0 Zusammenfassung des 1. Teils

Die *Ebene* ist eine Menge $\mathcal{E}$, ihre Elemente heißen *Punkte*. Gewisse Teilmengen von $\mathcal{E}$ werden *Geraden* genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man, *X liegt auf g*, oder auch, *g enthält X*. Man spricht auch von „Inzidenz“.

Für die Inzidenz zwischen Punkten, Geraden und der Ebene gilt:

Inzidenz-Axiome:

I-1) Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.

I-2) Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.

Definition.

1. Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnet AB die dadurch eindeutig bestimmte Gerade.

2. Punkte $A, B, C, \ldots$, die auf einer Geraden liegen, heißen *kollinear*.

Offensichtlich ist $AB = BA$.

I-3) Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht kollinear sind.

Definition. Haben die Geraden g und h genau einen Punkt X gemeinsam, so sagt man, sie *schneiden sich in X*. Wenn sie gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man sie *parallel*.

Ein Modell ist die gewöhnliche Ebene der analytischen Geometrie:

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Geraden sind die Mengen

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = r\},$$

wobei a, b, r reelle Zahlen mit $(a, b) \neq (0, 0)$ sind. Die Theorie der linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zeigt, dass die Inzidenz-Axiome erfüllt sind.

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ besteht eine Beziehung $A - B - C$. Wir sagen dann: *B liegt zwischen A und C*.

Anordnungs-Axiome:

A-1) Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden und liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

A-2) Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.

A-3) Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei folgenden Beziehungen:

$$A - B - C \quad \text{oder} \quad B - C - A \quad \text{oder} \quad C - A - B.$$

Definition. Seien $A, B \in \mathcal{E}$, $A \neq B$.

1. $\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\}$ heißt *Strecke mit den Endpunkten* A und B.
2. $\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - B - X\}$ heißt der *Strahl von* A *in Richtung* B.

Es gibt noch zwei weitere Anordnungsaxiome:

A-4) Für alle $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.

A-5) Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und l eine Gerade, die A, B und C nicht enthält. Ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$, so ist

$$\overline{AC} \cap l \neq \varnothing \quad \text{oder} \quad \overline{BC} \cap l \neq \varnothing.$$

Das Axiom A-4 entspricht dem Postulat II von Euklid über die Verlängerbarkeit von Geraden über einen Punkt hinaus. Das Axiom A-5 bezeichnet man als **Pasch-Axiom**.

Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte, so heißt

$$ABC := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

das *Dreieck* mit den *Ecken* A, B und C und den *Seiten* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$.

0.1 Satz. *Ist $A - B - C$ und $B - C - D$, so ist auch $A - B - D$ und $A - C - D$.*

0.2 Satz (4er-Relationen).

Ist $A - B - C$ und $A - C - D$, so ist auch $B - C - D$ und $A - B - D$.

0.3 Satz von Pasch. *Sei l eine Gerade, A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf l liegen und $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

$$\textit{Entweder ist} \quad \overline{AC} \cap l = \varnothing \quad \textit{oder} \quad \overline{BC} \cap l = \varnothing.$$

Sei nun eine Gerade $g \subset \mathcal{E}$ festgehalten. Für Punkte $A, B \in \mathcal{E} \setminus g$ erklären wir eine Relation

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap g = \varnothing.$$

Wir sagen dafür auch: A und B liegen auf der gleichen Seite von g. „Auf der gleichen Seite von g liegen" ist eine Äquivalenzrelation.

Definition. Ist $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade und $A \in \mathcal{E} \setminus g$, so heißt

$$H(g, A) := \{X \in \mathcal{E} \setminus g \mid X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } g \text{ wie } A\}$$

die durch A bestimmte Seite von g.

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ heißt *konvex*, wenn gilt:

Für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \neq B$ ist $\overline{AB} \subset \mathcal{M}$.

0.4 Satz. *Die Mengen $H(l, A)$ sind konvex.*

Definition. Es seien O, A, B drei nicht-kollineare Punkte. Unter dem *Winkel* $\angle AOB$ versteht man die Vereinigung der Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$.

Der Punkt O heißt *Scheitel* des Winkels, die beiden Strahlen heißen die *Schenkel* des Winkels.

Definition. Sei $\alpha = \angle AOB$. Dann nennt man $I(\alpha) := H(OA, B) \cap H(OB, A)$ *das Innere des Winkels* α. Die Menge $A(\alpha)$ aller Punkte, die weder auf α noch in $I(\alpha)$ liegen, bezeichnet man als *das Äußere des Winkels.*

Definition. A, B, C seien drei nicht-kollineare Punkte. Unter den *Winkeln des Dreiecks* ABC versteht man die *Winkel* $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle ACB$.

Die Menge $I(ABC) := I(\alpha) \cap I(\beta) \cap I(\gamma)$ nennt man *das Innere des Dreiecks.* Die Menge $A(ABC)$ aller Punkte, die nicht auf dem Dreieck und nicht im Inneren liegen, bezeichnet man als *das Äußere des Dreiecks.*

0.5 Folgerung. *Eine Gerade, die durch eine Ecke und einen inneren Punkt eines Dreiecks geht, schneidet die der Ecke gegenüberliegende Seite.*

Primitiver Term „Bewegung":

Wir fordern die Existenz gewisser Abbildungen von $\mathcal{E}$ auf sich, die wir *Bewegungen* nennen.

Bewegungs-Axiome:

B-1) Die Menge $\mathcal{B}$ aller Bewegungen bildet eine Gruppe.

Insbesondere ist die identische Abbildung eine Bewegung, jede Bewegung ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist wieder eine Bewegung.

B-2) Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden ab, und sie erhalten die Anordnung auf den Geraden. Insbesondere werden auch Strecken auf Strecken und Strahlen auf Strahlen abgebildet, denn all diese Mengen werden mit Hilfe der „zwischen"-Beziehung definiert.

B-3) Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(A) = O$.
2. $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$.
3. $\varphi(C) \in H(OP, Q)$.

0.6 Satz. *Sei $g = AB$ eine feste Gerade und $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ die beiden durch g bestimmten Halbebenen. Ist C ein beliebiger Punkt in $\mathcal{H}$, so gibt es genau eine Bewegung φ, die A auf A, B auf einen Punkt $B' \in \overrightarrow{AB}$ und C nach $\mathcal{G}$ abbildet. Unter diesen Bedingungen gilt:*

1. *Für alle $X \in \mathcal{E} \setminus g$ liegen X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von g.*
2. *Es ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.*
3. *Für alle $X \in g$ ist $\varphi(X) = X$.*

Eine Bewegung, die eine Gerade g punktweise festlässt und die durch g bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht, heißt *Spiegelung* an der Geraden g.

0.7 Satz. *Zu jeder Geraden gibt es genau eine Spiegelung.*

Unter einer *geometrischen Figur* verstehen wir eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{E}$.

Definition. Zwei geometrische Figuren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ heißen *kongruent* (in Zeichen: $\mathcal{F} \widehat{=} \mathcal{F}'$), falls es eine Bewegung $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt.

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

Ein weiteres Bewegungs-Axiom:

B-4) Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

Damit ist klar:

Ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

0.8 Satz über das Abtragen von Strecken. *Es sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OQ}$.*

Jetzt ist der Vergleich von Strecken möglich: Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, so gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{CD}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CQ}$. Dann muss genau eine der drei folgenden Aussagen zutreffen:

1. $Q = D$. Dann ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$.
2. Es ist $C - Q - D$. Dann sagt man: $\overline{AB} < \overline{CD}$.
3. Es ist $C - D - Q$. Dann sagt man: $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Das entspricht genau Euklids Vorstellung vom Vergleich zweier Strecken.

0.9 Satz (über die Addition und Subtraktion von Strecken). *Sei $A - B - C$ und $A' - B' - C'$. Ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$.*

Das entspricht Euklids Axiom 2: *Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.*

Definition. Seien ein Punkt $O \in \mathcal{E}$ und eine Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Die Menge

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{OP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}\}$$

heißt der *Kreis um O mit Radius $\overline{AB}$*.

Ein Punkt $Q \in \mathcal{E}$ *liegt im Inneren* des Kreises, wenn $Q = O$ oder $\overline{OQ} < \overline{AB}$ ist.

Der Punkt Q liegt *im Äußeren* des Kreises, wenn $\overline{OQ} > \overline{AB}$ ist.

Ein *Durchmesser* des Kreises ist eine Strecke $\overline{XY}$ mit $X, Y \in \mathcal{K}$ und $X - O - Y$.

Noch ein weiteres Bewegungsaxiom:

B-5) Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$.

Damit ist die Liste der Bewegungsaxiome vollständig!

Definition. Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle CAD$ mit der Eigenschaft $D - A - B$ heißen *Nebenwinkel*.

Definition. Sei $D - A - B$ und $E - A - C$. Sind die Geraden DB und EC voneinander verschieden, so nennt man die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DAE$ *Scheitelwinkel.*

0.10 Folgerung (Euklids Proposition 15). *Scheitelwinkel sind kongruent.*

BEWEIS: Wir benutzen die Bezeichnungen aus der Definition. Dann ist $\angle CAD$ Nebenwinkel zu $\angle BAC$ und auch zu $\angle DAE$. Also ist $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle DAE$. ■

Definition. Ein *rechter Winkel* ist ein Winkel, der zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

Wir können leicht rechte Winkel erzeugen:

0.11 Satz. *Sei g eine Gerade, φ die Spiegelung an g und $X \in \mathcal{E} \setminus g$. Weiter sei A der (eindeutig bestimmte) Punkt in $\overline{X\varphi(X)} \cap g$. Sind $B, D \in g$ mit $D - A - B$, so ist $\angle BAX$ ein rechter Winkel.*

0.12 Satz. *Je zwei rechte Winkel sind kongruent.*

Proposition 22: *Aus drei gegebenen Strecken a, b, c mit*

$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

kann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *pythagoräisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{1 + \omega_i^2})$ mit $\omega_i \in K_{i-1}$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine pythagoräische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\omega \mapsto \sqrt{1 + \omega^2}$ anwendet.

Mit $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller pythagoräischen Zahlen.

Die Menge

$$\mathcal{E} := \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$$

liefert ein Modell für die euklidische Geometrie. Dabei sind die Geraden die Mengen der Gestalt

$$g = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid ax + by = r\}, \quad a, b, r \in \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}), \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Die Bewegungen werden folgendermaßen gegeben.

$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ ergibt eine Translation um (a, b),

$(x, y) \mapsto (x, -y)$ ergibt die Spiegelung an der x-Achse

und

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bx}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

ergibt eine Drehung um den Nullpunkt $O := (0, 0)$, die $E := (1, 0)$ auf einen Punkt $P \in \overrightarrow{OC}$ abbildet, $C := (a, b)$.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist pythagoräisch, aber nicht $\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$.

Das Kreis-Axiom:

S-1) Sind $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathcal{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch aus dem Äußeren von $\mathcal{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Jetzt kann man das Programm Euklids durchführen:

0.13 Satz (Euklids Proposition 1). *Sind zwei Punkte A, B gegeben, so gibt es Punkte P und Q auf den beiden Seiten von AB, so dass die Dreiecke ABP und ABQ beide gleichseitig sind (also drei paarweise zueinander kongruente Seiten besitzen).*

Bei Hilbert kann der Satz so nicht bewiesen werden. Allerdings gilt:

0.14 Satz über die Existenz gleichschenkliger Dreiecke. *Zu Punkten $A \neq B$ gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{AB}$.*

Dafür benötigt man **nicht** das Kreisaxiom, und in späteren Sätzen kann man meist an Stelle von gleichseitigen Dreiecken auch gleichschenklige Dreiecke benutzen. Allerdings ergibt dieses Vorgehen im Sinne Hilberts keine Algorithmen zur geometrischen Konstruktion, es fehlen die Instrumente dafür (Zirkel und Lineal).

Euklids **Propositionen 2 und 3**, die sich mit dem Antragen von Strecken beschäftigen, sind überflüssig geworden, dank der Bewegungsaxiome. Euklids Methode liefert liefert allerdings ein Konstruktionsverfahren.

Euklids **Proposition 4** (SWS-Kongruenz) und **5** (Pons asinorum) folgen unmittelbar aus den Axiomen. **Proposition 6** ist die Umkehrung zu Proposition 5 („Ein Dreieck mit gleichen Basiswinkeln ist gleichschenklig") und kann ganz leicht durch Widerspruch bewiesen werden.

Proposition 7 stellt einen Hilfssatz für Proposition 8 zur Verfügung, den man auch direkt beweisen kann.

0.15 Satz (SSS, Euklids Proposition 8). *Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

0.16 Satz (Eulids Proposition 9, „Winkelhalbierung").

Zu einem gegebenen Winkel $\alpha = \angle AOB$ kann man genau einen Strahl $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$ mit $P \in I(\alpha)$ finden, so dass $\angle AOP \mathrel{\widehat{=}} \angle POB$ ist.

0.17 Satz (Euklids Proposition 10, „Streckenhalbierung").
Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau einen Punkt M mit

$$A - M - B \quad \text{und} \quad \overline{AM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MB}.$$

Definition. Sind g und h Geraden, die sich (genau) im Punkt O schneiden und dabei einen rechten Winkel einschließen, und ist $P \in h$ ein Punkt $\neq O$, so sagt man:

1. h ist eine *Senkrechte* zu g im Punkte O.
2. h ist ein *Lot* von P auf g mit Fußpunkt O.

0.18 Satz (Euklids Proposition 11, „Senkrechte errichten").
Ist g eine Gerade und $O \in g$, so kann man auf eindeutige Weise in O die Senkrechte zu g errichten.

Definition. Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und h die Senkrechte zu AB in M, so nennt man h auch die *Mittelsenkrechte* zu $\overline{AB}$.

Mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man leicht zeigen: Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} \mid \overline{AX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BX}\}.$$

0.19 Satz (Euklids Proposition 12, „Lot fällen"). *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt, so kann man von P aus ein Lot auf g fällen.*

Besonders wichtig ist das folgende Ergebnis.

0.20 Satz (Euklids Proposition 16, „Außenwinkelsatz).

Bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

0.21 Satz (Euklids Proposition 17).

In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte.

Definition. Ein *rechtwinkliges Dreieck* ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt *Hypotenuse*, die beiden anderen Seiten nennt man *Katheten*.

0.22 Satz (Euklids Proposition 18). *In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.*

0.23 Satz (Euklids Proposition 19). *In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel stets die größere Seite gegenüber.*

0.24 Folgerung. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse stets die größte Seite.*

Jetzt kann man zeigen:

0.25 Satz. *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis um den Punkt O, A ein Punkt im Innern von $\mathcal{K}$ und l eine Gerade durch A. Dann schneidet l den Kreis in zwei Punkten (auf verschiedenen Seiten von A).*

Damit kann man zeigen: Das Kreis-Axiom ist im pythagoräischen Modell nicht erfüllt!

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *platonisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit $\alpha_i \in K_{i-1}$ und $\alpha_i > 0$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine platonische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{}$ anwendet.

Mit $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller platonischen Zahlen.

Die Platonische Ebene $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ ist das Modell für die Geometrie, in der alle Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden.

S-2) Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

Man nennt die Axiome S-1 und S-2 auch die *Stetigkeitsaxiome*, aus Gründen, die weiter unten erläutert werden.

Das Axiom S-2 taucht bei Euklid nicht explizit auf. In der Proportionenlehre betrachtet er allerdings nur Verhältnisse von solchen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$, die das Archimedes-Axiom erfüllen.

In der platonischen Ebene gilt S-2, aber es gibt sogenannte *nicht-archimedische Körper* mit „unendlich kleinen" und „unendlich großen" Elementen, und in der mit Hilfe eines solchen Körpers modellierten Ebene gelten in gewissen Fällen alle bisherigen Axiome der Geometrie, nur nicht S-2.

In der modernen Literatur wird an Stelle der Stetigkeitsaxiome S-1 und S-2 meist ein anderes Axiom angegeben:

Das Dedekind-Axiom:

S) Sind ein Punkt O, ein von O ausgehender Strahl $\overrightarrow{s}$ und zwei Teilmengen $m_u, m_o \subset \overrightarrow{s}$ gegeben, so dass für alle $X \in m_u$ und alle $Y \in m_o$ die Beziehung $O - X - Y$ gilt, so gibt es einen Punkt S mit folgender Eigenschaft:

Für alle $X \in m_u \setminus \{S\}$ und alle $Y \in m_o \setminus \{S\}$ ist $X - S - Y$.

Die Dedekind-Eigenschaft lässt sich leicht auf Geraden und Winkel übertragen. Das Axiom S ist von den bisherigen Axiomen unabhängig. Allerdings kann man die Axiome S-1 und S-2 ohne große Mühe aus S herleiten. Ein passendes Modell ist die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$.

0.26 Satz (Euklids Proposition 20, „Dreiecks-Ungleichung").

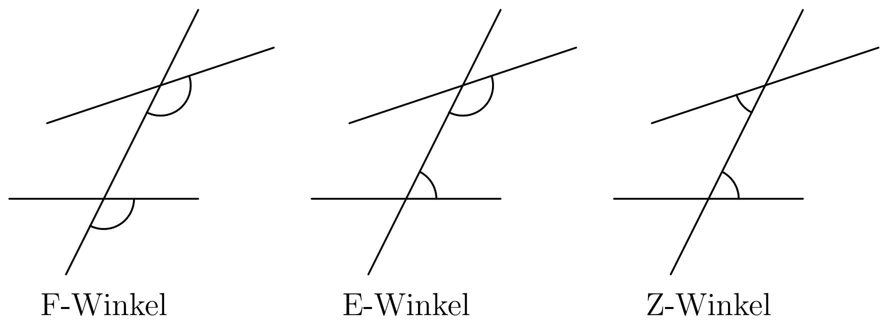
In einem Dreieck sind zwei beliebige Seiten zusammen größer als die dritte Seite.

Definition. Die Gerade h werde von zwei verschiedenen Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten. Dabei entstehen 8 Winkel.

1. Liegen zwei Winkel auf der gleichen Seite von h und auf der gleichen Seite einer der Geraden g_1, g_2 und nicht auf der gleichen Seite der anderen Geraden, so spricht man von *Stufenwinkeln (F-Winkeln)*.

2. Liegen zwei Winkel auf der gleichen Seite von h und auch jeweils auf der gleichen Seite von g_1 und g_2, so nennt man sie *Ergänzungswinkel (E-Winkel)*.

3. Liegen zwei Winkel auf verschiedenen Seiten von h und jeweils auf der gleichen Seite von g_1 und g_2, so heißen sie *Wechselwinkel (Z-Winkel)*.



Wir sagen, in der gegebenen Situation gilt

eine Bedingung (F), falls zwei Stufenwinkel gleich sind,
eine Bedingung (E), falls zwei Ergänzungswinkel zusammen 180° ergeben,
eine Bedingung (Z), falls zwei Wechselwinkel gleich sind.

0.27 Lemma.

Gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so gelten auch alle anderen.

0.28 Satz (Euklids Proposition 27 und 28).

Wird die Gerade h von zwei Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen und gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so sind g_1 und g_2 parallel.

0.29 Satz (Euklids Proposition 31).

Ist eine Gerade g und ein nicht auf g gelegener Punkt P gegeben, so kann man durch P eine Gerade g' ziehen, die parallel zu g ist.

Der Beweis liefert ein Konstruktionsverfahren, aber nicht die Eindeutigkeit der Parallelen zu g durch P.

Das Euklidische Parallelenaxiom:

E-P) Wenn eine Gerade h von zwei verschiedenen Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen wird und dabei auf einer Seite von h Ergänzungswinkel entstehen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h.

Es ist nun möglich, ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

0.30 Satz (Euklids Proposition 29).

Trifft eine Gerade zwei verschiedene Parallelen, so gelten die Bedingungen (F), (E) und (Z).

0.31 Satz (Euklids Proposition 30).

Sind zwei Geraden parallel zu einer dritten Geraden, so sind sie auch untereinander parallel.

0.32 Satz (Euklids Proposition 32).

Bei jedem Dreieck gilt:

1. *Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.*

2. *Die Summe der drei Innenwinkel ergibt zwei Rechte.*

0.33 Satz (Euklids Proposition 34).

In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang, und die Diagonale halbiert die Fläche.

0.34 Satz (Euklids Proposition 35). *Es seien zwei Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ zwischen den Parallelen AB und $CD = EF$ gegeben, mit gleicher Grundlinie $\overline{AB}$. Dann haben sie die gleiche Fläche.*

0.35 Satz (Euklids Proposition 46). *Über einer Strecke kann man ein Quadrat errichten.*

0.36 Euklids Proposition 47: Der Satz des Pythagoras.

An einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse die gleiche Fläche wie die Quadrate über den Katheten zusammen.

Nichteuklidische Geometrie

1 Beweisversuche

Schon früh störte Euklids Postulat V die ihm nachfolgenden Mathematiker, vor allem aus ästhetischen Gründen. Man kam zu der Auffassung, das Postulat müsste beweisbar sein, nicht zuletzt auch deswegen, weil Euklid in seinem ersten Buch so lange zögerte, es anzuwenden, und weil er manche Sätze recht mühsam bewies, obwohl es mit dem Parallelenaxiom sehr viel einfacher ging.

Posidonius, Philosoph, Astronom, Historiker und Mathematiker (ca. 135 - 50 v.Chr.), war einer der ersten, von denen Beweisversuche bekannt sind. Er schlug vor, Definition 23 wie folgt zu ändern:

> **Parallel** sind gerade Linien, die in der selben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten.

Die Schwierigkeiten werden hier natürlich in die Definition verlagert. Zur besseren Unterscheidung nennen wir Geraden, die immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten, *äquidistant*, und das Wort *parallel* benutzen wir weiterhin für Geraden, die sich nicht treffen. (Dass man Geraden auch dann parallel nennen kann, wenn sie gleich sind, spielt hier keine Rolle)

Was sind äquidistante Geraden? Gemeint war wohl folgendes:

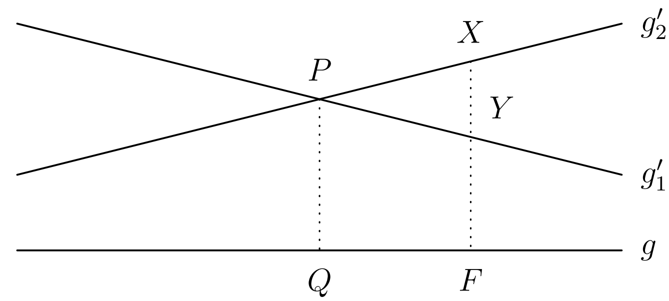
Definition. Zwei Geraden heißen *äquidistant*, wenn alle Lote, die man von einem Punkt auf einer der beiden Geraden auf die andere Gerade fällt, zueinander kongruent sind.

Offensichtlich gilt, dass zwei (verschiedene) äquidistante Geraden parallel sind. Der Plan des Posidonius sah nun folgendermaßen aus:

1.1 Satz P_1. *Durch einen gegebenen Punkt P, der nicht auf einer gegebenen Geraden g liegt, kann höchstens eine zu g äquidistante Gerade g' gehen.*

Beweis: Annahme, es gibt zwei verschiedene Geraden g_1', g_2' durch P, die beide äquidistant zu g sind. Dann zerfällt $g_2' \setminus \{P\}$ in zwei kongruente Teile, die auf verschiedenen Seiten von g_1' liegen. g liegt dagegen ganz auf einer Seite von g_1'. Es gibt also einen Punkt $X \in g_2'$, der auf einer anderen Seite von g_1' liegt als die Gerade g.

Wir fällen nun das Lot von P auf g mit Fußpunkt Q, und das Lot von X auf g, mit Fußpunkt F.



Auf jeden Fall ist dann $Q \neq F$, und es muss einen Punkt $Y \in \overline{XF} \cap g_1'$ geben. Damit gilt:

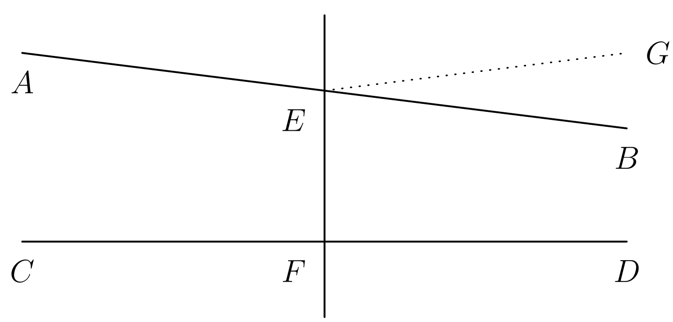
$$X - Y - F, \quad \text{aber } \overline{YF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XF}.$$

Das ist ein Widerspruch. ∎

Dieser Satz kann irgendwo vor Euklids Proposition 29 stehen!

