Strahl $\overrightarrow{PR}$ muß l treffen, o.B.d.A. in R.



Nun wählen wir einen Punkt $R' \in l$ mit $R' - A - R$ und $\overline{R'A} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AR}$. Dann ist $\triangle R'AP \mathrel{\widehat{=}} \triangle ARP$ (SWS). Daraus folgt, daß $\angle APR' \mathrel{\widehat{=}} \angle APR$ ist, während andererseits $\angle APR' < \angle APQ' = \angle APR$ ist. Widerspruch! ∎

In der Situation des obigen Satzes setzen wir

$$\varphi(P,l) := \angle APQ = \angle APQ'.$$

4.8 Folgerung.

1. *$\varphi(P,l) \le 90°$.*
2. *$\varphi(P,l) < 90° \iff \exists \ge 2$ Parallelen zu l durch P.*

Der Beweis ist eine triviale Übungsaufgabe.

4.9 Satz.

$\varphi(P,l)$ hängt nur von der Länge des Lotes von P auf l ab.

Beweis:

Ab sofort messen wir Winkel im Bogenmaß, benutzen also π an Stelle von $180°$.

Sei A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Wir betrachten die Menge

$$K(P,l) := \{r \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Strahl } \overrightarrow{PC} \text{ mit } \overrightarrow{PC} \cap l \neq \varnothing \text{ und } r = \angle APC\}.$$

Da $\varphi(P,l) = \sup K(P,l)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $K(P,l)$ nur von der Kongruenzklasse von $\overline{AP}$ abhängt.

Dazu sei l' eine weitere Gerade, $P' \notin l'$, A' der Fußpunkt des Lots von P' auf l', sowie $\overline{AP} \widehat{=} \overline{A'P'}$. Es ist dann zu zeigen, daß $K(P,l) = K(P',l')$ ist, und aus Symmetriegründen reicht es sogar z.z., daß $K(P,l) \subset K(P',l')$ ist.

Seien $\overrightarrow{PQ}$ bzw. $\overrightarrow{P'Q'}$ die asymptotisch parallelen Strahlen (wir brauchen wegen des vorangegangenen Satzes nur eine Seite zu betrachten). Ist $s \in K(P,l)$, so gibt es ein $C \in l$ (in der gleichen Richtung wie Q) mit $\angle APC = s$. Wir wählen dann einen Punkt $C' \in l'$ (in der gleichen Richtung wie Q') mit $\overline{A'C'} \widehat{=} \overline{AC}$. Dann ist $\triangle ACP \widehat{=} \triangle A'C'P'$ (SWS) und daher $s = \angle APC = \angle A'P'C'$. Aber das bedeutet, daß auch $s \in K(P',l')$ ist. ∎

Führt man noch eine Längenfunktion λ ein, so erhält man eine Funktion

$$\Pi : \{t \mid t > 0\} \to (0, \frac{\pi}{2}]$$

mit $\Pi(\lambda(\overline{PA})) := \varphi(P,l)$.

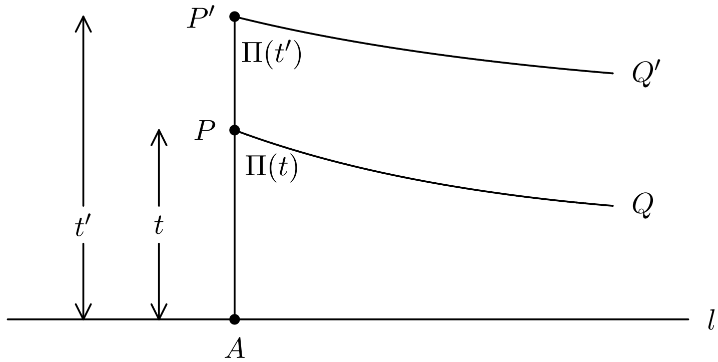
Definition. $\Pi(t)$ heißt der (durch t bestimmte) *Parallelitätswinkel*.

Die Bezeichnung stammt von Lobatschewski.

4.10 Satz. *$\Pi(t)$ ist schwach monoton fallend.*

Beweis: Sei $t' > t$. Man kann eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$ finden, so daß – mit dem Fußpunkt A des Lots von P auf l – gilt:

t ist die Länge von $\overline{AP}$, und es gibt einen Punkt P' mit $A - P - P'$, so daß t' die Länge von $\overline{AP'}$ ist.



Trägt man $\Pi(t)$ bei P' an AP' an, so erhält man eine Parallele $\overrightarrow{P'Q'}$ zu $\overrightarrow{PQ}$ (F-Winkel). Aber das bedeutet, daß $\Pi(t') \leq \Pi(t)$ sein muß. ■

4.11 Satz.

Gilt Postulat V, so ist $\Pi(t) \equiv \frac{\pi}{2}$.

Gilt Postulat V nicht, so ist $\Pi(t) < \frac{\pi}{2}$ *für alle* t.

Beweis: Wenn Postulat V nicht gilt, dann gilt die Hypothese vom spitzen Winkel, und es gibt „unterhalb" der Parallelen, die in P senkrecht auf AP steht, eine asymptotische Parallele. Ist t die Länge von $\overline{AP}$, so ist $\Pi(t) < \frac{\pi}{2}$. ■

Die logische Verneinung des Euklidischen Parallelenaxioms (in der Formulierung von Playfair) sieht folgendermaßen aus:

Hyperbolisches Parallelenaxiom:

(H-P) Es gibt eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$, so daß durch P mindestens zwei Parallelen zu l gehen.

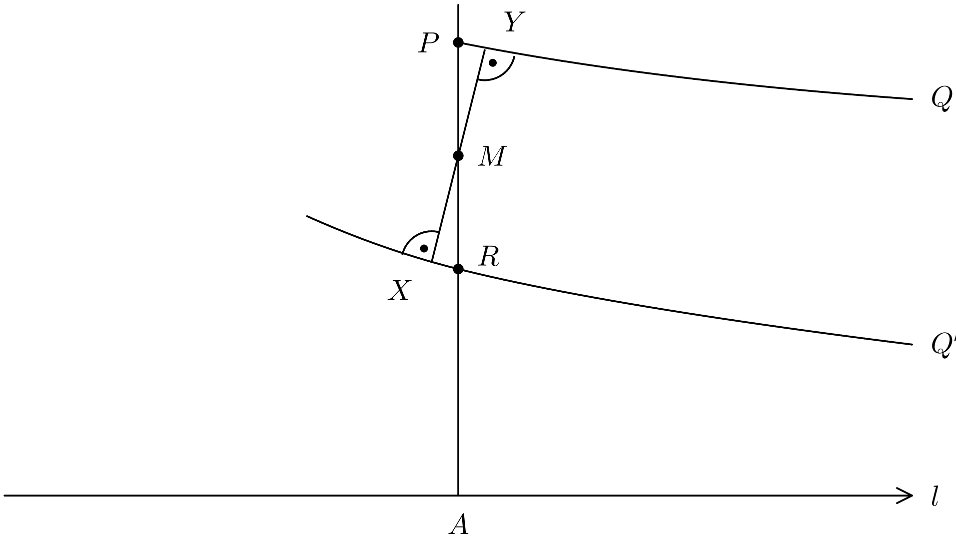
4.12 Satz. *Setzt man (H-P) voraus, so gilt:*

1. *Die Hypothese vom spitzen Winkel ist erfüllt.*
2. *Die Funktion* $t \mapsto \Pi(t)$ *ist streng monoton fallend.*
3. $\forall \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\ \exists! t$ *mit* $\Pi(t) = \varphi$.

Beweis: 1) ist klar!

2) Zur Vereinfachung der Notationen nehmen wir an, es sei eine Längenfunktion gegeben, und setzen $\Pi(XY) := \Pi(\lambda(\overline{XY}))$.

Seien P, R zwei Punkte auf der Senkrechten zur Geraden l in A, und es sei $\overline{AP} > \overline{AR}$. Dann ist $\Pi(AP) \leq \Pi(AR)$.



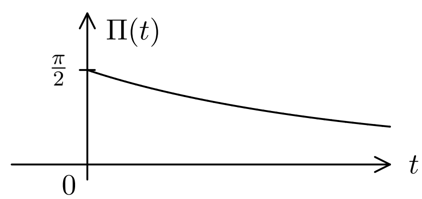
Annahme, $\Pi(AP) = \Pi(AR)$. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PR}$, X der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{RQ'}$ und Y der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{PQ}$. Dann ist $\triangle XRM \,\widehat{=}\, \triangle MYP$ (SWW). Also ist $\angle XMR \,\widehat{=}\, \angle PMY$, d.h. $X - M - Y$.

Das bedeutet, daß PQ und RQ' eine gemeinsame Senkrechte besitzen. Sie sind dann überparallel, aber nicht asymptotisch parallel. Das ist ein Widerspruch zur Transitivität der Relation „$|||$“.

3) Ist φ ein gegebener spitzer Winkel, so haben wir in Satz 2.17 gezeigt, daß es eine Senkrechte zu einem der Schenkel von φ gibt, die asymptotisch parallel zum anderen Schenkel ist. ∎

4.13 Folgerung. $\Pi : (0, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2})$ *ist bijektiv und stetig, und es ist*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \Pi(t) = \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to\infty} \Pi(t) = 0.$$



Die Stetigkeit folgt aus der strengen Monotonie und der Surjektivität.

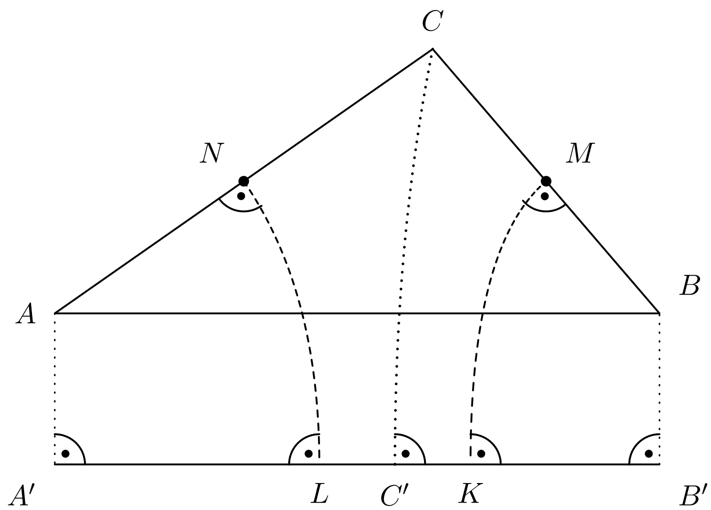
3. Horozykel:

4.14 Satz. *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich entweder in einem Punkt, oder sie sind alle zueinander in der gleichen Richtung asymptotisch parallel oder sie sind überparallel und besitzen alle drei eine gemeinsame Senkrechte.*

Beweis: 1) Wenn sich schon zwei der Mittelsenkrechten in einem Punkt treffen, dann haben alle drei Ecken von diesem Punkt den gleichen Abstand, und dann muß auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen.

2) Sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Die Mittelsenkrechten durch M und N seien zueinander überparallel, mit einer gemeinsamen Senkrechten h. K und L seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten durch M und N mit h.

Wir fällen das Lot von A, B und C jeweils auf h, mit Fußpunkten A', B' und C'.



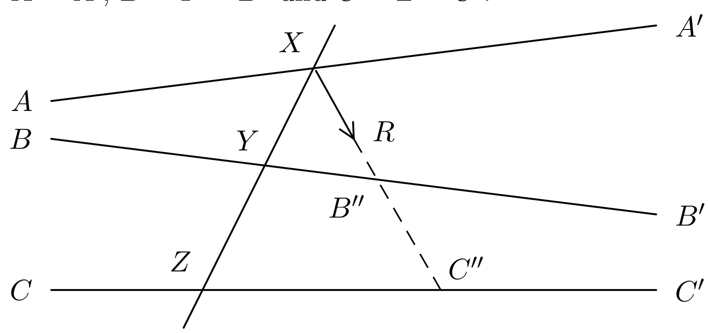
Es ist $\triangle ALN \mathrel{\widehat=} \triangle CLN$ (SWS), und daher $\overline{AL} \mathrel{\widehat=} \overline{LC}$ und $\angle ALA' \mathrel{\widehat=} \angle CLC'$. Daraus folgt wiederum, daß $\overline{AA'} \mathrel{\widehat=} \overline{CC'}$. Genauso folgt, daß $\overline{BB'} \mathrel{\widehat=} \overline{CC'}$ ist. Also ist $A'B'BA$ ein Saccheri-Viereck. Aber dann ist die Mittelsenkrechte zu AB zugleich die Mittellinie des Saccheri-Vierecks, und die steht senkrecht auf $A'B' = h$.

3) Wenn zwei der Mittelsenkrechten asymptotisch parallel sind, so müssen sie es auch zur dritten sein, denn sonst läge ja einer der beiden ersten Fälle vor. Es bleibt nur zu zeigen, daß sie alle in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind.

Man überzeugt sich recht leicht davon, daß alle drei Mittelsenkrechten die Seite des Dreiecks treffen, die dem größten Winkel gegenüberliegt. Aber dann kann man den folgenden Hilfssatz anwenden. ∎

4.15 Hilfssatz. *Wenn drei verschiedene Geraden paarweise asymptotisch parallel sind und alle von einer vierten Geraden getroffen werden, so sind sie in der gleichen Richtung asymptotisch parallel.*

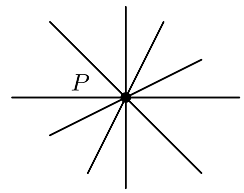
Beweis: Seien AA', BB' und CC' die paarweise asymptotisch parallelen Geraden, sowie l die gemeinsame Transversale. O.B.d.A. gibt es dann Punkte X, Y und Z auf l mit $A - X - A'$, $B - Y - B'$ und $C - Z - C'$.



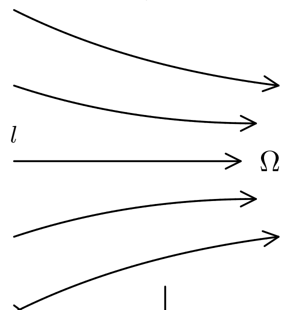
O.B.d.A. sei $\overrightarrow{XA'} \,|||\, \overrightarrow{ZC'}$. Nun sei $\overrightarrow{XR}$ ein Strahl ins Innere des Winkels $\angle YXA'$. Er muß $\overrightarrow{ZC'}$ treffen, etwa in C''. Die Gerade BB' trifft die Seite $\overline{ZX}$ des Dreiecks $ZC''X$, geht aber weder durch X noch durch $\overline{ZC''}$. Nach Pasch muß sie dann $\overline{XC''}$ in einem inneren Punkt B'' treffen, der auf der gleichen Seite von XZ liegt, wie A', B' und C'. Also ist $\overrightarrow{XA'}|||\overrightarrow{YB'}$. ∎

Wir verallgemeinern nun die Definition der „korrespondierenden Punkte". Und zwar betrachten wir drei Sorten von Geradenbüscheln:

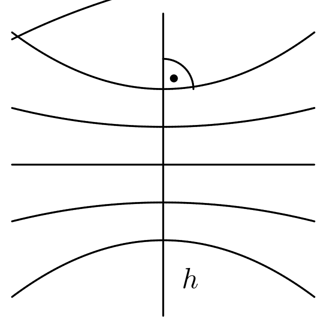
- Das Büschel Σ_P aller Geraden durch einen gegebenen Punkt P. Es ist durch den Punkt P festgelegt.



- Das Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ aller Geraden, die zu einer gegebenen Geraden l in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind. Ein solches Büschel ist durch eine der Geraden und die Richtung, die hier symbolisch mit Ω bezeichnet wird, festgelegt. Man kann sich Ω auch als einen unendlich weit entfernten Punkt vorstellen, und man nennt Ω daher auch einen *idealen Punkt*.



- Das Büschel $\Sigma_h^\perp$ aller Geraden, die auf einer gegebenen Geraden h senkrecht stehen. Es ist natürlich durch h festgelegt.



Oben wurde gezeigt, daß die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks immer zu einer dieser drei Sorten von Büscheln gehören.

Definition. Sei Σ ein Büschel von Geraden. Zwei Punkte A, B heißen *korrespondierend* bzgl. Σ, falls sie gleich sind oder die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ zu Σ gehört (in Zeichen $A \bumpeq B$).

Sei A ein fester Punkt.

1. $A \bumpeq B$ bezüglich Σ_P gilt genau dann, wenn A und B den gleichen Abstand von P haben.

2. $A \bumpeq B$ bezüglich $\Sigma(l, \Omega)$ bedeutet, daß A und B auf Geraden a, b liegen, die beide zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ asymptotisch parallel sind, und daß sie im bisherigen Sinne korrespondierende Punkte sind.