1.2 Satz P_2. *Wenn eine Gerade h zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten E und F trifft und dabei mit ihnen auf einer Seite von h Ergänzungswinkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so treffen sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h.*

Beweis: Sei $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$, sowie $A - E - B$ und $C - F - D$. Es sei $\angle BEF + \angle EFD < 180°$.



Da $\angle AEF + \angle FEB = 180°$ und $\angle CFE + \angle DFE = 180°$ ist, muss $\angle AEF + \angle EFC > 180°$ sein.

Wir tragen nun $\angle EFC$ bei E an EF an. Das ergibt einen Winkel $\angle FEG$. Nun gilt:

$$\angle GEF = \angle EFC = 180° - \angle DFE > \angle BEF.$$

Also sind GE und $BE = g_1 = AB$ zwei verschiedene Geraden durch E. Wegen der Wechselwinkelbeziehung ist EG parallel zu CD.

Nun schließt Posidonius, dass EG auch äquidistant zu CD ist. Nach P_1 gibt es nur eine Gerade durch E, die äquidistant zu CD ist. Also kann AB es nicht sein. Und wieder benutzt Posidonius die versteckte Annahme, dass parallele Geraden äquidistant sind, und folgert, dass AB auch nicht parallel zu CD sein kann. Also müssen sich AB und CD treffen, und man kann sich leicht überlegen, dass das dann auf der Seite von h geschehen muss, auf der B und D liegen. ∎

Der Fehler, den Posidonius macht, besteht darin, dass er einen neuen Parallelitätsbegriff einführt, aber mit den Eigenschaften des alten arbeitet. In Wirklichkeit hat er das Axiom $E-P$ (Euklids Postulat V) durch ein anderes ersetzt:

P-P) Parallele Geraden sind äquidistant.

Bezeichnen wir die neutrale Geometrie mit (N), so folgt aus den (dann korrekten) Sätzen P_1 und P_2:

$$(N) \wedge (P-P) \quad \Longrightarrow \quad (E-P).$$

Hat sich damit etwas gebessert? Nein, denn es gilt auch:

1.3 Satz. $(N) \wedge (E-P) \implies (P-P)$.

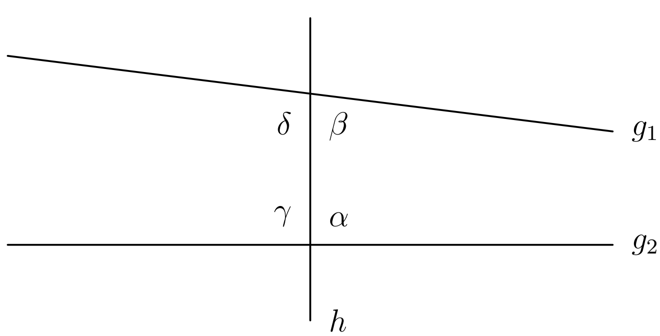
Beweis: Siehe Satz 5.23 in Kapitel I. ∎

Die korrigierte Version des Posidonius-Versuchs liefert also lediglich ein zu Postulat V äquivalentes Axiom. Und da ist Euklids Axiom vorzuziehen, denn seine Voraussetzungen sind überprüfbar. Ob zwei gegebene Geraden äquidistant sind, ist dagegen schwer zu sagen.

Der griechische Philosoph **Proklos Diadochos** (ca. 410 - 485 n.Chr.), Haupt der Schule des Neuplatonismus, hatte noch Zugang zu vielen Quellen, die für uns längst verloren sind, z.B. zur Großen Geschichte der Geometrie des Eudemus, eines Schülers des Aristoteles. In seinem Kommentar zum ersten Buch der Elemente gibt Proklos einen kurzen Überblick über das Werk des Eudemus, der selbst in seiner fragmentarischen Form für uns von unschätzbarem Wert ist.

In diesem Kommentar finden sich auch Hinweise auf frühere Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, insbesondere wird ein Versuch des berühmten ägyptischen Naturwissenschaftlers **Claudius Ptolemäus** (ca. 85 - 165 n.Chr.) beschrieben, der übrigens auch die Grundlagen der Trigonometrie geschaffen hat.

Ptolemäus soll folgendermaßen argumentiert haben:



Euklids Proposition 29 besagt: Sind g_1, g_2 parallel, so gelten die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z).

Daraus folgt – durch logische Kontraposition – sofort das Parallelenaxiom. Es genügt also, Proposition 29 zu beweisen, ohne (E-P) zu benutzen.

Ptolemäus nimmt nun an, dass g_1, g_2 parallel sind, dass aber $\alpha + \beta < 180°$ ist. Und dann folgert er sehr eigenartig: Da g_1 und g_2 auf der einen Seite von h genauso parallel wie auf der anderen sind, muss $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ sein. Aber dann ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 360°$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $\gamma + \alpha = 180°$ und $\delta + \beta = 180°$ ist.

Dieser „Beweis" ist natürlich unsinnig, wie Proklos auch feststellte. In Wirklichkeit ist die benutzte Winkelbeziehung äquivalent zum Postulat V.

Proklos gibt nun selbst einen „Beweis" an:

1.4 Satz Pr_1**.** *Wenn sich zwei verschiedene Geraden in einem Punkt schneiden, dann wird der Abstand zwischen ihnen beliebig groß.*

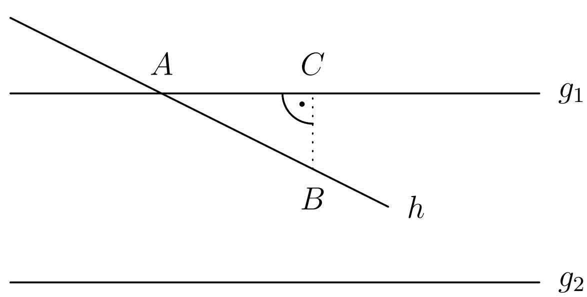
Mit „Abstand" ist die Länge des Lots gemeint, das man von einem Punkt der einen Geraden auf die andere Gerade fällen kann. Der Satz ist richtig und kann ohne Parallelenaxiom bewiesen werden. Allerdings führt Proklos den Beweis nicht aus, und wir werden ihn auch erst an späterer Stelle nachtragen. Unter anderem wird das Archimedes-Axiom benutzt!

1.5 Satz Pr_2**.** *Der Abstand zwischen zwei Parallelen, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, kann nicht über alle Grenzen wachsen.*

Auch dieser Satz wird von Proklos nicht bewiesen.

1.6 Satz Pr_3**.** *Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, so muss sie auch die andere schneiden.*

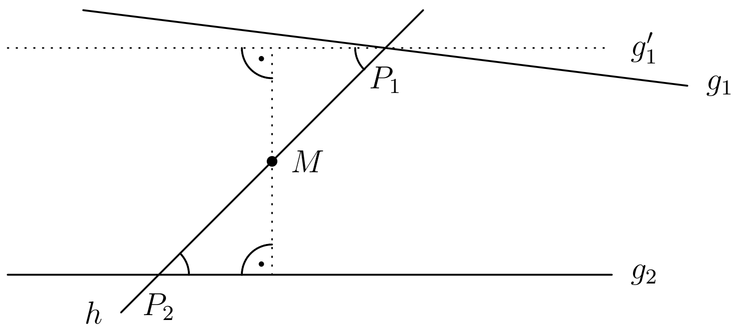
Beweis:



Nach Satz Pr_1 wird die Länge des Lotes $\overline{BC}$ beliebig groß. Nach Satz Pr_2 kann der Abstand von g_2 zu g_1 nicht über alle Grenzen wachsen. Das ist nur möglich, wenn h irgendwann Punkte auf der anderen Seite von g_2 erreicht, also insbesondere g_2 schneidet. ∎

1.7 Satz Pr_4**.** *Aus Satz* Pr_3 *folgt Postulat V.*

Beweis: Wir betrachten die Standard-Situation: Zwei Geraden g_1, g_2 werden von h in P_1 bzw. P_2 geschnitten und bilden Ergänzungswinkel $< 180°$.



Wir tragen den Winkel $180° - \alpha$ bei P_1 an $\overline{P_1P_2}$ an und erhalten so eine neue Gerade g_1', die parallel zu g_2 ist und von g_1 geschnitten wird.

Vom Mittelpunkt M der Strecke $\overline{P_1P_2}$ fällen wir jeweils das Lot auf g_1' und g_2. Es entstehen zwei kongruente Dreiecke (WWS), und daraus kann man folgern, dass die Lote auf einer Geraden liegen. Also besitzen die Parallelen eine gemeinsame Senkrechte, und g_1 muss auch g_2 schneiden. ∎

Dieser „Beweis“ des Parallelenaxioms ist schon recht trickreich, aber sein Schwachpunkt ist natürlich der Satz Pr_2, der nicht ohne Postulat V bewiesen werden kann. In Wirklichkeit ist er äquivalent dazu.

Über **Theon von Alexandria**, der eine der wichtigsten Euklid-Editionen herausgegeben hat, haben wir schon am Anfang von Kapitel I gesprochen. Wir sollten seine Tochter **Hypatia** (370 - 415 n.Chr.) erwähnen, eine der ersten bekannten Mathematikerinnen der Geschichte. Bezeichnend ist, dass sie in den Straßen von Alexandria von aufgebrachten christlichen Fanatikern regelrecht in Stücke gerissen wurde. Mit ihr starb auch die griechische Wissenschaft in Alexandria.

Im Jahre 622 floh Mohammed von Mekka nach Medina und begründete die Religion des Islam. Bereits 641 eroberten die Araber Alexandria. Angeblich hat der Kalif Omar damals befohlen, die Reste der Bibliothek zu vernichten. Er soll gesagt haben: Entweder enthalten die dort gelagerten Schriften dasselbe wie der Koran, dann sind sie überflüssig. Oder sie enthalten etwas, das im Widerspruch zum Koran steht, dann sind sie schädlich. Es ist nicht auszuschließen, dass diese Geschichte von den Christen erfunden wurde, die ja selbst viel zur Zerstörung der Bibliothek beigetragen haben.

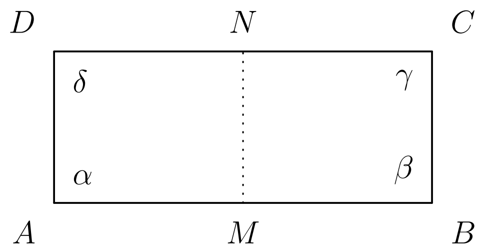
Zwischen 750 und 850 n.Chr. beginnt die Geschichte der Mathematik bei den Arabern. Bagdad und Damaskus wurden zu Zentren der Wissenschaft, Wörter wie „Algebra“ oder „Algorithmus“ fanden ihren Weg in die Mathematik.

Viele arabische Wissenschaftler beschäftigten sich mit dem Parallelenproblem. Wir wollen hier nur über die zwei bedeutendsten sprechen:

Omar al-Hayyam (auch Khayyam oder Chajjam geschrieben, ca. 1050 – 1130) war ein persischer Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter. Noch mehr als durch seine wissenschaftlichen Untersuchungen wurde er durch seine Lyrik bekannt. Bei Untersuchungen des Parallelenproblems ging er sorgfältiger als seine Vorgänger vor.

1.8 Omar Khayyams Theorem. *Betrachtet wird ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:*

Bei A und B liegen jeweils rechte Winkel vor, und es ist $\overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$.



Die Strecke $\overline{AB}$ wird Basis *genannt, die Strecke $\overline{DC}$* Gipfellinie. *Die Winkel γ und δ heißen* Gipfelwinkel. *Nun gilt:*

1. *Die Gipfelwinkel sind kongruent.*
2. *Errichtet man im Mittelpunkt M der Basis eine Senkrechte, so trifft diese die Gipfellinie in ihrem Mittelpunkt N und bildet mit ihr einen rechten Winkel.*

Beweis:

1) Weil $\overline{AD} = \overline{BC}$ ist, ist $ABD \mathrel{\widehat{=}} ABC$ (SWS). Daraus folgt, dass $\overline{AC} = \overline{BD}$ und $\angle ABD = \angle BAC$ ist, also auch

$$\angle DBC = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - \angle BAC = \angle DAC.$$

Deshalb ist $ACD \mathrel{\widehat{=}} DBC$ (SSW) und damit $\angle ADC = \angle DCB$.

2) Sei g die Senkrechte zu AB in M. Nach Satz I.5.8 ist g sowohl zu AD als auch zu BC parallel. Da A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen, muss das auch für D und C gelten. Also trifft g die Gipfellinie $\overline{DC}$ in einem inneren Punkt N.

Da $AMD \mathrel{\widehat{=}} MBC$ ist (SWS), ist $\overline{DM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MC}$ und $\angle ADM \mathrel{\widehat{=}} \angle MCB$. Weil aber die Gipfelwinkel kongruent sind, muss auch $\angle MDN \mathrel{\widehat{=}} \angle MCN$ sein. Und schließlich ist

$$\angle DMN = 90^\circ - \angle AMD \mathrel{\widehat{=}} 90^\circ - \angle BMC = \angle CMN.$$

Also ist $DMN \mathrel{\widehat{=}} MCN$ und insbesondere $\overline{DN} \mathrel{\widehat{=}} \overline{NC}$. Und da $\angle DNM \mathrel{\widehat{=}} \angle CNM$ ist, trifft g senkrecht auf die Gipfellinie. ∎

In der Euklidischen Geometrie würde nun sehr schnell (etwa mit den Sätzen über Winkelsummen) folgen, dass die Gipfelwinkel ebenfalls rechte Winkel sind. Wenn das Parallelenaxiom nicht zur Verfügung steht, kann man zunächst nicht ausschließen, dass die Gipfelwinkel spitze oder stumpfe Winkel sind. Wenn wir solchen „verallgemeinerten Rechtecken“ einen Namen geben wollen, sollten wir sie eigentlich *Khayyam-Vierecke* nennen. Aus Gründen, die im nächsten Paragraphen klar werden, heißen sie jedoch *Saccheri-Vierecke*, nach dem italienischen Wissenschaftler Saccheri.

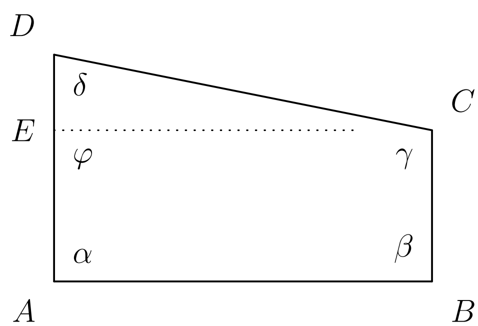
Mit Hilfe eines sogenannten „philosophischen Prinzips“, das angeblich auf Aristoteles zurückgeht und nicht mathematisch begründet werden kann, schließt Omar Khayyam dann, dass zwei Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten äquidistant sind. Diese Hypothese ist sogar stärker als der Satz Pr_2 von Proklos, und es ist klar, dass daraus das Parallelenpostulat folgt. Allerdings benutzt Khayyam beim Beweis die Saccheri-Vierecke. Ich gebe seine Überlegungen hier in modernisierter Form wieder:

1.9 Satz. *Im Viereck $ABCD$ mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sei $\alpha = \beta = 90°$. Dann gilt:*

1. $\overline{AD} > \overline{BC} \iff \delta < \gamma$.
2. $\overline{AD} = \overline{BC} \iff \delta = \gamma$.
3. $\overline{AD} < \overline{BC} \iff \delta > \gamma$.

Beweis: Nach Khayyams Theorem gilt: $\overline{AD} = \overline{BC} \implies \delta = \gamma$.

Sei nun $\overline{AD} > \overline{BC}$. Dann kann man einen Punkt E mit $A - E - D$ und $\overline{AE} = \overline{BC}$ finden.



Es ist $\varphi := \angle AEC = \angle BCE < \angle BCD = \gamma$, und da φ Außenwinkel zum Dreieck $\triangle ECD$ ist, ist $\varphi > \delta$. Insgesamt ist also $\delta < \gamma$.

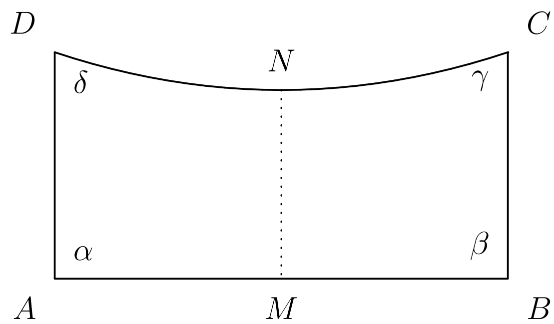
Der Fall $\overline{AD} < \overline{BC}$ kann analog behandelt werden.

Da sich die drei Möglichkeiten auf beiden Seiten der Äquivalenzen gegenseitig ausschließen, erhält man sofort auch die umgekehrten Implikationen. ∎

1.10 Satz von den drei Hypothesen. *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dann gilt:*

1. *Ist* $\delta < 90°$, *so ist* $\overline{DC} > \overline{AB}$.
2. *Ist* $\delta = 90°$, *so ist* $\overline{DC} = \overline{AB}$.
3. *Ist* $\delta > 90°$, *so ist* $\overline{DC} < \overline{AB}$.

BEWEIS: Wir stellen die Situation von Khayyams Theorem her:



Da die Winkel bei M und N Rechte sind, ist $MNDA$ ein Viereck, das die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt. Da auch α ein rechter Winkel ist, folgt aus diesem Satz:

Ist $\delta < 90°$, so ist $\overline{DN} > \overline{AM}$, usw.

Da $\delta = \gamma$ ist, führt die Betrachtung des rechten Teil-Vierecks zu den gleichen Ergebnissen, und man erhält die Behauptung. ■

Nun schließt Khayyam folgendermaßen weiter:

Da die Geraden AD und BC eine gemeinsame Senkrechte besitzen, nämlich AB, müssen sie äquidistant sein. Das bedeutet aber, dass die beiden Hypothesen $\delta < 90°$ und $\delta > 90°$ auszuschließen sind. Jedes Saccheri-Viereck ist schon ein Rechteck.

Nach diesem nebulösen Schlenkerer kann er wieder korrekt weiterarbeiten, und mit ähnlichen Schlüssen, wie wir sie schon bei Proklos gesehen haben, folgert er schließlich:

> *Wenn die Gipfelwinkel in jedem Saccheri-Viereck Rechte sind, dann folgt das Postulat V.*

Damit hat Khayyam eine weitere zu Postulat V äquivalente Bedingung gefunden (denn die Umkehrung ist klar, wie oben schon bemerkt wurde). Sein Fehler liegt im mystischen Beweis der Hypothese von den rechten Gipfelwinkeln.

Nasir ad-Din at-Tusi (auch Nasir al-Din al-Tusi oder Nasir Eddin geschrieben, 1201 – 1274) war zunächst Astrologe bei den Assasinen im Iran, kam dann aber als Hofastronom des Bruders des Mongolenherrschers Kublai Khan in die Gegend von Bagdad. Bekannt wurde er durch seine Forschungen auf dem Gebiet der Trigonometrie. Beim Parallelenproblem knüpfte er an die Ergebnisse von Khayyam an. Da seine Arbeiten später ins Lateinische übersetzt wurden, wurden so die arabischen Forschungen im Abendland bekannt.

Er kommt auf anderem, aber genauso suspektem Wege zu der Aussage: Die Gipfelwinkel in einem Saccheri-Viereck sind immer rechte Winkel. Daraus folgt nun leicht, dass Grundlinie und Gipfellinie kongruent sind, und daraus folgt zweierlei:

- Die Winkelsumme in einem Saccheri-Viereck beträgt 360°.
  (In Wirklichkeit ist diese Aussage nicht korrekt!)

- Aus jedem rechtwinkligen Dreieck kann man durch Hinzufügen eines kongruenten rechtwinkligen Dreiecks ein Saccheri-Viereck (=Rechteck) machen.
  (das kann man unter den obigen Bedingungen tatsächlich folgern)

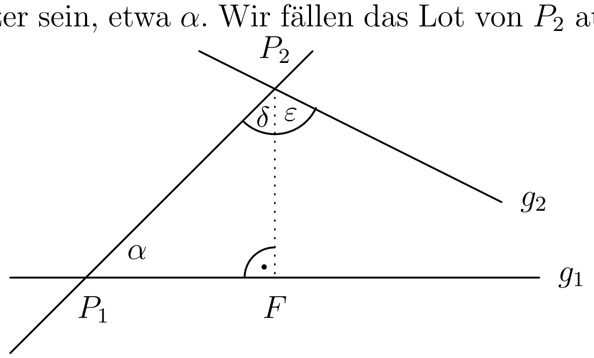
Jetzt sieht man, dass die Winkelsumme in einem rechtwinkligen Dreieck immer 180° beträgt, und daraus erhält man leicht, dass die Winkelsumme in *jedem* Dreieck 180° beträgt.

Nasir ad-Dins letzter Schritt besteht aus dem folgenden durchaus korrekten Satz:

1.11 Satz.

Wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist, dann gilt Euklids fünftes Postulat.

Beweis: Die Gerade h werde von den beiden Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 getroffen und bilde dabei die Ergänzungswinkel α (bei P_1) und β (bei P_2). Es sei $\alpha + \beta < 180°$. Dann muss wenigstens einer der beiden Winkel ein spitzer sein, etwa α. Wir fällen das Lot von P_2 auf g_1, mit Fußpunkt F.

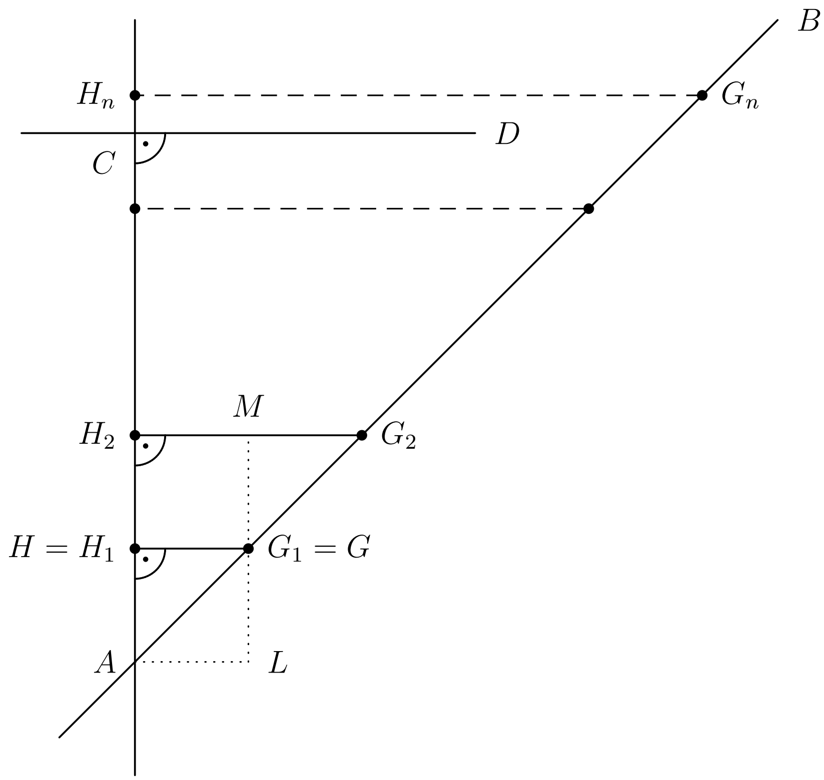


Da in dem Dreieck P_1FP_2 nicht zwei Winkel $\geq 90°$ vorkommen können, muss F auf der gleichen Seite von h liegen wie die Winkel α und β.

Nun sei $\delta := \angle P_1P_2F$. Offensichtlich ist $\delta < 90°$. Ist $\beta < \delta$, so ist der Winkel $\varepsilon := \delta - \beta$ zwischen P_2F und g_2 erst recht ein spitzer Winkel.