3. $A \bumpeq B$ bezüglich $\Sigma_h^\perp$ gilt genau dann, wenn A und B auf der gleichen Seite von h liegen und den gleichen Abstand von h haben.

4.16 Satz. *„Korrespondierend bezüglich eines Geradenbüschels" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Reflexivität und Symmetrie folgen ganz einfach, die Transitivität gewinnt man aus dem Satz 4.14 über die Mittelsenkrechten im Dreieck. ∎

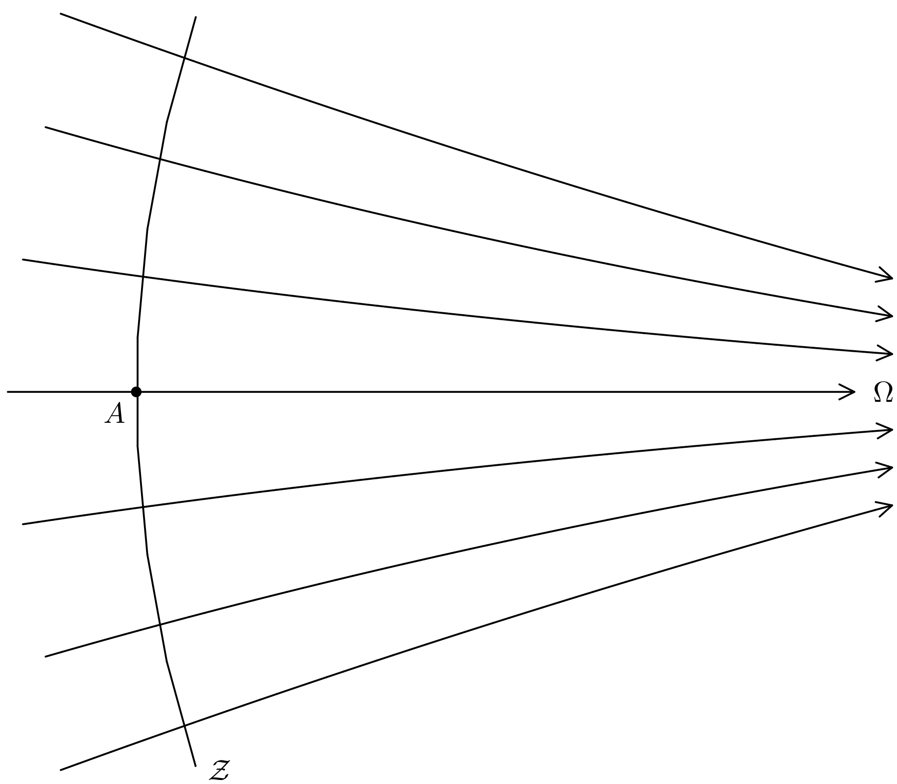
Im Falle des Büschels Σ_P ergibt die Menge der zu einem festen Punkt A korrespondierenden Punkte einen **Kreis um** P. Im Falle von $\Sigma_h^\perp$ kommt die Kurve der zu h äquidistanten Punkte heraus. Im Falle eines Büschels vom Typ $\Sigma(l,\Omega)$ erhält man eine neue interessante Kurve:

Definition. Es sei ein Büschel $\Sigma(l,\Omega)$ und ein Punkt A gegeben. Die Menge

$$\mathcal{Z} := \{B \mid A \simeq B \text{ bezüglich } \Sigma(l,\Omega)\}$$

heißt ein *Horozykel*.

Gauß nannte die Horozykel *Parazykel* oder *Kreislinien von unendlichem Radius*, Lobatschewski sprach von *Grenzkreisen*.



4.17 Satz. *Je drei paarweise verschiedene Punkte auf einem Horozykel können nicht auf einer Geraden liegen.*

Beweis: Gilt etwa $A-B-C$, so sind die Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ zueinander überparallel, gehören also nicht zu einem Büschel $\Sigma(l,\Omega)$. ∎

Zu jedem Punkt P und jedem idealen Punkt Ω gibt es genau einen Strahl $\overrightarrow{P\Omega}$ durch P in Richtung Ω. Man nennt einen solchen Strahl auch eine *Achse* oder einen *Radius* des durch P und Ω bestimmten Horozykels, und Ω das *Zentrum.* Zwei Horozykeln mit gleichem Zentrum nennt man *konzentrisch.*

Ist $\mathcal{Z}$ ein Horozykel mit Zentrum Ω, $P \in \mathcal{Z}$ und g eine Gerade durch P, so kann g den Horozykel nach dem obigen Satz in höchstens zwei Punkten treffen. Es gibt nun drei Möglichkeiten:

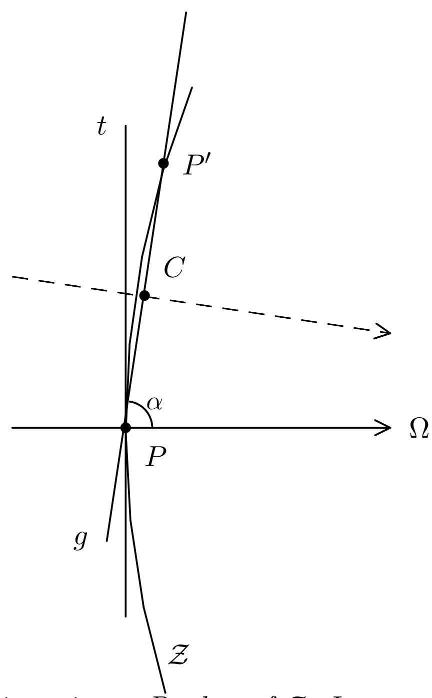
1. g ist der Radius $\overrightarrow{P\Omega}$ (und trifft natürlich nur einmal!)

2. g steht in P auf $\overrightarrow{P\Omega}$ senkrecht. Man nennt g dann eine *Tangente* an $\mathcal{Z}$. Würde g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen, so hätte man zwei Radien mit einer gemeinsamen Senkrechten, aber das ist unmöglich.

   Die Tangente berührt $\mathcal{Z}$ vom Zentrum Ω aus gesehen von außen, wie man leicht an den Winkeln erkennen kann.

3. Ist g weder ein Radius noch eine Tangente, so muß g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen.

Beweis für die 3. Aussage:

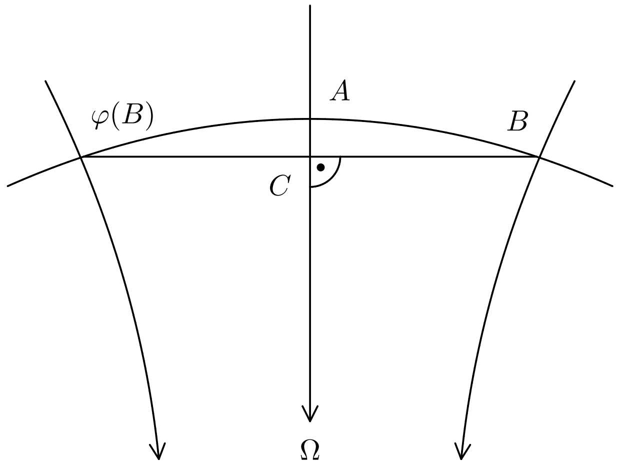


Sei t die Tangente in P, α der Winkel, den g mit dem Radius einschließt. Man kann dann auf der Seite von t, auf der $\mathcal{Z}$ liegt, einen Punkt C auf g wählen, so daß $\Pi(PC) = \alpha$ ist. Dann ist die Senkrechte zu g in C asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{P\Omega}$. Die Spiegelung an dieser Senkrechten bildet P auf einen weiteren Punkt $P' \in g \cap \mathcal{Z}$ ab. Man nennt g daher eine *Sekante* von $\mathcal{Z}$ und $\overline{PP'}$ eine *Sehne.*

Horozykel sind sehr symmetrisch:

4.18 Satz. *Sei $\mathcal{Z}$ ein Horozykel, $A \in \mathcal{Z}$ und $B \neq A$ ein weiterer Punkt auf $\mathcal{Z}$. Ist φ die Spiegelung an der Achse $\overrightarrow{A\Omega}$, so liegt auch $\varphi(B)$ auf $\mathcal{Z}$.*

Beweis: Die Spiegelung des Strahls $\overrightarrow{B\Omega}$ ergibt einen ebenfalls zu $\overrightarrow{A\Omega}$ asymptotisch parallelen Strahl $\varphi(\overrightarrow{B)\Omega}$. Sei C der Schnittpunkt von $\overline{B\varphi(B)}$ mit $\overrightarrow{A\Omega}$. Dann ist $\triangle ACB \mathrel{\widehat{=}} \triangle AC\varphi(B)$, und die Winkel bei C sind rechte Winkel. Es folgt, daß auch $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle\varphi(B)AC$ ist.



Da $A \simeq B$ ist, ist $\angle CAB \,\hat{=}\, \angle AB\Omega$. Und dann ist natürlich auch $\angle CA\varphi(B) \,\hat{=}\, \angle A\varphi(B)\Omega$.

Durch Winkelsubtraktion folgt, daß $\angle CB\Omega \,\hat{=}\, \angle C\varphi(B)\Omega$ ist. Also sind B und $\varphi(B)$ korrespondierende Punkte bezüglich Ω, und $\varphi(B)$ liegt auf $\mathcal{Z}$. ∎

Man kann von drei Punkten A, B, C auf einem Horozykel eindeutig sagen, wann einer von ihnen (z.B. C) zwischen den beiden anderen liegt (nämlich genau dann, wenn $\overrightarrow{A\Omega}$ und $\overrightarrow{B\Omega}$ auf verschiedenen Seiten von $\overrightarrow{C\Omega}$ liegen). Deshalb kann man auch einen *Horozykel-Bogen* $\overset{\frown}{AB}$ (auf $\mathcal{Z}$) als Menge aller $C \in \mathcal{Z}$ definieren, die zwischen A und B liegen oder gleich einem dieser beiden Punkte sind.

4.19 Folgerung 1. *Wenn A, B und C auf dem Horozykel $\mathcal{Z}$ liegen, B sich zwischen A und C befindet und φ die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ ist, so gilt:*

$$\overset{\frown}{AB} \,\hat{=}\, \overset{\frown}{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

Der Beweis ist sehr einfach.

4.20 Folgerung 2. *Die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Horozykel. Wenn die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kongruent sind, so auch die Bögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{CD}$.*

Zum Beweis nehme man o.B.d.A. an, daß die Punkte alle hintereinander liegen. Dann zeigt man leicht, daß die Kongruenz der Strecken durch die Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$ hergestellt wird. Der Rest ergibt sich aus Folgerung 1.

4.21 Folgerung 3. *Sind A, B und A' Punkte auf einem Horozykel $\mathcal{Z}$, so gibt es einen Punkt $B' \in \mathcal{Z}$, so daß $\overset{\frown}{AB} \,\hat{=}\, \overset{\frown}{A'B'}$ ist.*

Beweis: Sei Ω das Zentrum von $\mathcal{Z}$, $\overrightarrow{C\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$, φ_1 die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ und φ_2 die Spiegelung an $\overrightarrow{A'\Omega}$, sowie $B' := \varphi_2 \circ \varphi_1(B)$. Dann ist offensichtlich $\overset{\frown}{AB} \,\hat{=}\, \overset{\frown}{A'B'}$. ∎

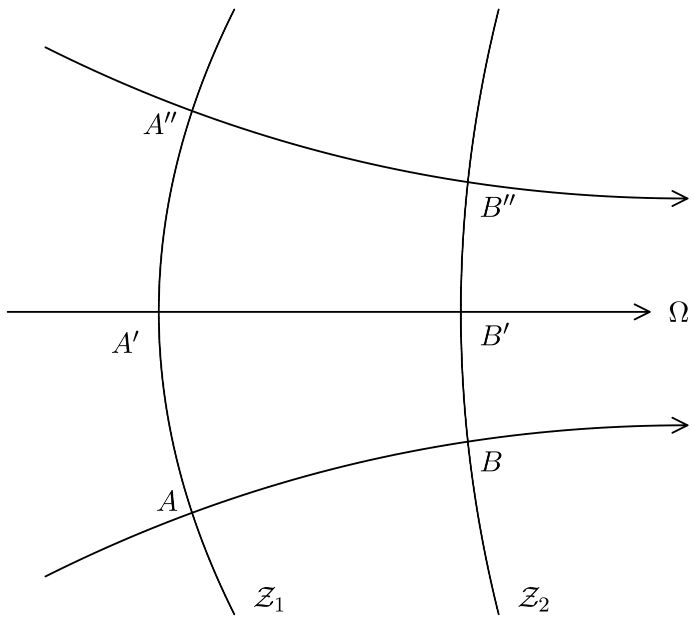
Ein Bogenstück auf einem Horozykel ist also frei verschiebbar, wie eine Strecke auf einer Geraden. Und zwei Bogenstücke sind genau dann kongruent, wenn die darunter liegenden Sehnen kongruent sind.

Mit Hilfe des engen Zusammenhangs zwischen Bögen und den darunterliegenden Sehnen kann man nun auch die Länge eines Horozykel-Bogens definieren (ähnlich wie bei den Strecken durch Intervallschachtelung). Man braucht allerdings eine Standard-Einheit. Dafür bietet sich die Länge des Bogens an, dessen Sehne die Länge $2x$ hat, mit $\Pi(x) = \frac{\pi}{4}$. Die Bogenlänge wird dann mit $2S$ bezeichnet.

4.22 Satz. *Seien $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ zwei konzentrische Horozykel mit Zentrum Ω. Die Radien $\vec{s}$, $\vec{s}'$ und $\vec{s}''$ mögen die Horozykel in den Punkten A, A' und A'' bzw. B, B' und B'' treffen. Dann gilt:*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AA''}/\overset{\frown}{BB''}.$$

Zum Beweis: Ist etwa $\overset{\frown}{AA'} \cong \overset{\frown}{A'A''}$, so ist $\overrightarrow{A'\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA''}$, und B'' erhält man durch Spiegeln des Punktes B an dieser Mittelsenkrechten. Die Aussage des Satzes ist dann sicher richtig.



Ähnlich einfach ist es, wenn das Verhältnis ganzzahlig ist. Und schließlich bekommt man die Aussage auch für rationale Verhältnisse.

Bei einem beliebigen inkommensurablen Verhältnis muß man durch rationale Zahlen approximieren. Dafür braucht man die folgende Aussage:

> Wenn die Punkte A_n und B_n auf einem Horozykel liegen und gegen A bzw. B konvergieren, so konvergieren auch die Bogenlängen von $\overset{\frown}{A_nB_n}$ gegen $\overset{\frown}{AB}$.

Aber das ist ziemlich klar, auf Grund der Konstruktion der Bogenlänge. ∎

Wir bleiben bei der obigen Situation. M sei der Mittelpunkt von $\overline{AA'}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BB'}$. Dann ist $\triangle ANM \cong \triangle A'MN$, also auch $\triangle ABN \cong \triangle A'NB'$. Aber das bedeutet, daß $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ist. Die konzentrischen Horozykel-Bögen sind äquidistant! Man kann daher eine Funktion f wie folgt definieren:

Ist x der Abstand zwischen den Horozykel-Bögen, so setzen wir

$$f(x) := \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}.$$

Aus dem obigen Satz folgt, daß f wohldefiniert ist.

Es sei nun noch ein dritter Horozykel $\mathcal{Z}_3$ gegeben, der von den Radien in den Punkten C, C' und C'' geschnitten wird. Ist y der Abstand von $\mathcal{Z}_2$ und $\mathcal{Z}_3$, sowie $z = x + y$ der Abstand von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$, so gilt:

$$f(x+y) = f(z) = \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{CC'} = \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} \cdot \overset{\frown}{BB'}/\overset{\frown}{CC'} = f(x) \cdot f(y).$$

Setzen wir schließlich noch $F(x) := \ln f(x)$, so ist $F(x+y) = F(x) + F(y)$. Man kann dann – wie schon an früherer Stelle – schließen, daß F linear ist, also von der Form $F(x) = c \cdot x$, mit einer Konstanten c. Daraus folgt: $f(x) = e^{cx}$. Traditionsgemäß schreibt man $c = \frac{1}{k}$ und erhält:

4.23 Satz. *Das Verhältnis $\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}$ zweier sich entsprechender Bogenstücke auf konzentrischen Horozykeln im Abstand x erfüllt die Formel*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = e^{x/k}, \qquad \textit{mit einer universellen Konstanten } k.$$

Die Konstante k beschreibt die Distanz zwischen zwei konzentrischen Horozykel-Bögen, deren Längenverhältnis $= e = 2.71828\ldots$ ist, hat also die Dimension einer Länge. Üblicherweise wählt man in der Flächenfunktion $\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC)$ die gleiche Konstante, und man setzt auch die Längeneinheit $S = k$. Damit ist die nichteuklidische Geometrie festgenagelt.

Bolyai und Lobatschewski ist es schließlich gelungen, eine Formel für den Parallelitätswinkel aufstellen:

$$\boxed{\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.}$$

In der Vorlesung reichte die Zeit nicht aus, um den Beweis dieser Formel vorzuführen. Deshalb will ich hier auch nur kurz andeuten, mit welchen Mitteln z.B. Bolyai zum Ziel kam.

Zunächst müssen wir unser Axiomensystem erweitern, zu einem System der räumlichen Geometrie:

Die Grundmenge ist nun der *Raum*, gewisse Teilmengen heißen *Ebenen*, andere *Geraden*. Sofern Punkte und Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, müssen sie die Inzidenzaxiome **(I-1)** und **(I-2)** erfüllen. Hinzu kommt:

I-3-R Es gibt wenigstens vier Punkte im Raum, die nicht in einer Ebene liegen.

I-4 Liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, so liegt schon die ganze Gerade in dieser Ebene.

I-5 Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, so haben sie sogar eine durch diesen Punkt laufende Gerade gemeinsam.

I-6 Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene.

Die Axiome der Anordnung **(A-1)** bis **(A-5)** werden übernommen. Man kann dann zusätzlich sagen, daß zwei Punkte auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegen, wenn ihre Verbindungsstrecke die Ebene trifft. Der Raum wird so durch jede Ebene in zwei Halbräume unterteilt.

Die *Bewegungen* sind nun bijektive Abbildungen des Raumes auf sich. Die Axiome **(B-1)**, **(B-2)**, **(B-4)** und **(B-5)** werden übernommen, das starke Axiom (B-3) wird wie folgt verallgemeinert:

(B-3-R) Es seien A, B, C, D vier nicht auf einer Ebene gelegene Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

- A wird auf einen vorgegebenen Punkt O abgebildet.
- $\varphi(B)$ liegt auf einem vorgegebenen Strahl $\overrightarrow{OP}$.
- $\varphi(C)$ liegt in einer vorgegebenen Ebene $\mathcal{E}$ durch OP.
- $\varphi(D)$ liegt in einem vorgegebenen (durch $\mathcal{E}$ bestimmten) Halbraum.

Man kann nun leicht Spiegelungen an Ebenen beschreiben.

Als Stetigkeitsaxiom übernimmt man das Dedekindsche Axiom.

Durch eine Gerade und einen nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt ist genau eine Ebene festgelegt. Zwei verschiedene Geraden brauchen nicht auf einer gemeinsamen Ebene zu liegen. Man nennt sie dann *windschief*, und sie können sich in diesem Falle nicht schneiden.

Eine Gerade steht auf einer Ebene $\mathcal{E}$ *senkrecht*, wenn sie die Ebene in einem Punkt P trifft und auf jeder Geraden $l \subset \mathcal{E}$ mit $P \in l$ senkrecht steht. Von jedem Punkt außerhalb einer Ebene kann man eindeutig das Lot auf die Ebene fällen. Dadurch ist es möglich, die *orthogonale Projektion* einer Geraden auf eine Ebene zu definieren. Die Projektion einer Geraden ist wieder eine Gerade.

Um den *Winkel zwischen zwei sich schneidenden Ebenen* zu definieren, konstruiert man die eindeutig bestimmte zu beiden gegebenen Ebenen orthogonale Ebene und mißt dort den Schnittwinkel der Schnittgeraden.

Definition. Zwei Geraden im Raum heißen *parallel* (bzw. *asymptotisch parallel*), wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und dort parallel (bzw. asymptotisch parallel) sind.

Mit dieser Definition bleiben die bekannten Sätze der neutralen Geometrie erhalten.

Definition. Eine Gerade heißt zu einer Ebene *asymptotisch parallel*, wenn sie zu irgend einer Geraden dieser Ebene asymptotisch parallel ist.

Man zeigt dann leicht, daß die Gerade zu ihrer orthogonalen Projektion asymptotisch parallel ist. Bemerkenswert ist nun der folgende Satz:

4.24 Satz. *Durch eine zu einer gegebenen Ebene $\mathcal{E}$ parallelen Gerade g gibt es genau eine Ebene $\mathcal{E}'$, die $\mathcal{E}$ nicht schneidet.*

Da wir schon so viele Beweise weggelassen haben, ist es auch nicht sinnvoll, hier den Beweis anzugeben. Man beachte aber die formale Ähnlichkeit des Satzes mit dem Playfair-Axiom! Dabei befinden wir uns in der Neutralen Geometrie!

Ab jetzt setzen wir wieder das hyperbolische Parallelenaxiom voraus.

Die (asymptotische) Parallelität in Richtung eines idealen Punktes Ω kann man auch im Raum erklären, und die Relation „korrespondierend“ läßt sich ebenfalls übertragen.

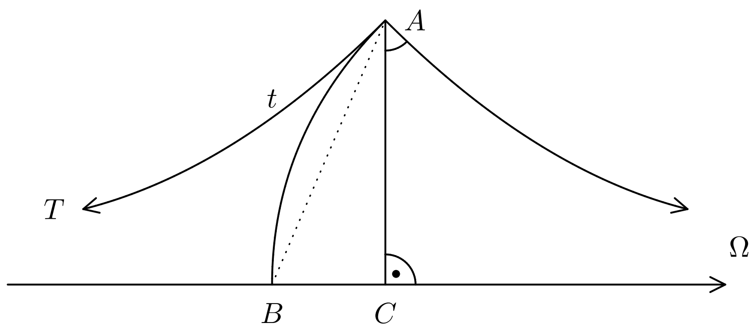
Definition. Die Menge $\mathcal{S}$ aller Punkte X, die (bezüglich einer Richtung Ω) zu einem festen Punkt P korrespondierend sind, bezeichnet man als *Grenzfläche* oder *Horosphäre.* Der ideale Punkt Ω wird wieder als *Zentrum* bezeichnet, die Geraden oder Strahlen in Richtung Ω als *Achsen* oder *Radien.*

Eine Ebene, die einen Radius von $\mathcal{S}$ enthält, nennt man eine *diametrale Ebene.*

Offensichtlich schneidet jede diametrale Ebene die Horosphäre in einem Horozykel. Und nun passiert etwas ganz Erstaunliches: Wählt man die Horosphäre als Ebene und die auf ihr gelegenen Horozykeln als Geraden, so erhält man ein Modell für die ebene Geometrie. Und wegen Satz 4.24 ist diese Geometrie euklidisch! Für Bolyai war das wohl das entscheidende Indiz dafür, daß er auf der richtigen Spur war.

4.25 Lemma. *$\overset{\frown}{AB}$ sei ein Bogen auf einem Horozykel mit Zentrum Ω. t sei die Tangente an $\overset{\frown}{AB}$ in A, $T \in t$ ein Punkt auf der gleichen Seite von $\overrightarrow{A\Omega}$ wie B und C der Fußpunkt des Lotes von A auf den Radius durch B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ist die Einheitslänge S.*
2. *$\Pi(AC) = \frac{\pi}{4}$.*
3. *$\overrightarrow{AT} \,|||\, \overrightarrow{CB}$.*



Beweis: Zunächst eine Vorbemerkung:

Der Winkel $\angle AB\Omega$ ist (als Parallelitätswinkel) kleiner als $\frac{\pi}{2}$, sein Nebenwinkel also $> \frac{\pi}{2}$. Da das Dreieck ABC eine Winkelsumme $< \pi$ haben muß, ist klar, daß C von B

aus gesehen in Richtung Ω liegen muß. Das angegebene Bild stimmt also! Man beachte außerdem, daß AT und $A\Omega$ Geraden sind, nicht aber der Horozykelbogen $\overset{\frown}{AB}$!

Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar, auf Grund der Definition von S.

Da die Tangente stets auf dem Radius senkrecht steht, ist $\angle TA\Omega = \frac{\pi}{2}$, also

$$\angle CAT + \angle CA\Omega = \frac{\pi}{2}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} \,|||\, \overrightarrow{CB} \quad &\iff \quad \angle CAT = \Pi(AC) = \angle CA\Omega \\ &\iff \quad \Pi(AC) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

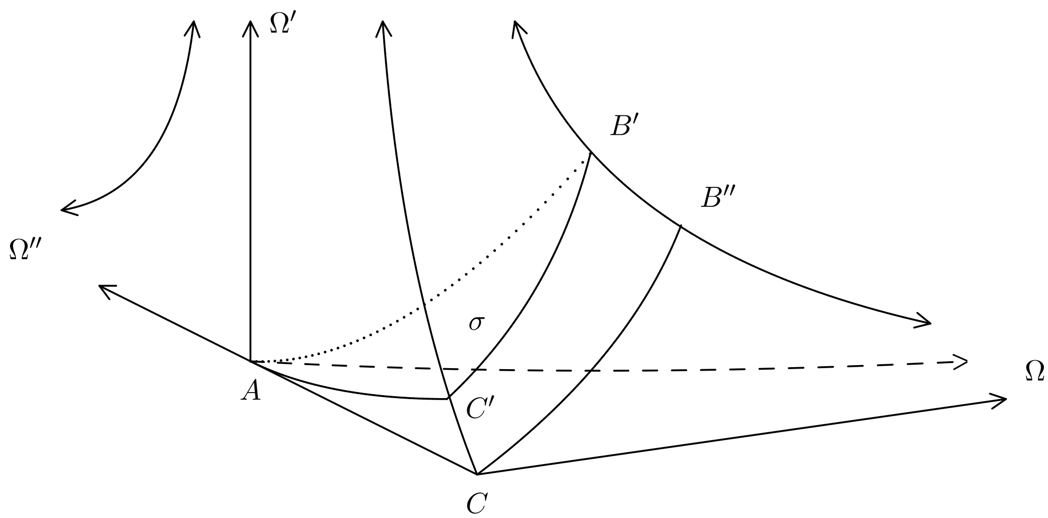
4.26 Die Formel für den Parallelitätswinkel.

$$\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.$$

Beweis: Sei $\overline{AC}$ eine Strecke der Länge x, $\alpha := \Pi(x)$. In einer Ebene $\mathcal{E}_I$, in der A und C liegen, werde in C die Senkrechte $\overrightarrow{C\Omega}$ errichtet und bei A die Parallele $\overrightarrow{A\Omega}$ angetragen. Dann ist $\angle CA\Omega = \alpha$.

$\mathcal{E}_{II}$ sei die zu $\mathcal{E}_I$ orthogonale Ebene durch AC. In der werde die Senkrechte $\overrightarrow{A\Omega'}$ zu AC errichtet und bei C die Parallele $\overrightarrow{C\Omega'}$ dazu angetragen.

Schließlich sei $\mathcal{E}_{III}$ die durch $\overrightarrow{C\Omega}$ und $\overrightarrow{C\Omega'}$ bestimmte Ebene. Sie enthält die zu $\overrightarrow{C\Omega}$ und $\overrightarrow{C\Omega'}$ parallele Gerade $\Omega\Omega'$.



Durch A geht die Horosphäre σ mit dem Zentrum Ω'. Die trifft $\overrightarrow{C\Omega'}$ in einem Punkt C' und $\Omega\Omega'$ in einem Punkt B'. So entsteht auf σ das euklidische Dreieck $AC'B'$.

Weil $\overrightarrow{C\Omega}$ auf $\mathcal{E}_{II}$ senkrecht steht, ist $\angle \Omega C \Omega'$ ein rechter Winkel, und $\mathcal{E}_{III}$ steht senkrecht auf $\mathcal{E}_{II}$. Und weil die Tangenten an $\overset{\frown}{AC'}$ und $\overset{\frown}{C'B'}$ in C' jeweils auf der Schnittgeraden $C\Omega'$ der beiden Ebenen senkrecht stehen, ist auch der euklidische Winkel $\angle AC'B'$ ein Rechter. Der Winkel $\angle C'AB'$ stimmt dagegen mit α überein, wie man leicht an den Tangenten in A erkennt.

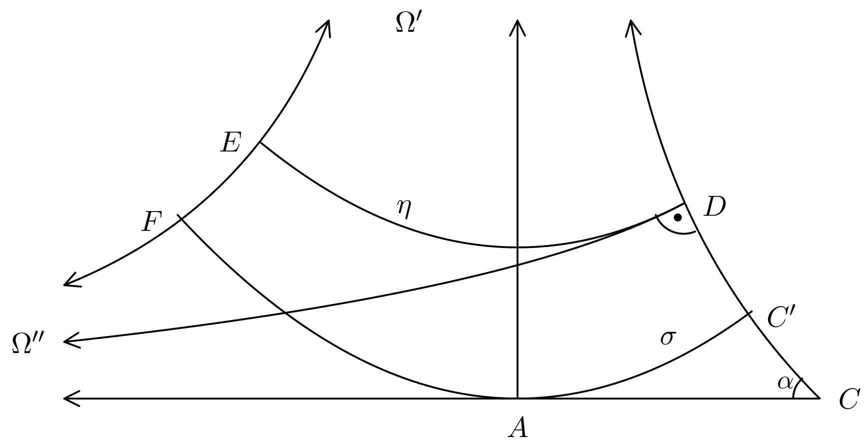
In der euklidischen Geometrie auf σ kann man natürlich auch mit Winkelfunktionen und euklidischer Trigonometrie arbeiten. Die Hypotenuse des Dreiecks $AC'B'$ hat aber nach Lemma 4.25 die Länge S, da die Tangente an $\overset{\frown}{AB'}$ in A zu dem Radius durch B' parallel ist (in der von A und $\Omega\Omega'$ aufgespannten Ebene $\mathcal{E}_{IV}$). Also gilt:

$$\overset{\frown}{B'C'} = S \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad \overset{\frown}{AC'} = S \cdot \cos\alpha.$$

Nun sei τ die zu σ konzentrische Horosphäre durch C. Sie trifft $\Omega\Omega'$ in einem Punkt B''. Dann folgt wieder mit Lemma 4.25, daß $\overset{\frown}{B''C}$ die Länge S hat. Führt man noch eine Längenfunktion λ für die hyperbolischen Geraden ein, so ist

$$\overset{\frown}{B''C}/\overset{\frown}{B'C'} = e^{\lambda(CC')/k}, \quad \text{also } e^{\lambda(CC')/k} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Für den Rest des Beweises brauchen wir nur noch die Situation in Ebene $\mathcal{E}_{II}$ zu betrachten.



Wir wählen einen Punkt D auf $\overrightarrow{C\Omega'}$ mit $\overline{CD} \widehat{=} \overline{AC}$. Die Senkrechte zu $\overrightarrow{C\Omega}$ in D ist dann automatisch parallel zu $\overrightarrow{C\Omega''}$. Die Horosphäre σ trifft $\Omega'\Omega''$ in einem Punkt F, und die zu σ konzentrische Horosphäre η durch D trifft $\Omega'\Omega''$ in einem Punkt E. Da $\overrightarrow{D\Omega''}$ die Tangente an η in D ist, folgt wieder mit Lemma 4.25, daß $\overset{\frown}{DE}$ die Länge S hat, und das gleiche trifft auf $\overset{\frown}{AF}$ zu. Also ist

$$e^{\lambda(C'D)/k} = \overset{\frown}{C'F}/\overset{\frown}{DE} = \frac{S \cdot \cos\alpha + S}{S} = \cos\alpha + 1.$$

Zusammen mit dem obigen Resultat ergibt das:

$$\begin{aligned} e^{x/k} &= e^{\lambda(CC')/k} \cdot e^{\lambda(C'D)/k} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha} \cdot (\cos\alpha + 1) \\ &= \frac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Das liefert die gewünschte Formel. ∎

Nun ist man tatsächlich in der Lage, alles auszurechnen. Hier ist ein Beispiel:

4.27 Folgerung.

$$\textit{Ist } \Pi(x) = \frac{\pi}{4}, \ \textit{ so ist } x = k \cdot \log(\sqrt{2} + 1).$$

Beweis: Sei $\alpha := \frac{\pi}{4}$. Dann ist

$$1 = \tan(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} = \frac{2y}{1 - y^2}, \text{ mit } y := \tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned} 1 = \frac{2y}{1-y^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad y^2 + 2y - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da $y > 0$ ist, ist $e^{-x/k} = y = -1 + \sqrt{2}$, also

$$e^{x/k} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logarithmieren ergibt die gewünschte Formel. ∎

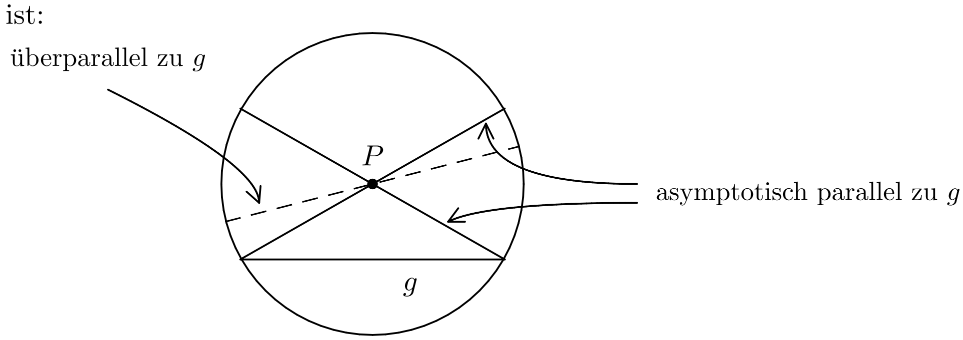
§ 5 Bierdeckel und andere Scheiben

Jahrhunderte lang wurde versucht, das Parallelenaxiom direkt zu beweisen – vergebens! Dann kam Saccheri auf die Idee, ein hyperbolisches Parallelenaxiom vorauszusetzen und daraus einen Widerspruch herzuleiten. Auch er scheiterte. Erst Johann Bolyai und Nikolai Lobatschewski erkannten die Möglichkeit einer widerspruchsfreien nichteuklidischen Geometrie. Indem sie von einer solchen Annahme ausgingen, entdeckten sie in der räumlichen hyperbolischen Geometrie eine Fläche, die Horosphäre, auf der alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt sind. Damit war die euklidische Geometrie gerettet und zugleich das Tor zu einer neuen Welt aufgestoßen worden.

Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der Geometrie war damit nachgewiesen, aber für einen endgültigen Beweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie fehlte noch ein Modell! Man hoffte, daß sich eine nichteuklidische Ebene in den euklidischen Raum (isometrisch) einbetten ließe. Diese Hoffnung wurde durch Hilbert zerstört, der bewies, daß das unmöglich sei.

Allerdings war noch nicht alles verloren. Man kann nämlich zumindest einen Teil der nichteuklidischen Ebene, der durch einen Horozykel und zwei Radien begrenzt wird, einbetten. Das war schon Beltrami gelungen, der die sogenannte *Pseudosphäre* untersuchte, eine Fläche, die durch Rotation einer *Traktrix* (auch als *Hundekurve* bekannt) entsteht. Allgemein ist auf Flächen von konstanter negativer Krümmung zumindest teilweise die nichteuklidische Geometrie verwirklicht.

Ein erstes vollständiges Modell ist das von Cayley-Klein-Beltrami: Als Ebene nehme man das Innere des Einheitskreises E, als Geraden die Stücke gewöhnlicher Geraden, die sich innerhalb von E befinden. Inzidenz- und Anordnungsaxiome lassen sich leicht überprüfen. Schwieriger wird es dagegen bei den Bewegungsaxiomen, dazu braucht man Kenntnisse der projektiven Geometrie. Deshalb können wir hier nicht auf die Details eingehen und müssen uns mit der Mitteilung begnügen, daß alle Axiome der neutralen Geometrie verifiziert werden können. Und man sieht sofort, daß das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt ist:



Man spricht hier scherzhaft auch von „Bierdeckel-Geometrie“. Leider ist dieses Modell nicht nur mit einer nichteuklidischen Metrik versehen, es ist außerdem nicht „konform“, d.h., man kann die Winkel nicht mit einem euklidischen Winkelmesser messen. Insbesondere ist es schon schwierig, rechte Winkel als solche zu erkennen.

Ein konformes Modell stammt von Poincaré, und das soll hier vorgeführt werden. Allerdings müssen wir dazu etwas ausholen.

Es erweist sich als vorteilhaft, im Komplexen zu arbeiten. Für diejenigen, die noch keine Funktionentheorie kennen, sollen hier in aller Kürze und ohne Beweis die wichtigsten Fakten zusammengestellt werden:

Durch die Zuordnung $z = x + \mathbf{i}y \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x, y)$ wird eine Bijektion zwischen dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und der reellen euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ hergestellt. Begriffe wie „offene Mengen“ lassen sich dann leicht übertragen. Die Spiegelung an der x-Achse ergibt im Komplexen den Übergang $z = x + \mathbf{i}y \mapsto \bar{z} := x - \mathbf{i}y$ zum Konjugiert-Komplexen. Aus der euklidischen Länge $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ wird im Komplexen der Betrag $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine komplexwertige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ kann in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden: $f = g + \mathbf{i}h$. Dann lassen sich auch Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit problemlos übertragen. Allerdings haben die Mathematiker frühzeitig erkannt, daß es recht sinnvoll ist, einen eigenen Differenzierbarkeitsbegriff im Komplexen einzuführen.

> Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, wenn der folgende Grenzwert existiert:
> $$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
> Man nennt $f'(z_0)$ die *(komplexe) Ableitung* von f in z_0. Ist f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar, so nennt man f auf U *holomorph*.

Man kann nun viele Eigenschaften komplexer Ableitungen nachweisen, indem man die entsprechenden Beweise aus der Theorie einer reellen Veränderlichen fast wörtlich abschreibt. Eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion ist dort auch stetig. Sind f_1 und f_2 holomorph, so gilt das z.B. auch für Linearkombinationen $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2$, das Produkt $f_1 \cdot f_2$ und den Quotienten $\dfrac{f_1}{f_2}$ (sofern $f_2(z) \neq 0$ auf U ist). Die Formeln für die Ableitungen sehen genauso wie im Reellen aus. Insbesondere sind die sogenannten *gebrochen linearen Transformationen*

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \text{mit } ad - bc \neq 0,$$

überall holomorph, wo sie definiert sind, also für $z \neq -\dfrac{d}{c}$. Um den Ärger mit den Definitionslücken zu vermeiden, ergänzt man die komplexen Zahlen gerne um ein zusätzliches Element ∞ und sagt dann, T bildet $z = -\dfrac{d}{c}$ auf ∞ ab. In diesem Sinne bilden die gebrochen linearen Transformationen eine Gruppe von bijektiven Abbildungen von $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich.

Zwei Ergebnisse müssen wir noch ohne Beweis übernehmen:

- Eine (im reellen Sinne) differenzierbare bijektive Abbildung f zwischen zwei offenen Mengen U und V in $\mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie konform (also winkeltreu) ist und die natürliche Orientierung der Ebene erhält.

- Sei $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ das Innere des *Einheitskreises*. Ist $f : E \to E$ eine bijektive holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in E$.

Die erste Aussage zeigt insbesondere, daß die gebrochen linearen Transformationen konforme Abbildungen sind. Wir wollen eine solche Transformation

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

etwas näher untersuchen. Dabei unterscheiden wir 2 Fälle:

1. Fall: $c = 0$.
Setzt man $A := \dfrac{a}{d}$ und $B := \dfrac{b}{d}$, so erhält man die *komplex affin-lineare* Funktion

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

Ist $A = \alpha + \mathbf{i}\beta$, so entspricht die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ der linearen Transformation

$$\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \circ \binom{x}{y}$$

der Ebene. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene.

2. Fall: $c \neq 0$.

Setzt man diesmal $A := \dfrac{bc-ad}{c}$ und $B := \dfrac{a}{c}$, so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz+d} + B &= \frac{(a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der sogenannten *Inversion* $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ zusammen.

5.1 Hilfssatz. *Jede Gerade und jeder Kreis kann durch eine Menge der Gestalt*

$$M = \{\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ *und* $c\bar{c} > \alpha\delta$ *beschrieben werden.*

Ist $\alpha = 0$, *so liegt eine Gerade vor, andernfalls ein Kreis.*

Beweis: 1) Ist $\alpha = 0$, so muß automatisch $c \neq 0$ sein, und die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

ist eine Gerade. Umgekehrt kann jede Gerade so geschrieben werden.

2) Ist $\alpha \neq 0$, so kann man dadurch dividieren, also o.B.d.A. annehmen, daß $\alpha = 1$ ist. Dann ist $r := \sqrt{c\bar{c} - \delta}$ eine positive reelle Zahl, und der Kreis um $u := -\bar{c}$ mit Radius r ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |z-u| = r \quad &\Longleftrightarrow \quad (z-u)(\bar{z}-\bar{u}) = r^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + (u\bar{u} - r^2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0. \end{aligned}$$

∎

Jetzt können wir eine besondere Eigenschaft der gebrochen linearen Funktionen beweisen:

5.2 Satz. *Eine lineare Transformation* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *mit* $ac - bd \neq 0$ *bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.*

Zum Beweis betrachten wir eine Menge der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$. Wir müssen zeigen, daß $T(M)$ wieder eine solche Gestalt hat: Dafür reicht es, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Sei $w = Az + B$. Dann gilt:

$$z = Cw + D, \text{ mit } C := 1/A \text{ und } D := -B/A.$$

Liegt $z \in M$, dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(Cw+D)(\overline{Cw+D}) + c(Cw+D) + \bar{c}(\overline{Cw+D}) + \delta \\ &= (\alpha C\bar{D})w\bar{w} + (\alpha C\bar{D} + cC)w + (\alpha\bar{C}D + \bar{c}\bar{C})\bar{w} \\ &\quad + (\alpha D\bar{D} + cD + \bar{c}\bar{D} + \delta), \end{aligned}$$

Also liegt w wieder auf einer Menge vom gewünschten Typ.

2) Nun sei $w = \dfrac{1}{z}$. Dann ist auch $z = \dfrac{1}{w}$, und es gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muß, können wir mit $w\bar{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Auch hier ist das Bild von M wieder eine Menge vom gewünschten Typ. ∎

Unser Ziel ist jetzt, alle bijektiven konformen (reell-differenzierbaren) Abbildungen von E auf sich zu bestimmen.

Die Konjugation $S(z) := \bar{z}$ ist sicher eine solche Abbildung. Sie kehrt allerdings die Orientierung der Ebene um. Eine orientierungstreue konforme Abbildung muß holomorph sein, eine nicht orientierungstreue konforme Abbildung kann aus der Konjugation und einer holomorphen Abbildung zusammengesetzt werden. Es reicht also, die holomorphen bijektiven Abbildungen von E auf sich zu bestimmen.

Einfachstes Beispiel ist eine Drehung D_θ um den Winkel θ um den Nullpunkt. Übernimmt man die Eulersche Schreibweise

$$e^{\mathbf{i}\theta} := \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta,$$

so ist

$$D_\theta(x + \mathbf{i}y) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + \mathbf{i}(x\sin\theta + y\cos\theta) = e^{\mathbf{i}\theta} \cdot (x + \mathbf{i}y).$$

Man kann die Drehung also als Multiplikation mit einer komplexen Zahl auffassen, und damit stellt sie eine bijektive holomorphe Abbildung dar.

5.3 Satz. *Ist $\alpha \in E$, so wird durch*

$$T_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

eine bijektive holomorphe Abbildung $T_\alpha : E \to E$ mit $T_\alpha(\alpha) = 0$ definiert.

BEWEIS: T_α ist eine lineare Transformation. Das Bild des Randes ∂E des Einheitskreises kann nur ein Kreis oder eine Gerade sein. Man rechnet aber leicht nach:

$$z\bar{z} = 1 \implies T_\alpha(z)\overline{T_\alpha(z)} = 1.$$

Also ist $T_\alpha(\partial E) = \partial E$.

Die Definitionslücke $\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ liegt außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{E}$, und da $\alpha \in E$ auf $0 \in E$ abgebildet wird, ist T_α tatsächlich eine bijektive holomorphe Abbildung von E auf sich. ■

Man nennt die Abbildungen T_α *verallgemeinerte Translationen.*

5.4 Satz. *Jede bijektive holomorphe Abbildung $f : E \to E$ hat die Gestalt*

$$f = D_\theta \circ T_\alpha,$$

mit einer Drehung D_θ und einer verallgemeinerten Translation T_α.

BEWEIS:

1) Ist $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in E$. Auf der zusammenhängenden offenen Menge $E \setminus \{0\}$ hat demnach die holomorphe Funktion $\dfrac{f(z)}{z}$ konstant den Betrag 1. Nach dem Maximumprinzip, einem weiteren hier nicht bewiesenen Satz der Funktionentheorie, muß dann $\dfrac{f(z)}{z}$ selbst konstant sein. Und als Konstante kommt nur eine Zahl der Gestalt $e^{\mathrm{i}\theta}$ in Frage.

2) Sei nun f beliebig, $\alpha := f^{-1}(0)$. Dann ist $f \circ T_\alpha^{-1}(0) = f(\alpha) = 0$. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, daß $f \circ T_\alpha^{-1} = D_\theta$ für ein geeignetes θ ist. Also ist $f = D_\theta \circ T_\alpha$. ■

Sei nun $\mathcal{B}$ die von der Konjugation S, den Drehungen D_θ und den verallgemeinerten Translationen T_α erzeugte Gruppe aller konformen bijektiven Abbildungen von E auf sich. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{B}$ auch *Automorphismen* von E. Wir wollen nun auf E eine Geometrie einführen, deren Bewegungsgruppe gerade $\mathcal{B}$ ist. Zu diesem Zweck suchen wir eine $\mathcal{B}$-invariante Metrik auf E, also eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(z, w) \geq 0$ für alle $z, w \in E$.
2. $d(z, w) = d(w, z)$.
3. $d(z, w) = 0 \iff z = w$.

4. $d(z,w) \le d(z,u) + d(u,w)$.
5. $d(f(z), f(w)) = d(z,w)$ für jeden Automorphismus f von E.

Behauptung: Wenn wir noch fordern, daß $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{d(0,t)}{t} = 1$ ist, also d im Nullpunkt „fast euklidisch", und außerdem $d(0,x_1) + d(x_1,x_2) = d(0,x_2)$ für x_1, x_2 reell und $0 < x_1 < x_2 < 1$, so ist die Metrik schon festgelegt.

Beweis: Es gebe eine Metrik der gewünschten Art, und für $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < 1$ sei $\psi(t) := d(0,t)$. Da $T_r(r) = 0$ ist, ist

$$d(r, r+\varepsilon) = d(T_r(r), T_r(r+\varepsilon)) = \psi(T_r(r+\varepsilon)).$$

Also muß gelten: $\psi(r+\varepsilon) = \psi(r) + \psi(\dfrac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2})$.

Das ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(r+\varepsilon) - \psi(r)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\psi(\frac{\varepsilon}{1-r\varepsilon-r^2}) \\
&= \frac{1}{1-r\varepsilon-r^2}\cdot\left[\psi(\frac{\varepsilon}{1-r\varepsilon-r^2})\Big/\frac{\varepsilon}{1-r\varepsilon-r^2}\right] \\
&\longrightarrow \frac{1}{1-r^2}\ (\text{für } \varepsilon \to 0\ )
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: ψ ist differenzierbar, und es ist $\psi'(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$, also

$$d(0,r) = \psi(r) - \psi(0) = \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r} + c,$$

für reelles $r > 0$. Läßt man noch r gegen Null gehen, so erhält man, daß $c = 0$ sein muß.

Sind $z, w \in E$ beliebig, so ist $T_z(z) = 0$ und $T_z(w) = \dfrac{w-z}{1-\bar{z}w}$. Indem man noch eine Drehung dahinter schaltet, gewinnt man einen Automorphismus T von E mit

$$T(z) = 0 \quad \text{und} \quad T(w) = \delta(w,z) := |\frac{w-z}{1-\bar{z}w}|.$$

Dann muß $d(z,w) = d(0, \delta(w,z))$ sein, und der rechte Ausdruck ist oben schon berechnet worden. ∎

Die obigen Berechnungen sollten nur die Motivation für unser Tun liefern. Aber jetzt gilt tatsächlich:

5.5 Satz. *Durch*

$$d(z,w) := \frac{1}{2}\log\frac{1+\delta(z,w)}{1-\delta(z,w)}$$

wird eine $\mathcal{B}$-invariante Metrik auf E definiert.

Beweis:

$\delta(z,w) = |\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}| = |\dfrac{w-z}{1-\bar{z}w}|$ ist unabhängig von der Reihenfolge von z und w, stets ≥ 0 und genau dann $= 0$, wenn $z = w$ ist. Diese Eigenschaften vererben sich sofort auch auf $d(z,w)$.