Sei nun $\beta \geq \delta$. Ist $\beta = \delta$, so ist $g_2 = FP_2$, und g_1 und g_2 schneiden sich. Wir können also annehmen, dass $\beta > \delta$ ist. Weil nach Voraussetzung $\delta = 90° - \alpha$ ist, ist $\varepsilon := \beta - \delta = \beta - (90° - \alpha) = (\alpha + \beta) - 90° < 90°$. Damit ist gezeigt, dass g_1 und g_2 mit P_2F auf einer geeigneten Seite einen rechten und einen spitzen Winkel als Ergänzungswinkel bilden.

Wir brauchen uns nur noch mit diesem Spezialfall zu befassen: Die Gerade AC werde von AB unter einem spitzen und von CD unter einem rechten Winkel getroffen.



Wir wählen einen Punkt G mit $A - G - B$ und fällen das Lot von G auf AC mit Fußpunkt H. Dann ist klar, dass H auf der gleichen Seite von A liegt wie der Punkt C.

Ist $H = C$, so stimmt das Lot mit CD überein, und wir sind fertig. Gilt $A{-}C{-}H$, so muss CD nach Pasch außer $\overline{AH}$ noch eine weitere Seite des Dreiecks AGH treffen. Dies kann nicht $\overline{HG}$ sein (Parallelität), also trifft CD die Gerade $AG = AB$.

Es bleibt der Fall $A - H - C$ zu untersuchen.

Wir konstruieren Punkte $G_1 := G, G_2, G_3, \dots$ auf AB mit $\overline{AG_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1G_2} \mathrel{\widehat{=}} \dots$.

Sei H_2 der Fußpunkt des Lots von G_2 auf AC. Wir behaupten, dass $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HH_2}$ ist.

Zu diesem Zwecke errichten wir in A die Senkrechte AL zu AC (mit $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HG_1}$). Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist $\angle LAG_1 \mathrel{\widehat{=}} 90^\circ - \angle G_1AH \mathrel{\widehat{=}} \angle AG_1H$. Daher ist $AG_1H \mathrel{\widehat{=}} G_1AL$ (SWS), und damit $\angle ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} \angle AHG_1 = 90^\circ$, sowie $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LG_1}$. Dann ist aber auch

$$\angle HG_1L = \angle HG_1A + \angle AG_1L = \angle LAG_1 + (90^\circ - \angle LAG_1) = 90^\circ.$$

Wählt man noch $M \in H_2G_2$ mit $\overline{H_2M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HG_1}$, so ist H_2HG_1M ein Saccheri-Viereck, und es folgt, dass $\angle H_2MG_1 = \angle HG_1M$ ist. Wegen des Satzes von der Winkelsumme muss dann $\angle H_2MG_1 = \angle HG_1M = 90^\circ$ und daher $\overline{MG_1} = \overline{H_2H}$ sein.

Da sich $\angle HG_1L$ und $\angle HG_1M$ zu 180° ergänzen, sind M, G_1 und L kollinear. Aber dann sind $\angle AG_1L$ und $\angle MG_1G_2$ Scheitelwinkel, also kongruent. Und da $\angle G_1AL = \angle G_1G_2M$ ist (Winkelsumme im Dreieck), ist $ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} G_1G_2M$ (WSW), und daher $\overline{LG_1} = \overline{G_1M}$. So folgt:

$$\overline{HH_2} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1L} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AH}.$$

Genauso folgt allgemein für den Fußpunkt H_i des Lotes von G_i auf AC, dass $\overline{AH_i} \mathrel{\widehat{=}} n \cdot \overline{AH}$ ist. Nach Archimedes gibt es aber ein n, so dass $n \cdot \overline{AH} > \overline{AC}$ ist. Dann gilt $A - C - H_n$, und wir sind fertig. ■

1.12 Folgerung. *Postulat V gilt genau dann, wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck* 180° *beträgt.*

1482 erschien die erste gedruckte Version der „Elemente“ in Europa. Der aus Bamberg kommende Christoph Schlüssel, genannt **Christopher Clavius** (1537 – 1612), der in Rom an der Ausarbeitung des Gregorianischen Kalenders beteiligt war, veröffentlichte 1574 eine Euklid-Ausgabe, in der er alles damals Bekannte zusammenfasste. Auch er versuchte (vergeblich) einen Beweis des Parallelenaxioms, indem er anschaulich begründete, warum die Menge der zu einer gegebenen Geraden äquidistanten Punkte wieder eine Gerade ist.

Giordano Vitale (1633 – 1711) veröffentlichte im Rahmen einer überarbeiteten Euklid-Ausgabe einen Beweis, in dem er etwas ähnliches versuchte. Immerhin konnte er zeigen: Wenn zwei Geraden an drei verschiedenen Stellen den gleichen Abstand voneinander haben, sind sie äquidistant.

In England machte 1621 **Sir Henry Savile** in Vorlesungen über Euklid auf zwei angebliche Makel in den „Elementen“ aufmerksam: Die Theorie der Parallellinien und die Lehre von den Proportionen.

Er stiftete daraufhin einen mathematischen Lehrstuhl an der Universität Oxford mit der Auflage, dass der jeweilige Inhaber Vorlesungen über Euklid zu halten habe.

Einer der ersten „Professores Saviliani“ war **John Wallis** (1616 – 1703). Er kannte und kritisierte die Probleme seiner Vorgänger mit den äquidistanten Linien und versuchte es auf anderem Wege:

Zwei Dreiecke werden *ähnlich* genannt, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen. Wallis stellte nun folgendes Postulat auf:

W-P) Zu jedem Dreieck ABC kann man (bei vorgegebener Seite $\overline{A'B'}$ ein ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruieren.

Ob dieses Postulat einsichtiger als Euklids Parallelenpostulat ist, sei erst einmal dahingestellt. Wallis zeigt nun (1663):

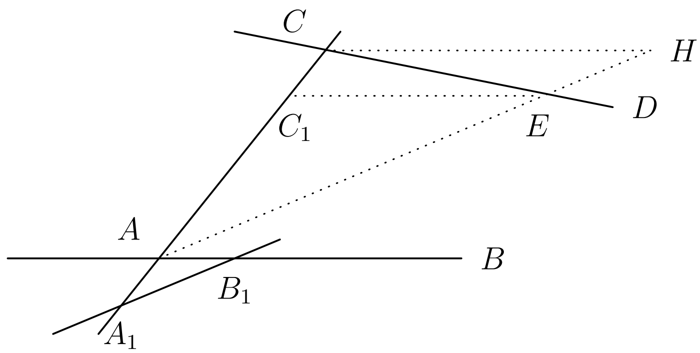
1.13 Satz.

$$\text{(W – P)} \quad \Longrightarrow \quad \text{(E – P)}$$

Beweis: AC werde von den Geraden AB und CD getroffen und bilde mit ihnen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner als 180° sind.

Wir wählen A_1 mit $C - A - A_1$ und B_1 mit $A - B_1 - B$ willkürlich und konstruieren das zu $\triangle A_1B_1A$ ähnliche Dreieck AHC. Dann ist CH parallel zu AB.

CD tritt ins Innere des Winkels $\angle ACH$ ein, muss also die gegenüberliegende Seite $\overline{AH}$ des Dreiecks AHC treffen, etwa in E. Nun konstruiert man das zu A_1B_1A ähnliche Dreieck AEC_1. Offensichtlich muss C_1 auf AC liegen, und C_1E ist parallel zu AB.



Schließlich konstruiere man das zu $\triangle C_1EC$ ähnliche Dreieck $\triangle AXC$. Da $AX = AB$ und $CX = CD$ sein muss, ist X der gesuchte Schnittpunkt von AB und CD.
■

Der Beweis ist korrekt, hinterlässt aber Unbehagen, weil die postulierte Konstruierbarkeit von ähnlichen Dreiecken ein sehr starkes Werkzeug ist. In Wirklichkeit folgt fast trivial, dass das Postulat von Wallis äquivalent zum Parallelenaxiom ist.

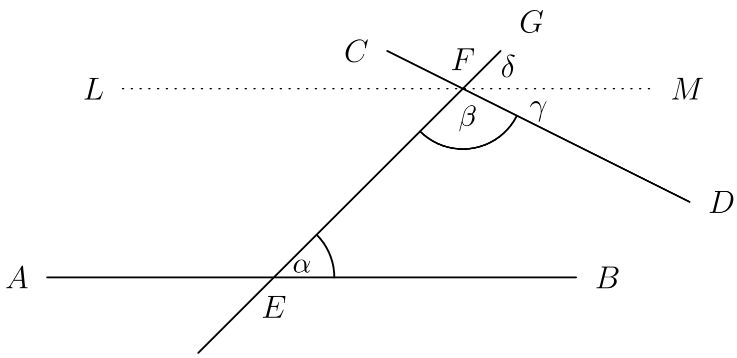
John Playfair (1748 – 1819), Professor für Mathematik und Physik an der Universität Edinburgh, schrieb 1796 ein Buch mit dem Titel „Elements of Geometry“. Darin formulierte er das Parallelenaxiom in der heute üblichen Form:

PA) Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so geht durch P genau eine Parallele zu g.

1.14 Satz.

$$\text{(PA)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(E – P)}$$

Beweis: Sei zunächst (PA) vorausgesetzt.



EF werde von AB in E und von CD in F geschnitten. G liege auf der Verlängerung von EF über F hinaus. Wir konstruieren die Gerade LM durch F so, dass $\delta := \angle MFG = \angle BEF =: \alpha$ ist. Dann ist LM parallel zu AB.

Setzt man $\beta := \angle EFD$ und $\gamma := \angle DFM$, so ist

$$\beta + \gamma + \delta = 180°, \text{ also } \gamma = 180° - (\beta + \alpha) > 0.$$

Also ist $LM \neq CD$, und nach (PA) kann CD nicht parallel zu AB sein. AB und CD müssen sich schneiden.

Umgekehrt sei nun (E-P) vorausgesetzt. Die Existenz einer Parallelen g' zu g durch $P \notin g$ haben wir schon an früherer Stelle bewiesen:

Man fälle das Lot h von P auf g und wähle für g' die Senkrechte zu dem Lot in P.

Ist g'' eine weitere Gerade durch P, also $g'' \neq g'$, so müssen g'' und g auf einer Seite von h zusammen innere Winkel $< 180°$ bilden. Nach (E-P) schneiden sich g'' und g, d.h., g'' ist keine Parallele. ∎

Zusammengefasst haben wir jetzt folgende äquivalente Formulierungen für das Parallelenaxiom gefunden:

1. Euklids Postulat V.
2. Playfairs Postulat: Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so gibt es genau eine Parallele zu g durch P.
3. Die Winkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180°.
4. Jedes Saccheri-Viereck ist ein Rechteck.
5. Werden zwei Geraden g_1, g_2 von einer dritten geschnitten, so sind sie genau dann parallel, wenn die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z) gelten.
6. Parallele Geraden sind äquidistant.
7. Zu jedem Dreieck gibt es ähnliche Dreiecke beliebiger Größe.

2 Die Hypothese vom spitzen Winkel

Girolamo Saccheri wurde am 5. September 1667 in San Remo in der Republik Genua geboren. 1685 wurde er in den Jesuitenorden aufgenommen. Als Lehrer für Grammatik wirkte er in Mailand und lernte dort bei dem Mathematiker Tommaso Ceva die Euklidische Geometrie kennen. 1694 wurde er in Como zum Priester geweiht. Nach einem Aufenthalt in Turin kam er 1697 nach Pavia, wo er am Jesuitenkollegium und an der Universität Vorlesungen hielt. Er soll ein großes Rechengenie und ein guter Schachspieler gewesen sein.

Wie der Engländer Savile war auch Saccheri der Meinung, dass es zwei Makel in Euklids Werk gäbe. Sein Hauptwerk trägt daher den Titel:

Euclides ab omni naevo vindicatus
sive Conatus Geometricus quo stabiliuntur
Prima ipsa universae Geometriae Principia.

Der von jedem Makel befreite Euklid
oder
Ein geometrischer Versuch zur Begründung
der Grundsätze der ganzen Geometrie.

Von dem 2-bändigen Werk interessiert nur der 1. Teil über die Parallelen. Saccheri gewinnt diesem Problem eine völlig neue Seite ab. Alle bisherigen Versuche beruhten auf dem Grundgedanken, dass man das fünfte Postulat unmittelbar aus der neutralen Geometrie herleiten könne. Bei allen wurde jedoch – mehr oder weniger offen – ein neues Axiom an Stelle des alten eingeführt.

Saccheri hatte nun bei Untersuchungen über Logik besonderen Gefallen an der Methode der „reductio ad absurdum“ gefunden. Er kannte die Untersuchungen der Araber und führte erneut die von diesen betrachteten Vierecke ein, die wir im Vorgriff schon als „Saccheri-Vierecke“ bezeichnet haben. Einige seiner Sätze kennen wir schon von Khayyam und Nadir ad-Din, darauf brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Saccheri unterscheidet nun – wie schon Khayyam, aber mit größerer Deutlichkeit – drei Hypothesen, je nach Art der Gipfelwinkel im Saccheri-Viereck:

Die Hypothese des rechten Winkels, die Hypothese des stumpfen Winkels und die Hypothese des spitzen Winkels.

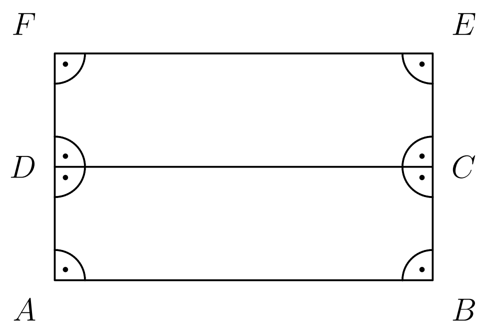
Wie wir im Folgenden ausführen werden, zeigt er, dass diese Hypothesen, wenn sie nur für ein Saccheri-Viereck gelten, dann auch zugleich für alle. Sie schließen sich also gegenseitig aus, und da die Hypothese vom rechten Winkel äquivalent zum Parallelenaxiom ist, gilt es nur, die beiden anderen Hypothesen nach dem Widerspruchsprinzip auszuschließen.

2.1 Satz V, VI und VII von Saccheri.

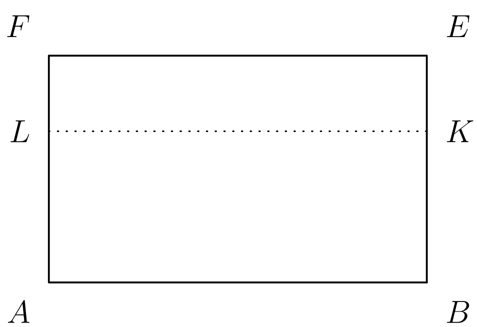
Gilt in einem Falle die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel, so gilt sie auch in jedem anderen Fall.

Beweis: 1) Es sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit 4 rechten Winkeln. Dann ist dies ein Rechteck und insbesondere $\overline{DC} \widehat{=} \overline{AB}$.

Wir spiegeln das Rechteck an der Geraden DC und erhalten auf der anderen Seite wieder ein Rechteck $DCEF$. Das Viereck $ABEF$ ist ein Saccheri-Viereck, in dem ebenfalls die Hypothese vom rechten Winkel erfüllt ist. Indem man dieses Verfahren wiederholt, gewinnt man über der Basis $\overline{AB}$ Saccheri-Vierecke mit beliebig großer Höhe und vier rechten Winkeln.



Ist nun $ABEF$ ein solches Viereck, $A - L - F$, $B - K - E$ und $\overline{AL} = \overline{BK}$, so ist auch $\overline{FL} \widehat{=} \overline{EK}$, d.h., $ABKL$ und $EFLK$ sind beides Saccheri-Vierecke.



Wäre $\angle ALK > 90°$, so wäre $\overline{LK} < \overline{AB}$. Zugleich ist dann aber $\angle FLK < 90°$, und es müsste $\overline{LK} > \overline{FE} \widehat{=} \overline{AB}$ sein. Das ist ein Widerspruch, und genauso führt die Annahme $\angle ALK < 90°$ zum Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass es über $\overline{AB}$ Rechtecke beliebiger Höhe gibt.

Nun ist aber $LABK$ auch ein Saccheri-Viereck über der Basis $\overline{LA}$. Also gibt es auch Rechtecke beliebiger Breite.

Der Fall des stumpfen Winkels wird von Saccheri recht trickreich behandelt, er benutzt dabei das Dedekind-Axiom (ohne dieses als Axiom zu formulieren). Man kann aber auch ohne das Dedekind-Axiom auskommen.

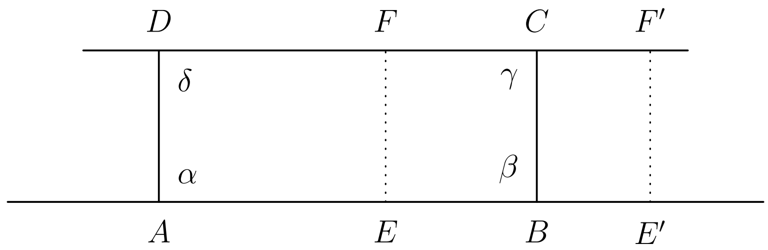
Der Fall des spitzen Winkels kann schließlich mit Hilfe der schon bewiesenen Fälle und mit dem Ausschlussprinzip erledigt werden. ■

Zur Behandlung der Hypothese vom stumpfen Winkel seien dem Leser die folgenden drei Hilfssätze als Übungsaufgaben empfohlen.

2.2 Hilfssatz 1. *Betrachtet werde ein Saccheri-Viereck $ABCD$ mit den Winkeln α, β, γ und δ. Es sei $A - E - B$ und $A - B - E'$. Die Senkrechten zu AB in E bzw.*

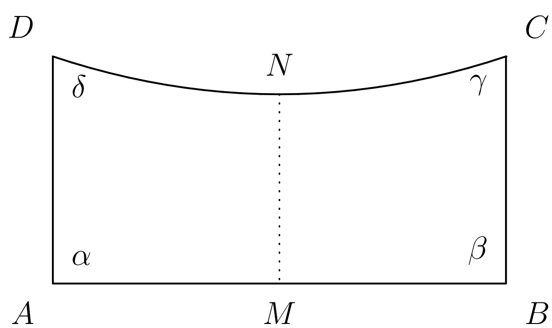
E' mögen DC in F bzw. F' treffen. Dann ist auch $D - F - C$ und $D - C - F'$, und es gilt:

1. *Ist $\overline{EF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$, so ist $\delta = 90°$.*
2. *Ist $\overline{EF} > \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} < \overline{AD}$, so ist $\delta > 90°$.*
3. *Ist $\overline{EF} < \overline{AD}$ oder $\overline{E'F'} > \overline{AD}$, so ist $\delta < 90°$.*



2.3 Hilfssatz 2. *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit Winkeln α, β, γ und δ und mit Mittellinie $\overline{MN}$. Dann gilt:*

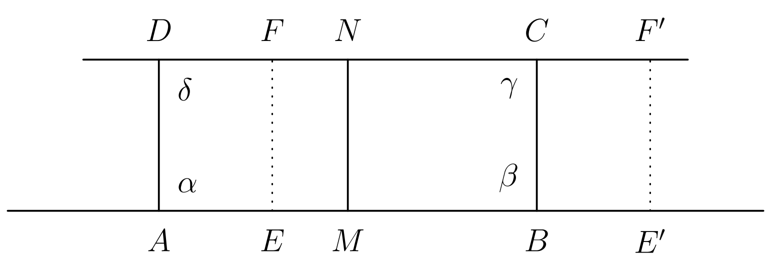
1. *$\delta = 90° \implies \overline{MN} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$.*
2. *$\delta > 90° \implies \overline{MN} > \overline{AD}$.*
3. *$\delta < 90° \implies \overline{MN} < \overline{AD}$.*



2.4 Hilfssatz 3. *Die Bezeichnungen seien wie in Hilfssatz 2 gewählt. Weiter sei E ein Punkt zwischen A und M, und die Senkrechte zu AB in E treffe CD in F zwischen D und N, und E' sei ein Punkt mit $A-B-E'$, so dass die Senkrechte zu AB in E' die Gerade DC in einem Punkt F' mit $D - C - F'$ trifft. (vgl. Hilfssatz 1)*

Dann gilt:

1. *Ist $\delta = 90°$, so ist $\angle EFN = \angle E'F'N = 90°$.*
2. *Ist $\delta > 90°$, so ist $\angle EFN > 90°$ und $\angle E'F'N > 90°$.*
3. *Ist $\delta < 90°$, so ist $\angle EFN < 90°$ und $\angle E'F'N < 90°$.*



Nun können wir den BEWEIS von Satz 2.1. vervollständigen:

In einem Saccheri-Viereck $ABCD$ gelte die Hypothese vom stumpfen Winkel. Wir führen die Mittellinie $\overline{MN}$ ein. Die Spiegelung an der Geraden MN bildet die Geraden AB und CD jeweils auf sich selbst ab. Indem man spiegelbildlich auf CD gelegene Punkte wählt und von ihnen das Lot auf AB fällt, kann man - nach Hilfssatz 3 - Saccheri-Vierecke beliebiger Breite und fester Mittellinie konstruieren, in denen ebenfalls die Hypothese vom stumpfen Winkel gilt.

Spiegelt man andererseits $MBCN$ an der Geraden AB, so erhält man ein Saccheri-Viereck NN^*C^*C mit Basis $\overline{NN^*}$, Mittellinie $\overline{MB}$ und stumpfen Gipfelwinkeln. Dieses wiederum lässt sich beliebig verbreitern und dann an der Achse MN spiegeln. Der Teil der so erhaltenen Figur, der oberhalb AB liegt, ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{AB}$ und beliebiger Mittellinie, und wieder gilt die Hypothese vom stumpfen Winkel.

Sei nun ein beliebiges Saccheri-Viereck $A'B'C'D'$ mit Mittellinie $\overline{M'N'}$ gegeben. Wir können dazu ein weiteres Saccheri-Viereck $A''B''C''D''$ mit gleicher Grundlinie und gleicher Mittellinie konstruieren, in dem die Hypothese vom stumpfen Winkel erfüllt ist. Dann ist $A'M'N' \mathrel{\widehat{=}} A''M''N''$ (SWS), also auch $\overline{A'N'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A''N''}$, $\angle N'A'M' \mathrel{\widehat{=}} \angle N''A''M''$ und $\angle M'N'A' \mathrel{\widehat{=}} \angle M''N''A''$. Da $\angle D'A'N' = 90° - \angle N'A'M'$ und $\angle D'N'A' = 90° - \angle M'N'A'$ ist, folgt auch, dass $A'N'D' \mathrel{\widehat{=}} A''N''D''$ ist (WSW). Also sind die Gipfelwinkel in den beiden Vierecken kongruent, und damit gilt auch in $A'B'C'D'$ die Hypothese vom stumpfen Winkel.

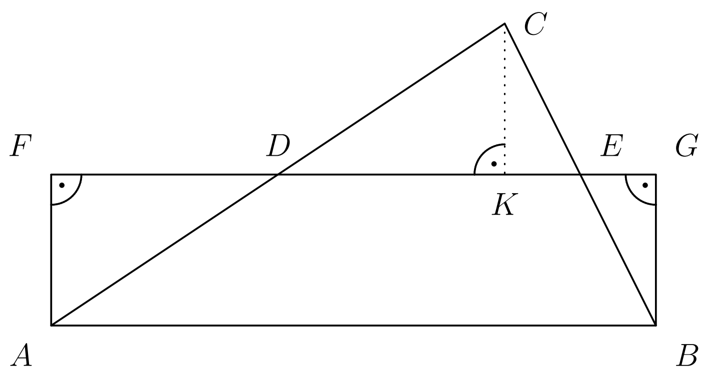
Ein Teil der Ergebnisse von Saccheri wurde später wiederentdeckt und auf andere Weise, zum Teil einfacher, bewiesen. Besonders tat sich dabei der französische Mathematiker Legendre hervor.

2.5 1. Satz von Saccheri-Legendre.

1. *Die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel ist genau dann erfüllt, wenn es ein Dreieck mit Winkelsumme* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$ *gibt.*

2. *Ist die Winkelsumme in einem Dreieck* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$*, so ist sie das auch in jedem anderen Dreieck.*

BEWEIS: 1) Sei ABC ein beliebiges Dreieck, D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Fällt man noch das Lot von A auf DE mit Fußpunkt F und das Lot von B auf DE mit Fußpunkt G, so erhält man folgende Figur:



Dann gilt:

1. $GFAB$ ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{GF}$.