Ist T ein Automorphismus von E und sind $w_1, w_2 \in E$ beliebige Punkte, so gilt mit $w_1 := Tz_1$ und $w_2 := Tz_2$: $F := T_{w_1} \circ T \circ T_{z_1}^{-1}$ ist auch ein Automorphismus von E, jetzt aber mit $F(0) = 0$. Also ist F eine Drehung D_θ, und es folgt:

$$T_{w_1}(w_2) = T_{w_1} \circ T(z_1) = F \circ T_{z_1}(z_2) = D_\theta \circ T_{z_1}(z_2),$$

also $\delta(w_1, w_2) = |T_{w_1}(w_2)| = |T_{z_1}(z_2)| = \delta(z_1, z_2)$ und damit

$$d(Tz_1, Tz_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(w_1, w_2)}{1 - \delta(w_1, w_2)} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = d(z_1, z_2).$$

Insbesondere ist $d(z, w) = d(0, \delta(z, w))$.

Es bleibt die Dreiecks-Ungleichung zu zeigen. Wegen der Bewegungsinvarianz genügt es, den Fall $d(z, w) \leq d(z, 0) + d(0, w)$ zu betrachten. Ist $z = re^{\mathbf{i}\tau}$ und $w = se^{\mathbf{i}\sigma}$, sowie $\alpha := \sigma - \tau$, so gilt:

$$\begin{aligned} d(z, 0) + d(0, w) &= d(0, r) + d(0, s) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\log \frac{1 + r}{1 - r} + \log \frac{1 + s}{1 - s}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1 + \frac{r+s}{1+rs}}{1 - \frac{r+s}{1+rs}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(r, se^{\mathbf{i}\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1 + R}{1 - R}, \end{aligned}$$

mit $R := \delta(se^{\mathbf{i}\alpha}, r)$. Wir setzen

$$g(\alpha) := R^2 = |\frac{r - se^{\mathbf{i}\alpha}}{1 - rse^{\mathbf{i}\alpha}}|^2 = \frac{r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha}{1 + r^2 s^2 - 2rs \cos \alpha}.$$

$g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und man rechnet leicht nach, daß genau dann $g'(\alpha) = 0$ ist, wenn $\sin \alpha = 0$ ist, also wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ ist. Nun ist

$$g(0) = \left(\frac{r - s}{1 - rs}\right)^2 \leq \left(\frac{r + s}{1 + rs}\right)^2 = g(\pi),$$

also nimmt $g(\alpha)$ für $\alpha = \pi$ sein globales Maximum an. Damit ist $R = \sqrt{g(\alpha)} \leq \sqrt{g(\pi)} = \dfrac{r + s}{1 + rs}$ und $d(z, w) \leq d(z, 0) + d(0, w)$. ■

Wir brauchen im folgenden noch die Länge von Wegen. Ohne weitere Motivation wird definiert:

Definition. Sei $\gamma : [a, b] \to E$ ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

die *euklidische Länge* von γ, und

$$L_h(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\,dt$$

die *hyperbolische Länge* von γ.

Man kann zeigen:

5.6 Satz.

1. *Beide Längenbegriffe sind unabhängig von der Orientierung (dem Durchlaufungssinn) des Weges, und die Länge eines zusammengesetzten Weges ist die Summe der einzelnen Längen.*
2. *Es ist stets* $L_h(\gamma) \geq L(\gamma) \geq 0$.
3. $L_h(f \circ \gamma) = L_h(\gamma)$, *für jedes* $f \in \mathcal{B}$.
4. $d(z, w) = \inf\{L_h(\gamma) \mid \gamma \text{ verbindet } z \text{ mit } w \text{ in } E\}$.

Beweis: 1) und 2) sind trivial.

3) Hier benutzen wir die komplexe Differenzierbarkeit der Automorphismen des Einheitskreises: Für $z, z_0 \in E$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{|f'(z_0)|}{1 - |f(z_0)|^2} &= \lim_{z \to z_0} \frac{\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|} \cdot \delta(f(z), f(z_0)) \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|} \cdot \delta(z, z_0) \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|1 - \bar{z}_0 z|} = \frac{1}{1 - |z_0|^2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
L_h(f \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{1 - |f \circ \gamma(t)|^2}\,dt \\
&= \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} \cdot |\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\,dt = L_h(\gamma).
\end{aligned}$$

4) Wir betrachten zunächst die Verbindungswege zwischen 0 und r, mit $0 < r < 1$. Sei $\gamma_0(t) := t$ auf $[0, r]$ und $\gamma = \gamma_1 + \mathbf{i}\gamma_2 : [0, r] \to E$ ein beliebiger Weg mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(r) = r$. Dann ist

$$\begin{aligned}
L_h(\gamma) &= \int_0^r \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\,dt \geq \int_0^r \frac{\gamma_1'(t)}{1 - \gamma_1(t)^2}\,dt \\
&= \int_0^r \frac{dt}{1 - t^2} = L_h(\gamma_0) = d(0, r).
\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir den Abstand zweier beliebiger Punkte $z_1, z_2 \in E$. Dann gibt es einen Automorphismus f von E mit $f(z_1) = 0$ und $f(z_2) = r := \delta(z_1, z_2) > 0$. Ist $\widetilde{\gamma}_0(t) := f^{-1} \circ \gamma_0(t)$, so ist

$$L_h(\widetilde{\gamma}_0) = L_h(\gamma_0) = d(0, r) = d(z_1, z_2).$$

Ist γ irgend ein anderer Verbindungsweg von z_1 und z_0, so verbindet $f \circ \gamma$ die Punkte 0 und r, und daher ist

$$L_h(\gamma) = L_h(f \circ \gamma) \geq L_h(\gamma_0) = d(z_1, z_2).$$

Damit ist alles gezeigt. ■

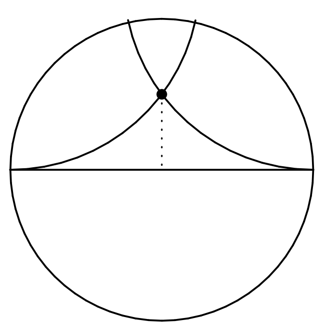
Wir haben sogar gezeigt, auf welchen Wegen die hyperbolische Länge jeweils ihr Minimum annimmt, nämlich auf den Bildern von Abschnitten der positiven reellen Achse unter hyperbolischen Bewegungen. Dies können wieder nur Abschnitte von Geraden oder Kreisen sein. Da die Transformationen aus $\mathcal{B}$ konform sind, müssen die Bildkurven in der Verlängerung den Rand des Einheitskreises unter einem rechten Winkel treffen. Das tun nur Geraden durch den Nullpunkt oder gewisse Kreise, die sogenannten *Orthokreise*.

Jetzt haben wir alles für unser Modell beisammen:

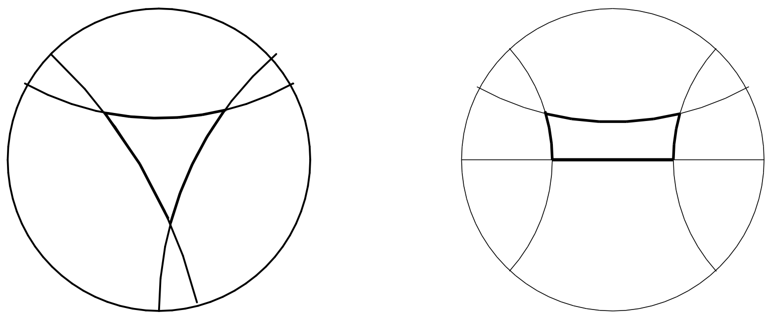
Als Ebene $\mathcal{E}$ benutzen wir das Innere des Einheitskreises E, als Geraden die Orthokreise (incl. der euklidischen Geraden durch den Nullpunkt). Die Inzidenz- und Anordnungsaxiome sind offensichtlich erfüllt. Und da alle hyperbolischen Geraden in diesem Modell homöomorph zu einem offenen Intervall und damit zur rellen Achse sind, ist auch das Dedekind-Axiom erfüllt.

Die Schwierigkeiten, die üblicherweise bei den Bewegungsaxiomen auftreten, haben wir schon durch die Konstruktion beiseite geräumt. Als Bewegungsgruppe nehmen wir natürlich die Gruppe $\mathcal{B}$. Sie setzt sich zusammen aus den verallgemeinerten Translationen T_α, den Drehungen D_θ um 0 und der Spiegelung $z \mapsto \bar{z}$. Dann sieht man leicht, daß alle Bewegungs-Axiome erfüllt sind.

In der vorliegenden Geometrie ist offensichtlich das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt:



Man kann auch leicht Dreiecke mit einer Winkelsumme $< 180°$ finden, oder Saccheri-Vierecke, in denen die Hypothese vom spitzen Winkel erfüllt ist.



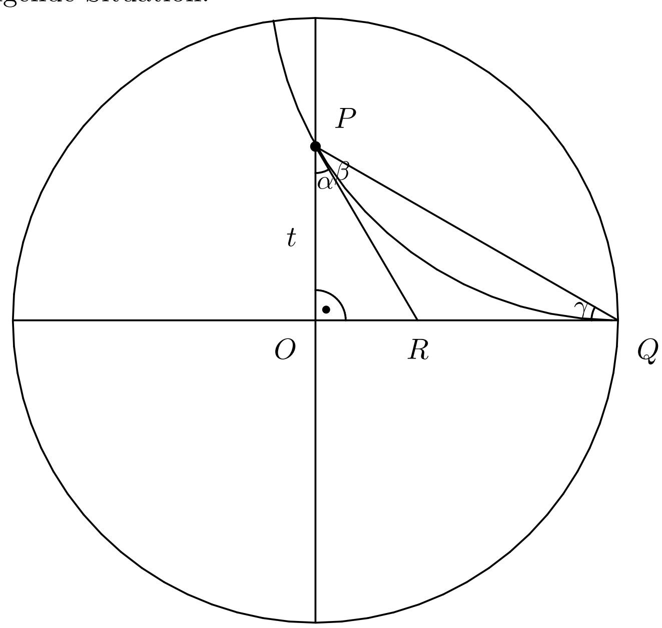
In unserem Modell können wir nun alles berechnen, was wir wollen. Wir werden das am Beispiel des Parallelitätswinkels demonstrieren:

Jeder auf einem von 0 ausgehenden Strahl befindlichen Strecke mit der euklidischen Länge t ist auch ihre hyperbolische Länge

$$x = x(t) := \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

zugeordnet. Dann ist $\quad e^{2\cdot x(t)} = \dfrac{1+t}{1-t}$.

Wir betrachten nun folgende Situation:



Es sei O der Nullpunkt, $P := \mathbf{i}t$ und $\alpha := \Pi(x(t))$. $Q := 1$ ist für die nichteuklidische Geometrie auf E ein idealer Punkt. Die hyperbolische Parallele zu $\overrightarrow{OQ}$ durch P ist der Orthokreis, der die reelle Achse bei Q tangential berührt und die imaginäre Achse bei P unter dem Winkel α schneidet. Die (euklidische) Tangente an diesen Orthokreis in P möge die reelle Achse in R treffen.

Von nun an können wir rein euklidisch argumentieren! Die beiden Tangenten PR und QR treffen sich auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$. Also ist das Dreieck QPR gleichschenklig, und die Basiswinkel $\beta := \angle QPR$ und $\gamma := \angle PQR$ sind gleich. Im rechtwinkligen Dreieck QPO gilt daher:

$$\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) + \beta = \pi, \qquad \text{also } \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Da $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ und allgemein $\tan(\varphi - \psi) = \dfrac{\tan\varphi - \tan\psi}{1 + \tan\varphi\tan\psi}$ ist, folgt:

$$\tan(\beta) = \frac{1 - \tan(\alpha/2)}{1 + \tan(\alpha/2)}.$$

Da außerdem die Kathete $\overline{OQ}$ des Dreiecks QPO die Länge 1 hat, gilt die Gleichung $t : 1 = \tan\gamma$, und damit:

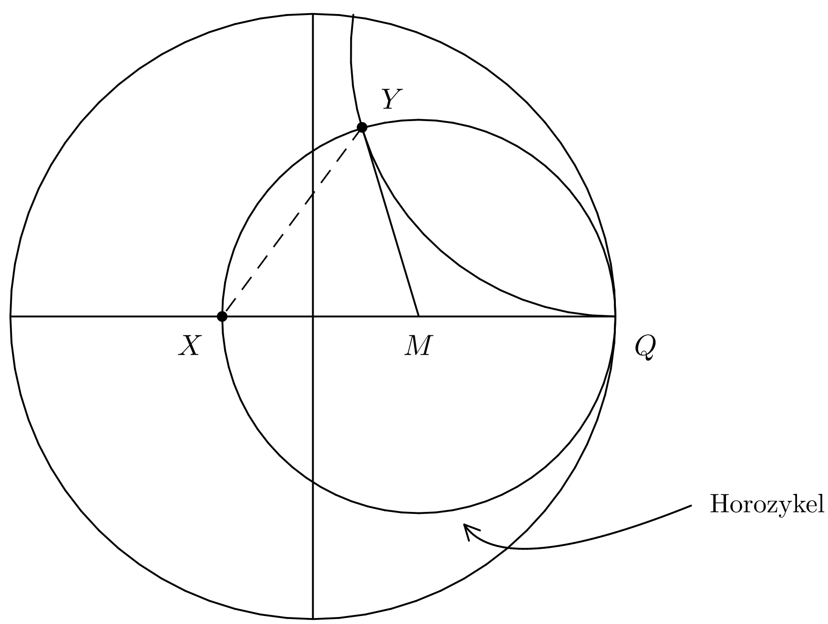
$$e^{2x} = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1 + \frac{1-\tan(\alpha/2)}{1+\tan(\alpha/2)}}{1 - \frac{1-\tan(\alpha/2)}{1+\tan(\alpha/2)}} = \frac{1}{\tan(\alpha/2)},$$

also

$$\boxed{\tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-2x}.}$$

So einfach ist die berühmte Formel für den Parallelitätswinkel im Poincaré-Modell herzuleiten!

Zum Schluß wollen wir uns noch einen Horozykel ansehen:



Sei k ein Orthokreis durch Q, der eine zu $\overrightarrow{OQ}$ asymptotisch parallele hyperbolische Gerade darstellt. Seien $X \in \overline{OQ}$ und $Y \in k$ korrespondierende Punkte. Dann ist $\angle YXQ \mathrel{\widehat{=}} \angle XYQ$, und zwar im hyperbolischen Sinne. Die hyperbolische Verbindungsstrecke zwischen X und Y ist ein Orthokreis-Bogen, dessen Sehne die euklidische Verbindungsstrecke von X und Y ist. Aber dann muß auch $\angle YXM \mathrel{\widehat{=}} \angle XYM$ sein, im euklidischen Sinne, wenn M der Schnittpunkt der Tangente an k in Y mit der reellen Achse ist. Nun können wir wieder rein euklidisch arbeiten. Es ist $\overline{MQ} = \overline{MY}$, und da das Dreieck YXM gleichschenklig ist, ist auch $\overline{XM} = \overline{YM}$.

Das bedeutet, daß X, Y und Q auf dem euklidischen Kreis um M durch Q liegen. In der hyperbolischen Geometrie ist dieser Kreis ein Horozykel.

Aufgaben und Anmerkungen

Einen ersten Eindruck von der Proportionenlehre des Eudoxus soll die folgende Aufgabe geben:

Afg. 1: Betrachtet werden *Größen* (Längen, Flächen o.ä.) gleicher Art. Sie können auf naive Weise addiert und miteinander verglichen werden, insbesondere gilt das Assoziativ- und das Kommutativgesetz. Ist $n \in \mathbb{N}$ und a eine Größe, so setzt man $na := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-\text{mal}}$. Sind a und b zwei Größen, so gilt genau eine der drei Relationen $a < b$, $a = b$ oder $a > b$. Nach Eudoxus definiert man nun:

- Das *Verhältnis* $a : b$ existiert, falls es Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $ma > b$ und $nb > a$ ist.
- Es ist $a : b = c : d$, falls für beliebige Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} ma & < & nb & \Longrightarrow & mc & < & nd, \\ ma & = & nb & \Longrightarrow & mc & = & nd, \\ ma & > & nb & \Longrightarrow & mc & > & nd. \end{array}$$

- Es ist $a : b > c : d$, falls es Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $ma > nb$, aber $mc \le nd$ ist.

Beweisen Sie:

1. $a : b = c : d \implies (a + c) : (b + d) = a : b$.
2. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $ka : kb = a : b$.
3. Ist $a : b > c : d$ und $c : d > e : f$, so ist auch $a : b > e : f$.