2. Die Summe der beiden Gipfelwinkel $\angle FAB$ und $\angle GBA$ stimmt mit der Summe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC überein.

Zum Beweis dieser Aussagen:

Fällt man noch das Lot von C auf DE mit Fußpunkt K, so sieht man:

$$ADF \mathrel{\widehat{=}} DKC \quad \text{ und } BGE \mathrel{\widehat{=}} KEC.$$

Also ist $\angle FAD \mathrel{\widehat{=}} \angle DCK$ und $\angle GBE \mathrel{\widehat{=}} \angle ECK$ und damit $\angle FAB + \angle GBA = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$. Die Winkelsumme des beliebig ausgewählten Dreiecks ABC ist also gleich der Summe der Gipfelwinkel eines Saccheri-Vierecks. Daraus folgt die Behauptung.

2) Da das Dreieck beliebig gewählt werden konnte, die Winkel-Hypothesen aber jeweils für alle Saccheri-Vierecke gleichzeitig gelten, stimmt das Kriterium mit der Winkelsumme für alle Dreiecke, wenn es nur für eins gilt. ∎

2.6 2. Satz von Saccheri-Legendre.

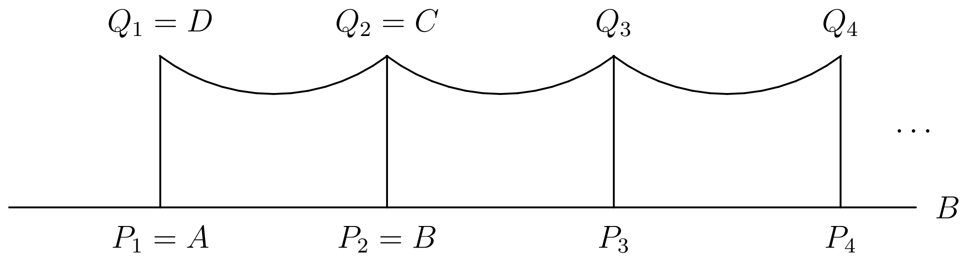
1. *In jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$.*

2. *In jedem Dreieck ist die Winkelsumme $\leq 180°$.*

Beweis: 2) folgt aus (1): Ist in einem Saccheri-Viereck die Gipfellinie nicht kleiner als die Grundlinie, so müssen nach dem Satz von den 3 Hypothesen die Gipfelwinkel in diesem Viereck $\leq 90°$ sein. Nach dem 1. Satz von Saccheri-Legendre folgt dann die Behauptung über die Winkelsumme im Dreieck.

Nun zum Beweis von (1):

Auf der Geraden AB konstruieren wir Punkte $P_1 = A$, $P_2 = B$, $P_3, \ldots$ mit $\overline{P_iP_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$, und wir errichten Senkrechte $\overline{P_iQ_i}$ zu AB in P_i mit $\overline{P_iQ_i} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ für alle i.



Wir erhalten so eine Folge von kongruenten Saccheri-Vierecken $P_iP_{i+1}Q_{i+1}Q_i$, insbesondere ist also $\overline{Q_iQ_{i+1}} \cong \overline{DC}$ für alle i.

Aus der Dreiecksgleichung folgt:

$$\overline{Q_1Q_{n+1}} \leq \overline{Q_1Q_2} + \cdots + \overline{Q_nQ_{n+1}} = n \cdot \overline{DC}.$$

Und ebenso folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\overline{P_1P_{n+1}} \leq \overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1Q_{n+1}} + \overline{Q_{n+1}P_{n+1}} \leq 2\overline{AD} + n \cdot \overline{DC}.$$

Da $\overline{P_1P_{n+1}} = n \cdot \overline{AB}$ ist, erhalten wir insgesamt:

$$n \cdot \overline{AB} \leq n \cdot \overline{DC} + 2 \cdot \overline{AD}.$$

Annahme: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

Dann ist $\overline{AB} - \overline{DC} > 0$, also eine echte Strecke, aber $n \cdot (\overline{AB} - \overline{DC}) \leq 2 \cdot \overline{AD}$ für alle n. Das widerspricht dem Archimedes-Axiom! Also war die Annahme falsch, es ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$. ∎

2.7 Folgerung (Satz von Saccheri).

Die Hypothese vom stumpfen Winkel kann nicht gelten.

Beweis: Trivial! Würde die Hypothese vom stumpfen Winkel gelten, so müsste in jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ gelten: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

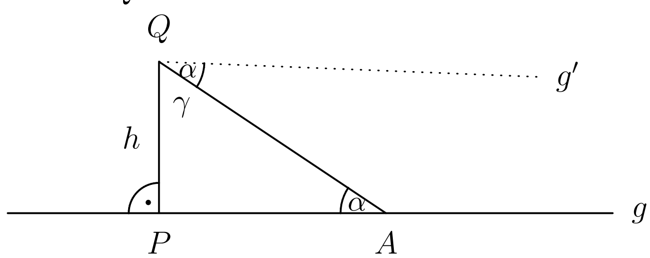
Und Saccheri verkündet an dieser Stelle stolz: *Die Hypothese des stumpfen Winkels ist ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört!* ∎

Der Originalbeweis von Saccheri verläuft etwas anders, er benutzt die Methode, die Nasir ad-Din schon bei der Behandlung der Hypothese vom rechten Winkel verwendet hatte. Es wird oft kritisiert, dass Saccheri dabei den Außenwinkelsatz benutzt, der unter der Hypothese des stumpfen Winkels gar nicht gelten kann, aber da er schließlich zu einem Widerspruch gelangt, ist das kein wirklicher Mangel. Man muss sich vorstellen, welche Gefühle Saccheri bewegt haben mögen, als er – fast 2000 Jahre nach Euklid – diesen ersten nennenswerten Fortschritt beim Parallelenproblem erzielt hatte. Um das fünfte Postulat zu beweisen, musste er nur noch die Hypothese des spitzen Winkels zum Widerspruch führen. Und er stürzte sich in eine regelrechte Schlacht.

Ab jetzt sei die Hypothese vom spitzen Winkel vorausgesetzt.

2.8 Satz. *Gegeben sei eine Gerade g und dazu eine Senkrechte h. Dann gibt es eine Gerade g', die h mit spitzem Winkel schneidet und parallel zu g ist.*

Beweis: Sei $P \in g$ und $h = PQ$ die Senkrechte. Weiter sei $A \neq P$ ein anderer Punkt auf g. Das Dreieck PAQ hat einen rechten Winkel bei P und zwei spitze Winkel bei A und Q.



Trägt man $\alpha := \angle PAQ$ bei Q an QA an, so erhält man eine Gerade g', die wegen der Z-Winkel-Beziehung parallel zu g ist. Da die Winkelsumme im Dreieck PAQ kleiner als zwei Rechte sein muss, ist $\alpha + \gamma < 90°$, also schneidet g' h in einem spitzen Winkel. ∎

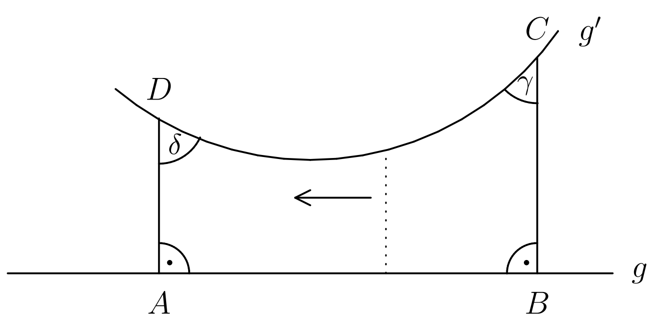
Saccheri untersucht nun das Verhalten paralleler Geraden genauer:

Wenn zwei Geraden g, g' eine gemeinsame Senkrechte besitzen, sind sie parallel. Sei nun umgekehrt g' parallel zu g. Gibt es zu diesen Parallelen eine gemeinsame Senkrechte?

Man fälle Lote von $D \in g'$ und $C \in g'$ jeweils auf g, mit Fußpunkten A bzw. B. Es sei $\delta := \angle ADC$ und $\gamma := \angle DCB$. Zumindest einer der beiden Winkel muss ein spitzer sein, o.B.d.A. sei das der Winkel δ. Wir unterscheiden nun 3 Möglichkeiten:

1. Fall: γ ist ebenfalls ein spitzer Winkel.

Dann ist der Nebenwinkel zu γ stumpf. Saccheri argumentiert nun folgendermaßen: Verschiebt man die Senkrechte zu g von B nach A, so ändert sich der Winkel auf der rechten Seite der Senkrechten stetig von einem stumpfen zu einem spitzen Winkel. Irgendwann dazwischen muss er den Wert 90° annehmen.



Dieses Argument können wir nur nachvollziehen, wenn wir das Dedekind-Axiom zulassen. Wieweit man das umgehen kann, werden wir vielleicht noch an späterer Stelle erörtern. Im Augenblick halten wir fest:

Ab sofort benutzen wir das Dedekind-Axiom! Das Kreisaxiom und das Archimedes-Axiom gelten dann automatisch auch.

Damit ist das Saccherische Argument in Ordnung, und wir sehen, dass g und g' eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

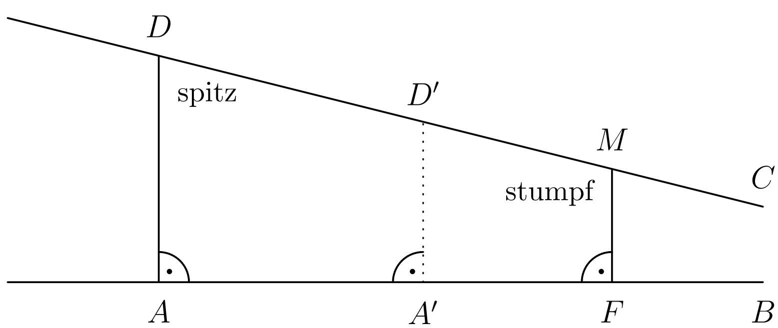
2. Fall: γ ist ein rechter Winkel, oder γ ist stumpf, und rechts von C gibt es noch eine gemeinsame Senkrechte von g und g'.

3. Fall: γ ist stumpf, und rechts von γ gibt es keine gemeinsame Senkrechte von g und g'.

Es soll gezeigt werden, dass sich g und g' in diesem Falle asymptotisch nähern!

Der Beweis erfordert einige Vorbereitungen. Wir gehen von folgender Situation aus: AD schneide AB in A senkrecht und DC in D unter einem spitzen Winkel. Die Geraden AB und CD seien parallel. Für jedes Lot von einem Punkt $M \in DC$ auf AB sei der Winkel bei M auf der Seite von D stumpf.

2.9 Hilfssatz. *Ist $A - A' - B$, so schneidet die Senkrechte zu AB in A' die Gerade DC in einem Punkt D' auf der gleichen Seite von AD.*



Beweis: Wähle M auf DC, so dass $\overline{DM} \widehat{=} \overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}$ ist und fälle das Lot auf AB mit Fußpunkt F.

Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{DM} < \overline{DA} + \overline{AF} + \overline{FM}$. Und weil $\angle FMD > \angle ADM$ ist, ist $\overline{FM} < \overline{AD}$. Damit folgt:

$$\overline{AF} > (\overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}) - \overline{AD} - \overline{AD} = \overline{AA'}.$$

Die Senkrechte in A' kann weder AD noch FM treffen (sonst würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen), muss nach Pasch also DC treffen, und zwar zwischen D und M. ∎

Als nächstes führen wir den *Defekt eines (konvexen) n-Ecks* $A_1A_2 \ldots A_n$ ein, als

$$\delta(A_1A_2\dots A_n) := (n-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(A_1A_2\dots A_n),$$

wobei WS(...) die Winkelsumme bezeichnet.[1]

Unter der Hypothese des spitzen Winkels ist der Defekt eines Dreiecks

$$\delta(ABC) = 180^\circ - \mathrm{WS}(ABC)$$

eine positive Zahl $< 180^\circ$, der Defekt eines konvexen Vierecks

$$\delta(ABCD) = 360^\circ - \mathrm{WS}(ABCD)$$

eine positive Zahl $< 360^\circ$. Weiter gilt:

2.10 Hilfssatz. *Kann das n-Eck $\mathcal{P}_n$ durch einen Streckenzug, der $\mathcal{P}_n$ außer an den Endpunkten nirgends berührt, in ein r-Eck $\mathcal{Q}_r$ und ein s-Eck $\mathcal{R}_s$ zerlegt werden, so ist $\delta(\mathcal{P}_n) = \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s)$.*

BEWEIS: Es müssen mehrere Fälle untersucht werden. Wir beschränken uns darauf, dass die Zerlegung durch eine einzige Strecke vonstatten geht, die zwei Ecken von $\mathcal{P}_n$ miteinander verbindet. Dann ist $r + s = n + 2$ und $\mathrm{WS}(\mathcal{P}_n) = \mathrm{WS}(\mathcal{Q}_r) + \mathrm{WS}(\mathcal{R}_s)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{P}_n) &= (n-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(\mathcal{P}_n)\\ &= (r-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(\mathcal{Q}_r) + (s-2)\cdot 180^\circ - \mathrm{WS}(\mathcal{R}_s)\\ &= \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s).\end{aligned}$$

Die anderen Fälle sind ähnlich leicht zu behandeln. ∎

Jetzt können wir beweisen, dass die betrachteten parallelen Geraden asymptotisch aufeinander zulaufen, sich also beliebig nahe kommen.

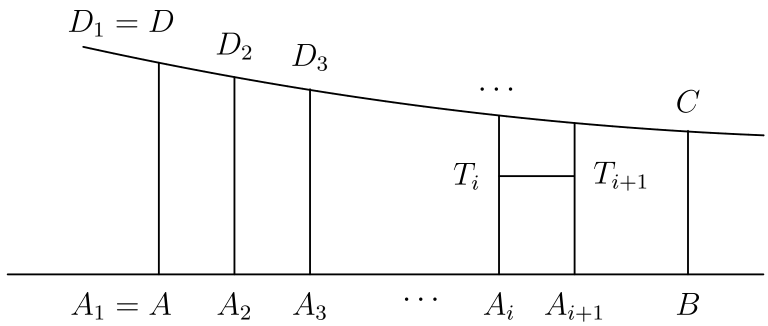
Dazu nehmen wir an, das wäre nicht der Fall! Dann gibt es eine Größe $r > 0$, so dass der Abstand zwischen AB und DC immer größer als r bleibt. Wir wählen Punkte A_i auf AB mit $A_1 := A$ und $\overline{A_iA_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_1A_2} > r$. In jedem A_i errichten wir eine Senkrechte A_iD_i auf AB, die DC (in D_i) trifft. Dann entstehen Vierecke $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$, und für den Defekt dieser Vierecke gilt:

$$\delta(A_1A_2D_2D_1) + \cdots + \delta(A_nA_{n+1}D_{n+1}D_n) = \delta(A_1A_{n+1}D_{n+1}D_1) < 360^\circ.$$

Es muss also zu jedem n ein $i = i(n)$ geben, so dass $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) < \dfrac{360^\circ}{n}$ ist.

Andererseits enthält jedes Viereck $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$ ein Saccheri-Viereck $A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i$, dessen Seiten die Länge r haben, und alle diese Vierecke sind kongruent! Insbesondere haben sie alle den gleichen Defekt δ_0.

[1]Nur bei **konvexen** Polygonen ist der Begriff der Winkelsumme unproblematisch!



Nun wählen wir n so groß, dass $\dfrac{360°}{n} < \delta_0$ ist, und zu diesem n das passende $i = i(n)$.

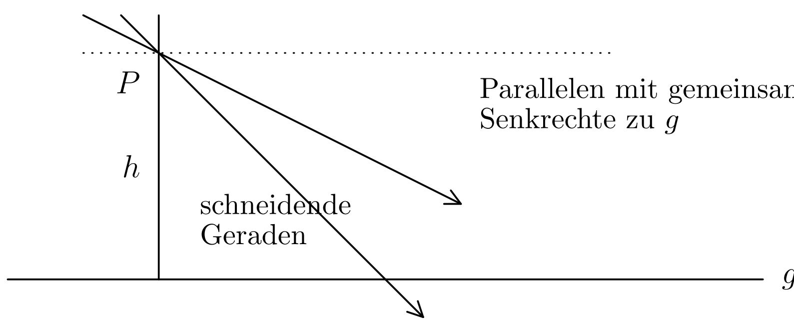
Da $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) = \delta(A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i) + \delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i)$ ist, folgt:

$$\delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i) < \frac{360°}{n} - \delta_0 < 0.$$

Das ist absurd!

Damit ist gezeigt, dass Parallelen, die in einer Richtung keine gemeinsame Senkrechte besitzen, in dieser Richtung asymptotisch aufeinander zulaufen. Ob es solche Parallelen geben kann, ist damit noch nicht geklärt.

Als nächstes macht sich Saccheri daran, unter der Hypothese des spitzen Winkels die Existenz asymptotischer Parallelen zu zeigen.



Betrachten wir das Büschel aller Geraden durch $P \notin g$. Neben dem Lot h von P auf g gibt es noch viele weitere Geraden durch P, die g schneiden. Es sei Σ die Menge aller dieser Geraden, sofern sie „rechts“ von h mit h einen spitzen Winkel einschließen.

Und es gibt wenigstens eine Parallele zu g durch P, die mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzt, nämlich die Senkrechte g' zu h durch P. Es sei Γ die Menge aller solcher Geraden, sofern sie „rechts“ von h mit h einen Winkel $\leq 90°$ einschließen.

Für jeden Winkel γ mit $0 \leq \gamma \leq 90°$ sei l_γ die Gerade durch P, die h im Winkel γ schneidet. Für jede solche Gerade l sei umgekehrt $\gamma(l)$ der Schnittwinkel zu h.

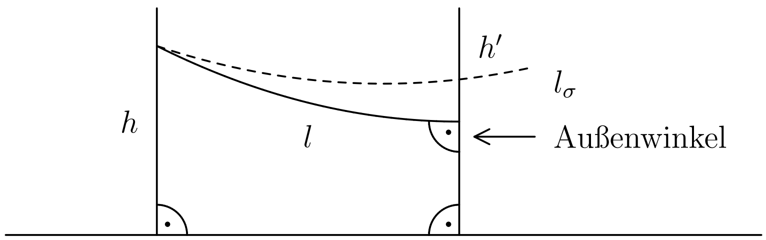
2.11 Satz.

1. *Ist $l \in \Sigma$ und $\tau < \gamma(l)$, so ist auch $l_\tau \in \Sigma$.*

2. *Ist $l \in \Gamma$ und $\sigma > \gamma(l)$ nicht zu groß, so ist auch $l_\sigma \in \Gamma$.*

Beweis: Teil (1) ist trivial, nach Pasch.

(2) Sei $l \in \Gamma$, h' die gemeinsame Senkrechte, $\sigma > \gamma(l)$. Verlängert man h' über den Schnittpunkt mit l hinaus, so trifft sie dort l_σ



Nach dem Außenwinkelsatz müssen sich h' und l_σ unter einem spitzen Winkel treffen. Aber für den Fall wurde schon gezeigt, dass g und l_σ eine gemeinsame Senkrechte besitzen. ■

2.12 Satz.

1. *$\{\gamma \mid l_\gamma \in \Sigma\}$ besitzt kein Maximum.*

2. *$\{\gamma \mid l_\gamma \in \Gamma\}$ besitzt kein Minimum.*

Beweis: 1) Wenn $\gamma \in \Sigma$ ist, trifft l_γ die Gerade in einem Punkt B. Ist A der Fußpunkt des Lots von P auf g, so gibt es einen Punkt B' mit $A - B - B'$, die Gerade $l' := PB'$ liegt in Σ, und es ist $\gamma(l') > \gamma$.

2) Sei $\gamma \in \Gamma$, $l = l_\gamma$, t die gemeinsame Senkrechte von g und l. Wir errichten in weiterer Entfernung von h eine Senkrechte s zu g und fällen das Lot l' von P auf s.

Behauptung: $\gamma(l') \in \Gamma$ und $\gamma(l') < \gamma$.

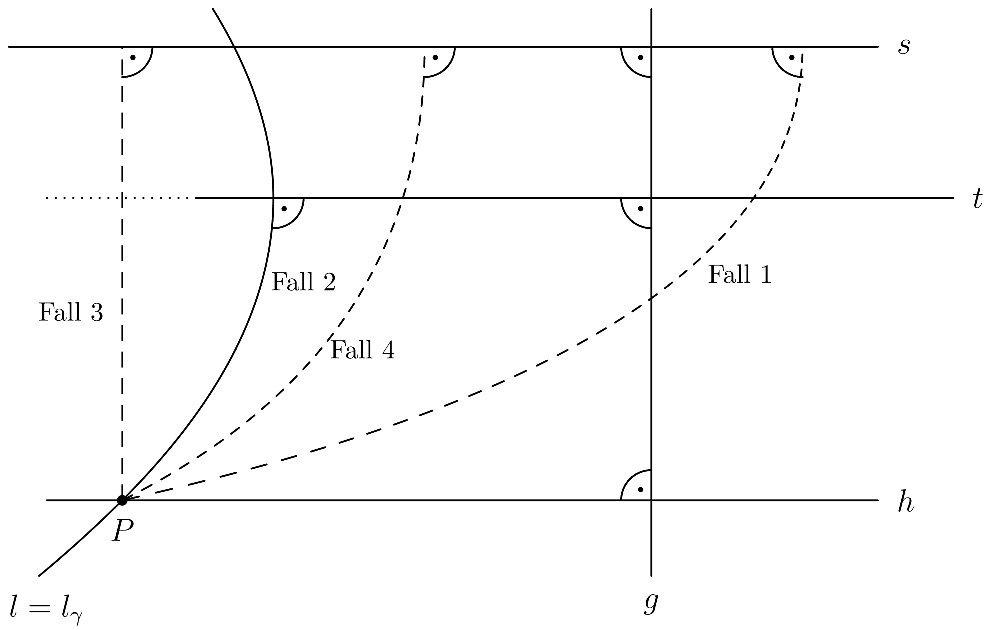
Jetzt muss man einige Fälle unterscheiden.

1. Fall: l' trifft g.
Dann erhält man ein Dreieck mit 2 rechten Winkeln, was nicht sein kann.

2. Fall: $l' = l$.
Das ist nicht möglich, weil dann ein Viereck mit 4 rechten Winkeln entsteht.

3. Fall: l' verläuft „oberhalb" von l.
Dann trifft die Verlängerung von t die Gerade l' unter einem spitzen Winkel (Außenwinkelsatz), und indem man zum Nebenwinkel übergeht, erhält man ein Viereck,in

dem die Winkelsumme $> 360°$ ist. Das kann nicht sein.



4. Fall: l' verläuft „unterhalb" von l und trifft nicht g.
Das ist die einzige Option, die übrig bleibt. l' ist eine Parallele zu g mit gemeinsamer Senkrechten, und es ist $\gamma(l') < \gamma$. ∎

Nun sei $\gamma_1 := \sup\{\gamma \mid l_\gamma \in \Sigma\}$ und $\gamma_2 := \inf\{\gamma \mid l_\gamma \in \Gamma\}$. Beides muss existieren, und es muss $\gamma_1 \leq \gamma_2$ sein.

Sei $g_1 := l_{\gamma_1}$ und $g_2 := l_{\gamma_2}$. Dann ist g_1 eine Gerade, die nicht mehr g schneidet, und g_2 ist eine Gerade, die keine gemeinsame Senkrechte mit g hat. Beide sind parallel zu g.

2.13 Satz. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt: $g_1 = g_2$.*

Beweis: Wäre $g_1 \neq g_2$, so würde der Abstand zwischen ihnen beliebig groß. Aber da g_2 asymptotisch auf g zuläuft und g_1 immer zwischen g und g_2 bleibt, kann das nicht sein! ∎

Damit haben wir erhalten:

> *Die Geraden durch P, die g schneiden, werden durch eine asymptotische Parallele von denjenigen Parallelen zu g getrennt, die eine gemeinsame Senkrechte mit g besitzen.*

Insbesondere ist – unter der Hypothese des spitzen Winkels – die Existenz von asymptotischen Parallelen gesichert.

An dieser Stelle glaubt nun Saccheri, er sei so gut wie am Ziel. Er verstrickt sich in immer kompliziertere und immer unklarere Beweise, um zu zeigen, dass die Existenz asymptotischer Parallelen der Natur der Geraden widerspricht. Im Grunde argumentiert er wie folgt:

Eine Gerade g und eine dazu asymptotische Gerade g' treffen sich in ∞ und haben dort eine gemeinsame Senkrechte, weil sich ihre Richtungen dort nicht mehr unterscheiden. Aber wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten in einem Punkt kann das nicht sein.

Weil Saccheri selbst dem Frieden nicht so recht traut, gibt er noch einen weiteren Beweis an, in dem er zwar interessante Eigenschaften von Parallelen unter der Hypothese des spitzen Winkels herleitet, schließlich aber auch nur durch unerlaubte Verquickung von Aussagen im Endlichen und im Unendlichen den endgültigen Widerspruch herbeiführt.

Am 13. Juli 1733 erhält er die Druckerlaubnis der Inquisition, am 16. August 1733 die des Provinzials der Gesellschaft Jesu, und am 25. Oktober 1733 stirbt er nach längerer Krankheit. Es ist fraglich, ob er das Erscheinen seiner Arbeit noch erlebt hat.

Saccheris Schrift muss im 18. Jahrhundert unter den Fachleuten recht bekannt gewesen sein, später geriet sie jedoch in Vergessenheit.

Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800), ab 1756 Professor für Mathematik und Physik in Göttingen und ab 1763 Leiter der dortigen Sternwarte, schrieb zahlreiche Lehrbücher und besaß eine riesige Sammlung von Schriften, die nahezu alles umfasste, was bis etwa 1770 über das Parallelenproblem bekannt war. Von Gauß und Lichtenberg bekam Kästner die wenig schmeichelhafte Charakterisierung, er sei der größte Mathematiker unter den Dichtern und der größte Dichter unter den Mathematikern.

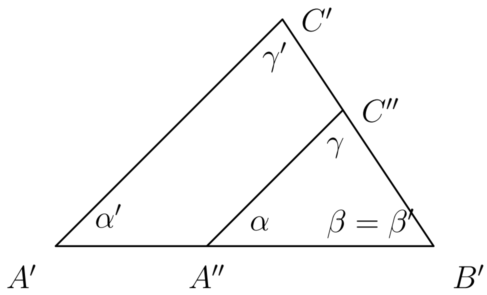
Unter seiner Anleitung entstand die Dissertation von **Georg Simon Klügel**, in der dieser die Geschichte des Parallelenproblems beschrieb und in recht scharfsinniger Weise eine große Zahl bisheriger Beweisversuche kritisierte. In einem Nachwort schrieb Kästner u.a. sinngemäß: „Niemand, der bei gesunden Sinnen ist, wird Euklids fünftes Postulat je bestreiten wollen.“

Auf dem Weg über Klügels Dissertation hat wohl auch der Schweizer Mathematiker **Johann Heinrich Lambert** (1728 – 1777) von Saccheris Ergebnissen erfahren.

Lambert betrachtete Vierecke mit 3 rechten Winkeln (die durch Halbierung eines Saccheri-Vierecks entstehen und heute auch als „Lambert-Vierecke“ bezeichnet werden). Je nach Art des 4. Winkels unterschied auch er die 3 Hypothesen vom rechten, stumpfen und spitzen Winkel. Und wie Saccheri führte auch er die 2. Hypothese zum Widerspruch. Er entdeckte unter anderem den folgenden Satz:

2.14 Satz. *Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ existieren, die in allen 3 Winkeln übereinstimmen, aber nicht kongruent sind, so gilt das Euklidische Parallelenaxiom.*

Beweis: Wir bezeichnen die Winkel in den Dreiecken jeweils mit α, β und γ bzw. α', β' und γ'. Wenn die Dreiecke nicht kongruent sind, muss $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ sein. Wir nehmen an, es sei $\overline{A'B'} > \overline{AB}$.



Dann gibt es einen Punkt A'' mit $A' - A'' - B'$ und $\overline{A''B'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$. Trägt man α bei A'' an, so trifft der freie Schenkel $B'C'$ in einem Punkt C''.

Nach Konstruktion ist $A''B'C'' \mathrel{\widehat{=}} ABC$. Also ist

$$WS(A'A''C''C') = \alpha' + (180° - \alpha) + (180° - \gamma) + \gamma' = 360°.$$

Aber dann gilt das Parallelenaxiom. ∎

Bemerkenswert ist die Umkehrung des gerade gewonnenen Ergebnisses:

2.15 Folgerung (WWW-Kongruenz). *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt: Ähnliche Dreiecke sind kongruent.*

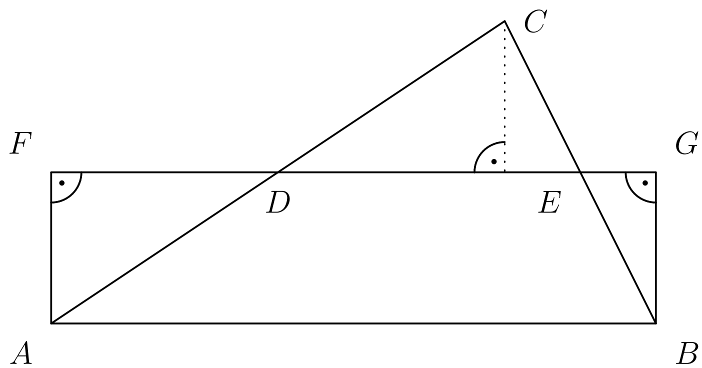
Ist μ eine Flächenfunktion, so hängt $\mu(ABC)$ nur von den Winkeln des Dreiecks ab. Diese schon erstaunliche Tatsache kann man weiter verschärfen:

2.16 Satz. *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt:*

Ist μ eine Flächenfunktion, und sind ABC, $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit gleichem Defekt, so ist $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Beweis: Wir untersuchen zunächst den Fall $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Wie beim 1. Satz von Saccheri-Legendre konstruieren wir zu ABC ein Saccheri-Viereck $GFAB$ mit Basis $\overline{GF}$, so dass die Summe der Gipfelwinkel (bei A und B) gleich der Winkelsumme von ABC ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass ABC und $GFAB$ zerlegungsgleich sind. Da kongruente Dreiecke auch den gleichen Defekt aufweisen und der Defekt sich additiv verhält, bedeutet das insbesondere, dass $\delta(GFAB) = \delta(ABC)$ ist.

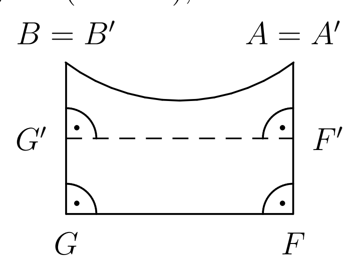


Bezeichnet ε einen der Gipfelwinkel, so ist

$$\delta(ABC) = \delta(GFAB) = 360^\circ - (180^\circ + 2\varepsilon) = 2(90^\circ - \varepsilon).$$

Ist nun $G'F'A'B'$ das analog zu $A'B'C'$ konstruierte Saccheri-Viereck mit Gipfelwinkeln ε', so folgt aus der Bedingung $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$, dass $\varepsilon = \varepsilon'$ ist.

Da auch die Gipfellinien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ kongruent sind, müssen die beiden Saccheri-Vierecke überhaupt kongruent sein, denn andernfalls könnte man das kleinere so in das größere einpassen, dass ein Rechteck übrig bleibt.



Damit ist gezeigt, dass ABC und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind, und es ist $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Im 2. Teil des Beweises setzen wir voraus, dass die Dreiecke keine zwei gleichen Seiten haben. Es sei etwa $\overline{A'C'} > \overline{AC}$.

Ist D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$, so ist sicher $\overline{AD} > \overline{AF}$, also $\overline{A'C'} > \overline{AC} > 2 \cdot \overline{AF}$. Man kann nun ein Dreieck ABC_1 konstruieren, das ebenfalls zerlegungsgleich zu $GFAB$ ist, aber mit $\overline{AC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$:

F liegt im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ um A mit Radius $r := \dfrac{1}{2} \cdot \overline{A'C'}$, also muss $\mathcal{K}$ die Gerade FG „rechts" von F in einem Punkt D_1 treffen. Verlängert man $\overline{AD_1}$ über D_1 hinaus bis zu einem Punkt C_1 mit $\overline{AD_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{D_1C_1}$, so erhält man das gewünschte Dreieck.

Nun ist $\delta(ABC_1) = \delta(GFAB) = \delta(ABC) = \delta(A'B'C')$. Wegen $\overline{AC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'C'}$ kann man die Ergebnisse des 1. Teils des Beweises auf die Dreiecke ABC_1 und $A'B'C'$ anwenden. Wir benutzen die Tatsache, dass ABC_1 und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind. Daraus folgt, dass auch ABC und $A'B'C'$ zerlegungsgleich sind, und daraus die Behauptung. ∎

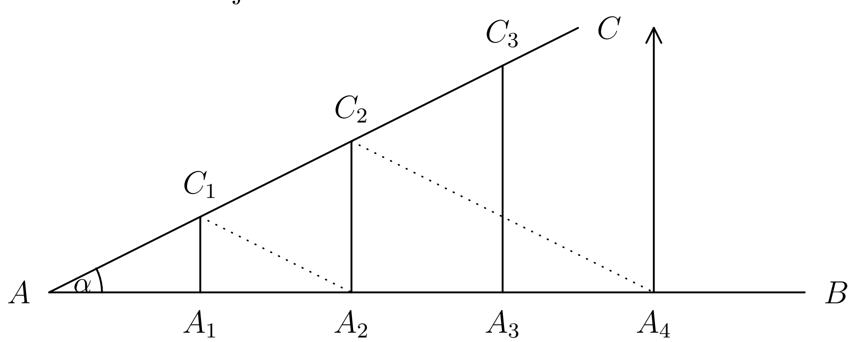
Wir werden ab jetzt Winkel im Bogenmaß messen, also 90° durch $\pi/2$ ersetzen.

2.17 Satz. *Gegeben seien zwei Geraden AB und AC, die sich bei A unter einem spitzen Winkel α treffen. Dann gibt es auf $\overrightarrow{AB}$ eine Senkrechte zu AB, die zu AC asymptotisch parallel ist.*

BEWEIS: Wir wählen Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf AB mit

$$\overline{AA_1} \widehat{=} \overline{A_1A_2} \widehat{=} \overline{A_2A_3} \widehat{=} \ldots$$

und errichten dort jeweils Senkrechte zu AB.



Annahme, die Senkrechte in A_i trifft stets die Gerade AC in einem Punkt C_i.

Sei $\delta_n := \delta(AA_nC_n)$. Da jeweils $AA_kC_k \widehat{=} A_kA_{2k}C_k$ ist, folgt:

$$\delta_{2n} > \delta(AA_{2n}C_n) = \delta(AA_nC_n) + \delta(A_nA_{2n}C_n) = 2 \cdot \delta_n.$$

Also ist

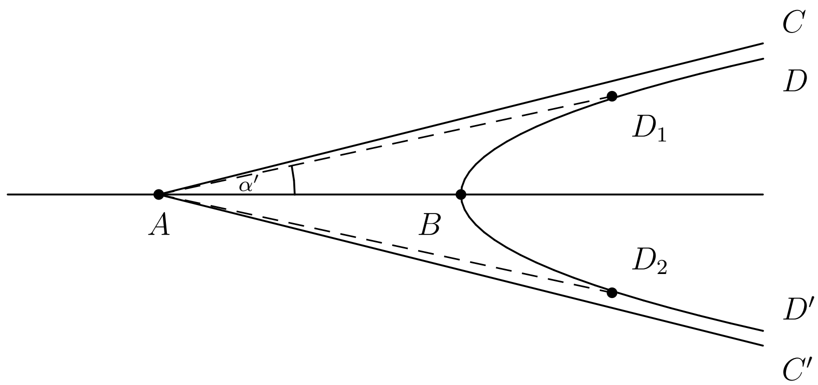
$$\delta_{2^k} > 2 \cdot \delta_{2^{k-1}} > \ldots > 2^{k-1} \cdot \delta_1.$$

Für genügend großes k wird aber $2^{k-1} \cdot \delta_1 > \pi$. So groß kann der Defekt nicht werden, das ist ein Widerspruch.

Indem man ein Lot von C auf AB fällt, erhält man wenigstens eine Senkrechte zu AB, die AC trifft. Indem man die Senkrechten in zwei Klassen einteilt, je nach ihrem Schnittverhalten mit AC, erreicht man eine Situation, in der man das Dedekind-Axiom anwenden kann. Die Grenzgerade, die es dann geben muss, kann nicht mehr schneiden (wie man sich leicht überlegt), also muss sie asymptotisch parallel sein. ∎

2.18 Folgerung. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Dreieck, dessen Winkelsumme $< \varepsilon$ ist.*

BEWEIS: An die Gerade AB werde bei A ein spitzer Winkel $\alpha < \varepsilon/4$ angetragen. O.B.d.A. sei B der Punkt, bei dem die Senkrechte BD zu AB asymptotisch parallel zu dem freien Schenkel AC des Winkels α ist.



Durch Spiegeln an AB kann man die Gerade DB über B hinaus verlängern, sie ist dort asymptotisch parallel zum Spiegelbild AC' der Geraden AC.

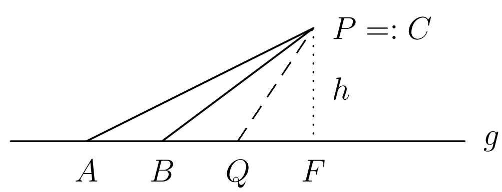
Trägt man die Strecke $\overline{AB}$ auf beiden Seiten von B auf BD ab, so erhält man Punkte D_1 und D_2. Das Dreieck ABD_1 ist gleichschenklig mit Basiswinkeln $\alpha' := \angle BAD_1 = \angle BD_1A$. Offensichtlich ist $\alpha' < \alpha$. Auf der anderen Seite von AB erhält man das kongruente Dreieck AD_2B. Nun ist AD_2D_1 ein Dreieck mit Winkelsumme $= 4\alpha' < 4\alpha < \varepsilon$. ∎

2.19 Folgerung. *Der Defekt eines Dreiecks kann dem Wert π beliebig nahe kommen.*

Man kann allerdings zeigen, dass große Defekte nur bei Dreiecken auftreten, bei denen alle drei Seiten „sehr groß“ sind. Um die Gültigkeit der Hypothese vom spitzen Winkel experimentell nachzuweisen, müsste man also sehr große Dreiecke vermessen.

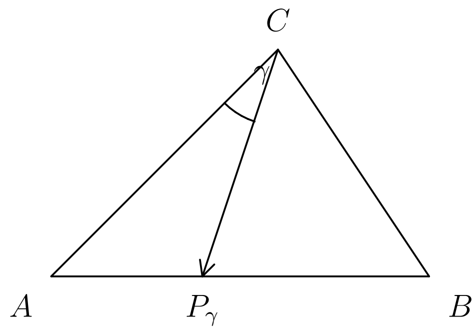
Andererseits kann man zeigen:

2.20 Satz. *Ist $\varepsilon > 0$ und eine Strecke $\overline{XY}$ vorgegeben, so gibt es ein Dreieck ABC mit $\delta(ABC) < \varepsilon$ und $\overline{AC}, \overline{BC} > \overline{XY}$.*



Beweis: Ist eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ gegeben und h das Lot von P auf g mit Fußpunkt F, so kann man einen Punkt $Q \in g$ finden, so dass $\angle PQF < \varepsilon$ ist (Übungsaufgabe!). Schlägt man einen Kreis um P mit einem Radius $> \max(\overline{PQ}, \overline{XY})$, so trifft dieser Kreis g in einem Punkt A mit $A - Q - F$. Wählt man schließlich noch B auf g mit $A - B - Q$ und setzt $C := P$, so ist ABC das gesuchte Dreieck. ∎

Wir wählen jetzt ein Dreieck ABC mit einem Defekt δ_0 nahe bei 180°. Es sei $\gamma_0 := \angle ACB$. Für $0 < \gamma \leq \gamma_0$ sei P_γ definiert durch $A - P_\gamma - B$ und $\angle ACP_\gamma = \gamma$.



Jetzt kann eine Funktion $f : [0, \gamma_0] \to [0, \delta_0]$ definiert werden, durch

$$f(\gamma) := \begin{cases} \delta(AP_\gamma C) & \text{falls } 0 < \gamma \leq \gamma_0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } \gamma = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Funktion f ist offensichtlich[2] streng monoton wachsend und daher injektiv. Außerdem ist $f(0) = 0$ und $f(\gamma_0) = \delta_0$. Wir werden zeigen, dass f stetig und daher auch surjektiv ist.

Dazu ist für $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$ zu zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \tau > 0, \text{ s.d. gilt: } |\gamma' - \gamma| < \tau \implies |f(\gamma') - f(\gamma)| < \varepsilon.$$

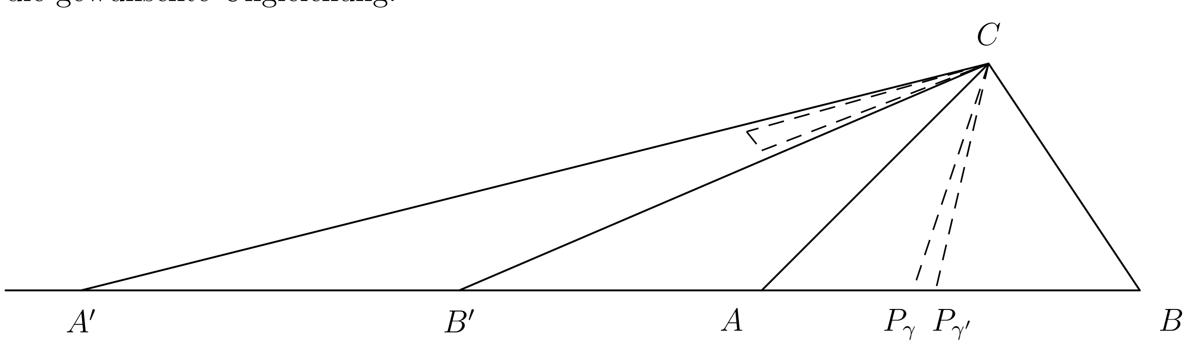
Nun ist

$$f(\gamma') - f(\gamma) = \delta(AP_{\gamma'}C) - \delta(AP_\gamma C) = \delta(P_\gamma P_{\gamma'} C).$$

Also bleibt zu zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \tau > 0, \text{ s.d gilt: } |\gamma' - \gamma| < \tau \implies \delta(P_\gamma P_{\gamma'} C) < \varepsilon.$$

Wählt man nun gemäß Satz 2.20 ein Dreieck $A'B'C$, dessen Defekt $< \varepsilon$ ist, das aber zwei genügend lange Seiten besitzt, so kann man bei geeigneter Wahl von τ ein kongruentes Exemplar von $\triangle P_\gamma P_{\gamma'} C$ im Innern von $\triangle A'B'C$ finden. Also gilt die gewünschte Ungleichung.



Der Defekt hat eigenartigerweise die Eigenschaften einer Flächenfunktion. Und es gilt noch mehr. Ist μ irgendeine Flächenfunktion (für die Geometrie, die durch die Axiome der neutralen Geometrie und die Hypothese des spitzen Winkels beschrieben wird), so kann man eine Funktion $m : [0, \delta_0] \to \mathbb{R}_+$ wie folgt definieren:

[2] wegen der Additivität des Defektes

> Ist $0 < t \leq \delta_0$ und $t = \delta(XYZ)$, so sei $m(t) := \mu(XYZ)$. Außerdem werde $m(0) := 0$ gesetzt.

Diese Funktion m ist wohldefiniert: Zum einen haben wir oben gesehen, dass jedes $t \in (0, \delta_0]$ Defekt eines Dreiecks ist. Und zum anderen haben wir in Satz 2.16 bewiesen: Ist $\delta(XYZ) = \delta(X'Y'Z')$, so ist auch $\mu(XYZ) = \mu(X'Y'Z')$.

Weiter gilt:

> *Ist $0 < t_1, t_2 \leq \delta_0$ und $t_1 + t_2 \leq \delta_0$, so ist $m(t_1 + t_2) = m(t_1) + m(t_2)$.*

Daraus folgt, dass m streng monoton wachsend ist, aber auch noch mehr:

2.21 Lemma.

Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass $m(t) = c \cdot t$ ist.

Beweis: Wir halten ein t_0 mit $0 < t_0 < \dfrac{\delta_0}{2}$ fest und setzen $t_n := \dfrac{t_0}{n}$, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq k \leq n+1$ ist dann $k \cdot t_n \in (0, \delta_0]$, und es gilt:

$$m(k \cdot t_n) = m(t_n + \cdots + t_n) = m(t_n) + \cdots + m(t_n) = k \cdot m(t_n).$$

Insbesondere ist $m(t_0) = m(n \cdot t_n) = n \cdot m(t_n)$, also

$$\frac{k}{n} \cdot m(t_0) = k \cdot m(t_n) = m(k \cdot t_n) = m(\frac{k}{n} \cdot t_0).$$

Ist nun r eine positive reelle Zahl mit $0 < r \cdot t_0 \leq \delta_0$, so kann man r durch rationale Zahlen approximieren:

$$\frac{k(n)}{n} \leq r < \frac{k(n)+1}{n}.$$

Wegen der Monotonie von m folgt daraus:

$$\frac{k(n)}{n} \cdot m(t_0) = m(\frac{k(n)}{n} \cdot t_0) \leq m(r \cdot t_0) < m(\frac{k(n)+1}{n} \cdot t_0) = \frac{k(n)+1}{n} \cdot m(t_0).$$

Lässt man jetzt $n \to \infty$ gehen, so erhält man die Gleichung $r \cdot m(t_0) = m(r \cdot t_0)$.

Wir setzen $c := \dfrac{m(t_0)}{t_0}$. Dann gilt für $0 < t \leq \delta_0$:

$$m(t) = m(\frac{t}{t_0} \cdot t_0) = \frac{t}{t_0} \cdot m(t_0) = c \cdot t.$$

Das war die Behauptung. ∎

2.22 Folgerung. *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt:*

Ist μ eine Flächenfunktion, so gibt es eine Konstante k, so dass für alle Dreiecke ABC gilt:

$$\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC).$$

BEWEIS: Wir setzen $k := +\sqrt{c}$, wobei c die Konstante im Lemma ist. Dann ist

$$\frac{\mu(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{m(\delta(ABC))}{\delta(ABC)} = c = k^2.$$

■

Die Flächenfunktion ist also nur bis auf die Konstante k festgelegt. Wenn es eine Geometrie gibt, in der die Hypothese des spitzen Winkels gilt, dann gibt es sogar eine ganze Schar solcher Geometrien, abhängig von k.

Es war Lambert, der hier seltsame Parallelen zur Geometrie auf einer Sphäre erkannte:

Auf der Kugeloberfläche ist die Hypothese vom stumpfen Winkel erfüllt, allerdings sind mehrere Axiome der neutralen Geometrie ungültig. Es gibt keine Zwischen-Beziehung und keine beliebig langen Geraden, und auch der Außenwinkelsatz ist falsch. Da die Winkelsumme im Dreieck immer größer als π ist, betrachtet man den sogenannten *Exzess*

$$\varepsilon(ABC) := \mathrm{WS}(ABC) - \pi.$$

Ein genaueres Studium der sphärischen Geometrie zeigt, dass für die Fläche eines sphärischen Dreiecks folgende Formel gilt:

$$\mu(ABC) = R^2 \cdot \varepsilon(ABC) = R^2 \cdot (\mathrm{WS}(ABC) - \pi),$$

wenn die Winkelsumme im Bogenmaß gerechnet wird. Dabei ist R der Radius der Kugel, deren Oberfläche betrachtet wird.

Lambert hatte nun die Idee, eine „Kugel“ mit imaginärem Radius $r = \mathbf{i}R$ zu betrachten. Dann ergibt sich rein formal

$$\mu(ABC) = r^2 \cdot (\pi - \mathrm{WS}(ABC)) = r^2 \cdot \delta(ABC).$$

Das ist die Flächenformel unter der Hypothese des spitzen Winkels.

Lambert machte noch eine andere Beobachtung: Da die Kongruenzklasse eines Dreiecks nur von den drei Winkeln abhängt (WWW-Kongruenz), gibt es – im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie – unter der Hypothese des spitzen Winkels eine **absolute Längeneinheit**. Konstruiert man etwa ein gleichseitiges Dreieck, dessen Winkel alle 45° betragen, so ist die Seitenlänge dieses Dreiecks festgelegt. Es erscheint im Augenblick nicht ganz klar, ob eine solche Konstruktion durchführbar ist, aber wir werden ähnliche Verfahren kennenlernen, die auf jeden Fall ausgeführt werden können.