Die Beweise erfordern viele Fallunterscheidungen. Und man muß sich davor hüten, irgendwelche Symbole mit Inhalten zu versehen, die nicht aus den obigen Definitionen hervorgehen.

Afg. 2: In Kapitel I, §2, wird ein Beispiel für ein Mini-Axiomensystem („Bäume" und „Reihen") vorgeführt. Beweisen Sie – unter Verwendung der schon bekannten Sätze – die folgenden Aussagen:

1. Alle Bäume sind in gleich vielen Reihen enthalten.
2. Alle Reihen enthalten gleich viele Bäume.
3. Jede Reihe enthält genau 2 Bäume.
4. Es gibt genau 4 Bäume und 6 Reihen.

Die Beweise sind etwas trickreich!

In (1) betrachte man zwei Bäume s und t, die jeweils in n bzw. m Reihen enthalten sind. Eine davon ist jeweils die, in der s und t beide enthalten sind, und dazu gibt es eine disjunkte Reihe C. Man konstruiere dann jeweils Bijektionen von $\{2, \ldots, n\}$ bzw. $\{2, \ldots, m\}$ nach C.

Zu (2): Ist A eine beliebige Reihe mit k Elementen, A' die zu A disjunkte Reihe und s ein Baum in A', so liegt s in $k+1$ Reihen. Aber diese Anzahl ist nach (1) für alle Bäume gleich.

Zum Beweis von (3) nimmt man an, es gebe eine Reihe A mit $k \geq 3$ Bäumen. A' sei die dazu disjunkte Reihe. Ist $a_1 \in A$ und $a_1' \in A'$, so gibt es genau eine Reihe B, in der sowohl a_1 und a_1' enthalten sind. B' sei die dazu disjunkte Reihe. Sie muß einen Baum $a_2 \in A$ und einen Baum $a_2' \in A'$ enthalten, aber dann sieht man leicht, daß es in der Reihe A keinen dritten Baum mehr geben kann.

(4) dürfte nun keine Schwierigkeit mehr bereiten.

Afg. 3: Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge und $\mathcal{L}$ ein nicht leeres System von nicht leeren echten Teilmengen von $\mathcal{P}$, so daß folgende Axiome erfüllt sind:

P-1 Zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{P}$ liegen in genau einem $l \in \mathcal{L}$.

P-2 Zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{L}$ enthalten genau ein gemeinsames Element aus $\mathcal{P}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{P}$ enthält mindestens 3 Elemente, und jedes $l \in \mathcal{L}$ enthält mindestens 2 Elemente. Ist $\mathcal{P}$ endlich, aber nicht Vereinigung von zwei verschiedenen Elementen von $\mathcal{L}$, so hat jedes $l \in \mathcal{L}$ gleich viele Elemente. Ist $q+1$ diese Anzahl, so besitzt $\mathcal{P}$ q^2+q+1 Elemente.

Die Aufgabe handelt von projektiver Geometrie. Daß $\mathcal{P}$ mindestens 3 Elemente enthält, ist leicht zu sehen, und auch die Tatsache, daß jedes $l \in \mathcal{L}$ mindestens 2 Elemente enthält. Wir bezeichnen $\mathcal{P}$ als *projektive Ebene* und die Teilmengen l als *projektive Geraden.*

Ist $\mathcal{P}$ endlich und nicht Vereinigung zweier Geraden, so kann man zu je zwei gegebenen Geraden l_1, l_2 immer einen Punkt $P \in \mathcal{P} \setminus l_1 \cup l_2$ finden. Die Projektion von l_2 auf l_1 mit Zentrum P stellt dann eine Bijektion zwischen l_1 und l_2 her.

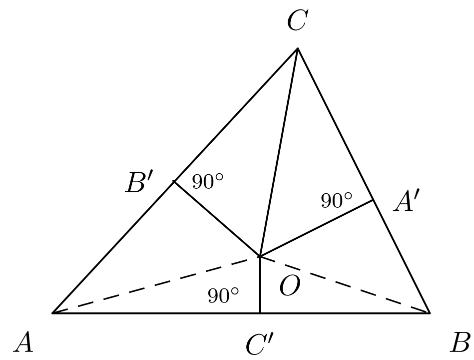
Sei $P \in \mathcal{P}$ fest gewählt. Da jeder Punkt der Ebene auf einer Geraden durch P liegt, muß man nur diese Geraden zählen. Ist nun l eine zu P disjunkte Gerade, so schneidet l jede der Geraden durch P, denn wegen Axiom P-2 gibt es keine Parallelen. Mit dieser Information kommt man zum Ziel.

Afg. 4: Gefährlich ist es, wenn man sich auf den Augenschein verläßt. In dieser Aufgabe darf alles aus der Schulgeometrie verwendet werden:

Behauptung: Jedes Dreieck ist gleichschenklig!

Beweis:

Im Dreieck ΔABC wird der Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ mit der Mittelsenkrechten zu AB ermittelt, und von dort aus wird jeweils das Lot auf AC und auf BC gefällt.



1. $C'O = C'O$, $AC' = C'B$ und $\angle AC'O = \angle OC'B$.
2. Also ist $\Delta AC'O \mathrel{\widehat{=}} \Delta OC'B$ (SWS), und daher $OA = OB$.
3. $CO = CO$, $\angle B'CO = \angle A'CO$ und $\angle CB'O = \angle CA'O$.
4. Also ist $\Delta CB'O \mathrel{\widehat{=}} \Delta CA'O$ (SWW), und daher $CB' = CA'$ und $OB' = OA'$.
5. Da außerdem $\angle OB'A = \angle OA'B$ ist, ist auch $\Delta OB'A \mathrel{\widehat{=}} \Delta OA'B$ (SSW). Dieser Kongruenzsatz kann nur angewandt werden, wenn der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. Aber das ist hier der Fall.
6. Also ist $AB' = BA'$.
7. Da $AC = AB' + B'C$ und $BC = BA' + A'C$ ist, folgt: $AC = BC$. Q.e.d.!

Arbeiten Sie den Beweis nach und finden Sie den Fehler!

Afg. 5 : Sei p eine **Primzahl**. Geben Sie ein Modell $\mathcal{M}_4$ für die Inzidenz-Axiome I-1, I-2 und I-3 an, das zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt:

(P) $\forall$ Geraden g $\forall$ Punkte P mit $P \notin g$ $\exists!$ Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \varnothing$.

(E) Es gibt eine Gerade mit genau p Punkten.

Zeigen Sie, daß alle Geraden gleich viel Punkte enthalten. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Punkte und Geraden in dem Modell.

Man konstruiert eine endliche affine Ebene mit den gewünschten Eigenschaften: Der Körper $K := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Restklassen modulo p besitzt genau p Elemente. Man setze $\mathcal{E} := K \times K$ und als Geraden die Mengen

$$l = \{(x, y) \mid ax + by = r\},\ a, b, r \in K \text{ und } (a, b) \neq (0, 0).$$

Dann hat $\mathcal{E}$ genau p^2 Elemente, und jede Gerade enthält p Elemente. Zum Nachrechnen ist es sinnvoll, zwischen vertikalen Geraden $\{(x, y) \mid x = c\}$ und schrägen Geraden $\{(x, y) \mid y = mx + t\}$ zu unterscheiden. Die Bedingungen (I-2), (I-3) und (P) lassen sich leicht mit der Theorie linearer Gleichungen verifizieren. Dazu braucht man, daß K ein Körper ist. Insgesamt gibt es $p(p + 1)$ Geraden.

Afg. 6 : Untersuchen Sie, ob in den folgenden Modellen die Inzidenz-Axiome erfüllt sind:

1. Modell $\mathcal{M}_5$:

   Die Ebene sei der $\mathbb{R}^2$. Die Geraden seien alle Kurven, die einer der folgenden Gleichungen genügen (mit $a, b, m \in \mathbb{R}$):

   i) $x = a$,

   ii) $y = mx + b$, mit $m \leq 0$,

   iii) $y = \begin{cases} mx + b & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}mx + b & \text{für } x > 0 \end{cases}$, mit $m > 0$.

2. Modell $\mathcal{M}_6$:

   Die Ebene sei die Menge $\mathcal{E}_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y > 0\}$. Die Geraden seien alle nicht-leeren Mengen der Gestalt

$$l = \{(x, y) \in \mathcal{E}_+ \mid ax + by = r\},\ a, b, r \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0).$$

Untersuchen Sie, ob in den Modellen $\mathcal{M}_5$ und $\mathcal{M}_6$ das euklidische Parallelenaxiom (die Eigenschaft (P) aus der vorigen Aufgabe) erfüllt ist!

$\mathcal{M}_5$ ist die sogenannte *Moulton-Ebene*. Mit viel Rechnerei (Fallunterscheidungen) kann man nachweisen, daß die Inzidenzaxiome und das Parallelenaxiom erfüllt sind.

$\mathcal{M}_6$ ist auch als *Quadranten-Ebene* bekannt. Die Inzidenzaxiome sind erfüllt, nicht aber (P). Vielmehr gilt das hyperbolische Parallelenaxiom: Es gibt eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$, so daß durch P zwei verschiedene Parallelen zu l gehen.

Afg. 7: Ein Modell $\mathcal{M}_7$ sei wie folgt konstruiert:

Für einen Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bezeichne

$$[\mathbf{x}] := \mathbb{R}\mathbf{x} = \{t \cdot \mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade im $\mathbb{R}^3$, die durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{0}$ geht.

Als *Ebene* in dem zu konstruierenden Modell nehme man die Menge

$$\mathbf{P} := \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}.$$

Als *Geraden* nehme man die Mengen

$$l_E := \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in E \text{ und } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\},$$

wobei E eine Ebene (im üblichen Sinne) im $\mathbb{R}^3$ ist, die durch den Nullpunkt geht.

Zeigen Sie:

1. Durch je zwei (verschiedene) Punkte von $\mathbf{P}$ geht genau eine Gerade.

2. Je zwei (verschiedene) Geraden in $\mathbf{P}$ treffen sich in genau einem Punkt.

Dieses Modell liefert wieder die reell-projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Es ist isomorph zum Modell $\mathcal{M}_3$.

$\boxed{\textbf{Afg. 8:}}$ Benutzen Sie die Ergebnisse von Kapitel I, §4, bis Satz I.4.6 einschließlich, und beweisen Sie die folgenden 4er-Relationen:

Ist $A - B - C$ und $B - C - D$, so ist auch $A - B - D$ und $A - C - D$.

$\boxed{\textbf{Afg. 9:}}$ Ist $A \neq B$ und $A - P - B$, so gilt:

$$\overline{AB} = \overline{AP} \cup \overline{PB} \quad \text{und} \quad \overline{AP} \cap \overline{PB} = \{P\}.$$

Benutzen Sie dabei alles bis Satz I.4.7.

$\boxed{\textbf{Afg. 10:}}$ Es seien g und g' zwei Geraden, sowie $\mathcal{H}$ eine der durch g bestimmten Halbebenen. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{H}$ auch eine der durch g' bestimmten Halbebenen, so ist $g = g'$. Benutzen Sie dabei alles bis Satz I.4.13.

$\boxed{\textbf{Afg. 11:}}$ Die Relationen $>$ und $<$ für Strecken verhalten sich genauso wie die entsprechenden Relationen für reelle Zahlen. Aber das muß man natürlich erst einmal beweisen. Zeigen Sie daher für beliebige Strecken:

1. $\overline{AB} < \overline{CD} \iff \overline{CD} > \overline{AB}$.
2. $\overline{AB} < \overline{CD}$ und $\overline{CD} < \overline{EF} \implies \overline{AB} < \overline{EF}$.

Die **Bewegungen** sind auf eine recht abstrakte Art eingeführt worden. Dabei stand aber die konkrete Vorstellung Pate, daß sich Bewegungen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen zusammensetzen sollten. Spiegelungen an Geraden haben wir auch tatsächlich in der Gruppe $\mathcal{B}$ finden können. Darüber hinaus wissen wir aber bisher sehr wenig über die Zusammensetzung von $\mathcal{B}$. Dem soll nun in den folgenden Anmerkungen und Aufgaben etwas abgeholfen werden.

Es erweist sich als sehr nützlich, die Elemente $\varphi \in \mathcal{B}$ nach ihrer Fixpunktmenge

$$\text{Fix}(\varphi) := \{X \in \mathcal{E} \mid \varphi(X) = X\}$$

zu klassifizieren.

Satz: Sei $\varphi \in \mathcal{B}$ eine Bewegung. Wenn $\text{Fix}(\varphi)$ wenigstens zwei verschiedene Elemente X_1, X_2 enthält, dann ist φ entweder die Identität oder die Spiegelung an der Geraden X_1X_2.

Beweis: Sei $l := X_1X_2$. Offensichtlich ist $\varphi(l) = l$. Und weil X_1 und X_2 Fixpunkte sind, muß auch $\varphi(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{X_1X_2}$ sein. Sei P ein Punkt, der nicht auf l liegt, und $Q := \varphi(P)$. Dann gibt es genau eine Bewegung ψ mit $\psi(X_1) = X_1$, $\psi(X_2) \in \overrightarrow{X_1X_2}$ und $\psi(P) \in H(l, Q)$. Ist $H(l, Q) = H(l, P)$, so ist dies die Identität, andernfalls die Spiegelung an l. Aber φ hat genau die Eigenschaften. ∎

Wir brauchen also nur noch die Situation zu betrachten, daß $\mathrm{Fix}(\varphi)$ leer oder einpunktig ist.

Beginnen wir mit dem Fall $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{P\}$. Hier beschäftigen wir uns zunächst mit einem Spezialfall:

Definition. Sei $P \in \mathcal{E}$ ein fester Punkt. Eine *Punktspiegelung an* P ist eine Bewegung $\sigma \in \mathcal{B}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\sigma(P) = P$.
- Für $X \neq P$ ist stets $X - P - \sigma(X)$.

Satz: Zu jedem $P \in \mathcal{E}$ gibt es genau eine Punktspiegelung σ_P an P.

Beweis: Sei $X_0 \neq P$ ein beliebiger Punkt, und X_0^* ein Punkt mit $X_0 - P - X_0^*$. Außerdem seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ die beiden durch $X_0X_0^*$ bestimmten Halbebenen. Dann gibt es genau eine Bewegung σ mit $\sigma(P) = P$ und $\sigma(X_0) \in \overrightarrow{PX_0^*}$, die $\mathcal{H}_1$ mit $\mathcal{H}_2$ vertauscht. Insbesondere ist $X_0 - P - \sigma(X_0)$. Dann ist aber auch $X - P - \sigma(X)$ für jeden Punkt $X \neq P$ auf der Geraden $l := X_0X_0^*$, und P ist der einzige Fixpunkt von σ. Außerdem ist $\sigma \circ \sigma(X) = X$ für $X \in l$.

Sei nun $X \notin l$, etwa $X \in \mathcal{H}_1$. Dann liegt $\sigma(X)$ in $\mathcal{H}_2$, und es gilt:

$$\angle X_0PX \mathrel{\widehat{=}} \angle\sigma(X_0)P\sigma(X) \mathrel{\widehat{=}} \angle X_0P\sigma^2(X).$$

Da $\sigma^2(X)$ wieder in $\mathcal{H}_1$ liegt, muß $\sigma^2(X) = X$ sein. Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{X\sigma(X)}$, so gilt:

$$X - M - \sigma(X) \quad \text{und} \quad \sigma(X) - \sigma(M) - X.$$

Da σ die Länge von Strecken erhält, muß $\sigma(M) = M$ sein. Aber der einzige Fixpunkt von σ ist P. Also ist $X - P - \sigma(X)$, d.h. σ ist Punktspiegelung an P. ∎

Nebenbei haben wir übrigens gezeigt, daß $\sigma_P \circ \sigma_P = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ ist.

Afg. 12: Zeigen Sie für die Punktspiegelung σ_P:

1. Für jede Gerade g ist $\sigma_P(g)$ parallel zu g.
2. Sind g, h zwei Geraden, die bei P einen rechten Winkel miteinander bilden, und sind σ_g, σ_h die Spiegelungen an diesen Geraden, so ist $\sigma_P = \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \sigma_g$.

Man kann σ_P auch die *Drehung um* $180°$ *bei* P nennen.

Zum Beweis von (1): Jede Gerade durch P wird auf sich selbst abgebildet. Ist dagegen $P \notin g$ und $\sigma_P(g) \cap g \neq \varnothing$, so muß der Schnittpunkt ein Fixpunkt sein. (2) ist ziemlich einfach zu zeigen.