Lambert hat zu guter Letzt doch noch einen Beweis für das Parallelenaxiom geliefert, indem er unter der Hypothese des spitzen Winkels eine absurde Situation herbeigeführt hat. Wir wollen darauf nicht näher eingehen, denn er hatte wohl selbst Zweifel und seine Arbeit nicht veröffentlicht.

Der Schauplatz wechselt nun nach Frankreich, denn es kam die Epoche der großen französischen Mathematiker d'Alembert, Lagrange, Laplace und Legendre.

Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717 – 1783) glaubte, man könnte die Schwierigkeiten überwinden, wenn man nur die richtigen Definitionen einsetzen würde, aber er schaffte das Problem nicht aus der Welt.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) dachte, er hätte Erfolg gehabt. Aber als er seine Arbeit über Parallelen vor der Französischen Akademie vortrug, unterbrach er sich plötzlich mit dem Ausruf: „Ich muss noch einmal darüber nachdenken!" Er kam nie wieder auf das Thema zurück.

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) wollte sich auf Newtons Gesetz der Schwerkraft stützen. Er kam auch zu dem Schluss, dass das Ähnlichkeitsprinzip (vgl. Wallis) ein natürlicheres Postulat als Euklids Parallelenaxiom sei.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) beschäftigte sich ausführlich mit den Grundlagen der Geometrie. Für ihn war die Euklidische Geometrie die einzig gültige, und er versuchte mehrfach, dass Parallelenaxiom zu beweisen. Seine Nachforschungen sind über die verschiedenen Ausgaben seiner „Eléments de Géométrie" (1794 - 1823) verstreut. Sein klarer und eleganter Stil bewirkte, dass seine Einführung in die Geometrie zu einem der erfolgreichsten Lehrbücher seiner Zeit wurde, und er machte dadurch das Parallelenproblem wieder einer breiteren Öffentlichkeit bewusst. Viele seiner Resultate finden sich allerdings schon bei Saccheri. In seinem Todesjahr (1833) erschien eine Arbeit, in der alle seine Versuche zum Parallelenproblem zusammengefasst waren. Doch zu dem Zeitpunkt war das alles längst überholt.

Woher rühren die Probleme, die die Mathematiker bis ins 19. Jahrhundert mit den Grundlagen der Geometrie hatten, und wie kam es dann zu einem Umschwung?

Die Antike wurde von der Lehre des **Aristoteles** beherrscht, der in der Spätantike in Vergessenheit geriet, aber seit **Thomas von Aquin** (1225 - 1274) wieder zur alleinigen Autorität in nichtkirchlichen philosophischen Fragen erhoben wurde.

Nach Aristoteles gibt es zwei Erkenntnisquellen: Die *Sinne* (also die Erfahrung) und den *Verstand* (also die Logik). Die Mathematik muss man dann der zweiten Erkenntnisquelle zuordnen, denn sie lehrt keine zufälligen Tatsachen sondern die Einsicht in notwendige Gesetze. Man hoffte sogar, durch die Übertragung der logischen Form der mathematischen Schlussweise auf die Philosophie dort die gleiche Sicherheit erreichen zu können. Aber diese Bemühungen schlugen fehl.

Immanuel Kant (1724 – 1804) unterzog die Frage nach der Herkunft der mathematischen Gewissheit einer gründlichen Prüfung und kam so zu einer radikalen Revision der Aristotelischen Lehre.

Setzt man die Axiome voraus, so ergeben sich die Lehrsätze durch bloßes logisches Schließen. Aber woher kommen die Axiome? Diese Frage führte Kant auf die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen:

Eine *analytische Aussage* ist eine solche, die man allein durch Aufgliederung des betrachteten Begriffs gewinnt, also durch eine logische Analyse.

Eine *synthetische Aussage* muss dagegen über den reinen Begriffsinhalt hinausgehen.

Beispiel: Dass alle Radien eines Kreises die gleiche Länge haben, ist ein analytischer Satz. Dass das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser des Kreises den Wert 3,1415926... hat, ist eine synthetische Aussage.

Definitionen sind demnach analytisch, Axiome und die daraus folgenden Sätze synthetisch. Das bedeutet aber, dass es für die Mathematik noch eine andere Erkenntnisquelle als die Logik geben muss. Diesen Ursprung von Erkenntnis nannte Kant die *reine Anschauung*. Doch was soll man sich darunter vorstellen?

Es gibt noch eine andere Unterscheidung von Aussagen, nämlich die zwischen *apriorischen Aussagen* und *empirischen Aussagen*. Eine Aussage ist a priori wahr, wenn sie schon auf Grund ihres sprachlichen Inhalts wahr ist, also unabhängig von Erfahrung und Sinneseindrücken. Die Wahrheit empirischer Aussagen gewinnt man nur durch Erfahrung.

Nun sind vier Kombinationen denkbar. Allerdings kann eine analytische Aussage nicht zugleich eine empirische sein, „analytisch" gehört zu „a priori". Empirische Aussagen sind stets synthetisch. Auf den ersten Blick scheint es so, als müsse man auch die Kombination „a priori + synthetisch" ausschließen. Doch dann wäre man wieder bei der Aristotelischen Zweiteilung. Wenn man nun wie Kant annimmt, dass die Axiome der Geometrie auf Intuition, also einer abstrahierten Anschauung beruhen, so liefern sie etwas durchaus Neues, sind also synthetisch. Und zugleich brauchen sie nicht immer wieder überprüft zu werden, sie sind nicht empirisch, sondern a priori! Solche inhaltsvollen und sicheren Aussagen sind in gewisser Weise die vollkommensten Aussagen.

Doch woher kommt die Information, die aus den Axiomen synthetische Aussagen macht. Kant vertrat die Auffassung, dass z.B. Euklids Postulate beschreiben, wie unser Gehirn die Eindrücke vom Raum, die wir durch unsere Sinne erfahren, verarbeitet. Demnach muss das Euklidische Parallelenaxiom wahr sein, es kann keine andere Geometrie geben.

Die Autorität Kants hatte einen immensen Einfluss auf die zeitgenössischen Wissenschaftler.

3 Aus Nichts eine neue Welt

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) war die dominierende mathematische Persönlichkeit seiner Zeit und sicher einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Schon in der Volksschule fiel er durch seine Rechenkünste auf, einer seiner ersten Förderer war Martin Bartels, der Gehilfe des Schullehrers, mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verband. Im Gymnasium in Braunschweig übersprang er mehrere Klassen, und der Herzog von Braunschweig, Karl Wilhelm Ferdinand, wurde auf ihn aufmerksam gemacht. Der Herzog finanzierte ihm sein Studium, zunächst (ab 1792) am Collegium Carolinum in Braunschweig, später (ab 1795) in Göttingen, wo er bei dem Physiker Georg Christoph Lichtenberg und bei dem schon erwähnten Mathematiker Kästner Vorlesungen hörte.

1796 (im Alter von 18 Jahren) entdeckte er, dass das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. In dieser Zeit lernte er auch einen jungen ungarischen Adligen kennen, Wolfgang Bolyai (1775 - 1865), woraus sich eine sehr enge Freundschaft entwickelte. Da Gauß 1798 nach Braunschweig zurückkehrte, sahen sich die Freunde 1799 zum letzten Mal, blieben aber ihr Leben lang in brieflicher Verbindung.

Am 16. Juli 1799 (im Alter von 22 Jahren) wurde Gauß auf Wunsch des Herzogs an der Landesuniversität Helmstedt promoviert, in Abwesenheit und unter Verzicht auf eine mündliche Prüfung. Seine Dissertation enthielt den ersten korrekten und vollständigen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra.

1801 erschienen seine „Disquisitiones arithmeticae“, mit denen er das Fundament für die moderne Zahlentheorie legte (Lehre von den Kongruenzen, quadratische Formen, erster Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes). Diese Arbeit machte ihn mit einem Schlag in der Fachwelt bekannt, aber noch berühmter wurde er weltweit, als es im Dezember 1801 gelang, auf Grund seiner Berechnungen den Anfang des Jahres beobachteten und wieder verlorenen Planetoiden Ceres erneut am Himmel zu entdecken. Gauß bekam Kontakt zu führenden Astronomen seiner Zeit, z.B. Olbers, Bessel und Schumacher.

Als die Franzosen 1806 im Auftrag Napoleons Braunschweig eroberten, hatte einer der Generäle den Auftrag, ganz besonders auf das Wohlergehen von Gauß zu achten, damit ihn nicht das Schicksal des Archimedes ereile. 1807 erhielt Gauß einen Ruf nach Göttingen als Professor für Astronomie und Direktor der dortigen Sternwarte. In Göttingen blieb er bis zu seinem Lebensende. 1820 erhielt er den Auftrag zur Vermessung des Königreichs Hannover, und so führte er von 1821 bis 1825 praktische Vermessungsarbeiten durch.

1828 erschien sein differentialgeometrisches Hauptwerk („Allgemeine Untersuchungen über krumme Flächen“) und 1831 eine Arbeit über Algebra, in der er die komplexe Zahlenebene einführte. Im selben Jahr kam Wilhelm Weber als Professor für Physik nach Göttingen. Mit ihm zusammen stellte Gauß Untersuchungen über elektromagnetische Induktion und den Erdmagnetismus an. 1833 erfanden sie zusammen den elektrischen Telegraphen.

Nachdem Weber 1838 wegen seiner Beteiligung am Protest der „Göttinger Sieben“ gegen einen Verfassungsbruch des Königs Ernst August von Hannover seines Amtes enthoben wurde, gab Gauß seine physikalischen Forschungen auf. In all der Zeit hatte er zahlreiche mathematische Artikel veröffentlicht und noch mehr in der Schublade vorbereitet.

In seinen letzten Jahren lernte er noch Russisch und beteiligte sich an einer Reorganisation der Universitätswitwenkasse durch Berechnung von Tafeln, mit denen der Zeitwert von Leibrenten bestimmt werden konnte. 1849 wurde er anlässlich seines 50-jährigen Doktorjubiläums zum Ehrenbürger der Stadt Göttingen ernannt. Acht Monate vor seinem Tod, am 10. 6. 1854, hörte er den berühmten Habilitationsvortrag von Bernhard Riemann: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“

Seit 1792 beschäftigte sich Gauß mit der Theorie der Parallellinien, 1794 (im Alter von 17) wusste er, dass in einer Geometrie, in der die Hypothese vom spitzen Winkel gilt, der Flächeninhalt eines Dreiecks proportional zum Defekt dieses Dreiecks ist. Beim Abschied vor seiner Heimreise nach Ungarn hatte ihm Wolfgang Bolyai angekündigt, er habe einen Beweis für das V. Postulat (der sich später natürlich als falsch herausstellte). Ende des Jahres schrieb Gauß an Wolfgang, er sei selbst in seinen Arbeiten zu diesem Thema vorangekommen, die Wahrheit der Geometrie sei dadurch aber eher zweifelhaft geworden. Wenn man beweisen könnte, dass ein Dreieck mit beliebig großem Flächeninhalt möglich wäre, dann könnte er die gesamte Geometrie daraus herleiten. Die Möglichkeit einer anderen als der euklidischen Geometrie hatte er zu diesem Zeitpunkt noch nicht erwogen. 1808 äußerte er gegenüber Schumacher: Wenn das Parallelenpostulat nicht wahr wäre, so müsste es eine absolute Längeneinheit geben.

1816 schrieb Gauß etwas ähnliches auch an Gerling, einen Marburger Professor, mit dem er einen ausgedehnten Briefwechsel, vor allem über astronomische Fragen, führte, und im selben Jahr beklagte er sich in einer Buchbesprechung darüber, dass man bei der Behandlung einer Lücke in den Anfangsgründen der Geometrie nach 2000 Jahren noch nicht weiter gekommen sei.

Friedrich Ludwig Wachter (1792 – 1817), ein Schüler von Gauß, der später Professor der Mathematik am Gymnasium von Danzig war, unternahm umfangreiche Untersuchungen zum Parallelenproblem, lieferte einige falsche Beweise und nannte die Geometrie unter der Hypothese des spitzen Winkels „Anti-Euklidische Geometrie“. Er entdeckte, dass in dieser Geometrie die Sphäre durch einen Punkt bei wachsendem Radius gegen eine Fläche strebt, auf der das Euklidische Parallelenaxiom erfüllt ist. In den Jahren 1816/17 scheint Gauß allmählich zu der Erkenntnis gekommen zu sein, dass die neue Geometrie genauso denkbar wie die Euklidische sei. Er war aber auch davon überzeugt, dass eine Veröffentlichung seiner Ansichten nur zu Hohn und Spott führen würde, und er beschränkte sich daher auf Andeutungen in Briefen an seine Freunde.

Im Januar 1819 leitete Gerling die Notizen des Marburger Juristen **Ferdinand Karl Schweikart** (1780 - 1857) an Gauß weiter:

> *„Es gibt eine zweifache Geometrie, - eine Geometrie im engeren Sinn - die Euklidische; und eine astralische Größenlehre. Die Dreiecke der letzteren haben das Eigene, dass die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist. ...“*

Schweikart erwähnte, dass die Fläche von Dreiecken proportional zu ihrem Defekt sei, und dass die Astral-Geometrie (die er wohl deshalb so nannte, weil sie sich erst bei astronomischen Entfernungen von der Euklidischen unterscheide) von einer Konstanten abhänge. Die Euklidische Geometrie sei nur wahr, wenn diese Konstante unendlich groß sei.

Gauß antwortete sehr erfreut und bemerkte, dass die genannte Konstante sehr viel größer als der Erdradius sein müsse. Er selbst habe die Astralgeometrie so weit ausgebildet, dass er alle Aufgaben vollständig lösen könne, sobald die Konstante gegeben sei. Er gab auch eine Formel für die Obergrenze von Dreiecksflächen an (im Wesentlichen ein Vielfaches des maximalen Defektes, $k \cdot \pi$).

Schweikart kannte wahrscheinlich die Ergebnisse von Saccheri und Lambert. Er hat nichts veröffentlicht und scheint auch auf dem Gebiet nicht weiter gearbeitet zu haben. Trotzdem kann man diesen Briefwechsel zwischen Gauß und Gerling als Geburtsstunde der nichteuklidischen Geometrie auffassen, denn zum ersten Mal in der Geschichte wurde offen ausgesprochen, dass es neben der Euklidischen noch eine andere Geometrie gibt.

Franz Adolph Taurinus (1794 – 1874), ein Neffe Schweikarts, ist von diesem zu weiteren Untersuchungen angeregt worden. Im Gegensatz zu seinem Onkel glaubte er fest an das fünfte Postulat und versuchte, es zu beweisen. 1825 und 1826 veröffentlichte er seine Resultate, im Vorwort zum zweiten Buch erwähnte er auch Schweikart und den Briefwechsel mit Gauß. Er erkannte in seinen Schriften die Widerspruchslosigkeit der unter der Hypothese vom spitzen Winkel hergeleiteten Sätze, und indem er Lamberts Gedanken von einer Kugel mit imaginärem Radius aufgriff, entwickelte er sogar rein formal eine nichteuklidische Trigonometrie. Er löste eine Reihe von Aufgaben, wie etwa die Berechnung des Inhalts von Dreiecken bei gegebenen Seiten oder des Umfangs eines Kreises bei gegebenem Radius, und er kam zu den gleichen Formeln wie Gauß. Dieser hatte vorab von den Büchern erfahren und antwortete ihm 1824. Er, Gauß, hätte festgestellt, dass die Hypothese vom spitzen Winkel auf eine eigene von der Euklidischen ganz verschiedene Geometrie führe, die in sich selbst durchaus konsequent sei. Alle Bemühungen, einen Widerspruch zu finden, hätten sich als fruchtlos erwiesen. Das einzige Zweifelhafte sei die Existenz einer absoluten Länge. Er bestehe aber darauf, dass diese Mitteilungen privat seien und nicht an die Öffentlichkeit gelangen dürften.

Obwohl Taurinus mit seinen Forschungen weiter vorstieß als alle seine Vorgänger, blieb er fest der Ansicht, die Euklidische Geometrie sei die einzig richtige. Da er ohne Anerkennung blieb, resignierte er schließlich und verbrannte die restlichen Exemplare seines zweiten Buches.

Auffällig ist, wie sehr Gauß sich scheute, mit seinen nichteuklidischen Überlegungen an die Öffentlichkeit zu treten. Das Thema muss zu dieser Zeit einen ähnlichen Ruf besessen haben wie die Frage nach der Quadratur des Kreises oder der Konstruktion eines Perpetuum Mobile. Besonders berühmt ist in diesem Zusammenhang der Brief von Gauß an Bessel vom 27. 1. 1829:

> *„Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahre alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiß nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter konsolidiert, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.“*

Bei den Böotiern handelte es sich um einen etwas einfältigen griechischen Stamm.

Am 17. Mai 1831 erwähnte Gauß in einem Brief an Schumacher, dass er jetzt doch angefangen habe, einiges zu dem Thema aufzuschreiben, damit es nicht mit ihm unterginge.

1832 erhielt Gauß einen Brief von seinem Jugendfreund Wolfgang Bolyai, sowie dessen Buch über Geometrie und einen Anhang von Wolfgangs Sohn **Johann Bolyai** mit sensationellem Inhalt. Doch dazu muss man etwas weiter ausholen.

Im Juni 1799 hatte Wolgang Bolyai Göttingen verlassen (aus Geldmangel zu Fuß), im September kam er nach mancherlei Abenteuern in seiner Heimat in der Nähe von Hermannstadt in Siebenbürgen an. 1801 heiratete er, 1802 wurde sein Sohn Johann geboren. 1804 erhielt Wolfgang eine Professur am evangelischen Kollegium in Maros-Vásárhely. Dort entstand sein Hauptwerk, das sogenannte „Tentamen“, ein großes Lehrbuch zur Geometrie. Sein Sohn Johann zeigte schon früh mathematische Begabung, und er äußerte gegenüber Gauß seine Hoffnung, seinen Sohn eines Tages nach Göttingen schicken zu können, damit er Schüler von Gauß würde. Am 10. 4. 1816 schien ihm der Tag gekommen zu sein, und er schrieb an seinen Jugendfreund:

> *„. . . Ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten und, wenn es möglich wäre, in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15-jährigen Jüngling nicht*

dalassen, und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine durch viele Prozesse geschwächten Kräfte.

Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sichs, schon entschädigen. Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. In Hinsicht auf diesen Plan berichte mir unverholen:
1. Hast Du nicht eine Tochter, welche damals gefährlich (reciproce) wäre ...
2. Seid Ihr gesund, nicht arm, zufrieden, nicht mürrisch? Besonders ist Deine Frau Gemahlin eine Ausnahme von ihrem Geschlechte? Ist sie nicht veränderlicher als die Wetterhähne und so wenig im Voraus zu berechnen wie die Barometerveränderungen? ...
3. Alle Umstände zusammengenommen kannst Du mir leichter mit einem Worte sagen, dass es nicht sein kann; denn ich werde nie daran zweifeln, dass es nicht an Deinem Herzen fehlen wird.“

Gauß muss über diesen Brief sehr befremdet gewesen sein. Zudem hatte er überhaupt kein Interesse an Schülern und den Kopf voll mit privaten und dienstlichen Problemen. Er verzichtete auf eine Antwort und ließ danach 16 Jahre lang nichts mehr von sich hören.

Johann Bolyai ging daraufhin 1818 auf die Ingenieur-Akademie in Wien und trat 1823 in den Militärdienst ein. Seit 1820 beschäftigte er sich trotz eindringlicher Warnungen seines Vaters mit dem Parallelenproblem, und gegen Ende des Jahres, in dem er seine erste Stelle in Temesvár antrat, scheint er den Durchbruch geschafft zu haben. Am 3. November 1823 schrieb er seinem Vater:

„Mein Vorsatz steht schon fest, dass ich, sobald ich es geordnet, abgeschlossen habe und eine Gelegenheit kommt, ein Werk über die Parallelen herausgeben werde. ... Ich habe es noch nicht, aber ich habe so erhabene Dinge herausgebracht, dass ich selbst erstaunt war und es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen; wenn Sie, mein teurer Vater, es sehen werden, so werden Sie es erkennen; jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur so viel: dass ich aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe. Alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Turme. ... “

Wolfgang Bolyai zeigte sich bereit, die Theorie seines Sohnes als Anhang in sein Lehrbuch aufzunehmen, und er mahnte ihn zur Eile. Er ahnte, dass die Zeit reif für die neue Geometrie war und dass die Gefahr bestand, dass sie an mehreren Orten gleichzeitig gefunden wurde. Aber er verstand die Dinge nicht, die sein Sohn gefunden hatte, es kam zu Streitigkeiten, und es dauerte noch mehrere Jahre, bis der Druck vollendet war.

Anfang 1832 erschien endlich das Tentamen, zusammen mit dem Anhang von Johann Bolyai, dem berühmten „Appendix“. Das Original war in Latein geschrieben, aber Johann Bolyai gab selbst 1832 eine deutsche Bearbeitung heraus. Der deutsche Titel lautet: RAUMLEHRE, unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms (gemeint ist damit natürlich das V. Postulat): Für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.

Über den Inhalt wird weiter unten berichtet werden. Mit der „Quadratur des Kreises" ist die Konstruktion eines gleichseitigen konvexen Vierecks mit 4 gleichen Winkeln gemeint, dessen Fläche gleich der eines gegebenen Kreises ist. Echte Quadrate gibt es unter der Hypothese des spitzen Winkels natürlich nicht.

Auf Umwegen (eine Postsendung war verloren gegangen) erreichte Gauß im Februar ein Exemplar des Appendix. Am 14. 2. 1832 äußerte sich Gauß in einem Brief an Gerling sehr positiv über die Arbeit und nannte den jungen Bolyai ein „Genie erster Größe". In seiner Antwort vom 6. 3. 1832 an Wolfgang Bolyai schrieb er:

> *„Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.*
>
> *Wenn ich damit anfange, „dass ich solche nicht loben darf": so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen. Aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehend mit meinen eigenen, zum Teil schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt. ...*
>
> *Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge. Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist."*

Nach einigen Verbesserungsvorschlägen schrieb er noch:

> *„... Jedenfalls bitte ich Dich, Deinen Sohn herzlich von mir zu grüßen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, den Kubikinhalt des Tetraeders zu bestimmen. ... Man hätte erwarten sollen, dass es auch dafür einen einfachen Ausdruck geben werde; aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht. ...*
>
> *Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen den beiden geometrischen Systemen a priori zu unterscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei* nur *Form unserer Anschauung. ... "*

Der Eindruck auf Johann Bolyai war niederschmetternd. Gauß hatte nicht die erwartete begeisterte Zustimmung geäußert, sondern angeblich alles schon Jahrzehnte vorher gewusst. Er speiste ihn mit einer Übungsaufgabe ab und mit der Bemerkung, dass er sich darüber freue, dass ihm ausgerechnet der Sohn eines Freundes mit der Veröffentlichung zuvor gekommen sei. Und er verweigerte ihm die öffentliche Anerkennung. Die Enttäuschung führte zum völligen Persönlichkeitsverfall Johanns, er warf sich rastlos nur noch auf unlösbare Probleme, wurde aus dem Armeedienst entlassen und überwarf sich mit seinem Vater, der 1856 (hochgeehrt) starb. Die letzten Jahre seines Lebens verbrachte Johann verarmt und in großer Einsamkeit. Er starb 1860 unbeachtet und wurde in einem namenlosen Grab verscharrt. Erst als die Briefe von Gauß nach dessen Tod veröffentlicht wurden, erfuhr die Welt von der Entdeckung des Johann Bolyai.