Wir haben oben festgestellt, daß eine Punktspiegelung schon dadurch charakterisiert wird, daß $X_0 - P - \sigma(X_0)$ für einen einzigen Punkt X_0 gilt. Wenn das nicht erfüllt ist, muß für den Fixpunkt P gelten:

$$\forall\, X \neq P \text{ ist } P \notin X\sigma(X).$$

P, X und $\sigma(X)$ sind dann niemals kollinear, aber X und $\sigma(X)$ liegen auf dem gleichen Kreis um P. Das sind typische Eigenschaften einer Drehung, und deshalb definieren wir:

Definition. Eine Bewegung $\varrho \in \mathcal{B}$ heißt *Drehung um P*, falls gilt:

$$\varrho = \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Fix}(\varrho) = \{P\}.$$

Satz: Eine Bewegung $\varrho \in \mathcal{B}$ ist genau dann eine Drehung um P, wenn es Geraden g, h mit $P \in g \cap h$ gibt, so daß $\varrho = \sigma_g \circ \sigma_h$ ist.

Beweis: Sei zunächst $\varrho = \sigma_g \circ \sigma_h$ mit $P \in g \cap h$. Ist $g = h$, so ist $\varrho = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. Ist $g \neq h$, so ist $g \cap h = \{P\}$, also P ein Fixpunkt von ϱ.

Wir nehmen an, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $F \neq P$ von ϱ. Dann ist $\sigma_g(F) = \sigma_h(F)$. Wäre $F \notin g$ oder $F \notin h$, so wäre $F \neq \sigma_g(F) = \sigma_h(F)$. Das bedeutet aber, daß g und h beide die Mittelsenkrechte von F und $\sigma_g(F)$ sind, also $g = h$. Widerspruch! Also ist $\mathrm{Fix}(\varrho) = \{P\}$.

Sei umgekehrt ϱ eine Drehung um P. Wenn ϱ die Punktspiegelung σ_P ist, sind wir fertig. Wenn nicht, wählen wir eine beliebige Gerade g durch P und einen Punkt $Q' \neq P$ auf g. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \notin g$ mit $\varrho(Q) = Q'$. Sei h die Winkelhalbierende von $\angle QPQ'$, $R' \in \mathcal{E} \setminus h$ und R der Punkt mit $\varrho(R) = R'$. Dann gilt:

1. $\sigma_h(P) = \sigma_g \circ \sigma_h(P) = P = \varrho(P)$.
2. $\sigma_h(Q) \in \overrightarrow{PQ'}$, $\sigma_g \circ \sigma_h(Q) \in \overrightarrow{PQ'}$ und $\varrho(Q) \in \overrightarrow{PQ'}$.

Sei $\mathcal{H}$ diejenige durch g bestimmte Halbebene, in der R' liegt. Dann ist entweder $\sigma_h(R) \in \mathcal{H}$ oder $\sigma_g \circ \sigma_h(R) \in \mathcal{H}$. Also ist entweder $\varrho = \sigma_h$ (aber das kann nicht sein), oder es ist $\varrho = \sigma_g \circ \sigma_h$. ■

Afg. 13: Zeigen Sie: Sind P, X und Y drei nicht kollineare Punkte, so gibt es genau eine Drehung ϱ um P mit $\varrho(X) \in \overrightarrow{PY}$.

Es bleiben noch die Bewegungen ohne Fixpunkt zu untersuchen.

Definition. Eine Bewegung $\tau \in \mathcal{B}$ heißt *Verschiebung*, falls τ entweder die Identität ist oder falls eine Gerade g existiert, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\tau(g) = g$.
2. Ist g' nicht parallel zu g, so ist $\tau(g') \cap g' = \varnothing$.

Im zweiten Fall heißt τ auch *Verschiebung längs der Geraden g*.

Afg. 14: Zeigen Sie:

1. Ist $\tau \neq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ eine Verschiebung, so ist $\mathrm{Fix}(\tau) = \varnothing$.
2. Eine Bewegung τ ist genau dann eine Verschiebung längs einer Geraden f, wenn es Punkte $A, B \in f$ mit $A \neq B$ gibt, so daß gilt:

$$\tau = \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_g \circ \sigma_h,$$

   wobei g die Senkrechte zu f in B und h die Senkrechte zu f in A ist.
3. Gilt sogar das euklidische Parallelenaxiom und ist τ eine Verschiebung längs f, $P \in f$ und $Q \notin f$, so bilden die Punkte P, $\tau(P)$, $\tau(Q)$ und Q ein Parallelogramm.

Zum Beweis von (1) betrachte man einen beliebigen Punkt $X \in \mathcal{E}$. Ist τ Verschiebung längs f und $X \in f$, so wähle man $P \in \mathcal{E} \setminus f$. Ist $X \notin f$, so wähle man $P \in f$. In beiden Fällen ist $l := PX$ nicht parallel zu f und kann daher keinen Fixpunkt enthalten.

Zu (2): Es ist $\sigma_B \circ \sigma_A = (\sigma_g \circ \sigma_f) \circ (\sigma_f \circ \sigma_h) = \sigma_g \circ \sigma_h$.

Sei zunächst τ eine Verschiebung längs f. Wähle dann $C \in f$ beliebig. Es sei $B := \tau(C) \in f$ und A der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CB}$, sowie $\psi := \sigma_g \circ \sigma_h$. Dann ist $\psi(C) = B$ und $\psi(A) \in \overrightarrow{B\sigma_g(A)}$, und ψ bildet die durch f bestimmten Halbebenen jeweils auf sich ab. τ bildet f auf sich ab und respektiert dabei die Orientierung von f. Würde τ die durch f bestimmten Halbebenen vertauschen, so müßte τ einen Fixpunkt haben. Das ist nicht der Fall, also ist $\psi = \tau$.

Sei umgekehrt $\tau = \sigma_g \circ \sigma_h$. Dann ist klar, daß $\tau(f) = f$ ist. Ist l eine nicht zu f parallele Gerade, so gilt für einen Punkt R:

Ist $R \in l$, so ist $\sigma_R(l) = l$; ist $R \notin l$, so ist $\sigma_R(l) \cap l = \varnothing$.

Da $AB = f$ ist, folgt: $\sigma_B \circ \sigma_A(l) \cap l = \varnothing$.

Die Beschreibung von Verschiebungen in der euklidischen Geometrie durch Parallelogramme sollte jeder alleine schaffen.

Bemerkung: Ist $\tau = \sigma_B \circ \sigma_A$ eine Verschiebung längs der Geraden $f = AB$, so kann man für alle $X \in f$ zeigen:

1. $\overline{X\tau(X)} \widehat{=} 2 \cdot \overline{AB}$.
2. $X - \tau(X) - \tau^2(X)$.

Das erläutert den Begriff „Verschiebung“ noch ein bißchen besser. Man kann übrigens wirklich zeigen, daß sich jede Bewegung aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen zusammensetzen läßt, letztendlich also allein aus Spiegelungen.

Gilt das euklidische Parallelenaxiom, so kann man die Bewegungen noch anders charakterisieren:

$\boxed{\textbf{Afg. 15:}}$ Für Punkte X, Y der Ebene $\mathcal{E}$ sei $d(X, Y)$ der *Abstand von X und Y*. Eine *Isometrie* ist eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, für die gilt:

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{E} : \quad d(\varphi(X), \varphi(Y)) = d(X, Y).$$

1. Zeigen Sie, daß φ bijektiv ist und die „Zwischen"-Beziehung respektiert.

2. Die Menge $\text{Fix}(\varphi) := \{X \in \mathcal{E} \mid \varphi(X) = X\}$ ist entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade oder ganz $\mathcal{E}$.

3. φ bildet jedes rechtwinklige Dreieck auf ein dazu kongruentes rechtwinkliges Dreieck ab.

4. Jede Verschiebung, Drehung oder Spiegelung ist eine Isometrie.

5. Zu jeder Isometrie φ gibt es eine Verschiebung τ und eine Drehung ϱ, so daß $\varrho \circ \tau \circ \varphi$ eine Spiegelung oder die Identität ist. Insbesondere ist jede Isometrie eine Bewegung.

Die drei folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit dem Kreis. Sie können im Rahmen der neutralen Geometrie behandelt werden.

Afg. 16: In Satz I.4.46 wird gezeigt: Ist $\mathcal{K}$ ein Kreis, A ein Punkt im Inneren des Kreises und l eine Gerade durch A, so schneidet l den Kreis in mindestens 2 Punkten. Zeigen Sie, ohne I.4.46 zu benutzen:

1. Eine Gerade trifft einen Kreis in höchstens zwei Punkten.

2. Ist ein Dreieck ABC und ein Punkt D mit $A-D-B$ gegeben, so gilt: Ist $\overline{BC} \geq \overline{AC}$, so ist $\overline{CD} < \overline{BC}$.

3. Das Innere eines Kreises ist eine konvexe Menge.

Zu (1): Wenn l den Kreis in 3 Punkten trifft, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Spitze und einer gemeinsamen Seite, deren Basen auf der gleichen Geraden liegen. Aber dann müssen die Basiswinkel alle rechte Winkel sein, und das ist nicht möglich.

(2) erledigt man mit Hilfe von Euklids Proposition 18. Unter der Annahme, daß $\overline{CD} \geq \overline{BC}$ ist, erzielt man einen Widerspruch zum Außenwinkelsatz am Dreieck ADC. (3) ist dann klar.

Afg. 17: Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis um O, $C \in \mathcal{K}$ ein Punkt und t die Senkrechte zu OC in C. Unter den gleichen Voraussetzungen wie eben beweise man:

1. Jeder Punkt $X \in t$ mit $X \neq C$ liegt im Äußeren von $\mathcal{K}$.

2. Es gibt nur eine Gerade g mit $\mathcal{K} \cap g = \{C\}$.

Zu (1): Das Dreieck OXC ist rechtwinklig bei C. Also muß $\overline{OX} > \overline{OC}$ sein.

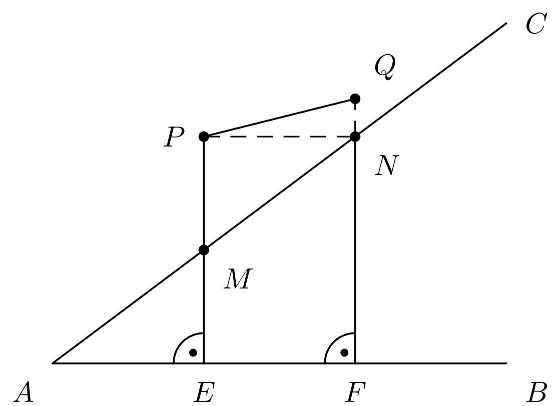
Und zu (2): Ist $g \neq t$ eine Gerade mit $\mathcal{K} \cap g = \{C\}$, so fälle man das Lot von O auf g mit Fußpunkt F. Dann ist $F \neq C$. Nun wähle man $D \in g$ mit $C - F - D$ und $\overline{CF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{FD}$. Dann liegt auch D auf dem Kreis.

Bemerkung: Die eindeutig bestimmte Gerade t, die $\mathcal{K}$ nur in C trifft, nennt man natürlich die *Tangente an* $\mathcal{K}$ *in* C.

Afg. 18: Sei $\mathcal{K}_1$ ein Kreis um A und $\mathcal{K}_2$ ein Kreis um B. Wenn $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ wenigstens drei verschiedene Punkte enthält, dann ist $A = B$, und die Radien der beiden Kreise sind gleich.

Auch dieser bekannte Satz gilt schon in der neutralen Geometrie. Unter den angegebenen Voraussetzungen gibt es drei nicht-kollineare Punkte $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$. Die Mittelsenkrechten zu $\overline{X_1X_2}$ und $\overline{X_2X_3}$ müssen beide die Punkte A und B enthalten. Da nicht $g = h$ sein kann, muß $A = B$ sein. Von nun an kann die gesamte neutrale Geometrie vorausgesetzt werden. Dazu gehört auch die Erkenntnis, daß die Hypothese vom stumpfen Winkel falsch ist.

Afg. 19: Beweisen Sie die Behauptung von Proklos, daß der Abstand zwischen zwei sich schneidenden Geraden (also das Lot von einem Punkt der einen Geraden auf die andere Gerade) beliebig groß wird.



AB, AC seien die beiden Geraden, o.B.d.A. sei der Winkel zwischen ihnen spitz. Wähle Punkte $M, N \in AC$ mit $A - M - N$ und $M - N - C$, sowie $\overline{AM} \mathrel{\hat=} \overline{MN}$, und fälle das Lot von M bzw. N auf AB, mit Fußpunkt E bzw. F. Die Annahme $\overline{ME} > \frac{1}{2}\overline{NF}$ soll zum Widerspruch geführt werden. Dazu verlängere man $\overline{EM}$ über M hinaus zu $\overline{EP}$, mit $\overline{EM} \mathrel{\hat=} \overline{MP}$. Und man verlängere $\overline{FN}$ über N hinaus zu $\overline{FQ}$, mit $\overline{FQ} \mathrel{\hat=} \overline{EP}$. Dann ist das Viereck $EFQP$ ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{EF}$ und stumpfen Gipfelwinkeln. Das kann nicht sein.

Indem man nun dieses Verfahren beliebig fortsetzt, erhält man schließlich mit dem Archimedes-Axiom den Satz von Proklos.

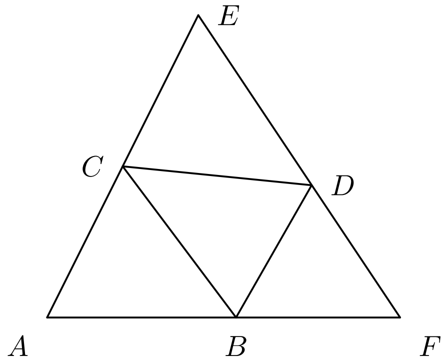
Afg. 20: Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit Mittellinie $\overline{MN}$.

1. Zeigen Sie, daß sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ auf der Mittellinie treffen. Halbieren sie sich dabei gegenseitig?

2. Wird die Mittellinie durch den Schnittpunkt der Diagonalen halbiert?

Afg. 21 : Sei g eine Gerade und $P \notin g$, sowie α_0 ein fester Winkel. Dann gibt es eine Gerade h durch P, die g unter einem Winkel $\alpha < \alpha_0$ schneidet.

Afg. 22 : Es folgt die Andeutung eines Beweises von Legendre, in dem dieser versucht hat,
(E-P) zu beweisen. Führen Sie den Beweis aus, finden Sie den Fehler und formulieren Sie eine Aussage, deren Äquivalenz zu (E-P) implizit bewiesen wird:



Über der Seite $\overline{BC}$ eines Dreiecks ABC werde ein kongruentes Dreieck CBD errichtet, so daß $\angle CBD = \angle ACB$ und $\angle BCD = \angle ABC$ ist. E bzw. F seien die Schnittpunkte einer Geraden durch D mit AC bzw. AB. Unter der Hypothese des spitzen Winkels ist dann die Winkelsumme im Dreieck $AFE \leq 180° - 2\delta(ABC)$ ($\delta(\ldots) :=$ Defekt).

Wiederholt man die Konstruktion, so erhält man nach endlich vielen Schritten ein Dreieck, dessen Winkelsumme $\leq 180° - 2^n\delta(ABC)$ ist. Widerspruch!

Axiomensysteme

1. Euklids Axiomensystem

Primitive Terme:

Punkt, Linie, Gerade (:= Strecke), Fläche, Ebene.

Definierte Begriffe:

Winkel, Rechter (spitzer, stumpfer) Winkel, Kreis, Durchmesser, Parallele.

Die Postulate:

Gefordert soll sein:

I. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;

II. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann;

III. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann;

IV. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind;

V. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich auf der Seite treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Die Axiome:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Was einander deckt, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.
6. Zwei Strecken umfassen keine Fläche.

Um das System wenigstens halbwegs zu vervollständigen, braucht man ein Axiom im Stile von Pasch, das Kreisaxiom, ein Axiom über die Superposition (Kongruenz) und das Archimedes-Axiom.

2. Hilberts Axiomensystem

Es werden hier nur die Axiome der *ebenen* Geometrie aufgeführt. Also gibt es nur *eine* Ebene, und alle Punkte und Geraden liegen in dieser Ebene.

Gruppe I: Axiome der Verknüpfung

PRIMITIVE TERME: Punkte, Geraden, Ebene, Inzidenz.

I.1/2: Zu zwei verschiedenen Punkten A, B gibt es genau eine Gerade a, auf der A und B liegen.

I.3: Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen.

Gruppe II: Axiome der Anordnung

PRIMITIVER TERM: zwischen.

Liegt B zwischen A und B, so schreibt man: $A - B - C$.

II.1: Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$, und A, B, C sind paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.

II.2: Zu A, C gibt es wenigstens einen Punkt B mit $A - C - B$.