Gauß, der noch in den zwanziger Jahren bei seinen Vermessungsarbeiten am Beispiel des größten vermessenen Dreiecks (zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohen Hagen) im Rahmen der Messgenauigkeit die Winkelsumme von 180° bestätigt gesehen hatte, war sich im Klaren darüber, dass die neue Geometrie in der Wirklichkeit höchstens bei astronomischen Entfernungen zum Vorschein kommen könnte. Trotzdem war er fest von der Richtigkeit der Theorie überzeugt, und er wusste deshalb sicher auch die Arbeit von Johann Bolyai zu schätzen. Über seine eigenartige Reaktion ist viel spekuliert worden, wir können sie nur zur Kenntnis nehmen. In den nächsten Jahren wandte sich Gauß seinen physikalischen Untersuchungen zu. Erst 1841 kam die Parallelentheorie wieder ins Spiel, er erwähnte eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung eines Kasaner Professors namens Lobatschewski, zwei Jahre, nachdem er begonnen hatte, Russisch zu lernen. 1844 kam er in zwei Briefen an Gerling wieder auf Lobatschewski zu sprechen und 1846 äußerte er sich gegenüber Schumacher sehr positiv über Lobatschewskis Veröffentlichungen. Aber auch diesmal blieb er seinen Prinzipien treu und äußerte sich nicht in der Öffentlichkeit dazu. Wer war Lobatschewski?

Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts gab es einen drastischen Rückgang der Auslandskontakte Russlands und einen Niedergang der Wissenschaften. Die Akademie in St. Petersburg und die Universität in Moskau waren die einzigen wissenschaftlichen Zentren. Unter Zar Alexander I wurden in den Jahren 1801 – 1805 zahlreiche Reformen durchgeführt, wie z.B. die Einfuhr ausländischer Bücher, die Erlaubnis von Reisen von Russen ins Ausland und die Gründung neuer Universitäten, u.a. 1804 in Kasan. Es gab aber nur wenige Studenten, meist aus theologischen Seminaren und ohne naturwissenschaftliche Kenntnisse. 1812 zog Napoleon nach Russland, mit den bekannten Folgen, und ab 1815 – nach dem Wiener Kongress – versuchte man noch einmal, den inneren Aufbau voranzutreiben. Aber ab 1818 wurden viele der Reformen wieder zurück genommen.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793 - 1856), geboren in Nishni-Nowgorod, lebte ab etwa 1800 unter einfachsten Verhältnissen in Kasan, besuchte dort das Gymnasium und ab 1807 die neu gegründete Universität. Zufällig wurde 1808 der Deutsche Bartels als Vertreter der Reinen Mathematik dorthin berufen, jener Bartels, der schon als früher Förderer von Gauß in Erscheinung getreten war und der nie ganz den Kontakt zu Gauß verloren hatte.

Ab 1809 verlegte Lobatschewski seinen Arbeits-Schwerpunkt auf die Mathematik, und nachdem er schon einige kleinere Ämter inne gehabt hatte, wurde er 1816 (im Alter von 23 Jahren) in den Lehrkörper aufgenommen. Um diese Zeit begann er auch mit Untersuchungen zum Parallelenproblem.

Wegen anhaltender Streitigkeiten im Kollegium wurde 1818 der Staatsrat Magnizkij mit einer Revision beauftragt. Eine der Folgen seiner recht willkürlichen und reaktionären Maßnahmen war wohl auch der Weggang Bartels im Jahre 1820. 1822 wurde Lobatschewski zum ordentlichen Professor ernannt. Zeitweise lag die ganze Last des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften auf seinen Schultern, hinzu kamen zahlreiche Verwaltungsaufgaben. 1823 reichte er das Skript für ein Geometriebuch ein, das aber abgelehnt wurde, unter anderem deswegen, weil er als Maßeinheit das französische Meter und den 100. Teil des Rechten Winkels benutzt hatte.

Nach anfänglichen vergeblichen Versuchen zum Beweis des Parallelenpostulats entdeckte er, dass die Hypothese des spitzen Winkels auf eine in sich geschlossene und konsequente Geometrie führt. Im Februar 1826 legte er seine neue Geometrie dem Kollegium vor, 1829-30 wurden die Ergebnisse unter dem Titel „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ in der Universitätszeitung, dem „Kasaner Boten“, veröffentlicht (natürlich auf Russisch). Er sprach darin klipp und klar aus, dass das Euklidische Parallelenaxiom unbeweisbar sei und es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie (die sogenannte „imaginäre Geometrie“) gäbe, in der die Winkelsumme im Dreieck weniger als 180° betrage. Die schwer verständliche Arbeit fand bei den Kollegen wenig Anklang. Im Ausland blieb sie unbekannt, da der Kasaner Bote außerhalb Russlands nicht zu haben war.

Im Rahmen einer erneuten Revision wurde der Staatsrat Magnizkij abgesetzt und ein neuer Kurator berufen. Auf dessen Betreiben hin wurde Lobatschewski 1827 (im Alter von 33 Jahren) zum Rektor der Universität gewählt. Diesen Posten hatte er 19 Jahre lang inne. Mit unermüdlichem Arbeitseifer sorgte er für Ruhe im Kollegium und ordnungsgemäße Lehre, brachte die Bibliothek und die wissenschaftlichen Sammlungen in Ordnung, förderte Neubauten und war zeitweise auch noch mit der Revision von Gymnasien beschäftigt. Nachdem der Kasaner Bote eingestellt worden war, gründete er 1834 die „Gelehrten Schriften der Kasaner Universität“, in denen 1835 seine „Imaginäre Geometrie“ und 1835 – 1838 seine „Neuen Anfangsgründe der Geometrie“ erschienen. Ersteres wurde 1837 auch in Crelles Journal auf Französisch abgedruckt, entging aber trotzdem der allgemeinen Aufmerksamkeit.

1840 erschien in Berlin bei der Fincke'schen Buchhandlung auf Deutsch sein 61 Seiten langes kleines Buch mit dem Titel „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, auf das Gauß 1846 Schumacher in einem Brief aufmerksam machte.

1846 wurde Lobatschewski nach 25-jähriger Diensttätigkeit von seinen Ämtern enthoben. 1855 veröffentlichte er anlässlich der 50-Jahres-Feier der Universität Kasan eine Zusammenfassung seiner Ideen unter dem Namen „Pangeometrie“, 1856 starb er nach schwerer Krankheit. Seine Verdienste um die Universität hatten ihm hohe Wertschätzung und zahlreiche Ehrungen eingebracht, doch sein wissenschaftliches Werk wurde zu seinen Lebzeiten nie anerkannt, sondern nur als verzeihliche Wahnidee belächelt. Erst nach 1863 wurde man durch die Veröffentlichung der Briefe von Gauß auf ihn aufmerksam. 1893 – zu seinem 100. Geburtstag – errichtete man ihm in Kasan ein Denkmal.

Drei große Männer der Mathematik – eine Theorie! Gauß, der berühmte Fürst der Mathematiker, scheint (in Übereinstimmung mit Schweikart) schon 1819 von der Existenz einer alternativen Geometrie überzeugt gewesen zu sein, aber er hat nie etwas darüber veröffentlicht. Nur aus Skizzen in seinem Nachlass kann man schließen, dass seine Ideen denen von Bolyai sehr nahe waren.

Johann Bolyai hat seine neue Geometrie um 1823 gefunden, sie aber erst 1832 veröffentlicht. Der an sich schon charakterlich instabile junge Offizier zerbrach an der Enttäuschung über die mangelhafte Anerkennung seiner Entdeckung.

Der emsige russische Professor und Hochschul-Rektor Lobatschewski hat die nichteuklidische Geometrie um 1826 entwickelt und sie 1829-30 als erster veröffentlicht, auch wenn kaum jemand in der Welt Notiz davon genommen hat. Sein lebenslanges beharrliches, allen Widerständen und Misserfolgen trotzendes Eintreten für seine Theorie rechtfertigt vielleicht, dass die nichteuklidische Geometrie heute auch oft als Lobatschewski-Geometrie bezeichnet wird.

Was unterscheidet die drei Entdecker der neuen Geometrie von Saccheri und Lambert? Alle drei haben sie sich von der Vorstellung verabschiedet, das Euklidische Parallelenaxiom könnte vielleicht doch noch durch einen Widerspruch zur Hypothese vom spitzen Winkel bewiesen werden. Sie haben explizite Formeln für geometrische Berechnungen erstellt und damit eine ausgedehnte und konsequente Theorie entwickelt, in der kein Widerspruch zu erkennen war. Vielmehr stellte sich die Euklidische Theorie als Grenzfall der neuen Geometrie dar, und man konnte sie sogar auf gewissen Flächen im nichteuklidischen Raum wiederentdecken. Und die Theorie lieferte zugleich die Erkenntnis, dass in der realen Welt eine a priori Entscheidung für die eine oder die andere Geometrie gar nicht möglich war.

Einen echten Widerspruchsbeweis konnten allerdings alle drei nicht liefern! Das blieb späteren Mathematikern vorbehalten, denen es tatsächlich gelang, Modelle für die nichteuklidische Geometrie zu konstruieren. Den Anfang machte 1868 der Italiener **Eugenio Beltrami** (1835 – 1900), der eine Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum vorstellte, auf der – zumindest lokal – die ebene nichteuklidische Geometrie verwirklicht war.

4 Der Parallelitätswinkel

In diesem Paragraphen sollen – in aller Kürze – die Anfangsgründe der Geometrie dargestellt werden, die von Gauß, Bolyai und Lobatschewski gefunden wurde.

1. Die absolute Theorie der Parallelen:

Folgendes ist uns von den Untersuchungen von Euklid, Saccheri und Lambert her bekannt:

- Wenn man das fünfte Postulat nicht benutzen will, kann man nicht zeigen, dass die Parallelität transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist.
- Es kann vorkommen, dass Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden und dabei innere Winkel bilden, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.
- Man muss eventuell zwischen asymptotischen Parallelen und solchen unterscheiden, die mit der gegebenen Geraden eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

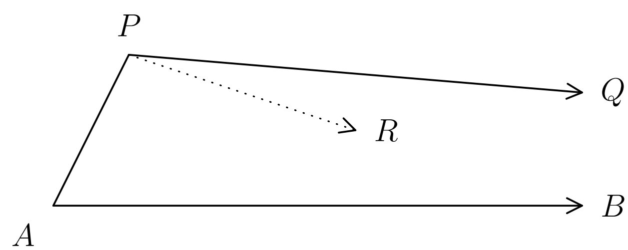
Und bei all diesen Untersuchungen kann man sich auf das Verhalten der beteiligten Geraden in einer bestimmten Richtung beschränken.

Die erste neue Idee, die anscheinend alle zugleich hatten, bestand darin, an Stelle von Geraden nur Strahlen zu betrachten.

Definition. Der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ heißt *asymptotisch parallel* zu dem Strahl $\overrightarrow{AB}$, falls gilt:

1. $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB}$ schneiden sich nicht.
2. Jeder Strahl $\overrightarrow{PR}$ innerhalb des Winkels $\angle APQ$ trifft $\overrightarrow{AB}$.

In Zeichen schreibt man dafür: $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$.



4.1 Satz. *Ist $\overrightarrow{AB}$ gegeben, so gibt es zu jedem Punkt $P \notin AB$* ***genau einen*** *Strahl $\overrightarrow{PQ}$, der asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist, und es ist dann*

$$\angle PAB + \angle APQ \leq 180°.$$

Diesen Satz haben wir im Grunde schon bewiesen, wenn auch nur unter der Hypothese des spitzen Winkels. Jetzt setzen wir die Neutrale Geometrie voraus, und die

Tatsache, dass die Hypothese vom stumpfen Winkel ausgeschlossen werden kann. Man betrachtet alle Strahlen $\overrightarrow{PQ}$, die von P ausgehen, und unter denjenigen, für die $\angle QPA \leq 180°$ ist, unterscheidet man zwischen schneidenden und nicht schneidenden Strahlen. In gewohnter Weise schließst man mit Hilfe des Dedekind-Axioms auf die Existenz eines Grenzstrahls, der dann asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ sein muss.

Es kommt nicht auf den Anfangspunkt der Strahlen an:

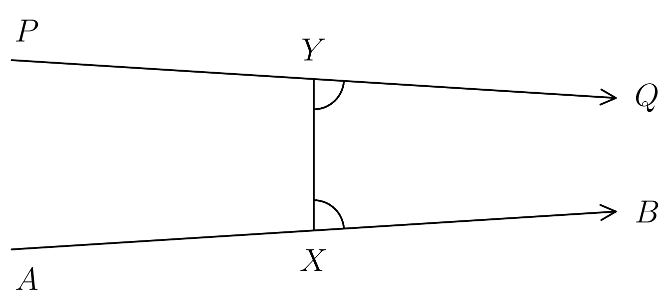
Definition. Zwei Strahlen heißen *äquivalent*, wenn sie auf der gleichen Geraden liegen und in die gleiche Richtung weisen.

4.2 Satz. *Ob der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ asymptotisch parallel zum Strahl $\overrightarrow{AB}$ ist, hängt nur von den Äquivalenzklassen der Strahlen ab.*

Der Beweis ist ein bisschen technisches Hantieren mit dem Pasch-Axiom und soll hier nicht ausgeführt werden.

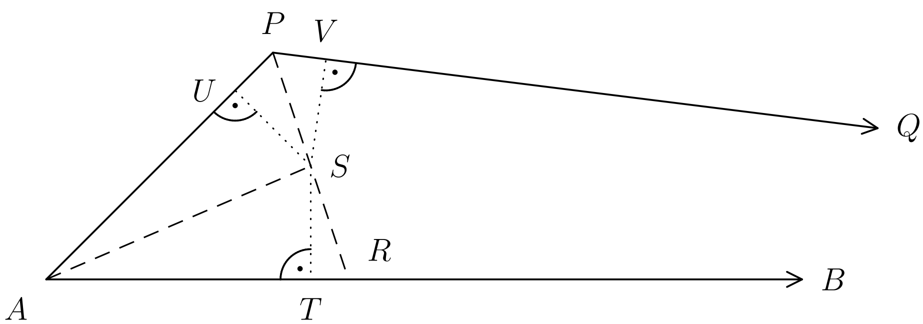
Definition. Sei $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$, $X \in \overrightarrow{AB}$ und $Y \in \overrightarrow{PQ}$ (oder jeweils aus einem äquivalenten Strahl).

X und Y heißen *korrespondierende Punkte*, falls $\angle XYQ = \angle YXB$ ist. In Zeichen schreibt man dann: $X \doteq Y$.



4.3 Satz. *Sei $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$. Dann gibt es einen Punkt A' auf AB, so dass A' und P korrespondierende Punkte sind.*

Zum Beweis: Ist $\overrightarrow{PR}$ die Winkelhalbierende zu $\angle APQ$, so schneidet sie – nach Definition der asymptotischen Parallelität – den Strahl $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R. Und nach Pasch trifft die Winkelhalbierende zu $\angle BAP$ den Strahl $\overrightarrow{PR}$ in einem Punkt S. Die Fußpunkte der Lote von S auf AP, PQ und AB seien jeweils mit U, V und T bezeichnet.



Jetzt ist es nicht schwer zu zeigen, dass T und V korrespondierende Punkte sind: Zunächst ist $\triangle ASU \cong \triangle AST$. Aber es ist auch $\triangle SPU \cong \triangle SPV$, und daher $\triangle TVS$ gleichschenklig.

Wählt man A' auf AB, auf der gleichen Seite von VT wie P und mit $\overline{A'T} \cong \overline{PV}$, so sind P und A' korrespondierend. Um das zu zeigen, führt man noch den Mittelpunkt M von $\overline{TV}$ ein und überzeugt sich davon, dass $\triangle A'PM$ gleichschenklig ist. ∎

4.4 Folgerung. *Ist $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$, so ist auch $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{PQ}$.*

Beweis: Da die Parallelität nicht vom Anfangspunkt abhängt, kann man o.B.d.A. annehmen, dass P und A korrespondierende Punkte sind. Aber dann ist die ganze Situation symmetrisch zur Mittelachse (= Mittelsenkrechte zu $\overline{AP}$). ∎

Für asymptotisch parallele Strahlen kann man nun die Transitivität beweisen:

4.5 Satz. *Sei $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{EF}$.*

Dann ist entweder $AB = EF$ oder $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{EF}$.

Beweis: Bolyai beweist diesen Satz durch Übergang zur dritten Dimension. Es geht aber auch in der Ebene:

Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ liegen auf verschiedenen Seiten von CD. Dann schneidet $\overline{AE}$ die Gerade CD in einem Punkt, o.B.d.A. können wir annehmen, dass das der Punkt C ist. Jeder Strahl im Innern von $\angle FEA$ schneidet dann $\overrightarrow{CD}$ und in der Folge dann auch $\overrightarrow{AB}$.

2. Fall: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ liegen auf der gleichen Seite von CD. Die Geraden AB und EF tun das dann auch, und sie können sich nicht schneiden, weil sonst durch einen Punkt zwei asymptotische Parallelen zu CD gehen würden.

O.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $\overrightarrow{EF}$ zwischen AB und CD liegt (Pasch!), aber daraus folgt noch nicht selbstverständlich, dass AB und CD auf verschiedenen Seiten von EF liegen. In der vorliegenden speziellen Situation lässt sich das jedoch zeigen: Dazu wähle man beliebige Punkte $M \in \overrightarrow{AB}$, $N \in \overrightarrow{CD}$ und $P \in \overrightarrow{EF}$. Von den beiden Winkeln $\angle DNP$ und $\angle DNM$ suchen wir den kleineren. Ein Strahl im Innern dieses Winkels trifft wegen der vorausgesetzten Parallelität $\overrightarrow{EF}$ in einem Punkt Q und $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R. Dann liegen N und R auf verschiedenen Seiten von EF, und daraus folgt, dass auch die Strahlen $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{AB}$ auf verschiedenen Seiten von EF liegen. Also trifft $\overline{MN}$ die Gerade EF.

Wegen der Symmetrie der Parallelität ist auch $\overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{AB}$. Ein Strahl im Innern von $\angle BMN$ trifft $\overrightarrow{CD}$, und auf dem Weg dahin muss er auch $\overrightarrow{EF}$ treffen. Also ist $\overrightarrow{EF}|||\overrightarrow{AB}$. ∎

Definition. Zwei Geraden heißen *asymptotisch parallel*, falls sie Strahlen enthalten, die
asymptotisch parallel sind.

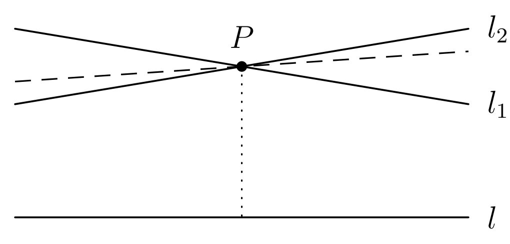
Zwei Geraden heißen *überparallel* oder *divergent*, wenn sie parallel, aber nicht asymptotisch parallel sind.

Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$, sowie zwei verschiedene zu g parallele Geraden g_1, g_2 durch P. Man kann einen Punkt $A \in g$ und Punkte $Q \in g_1$, $R \in g_2$ wählen, so dass Q und R auf der gleichen Seite von AP liegen. Wir sagen, dass eine Gerade g' durch P *zwischen* g_1 und g_2 liegt, wenn ihr Schnittwinkel mit AP (auf der Seite von AP, auf der Q und R liegen) zwischen $\angle QPA$ und $\angle RPA$ liegt.

4.6 Satz. *Es sei eine Gerade l und ein Punkt $P \notin l$ gegeben. Dann gibt es höchstens 2 asymptotische Parallelen l_1, l_2 zu l durch P.*

Gilt Postulat V, so stimmen l_1 und l_2 überein, und es gibt keine Gerade, die überparallel zu l ist.

Sind l_1 und l_2 verschieden, so sind alle dazwischen liegenden Geraden überparallel zu l. Insbesondere gilt dann Postulat V nicht.



Beweis: In jede der beiden möglichen Richtungen weist von P aus genau ein zu l asymptotisch paralleler Strahl. Gilt Postulat V, so kann man sofort über Winkelbeziehungen ablesen, dass die beiden Strahlen zusammen eine Gerade bilden, die eindeutig bestimmte Parallele zu l durch P, und jede andere Gerade muss l schneiden.

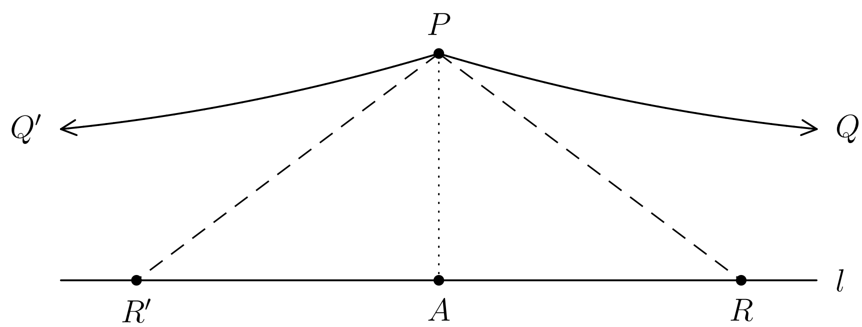
Gehören die beiden Strahlen zu verschiedenen Geraden l_1, l_2, so sind offensichtlich alle Geraden dazwischen auch parallel zu l, und da sich schneidende Geraden einen beliebig großen Abstand annehmen, können sie nicht asymptotisch parallel sein. ■

2. Der Parallelitätswinkel:

4.7 Satz. *Sei l eine Gerade, $P \notin l$, A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Außerdem seien $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PQ'}$ die beiden asymptotisch parallelen Strahlen, die von P ausgehen.*

Dann ist $\angle APQ = \angle APQ'$.

Beweis: Wir nehmen an, es sei $\angle APQ' < \angle APQ$. Dann gibt es einen Strahl $\overrightarrow{PR}$ im Winkelraum $I(\angle APQ)$, so dass $\angle APR = \angle APQ'$ ist. Aber der Strahl $\overrightarrow{PR}$ muss l treffen, o.B.d.A. in R.



Nun wählen wir einen Punkt $R' \in l$ mit $R' - A - R$ und $\overline{R'A} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AR}$. Dann ist $R'AP \mathrel{\widehat{=}} ARP$ (SWS). Daraus folgt, dass $\angle APR' \mathrel{\widehat{=}} \angle APR$ ist, während andererseits $\angle APR' < \angle APQ' = \angle APR$ ist. Widerspruch! ■

In der Situation des obigen Satzes setzen wir

$$\varphi(P, l) := \angle APQ = \angle APQ'.$$

4.8 Folgerung.

1. *$\varphi(P, l) \leq \pi/2$.*
2. *$\varphi(P, l) < \pi/2 \iff \exists \geq 2$ Parallelen zu l durch P.*

Der Beweis ist eine triviale Übungsaufgabe.

4.9 Satz.

$\varphi(P, l)$ hängt nur von der Länge des Lotes von P auf l ab.

Beweis:

Sei A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Wir betrachten die Menge

$$K(P,l) := \{r \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Strahl } \overrightarrow{PC} \text{ mit } \overrightarrow{PC} \cap l \neq \varnothing \text{ und } r = \angle APC\}.$$

Da $\varphi(P,l) = \sup K(P,l)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $K(P,l)$ nur von der Kongruenzklasse von $\overline{AP}$ abhängt.

Dazu sei l' eine weitere Gerade, $P' \notin l'$, A' der Fußpunkt des Lots von P' auf l', sowie $\overline{AP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'P'}$. Es ist dann zu zeigen, dass $K(P,l) = K(P',l')$ ist, und aus Symmetriegründen reicht es sogar z.z., dass $K(P,l) \subset K(P',l')$ ist.

Seien $\overrightarrow{PQ}$ bzw. $\overrightarrow{P'Q'}$ die asymptotisch parallelen Strahlen (wir brauchen wegen des vorangegangenen Satzes nur eine Seite zu betrachten). Ist $s \in K(P,l)$, so gibt es ein $C \in l$ (in der gleichen Richtung wie Q) mit $\angle APC = s$. Wir wählen dann einen Punkt $C' \in l'$ (in der gleichen Richtung wie Q') mit $\overline{A'C'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AC}$. Dann ist $ACP \mathrel{\widehat{=}} A'C'P'$ (SWS) und daher $s = \angle APC = \angle A'P'C'$. Aber das bedeutet, dass auch $s \in K(P',l')$ ist. ∎

Führt man noch eine Längenfunktion λ ein, so erhält man eine Funktion

$$\Pi : \{t \mid t > 0\} \to (0, \frac{\pi}{2}]$$

mit $\Pi(\lambda(\overline{PA})) := \varphi(P,l)$.