II.3: Von drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Unter einer *Strecke* versteht man ein System AB von zwei verschiedenen Punkten. Ist $A - X - B$, so sagt man: X liegt *innerhalb der Strecke*. Die Punkte A und B heißen die *Endpunkte* der Strecke.

II.4 (Pasch): Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und a eine Gerade, die keinen der drei Punkte enthält. Wenn a durch einen inneren Punkt der Strecke AB geht, so auch durch einen Punkt der Strecke AC oder einen Punkt der Strecke BC.

Man kann dann jede Gerade durch einen Punkt in zwei *Halbstrahlen* aufteilen. Und jede Gerade teilt die Ebene in zwei *Halbebenen* auf.

Gruppe III: Axiome der Kongruenz

PRIMITIVER TERM: kongruent („$\widehat{=}$“ als Beziehung zwischen Strecken).

III.1: Liegen die Punkte A, B auf der Geraden a und A' auf der Geraden a', so gibt es auf einem gegebenen (durch A' definierten) Halbstrahl von a' einen Punkt B' mit $AB \widehat{=} A'B'$.

III.2: Ist $A'B' \widehat{=} AB$ und $A''B'' \widehat{=} AB$, so ist auch $A'B' \widehat{=} A''B''$.

III.3: Seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame innere Punkte auf einer Geraden a, und genauso $A'B'$ und $B'C'$ auf einer Geraden a'. Wenn dann $AB \widehat{=} A'B'$ und $BC \widehat{=} B'C'$ ist, so ist auch $AC \widehat{=} A'C'$.

Es werden nun *Winkel* $\angle(h,k)$ als Paare von verschiedenen Halbstrahlen eingeführt, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen. Als neuer PRIMITIVER TERM wird die Kongruenz von Winkeln eingeführt. Außerdem wird definiert, was die inneren Punkte eines Winkels sind.

III.4: Ist ein Winkel $\angle(h,k)$ gegeben, sowie eine Gerade a', eine durch a' bestimmte Halbebene, ein Punkt O auf a' und ein durch O bestimmter Halbstrahl h' auf a', so gibt es genau einen ebenfalls von O ausgehenden Halbstrahl k', so daß $\angle(h,k) \mathrel{\widehat{=}} \angle(h',k')$ ist und die inneren Punkte dieses Winkels in der gegebenen Halbebene liegen.

Außerdem ist jeder Winkel $\angle(h,k)$ zu sich selbst kongruent.

Es werden noch *Dreiecke* und deren Seiten und Winkel definiert.

III.5: (SWS) Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \mathrel{\widehat{=}} A'B'$, $AC \mathrel{\widehat{=}} A'C'$ und $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle B'A'C'$ gelten, so ist auch $\angle ABC \mathrel{\widehat{=}} \angle A'B'C'$.

Hilbert definiert dann *Nebenwinkel* und *Rechte Winkel* und beweist, daß Rechte Winkel existieren und stets zueinander kongruent sind. Ein großer Teil der neutralen Geometrie kann nun hergeleitet werden.

Gruppe IV: Axiom von den Parallelen

IV.1: Ist a eine Gerade und A ein Punkt, der nicht auf a liegt, so gibt es höchstens eine Gerade, die durch A geht und a nicht schneidet.

Gruppe V: Axiome der Stetigkeit

V.1: (Archimedes) Sind AB und CD gegebene Strecken, so gibt es ein n, so daß das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf dem durch B gehenden Halbstrahl über B hinaus führt.

V.II: (Cantor) Auf der Geraden a seien Strecken A_1B_1, A_2B_2, ... gegeben, so daß $A_{i+1}B_{i+1} \subset A_iB_i$ ist und A_nB_n für großes n kleiner als jede vorgegebene Strecke wird. Dann existiert ein Punkt $X \in a$, der im Innern aller dieser Strecken liegt.

Bei den Stetigkeitsaxiomen wurden einige Begriffe benutzt, die zuvor erklärt werden müßten. Das geht aber genauso, wie es in dieser Vorlesung gemacht wurde. Außerdem benutzt Hilbert in Wirklichkeit nicht das Cantor-Axiom, sondern ein etwas schwer zu verstehendes Vollständigkeitsaxiom für Geraden.

3. Birkhoffs Axiomensystem

Während die anderen hier vorgestellten Axiomensysteme die Geometrie mehr oder weniger rein synthetisch aus dem Nichts aufbauen, verwendet Birkhoff als Grundlage die reellen Zahlen.

Primitive Terme: Punkte, Geraden, der Abstand $d(A, B)$ zweier Punkte als nichtnegative reelle (und von der Reihenfolge der Punkte unabhängige) Zahl, Winkel $\angle AOB$ als reelle Zahlen modulo 2π.

I) Das Postulat vom Lineal:

Zu jeder Geraden l gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi_l : l \to \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$|\varphi_l(B) - \varphi_l(A)| = d(A, B).$$

Man kann dann beweisen:

1. $d(A, B) = 0 \iff A = B$.
2. Drei verschiedene auf einer Geraden gelegene Punkte können auf genau eine Weise so mit A, B und C bezeichnet werden, daß gilt:
$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$
3. Ist $\psi : l \to \mathbb{R}$ irgendeine bijektive Abbildung mit der gleichen Eigenschaft wie φ_l, so gibt es eine Konstante c, so daß für jeden Punkt $A \in l$ gilt:
$$\psi(A) = \varphi_l(A) + c \quad \text{oder} \quad \psi(A) = -\varphi_l + c.$$

Ein markierter Nullpunkt und eine Richtung legen also schon die Skaleneinteilung des Lineals fest.

Man kann nun die „zwischen"-Beziehung definieren und Strecken, gerichtete Halbgeraden, Dreiecke usw. einführen.

II) Das Inzidenz-Postulat:

Zu zwei Punkten $P \neq Q$ gibt es genau eine Gerade l durch P und Q.

Nun kann man sagen, ob zwei Geraden sich schneiden oder parallel sind.

III) Das Postulat vom Winkelmesser:

Ist $\mathcal{S}_O$ die Menge aller von O ausgehenden Halbgeraden, so gibt es eine bijektive Abbildung $\omega : \mathcal{S}_O \to \mathbb{R} \bmod 2\pi$, so daß gilt:

a) Sind A, B zwei Punkte $\neq O$, die auf den Halbgeraden $l, m \in \mathcal{S}_O$ liegen, so ist $\angle AOB = \omega(m) - \omega(l) \bmod 2\pi$.

b) Sei r eine Gerade, die den Punkt O nicht enthält, und für $m \in \mathcal{S}_O$ sei $S(m)$ der Schnittpunkt von m mit r, sofern er existiert. Schließlich sei l ein Halbstrahl, für den $S(l)$ erklärt ist, und m_ν eine Folge von Halbstrahlen, für die ebenfalls $S(m_\nu)$ erklärt ist. Dann gilt:

$$\lim_{\nu\to\infty} d(S(m_\nu), S(l)) = 0 \implies \lim_{\nu\to\infty} \omega(m_\nu) = \omega(l).$$

Die Winkel sind bei Birkhoff also orientiert. Man kann nun einige Eigenschaften des Winkelmessers ω herleiten, analog zu denen des Lineals φ_l. Der Winkel π mod 2π heißt *gestreckter Winkel*, und $\pm\frac{\pi}{2}$ mod 2π heißt *rechter Winkel*.

IV) Das Ähnlichkeits-Postulat:

Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, sowie eine positive reelle Konstante k. Ist $d(A', B') = k \cdot d(A, B)$, $d(A', C') = k \cdot d(A, C)$ und $\angle B'A'C' = \pm\angle BAC$, so ist auch $d(B', C') = k \cdot d(B, C)$, $\angle C'B'A' = \pm\angle CBA$ und $\angle A'C'B' = \pm\angle ACB$.

Man nennt solche Dreiecke *ähnlich*, und wenn k sogar $= 1$ ist, nennt man sie *kongruent*.

Auf den ersten Blick verblüfft vielleicht die geringe Anzahl der Axiome, aber die haben es ja in sich. Die Postulate vom Lineal und vom Winkelmesser spiegeln wieder, wie die Kinder an den Schulen mit Hilfe des Geo-Dreiecks in die Anfangsgründe der Geometrie eingeführt werden. Das Ähnlichkeits-Postulat, das ja den SWS-Kongruenzsatz enthält, stellt die Mittel zur Verfügung, Dreiecke aus einzelnen Stücken zu konstruieren.

Und wo bleibt das Parallelenaxiom? Das steckt auch in Postulat IV, wie wir seit den Versuchen von Wallis wissen.

4. Das in der Vorlesung verwendete Axiomensystem

Die *Ebene* ist eine Menge $\mathcal{E}$, ihre Elemente heißen *Punkte*. Gewisse Teilmengen von $\mathcal{E}$ werden *Geraden* genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man: *X liegt auf g*, oder: *g enthält X*, oder: *X inzidiert mit g*. Für diese Relation zwischen Punkten, Geraden und der Ebene gelten die

Inzidenz-Axiome:

I-1) Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.

I-2) Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.

I-3) Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die durch zwei verschiedene Punkte A, B eindeutig bestimmte Gerade wird mit AB bezeichnet.

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ besteht eine Beziehung $A - B - C$. Man sagt dann: *B liegt zwischen A und C*.

Anordnungs-Axiome:

A-1) Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden, und sie liegen auf einer gemeinsamen Geraden. (Man sagt auch, sie sind *kollinear*).

A-2) Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.

A-3) Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei folgenden Beziehungen:

$$A - B - C \quad \text{oder} \quad B - C - A \quad \text{oder} \quad C - A - B.$$

A-4) Für alle $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.

Die *Strecke* $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte X mit $X = A$, $X = B$ oder $A - X - B$.

A-5) Ist l eine Gerade, sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf l liegen und ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$, so gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} \text{Entweder ist} \quad & \overline{AC} \cap l = \varnothing, \\ \text{oder} \quad & \overline{BC} \cap l = \varnothing. \end{aligned}$$

Es gibt gewisse bijektive Abbildungen von $\mathcal{E}$ auf sich, die *Bewegungen* genannt werden.

Bewegungs-Axiome:

B-1) Die Menge $\mathcal{B}$ aller Bewegungen bildet eine Gruppe. Insbesondere ist die identische Abbildung eine Bewegung.

B-2) Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.

B-3) Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(A) = O$.
2. $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$.
3. $\overline{\varphi(C)Q} \cap OP = \varnothing$.

B-4) Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

Ein *Strahl* $\overrightarrow{AB}$ besteht aus den Punkten von $\overline{AB}$ und allen Punkten X mit $A - B - X$. Unter dem *Winkel* $\angle AOB$ versteht man die Vereinigung der Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$.

B-5) Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$.

Zwei Figuren (Teilmengen von $\mathcal{E}$) M_1 und M_2 heißen *kongruent* (in Zeichen $M_1 \mathrel{\widehat{=}} M_2$), falls eine Bewegung φ mit $\varphi(M_1) = M_2$ existiert.

Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, so gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{CD}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CQ}$. Ist $Q = D$, so ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$. Ist $C - Q - D$, so sagt man: $\overline{AB} < \overline{CD}$. Ist $C - D - Q$, so sagt man: $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Stetigkeits-Axiome:

Der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* O und dem *Radius* $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{OP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$. P liegt *im Inneren des Kreises*, wenn $\overline{OP} < \overline{AB}$ ist, und *im Äußeren des Kreises*, wenn $\overline{OP} > \overline{AB}$ ist.

Das Kreis-Axiom S-1) Sind $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathcal{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch aus dem Äußeren von $\mathcal{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Wird eine Strecke $\overline{PQ}$ n-mal um eine zu $\overline{PQ}$ kongruente Strecke verlängert, so bezeichnet man das Ergebnis mit $n \cdot \overline{PQ}$.

Das Archimedes-Axiom S-2) Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

Die beiden Stetigkeitsaxiome S-1 und S-2 können ersetzt werden durch
das Dedekind-Axiom:

S) Sind ein Punkt O, ein von O ausgehender Strahl $\vec{s}$ und zwei Teilmengen $m_u, m_o \subset \vec{s}$ gegeben, so daß für alle $X \in m_u$ und alle $Y \in m_o$ die Beziehung $O - X - Y$ gilt, so gibt es einen Punkt S mit folgender Eigenschaft:

Für alle $X \in m_u \setminus \{S\}$ und alle $Y \in m_o \setminus \{S\}$ ist $X - S - Y$.

Parallelen-Axiome:

Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben.

Nun gilt entweder
das euklidische Parallelenaxiom (E-P) Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so geht durch P genau eine Parallele zu g.

oder
das hyperbolische Parallelenaxiom (H-P) Es gibt eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$, so daß durch P mindestens zwei verschiedene Parallelen gehen.

Literaturverzeichnis

Original-Literatur:

Natürlich kann man die Elemente des Euklid nicht im Original lesen, weil sie gar nicht mehr existieren, und die wenigsten werden sich die Mühe machen, Arbeiten von Gauß im Original nachzulesen. Im Folgenden handelt es sich also meist auch schon um Übersetzungen und Bearbeitungen.

Euklid. *Die Elemente.* Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235. Harri Deutsch Verlag, 1996.

Euclid. *The thirteen books of the elements, translated from the text of Heiberg by Sir Thomas L.Heath.* Dover Publications, 1956.

P. Stäckel / F. Engel. *Die Theorie der Parallellinien (Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie).* Teubner, Leipzig 1895 (Johnson Reprint Corporation, 1968).

P. Stäckel / F. Engel. *Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie.*

I *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij.*

II *Wolfgang und Johann Bolyai.*

Leipzig 1913 (Johnson Reprint Corporation, 1972).

H. Reichardt. *Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie.* Teubner, Archiv zur Mathematik, Band 4, 1985.

J. Bolyai. *Appendix (ed. by F.Kárteszi).* North-Holland, Amsterdam 1987.

D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* Teubner, Stuttgart 1987.

R. Bonola. *Non-Euclidean Geometry.* Dover Publications, 1955.

G. D. Birkhoff. *A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor.* Annals of Mathematics, vol. 33, April 1932.

G. D. Birkhoff / R. Beatley. *Basic Geometry.* Chelsea Publishing Company, 3. Auflage, New York 1959.

J.-Cl. Pont. *L'Aventure des Parallèles. Histoire de la Géométrie non Euclidienne. Précurseurs et Attardés.* Peter Lang, Bern 1986.

Biographien:

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner:

Bd. 15 *Carl Friedrich Gauß* (von H. Wußig)

Bd. 34 *Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski* (von A. Halameisär, H. Seibt)

Bd. 87 *Euklid* (von P. Schreiber)

Monographien zur nichteuklidischen Geometrie:

Die Reihenfolge entspricht ungefähr dem Einfluß, den die folgenden Monographien auf meine Vorlesung hatten.

R. J. Trudeau. *The Non-Euclidean Revolution.* Birkhäuser, 1986.

J. McCleary. *Geometry from a Differentiable Viewpoint.* Cambridge University Press, 1994.

A. P. Norden. *Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie.* VEB Wissenschaften, Berlin 1958.

R. L. Faber. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* Marcel Dekker, 1983.

B. Klotzek / E. Quaisser. *Nichteuklidische Geometrie.* VEB Wissenschaften, Berlin 1978.

G. E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.* Springer, 1975.

R. S. Millman / G. D. Parker. *Geometry. A Metric Approach with Models (second edition).* Springer, 1991.

D. Gans. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry.* Academic Press, 1973.

M. J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries (second edition).* Freeman and Company, San Francisco, 1974.

A. Filler. *Euklidische und nichteuklidische Geometrie.* BI-Wissenschaftsverlag, 1993.

A. Ramsay / R. D. Richtmyer. *Introduction to Hyperbolic Geometry.* Springer (Universitext), 1995.
Hierbei handelt es sich um eine gute und moderne Darstellung, die allerdings vom Aufbau her stark von meiner Vorlesung abweicht.

Es gibt noch weitere wichtige Quellen, in denen aber der Zugang zur nichteuklidischen Geometrie ganz anders gewählt wurde.

Sonstige Literatur zur allgemeinen Geometrie, zur Axiomatik oder speziell zur euklidischen Geometrie:

K. Borsuk / W. Szmielew. *Foundations of Geometry.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960.

E. E. Moise. *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Addison-Wesley, 1963.

N. W. Efimow. *Über die Grundlagen der Geometrie I.* Vieweg, 1970.

H. G. Forder. *The Foundations of Euclidean Geometry.* Dover Publications, 1958.

F. Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Springer, 1959.

H. Scheid. *Elemente der Geometrie.* BI-Wissenschaftsverlag, 1991.