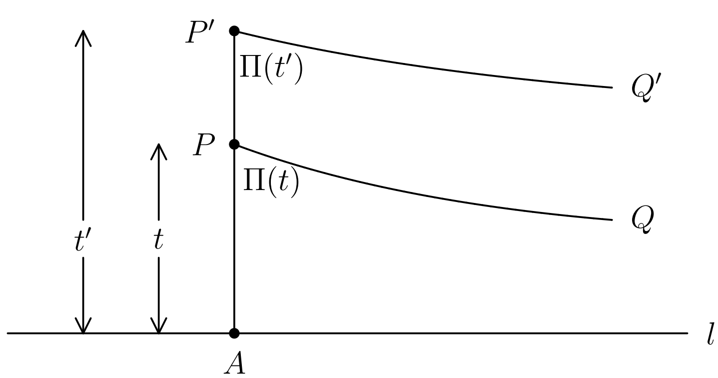
Definition. $\Pi(t)$ heißt der (durch t bestimmte) *Parallelitätswinkel*.

Die Bezeichnung stammt von Lobatschewski.

4.10 Satz. *$\Pi(t)$ ist schwach monoton fallend.*

Beweis: Sei $t' > t$. Man kann eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$ finden, so dass – mit dem Fußpunkt A des Lots von P auf l – gilt:

t ist die Länge von $\overline{AP}$, und es gibt einen Punkt P' mit $A - P - P'$, so dass t' die Länge von $\overline{AP'}$ ist.



Trägt man $\Pi(t)$ bei P' an AP' an, so erhält man eine Parallele $\overrightarrow{P'Q'}$ zu $\overrightarrow{PQ}$ (F-Winkel). Aber das bedeutet, dass $\Pi(t') \leq \Pi(t)$ sein muss. ∎

4.11 Satz.

Gilt Postulat V, so ist $\Pi(t) \equiv \frac{\pi}{2}$.

Gilt Postulat V nicht, so ist $\Pi(t) < \frac{\pi}{2}$ *für alle* t.

Beweis: Wenn Postulat V nicht gilt, dann gilt die Hypothese vom spitzen Winkel, und es gibt „unterhalb" der Parallelen, die in P senkrecht auf AP steht, eine asymptotische Parallele. Ist t die Länge von $\overline{AP}$, so ist $\Pi(t) < \frac{\pi}{2}$. ∎

Die logische Verneinung des Euklidischen Parallelenaxioms (in der Formulierung von Playfair) sieht folgendermaßen aus:

Hyperbolisches Parallelenaxiom:

(H-P) Es gibt eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$, so dass durch P mindestens zwei Parallelen zu l gehen.

4.12 Satz. *Setzt man (H-P) voraus, so gilt:*

1. *Die Hypothese vom spitzen Winkel ist erfüllt.*
2. *Die Funktion* $t \mapsto \Pi(t)$ *ist streng monoton fallend.*
3. $\forall\, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\ \exists\, !t$ *mit* $\Pi(t) = \varphi$.

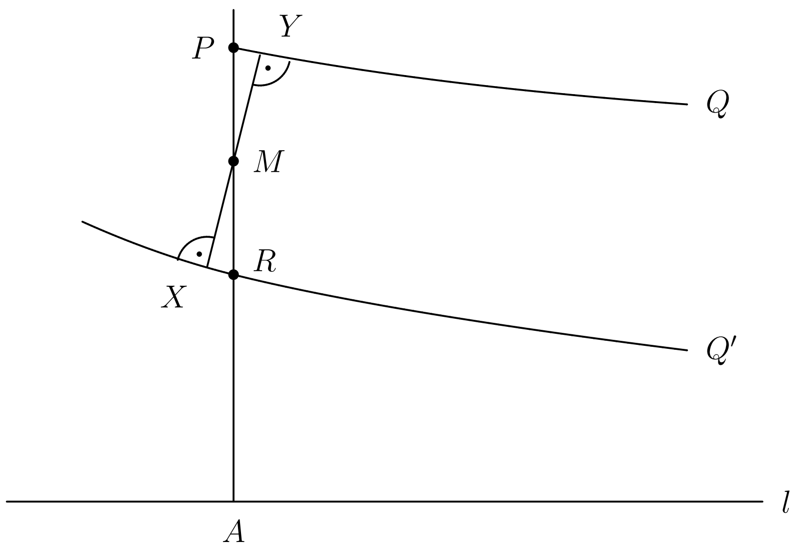
Beweis: 1) ist klar!

2) Zur Vereinfachung der Notationen nehmen wir an, es sei eine Längenfunktion gegeben, und setzen $\Pi(XY) := \Pi(\lambda(\overline{XY}))$.

Seien P, R zwei Punkte auf der Senkrechten zur Geraden l in A, und es sei $\overline{AP} > \overline{AR}$. Dann ist $\Pi(AP) \leq \Pi(AR)$.

Annahme, $\Pi(AP) = \Pi(AR)$. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PR}$, X der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{RQ'}$ und Y der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{PQ}$. Dann ist $XRM \mathrel{\widehat{=}} MYP$ (SWW). Also ist $\angle XMR \mathrel{\widehat{=}} \angle PMY$, d.h. $X - M - Y$.

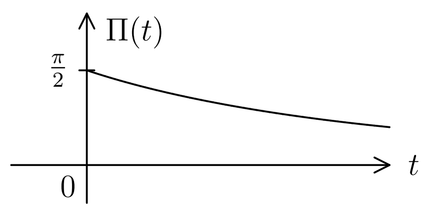
Das bedeutet, dass PQ und RQ' eine gemeinsame Senkrechte besitzen. Sie sind dann überparallel, aber nicht asymptotisch parallel. Das ist ein Widerspruch zur Transitivität der Relation „|||".



3) Ist φ ein gegebener spitzer Winkel, so haben wir in Satz 2.17 gezeigt, dass es eine Senkrechte zu einem der Schenkel von φ gibt, die asymptotisch parallel zum anderen Schenkel ist. ∎

4.13 Folgerung. $\Pi : (0, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2})$ *ist bijektiv und stetig, und es ist*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \Pi(t) = \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \lim_{t \to \infty} \Pi(t) = 0.$$



Die Stetigkeit folgt aus der strengen Monotonie und der Surjektivität.

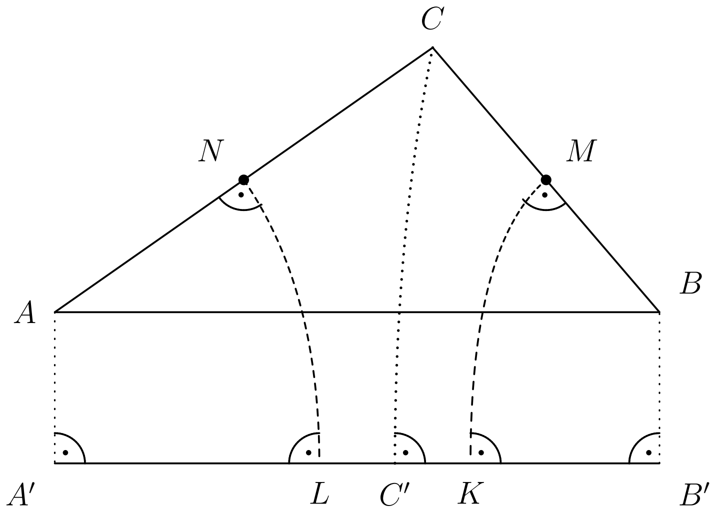
3. Horozykel:

4.14 Satz. *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich entweder in einem Punkt, oder sie sind alle zueinander in der gleichen Richtung asymptotisch parallel oder sie sind überparallel und besitzen alle drei eine gemeinsame Senkrechte.*

Beweis: 1) Wenn sich schon zwei der Mittelsenkrechten in einem Punkt treffen, dann haben alle drei Ecken von diesem Punkt den gleichen Abstand, und dann muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen.

2) Sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Die Mittelsenkrechten durch M und N seien zueinander überparallel, mit einer gemeinsamen Senkrechten h. K und L seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten durch M und N mit h.

Wir fällen das Lot von A, B und C jeweils auf h, mit Fußpunkten A', B' und C'.



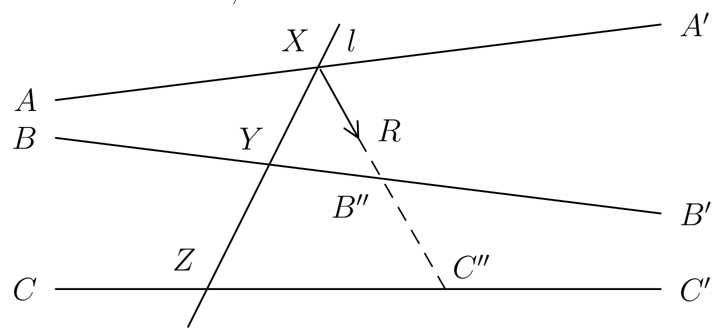
Es ist $ALN \mathrel{\widehat{=}} CLN$ (SWS), und daher $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LC}$ und $\angle ALA' \mathrel{\widehat{=}} \angle CLC'$. Daraus folgt wiederum, dass $\overline{AA'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CC'}$. Genauso folgt, dass $\overline{BB'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CC'}$ ist. Also ist $A'B'BA$ ein Saccheri-Viereck. Aber dann ist die Mittelsenkrechte zu AB zugleich die Mittellinie des Saccheri-Vierecks, und die steht senkrecht auf $A'B' = h$.

3) Wenn zwei der Mittelsenkrechten asymptotisch parallel sind, so müssen sie es auch zur dritten sein, denn sonst läge ja einer der beiden ersten Fälle vor. Es bleibt nur zu zeigen, dass sie alle in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind.

Man überzeugt sich recht leicht davon, dass alle drei Mittelsenkrechten die Seite des Dreiecks treffen, die dem größten Winkel gegenüberliegt. Aber dann kann man den folgenden Hilfssatz anwenden. ∎

4.15 Hilfssatz. *Wenn drei verschiedene Geraden paarweise asymptotisch parallel sind und alle von einer vierten Geraden getroffen werden, so sind sie in der gleichen Richtung asymptotisch parallel.*

Beweis: Seien AA', BB' und CC' die paarweise asymptotisch parallelen Geraden, sowie l die gemeinsame Transversale. O.B.d.A. gibt es dann Punkte X, Y und Z auf l mit $A - X - A'$, $B - Y - B'$ und $C - Z - C'$.

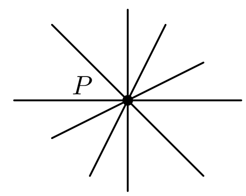


O.B.d.A. sei $\overrightarrow{XA'} ||| \overrightarrow{ZC'}$. Nun sei $\overrightarrow{XR}$ ein Strahl ins Innere des Winkels $\angle YXA'$. Er muss $\overrightarrow{ZC'}$ treffen, etwa in C''. Die Gerade BB' trifft die Seite $\overline{ZX}$ des Dreiecks

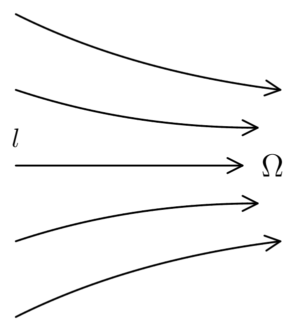
$ZC''X$, geht aber weder durch X noch durch $\overline{ZC''}$. Nach Pasch muss sie dann $\overline{XC''}$ in einem inneren Punkt B'' treffen, der auf der gleichen Seite von XZ liegt, wie A', B' und C'. Also ist $\overrightarrow{XA'}|||\overrightarrow{YB'}$. ∎

Wir verallgemeinern nun die Definition der „korrespondierenden Punkte“. Und zwar betrachten wir drei Sorten von Geradenbüscheln:

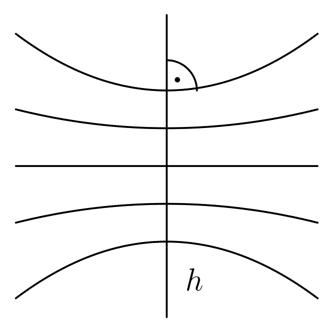
- Das Büschel Σ_P aller Geraden durch einen gegebenen Punkt P. Es ist durch den Punkt P festgelegt.



- Das Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ aller Geraden, die zu einer gegebenen Geraden l in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind. Ein solches Büschel ist durch eine der Geraden und die Richtung, die hier symbolisch mit Ω bezeichnet wird, festgelegt. Man kann sich Ω auch als einen unendlich weit entfernten Punkt vorstellen, und man nennt Ω daher auch einen *idealen Punkt*.



- Das Büschel $\Sigma_h^{\perp}$ aller Geraden, die auf einer gegebenen Geraden h senkrecht stehen. Es ist natürlich durch h festgelegt.



Oben wurde gezeigt, dass die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks immer zu einer dieser drei Sorten von Büscheln gehören.

Definition. Sei Σ ein Büschel von Geraden. Zwei Punkte A, B heißen *korrespondierend* bzgl. Σ, falls sie gleich sind oder die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ zu Σ gehört (in Zeichen $A \simeq B$).

Sei A ein fester Punkt.

1. $A \simeq B$ bezüglich Σ_P gilt genau dann, wenn A und B den gleichen Abstand von P haben.

2. $A \simeq B$ bezüglich $\Sigma(l, \Omega)$ bedeutet, dass A und B auf Geraden a, b liegen, die beide zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ asymptotisch parallel sind, und dass sie im bisherigen Sinne korrespondierende Punkte sind.

3. $A \simeq B$ bezüglich $\Sigma_h^{\perp}$ gilt genau dann, wenn A und B auf der gleichen Seite von h liegen und den gleichen Abstand von h haben.

4.16 Satz. *„Korrespondierend bezüglich eines Geradenbüschels" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Reflexivität und Symmetrie folgen ganz einfach, die Transitivität gewinnt man aus dem Satz 4.14 über die Mittelsenkrechten im Dreieck. ∎

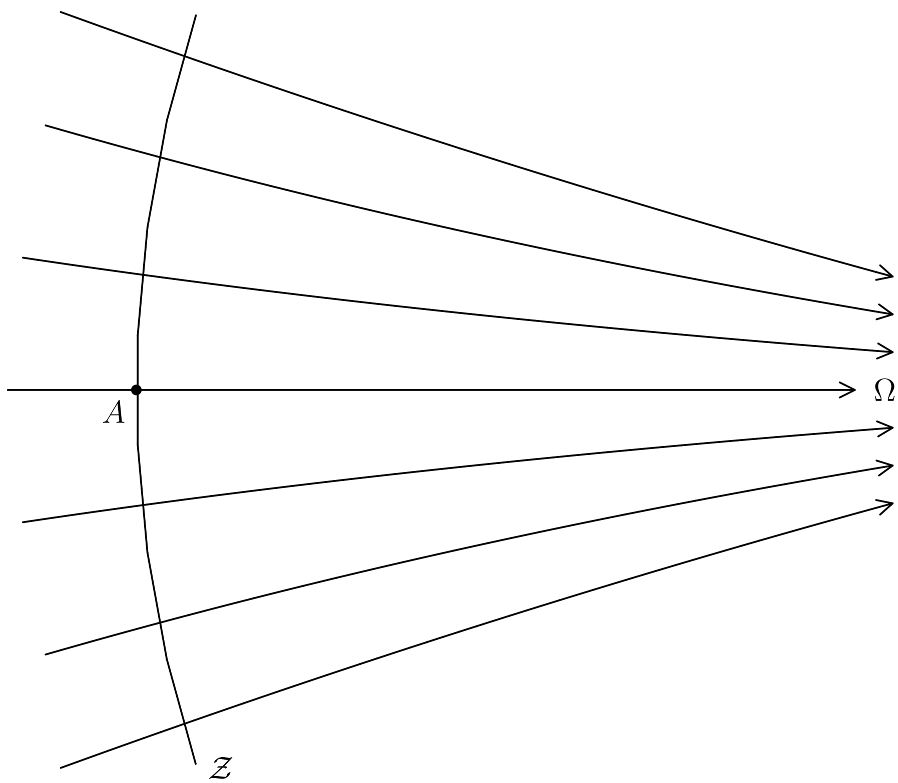
Im Falle des Büschels Σ_P ergibt die Menge der zu einem festen Punkt A korrespondierenden Punkte einen **Kreis um** P. Im Falle von $\Sigma_h^\perp$ kommt die Kurve der zu h äquidistanten Punkte heraus. Im Falle eines Büschels vom Typ $\Sigma(l, \Omega)$ erhält man eine neue interessante Kurve:

Definition. Es sei ein Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ und ein Punkt A gegeben. Die Menge

$$\mathcal{Z} := \{B \mid A \simeq B \text{ bezüglich } \Sigma(l, \Omega)\}$$

heißt ein *Horozykel*.

Gauß nannte die Horozykel *Parazykel* oder *Kreislinien von unendlichem Radius*, Lobatschewski sprach von *Grenzkreisen*.



4.17 Satz. *Je drei paarweise verschiedene Punkte auf einem Horozykel können nicht auf einer Geraden liegen.*

Beweis: Gilt etwa $A - B - C$, so sind die Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ zueinander überparallel, gehören also nicht zu einem Büschel $\Sigma(l, \Omega)$. ∎

Zu jedem Punkt P und jedem idealen Punkt Ω gibt es genau einen Strahl $\overrightarrow{P\Omega}$ durch P in Richtung Ω. Man nennt einen solchen Strahl auch eine *Achse* oder einen *Radius* des durch P und Ω bestimmten Horozykels, und Ω das *Zentrum*. Zwei Horozykeln mit gleichem Zentrum nennt man *konzentrisch*.

Ist $\mathcal{Z}$ ein Horozykel mit Zentrum Ω, $P \in \mathcal{Z}$ und g eine Gerade durch P, so kann g den Horozykel nach dem obigen Satz in höchstens zwei Punkten treffen. Es gibt nun drei Möglichkeiten:

1. g ist der Radius $\overrightarrow{P\Omega}$ (und trifft natürlich nur einmal!)

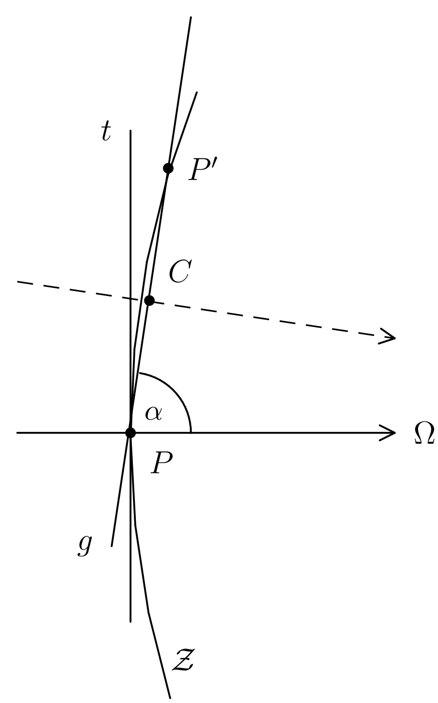
2. g steht in P auf $\overrightarrow{P\Omega}$ senkrecht. Man nennt g dann eine *Tangente* an $\mathcal{Z}$. Würde g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen, so hätte man zwei Radien mit einer gemeinsamen Senkrechten, aber das ist unmöglich.

   Die Tangente berührt $\mathcal{Z}$ vom Zentrum Ω aus gesehen von außen, wie man leicht an den Winkeln erkennen kann.

3. Ist g weder ein Radius noch eine Tangente, so muss g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen.

BEWEIS FÜR DIE 3. AUSSAGE:

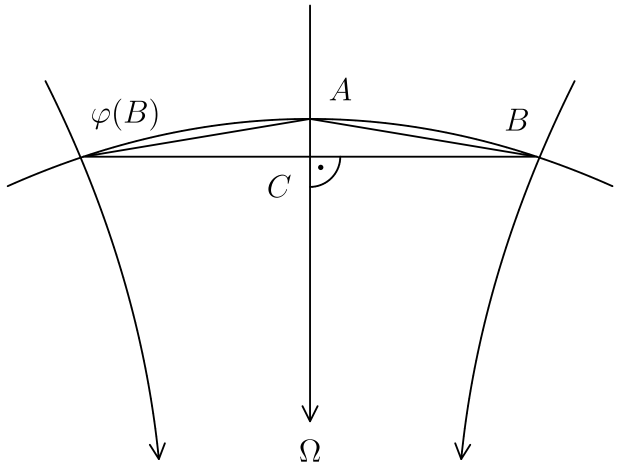
Sei t die Tangente in P, α der Winkel, den g mit dem Radius einschließt. Man kann dann auf der Seite von t, auf der $\mathcal{Z}$ liegt, einen Punkt C auf g wählen, so dass $\Pi(PC) = \alpha$ ist. Dann ist die Senkrechte zu g in C asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{P\Omega}$. Die Spiegelung an dieser Senkrechten bildet P auf einen weiteren Punkt $P' \in g \cap \mathcal{Z}$ ab. Man nennt g daher eine *Sekante* von $\mathcal{Z}$ und $\overline{PP'}$ eine *Sehne*.



Horozykel sind sehr symmetrisch:

4.18 Satz. *Sei $\mathcal{Z}$ ein Horozykel, $A \in \mathcal{Z}$ und $B \neq A$ ein weiterer Punkt auf $\mathcal{Z}$. Ist φ die Spiegelung an der Achse $\overrightarrow{A\Omega}$, so liegt auch $\varphi(B)$ auf $\mathcal{Z}$.*

BEWEIS: Die Spiegelung des Strahls $\overrightarrow{B\Omega}$ ergibt einen ebenfalls zu $\overrightarrow{A\Omega}$ asymptotisch parallelen Strahl $\overrightarrow{\varphi(B)\Omega}$. Sei C der Schnittpunkt von $\overline{B\varphi(B)}$ mit $\overrightarrow{A\Omega}$. Dann ist $\triangle ACB \cong \triangle AC\varphi(B)$, und die Winkel bei C sind rechte Winkel. Es folgt, dass auch $\angle BAC \cong \angle\varphi(B)AC$ ist.



Da $A \doteq B$ ist, ist $\angle CAB \mathrel{\widehat{=}} \angle AB\Omega$. Und dann ist natürlich auch $\angle CA\varphi(B) \mathrel{\widehat{=}} \angle A\varphi(B)\Omega$.

Durch Winkelsubtraktion folgt, dass $\angle CB\Omega \mathrel{\widehat{=}} \angle C\varphi(B)\Omega$ ist. Also sind B und $\varphi(B)$ korrespondierende Punkte bezüglich Ω, und $\varphi(B)$ liegt auf $\mathcal{Z}$. ∎

Man kann von drei Punkten A, B, C auf einem Horozykel eindeutig sagen, wann einer von ihnen (z.B. C) zwischen den beiden anderen liegt (nämlich genau dann, wenn $\overrightarrow{A\Omega}$ und $\overrightarrow{B\Omega}$ auf verschiedenen Seiten von $\overrightarrow{C\Omega}$ liegen). Deshalb kann man auch einen *Horozykel-Bogen* $\overset{\frown}{AB}$ (auf $\mathcal{Z}$) als Menge aller $C \in \mathcal{Z}$ definieren, die zwischen A und B liegen oder gleich einem dieser beiden Punkte sind.

4.19 Folgerung 1. *Wenn A, B und C auf dem Horozykel $\mathcal{Z}$ liegen, B sich zwischen A und C befindet und φ die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ ist, so gilt:*

$$\overset{\frown}{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overset{\frown}{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

Der Beweis ist sehr einfach.

4.20 Folgerung 2. *Die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Horozykel. Wenn die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kongruent sind, so auch die Bögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{CD}$.*

Zum Beweis nehme man o.B.d.A. an, dass die Punkte alle hintereinander liegen. Dann zeigt man leicht, dass die Kongruenz der Strecken durch die Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$ hergestellt wird. Der Rest ergibt sich aus Folgerung 1.

4.21 Folgerung 3. *Sind A, B und A' Punkte auf einem Horozykel $\mathcal{Z}$, so gibt es einen Punkt $B' \in \mathcal{Z}$, so dass $\overset{\frown}{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overset{\frown}{A'B'}$ ist.*

Beweis: Sei Ω das Zentrum von $\mathcal{Z}$, $\overrightarrow{C\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$, φ_1 die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ und φ_2 die Spiegelung an $\overrightarrow{A'\Omega}$, sowie $B' := \varphi_2 \circ \varphi_1(B)$. Dann ist offensichtlich $\overset{\frown}{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overset{\frown}{A'B'}$ (denn $\varphi_2 \circ \varphi_1(A) = A'$). ∎

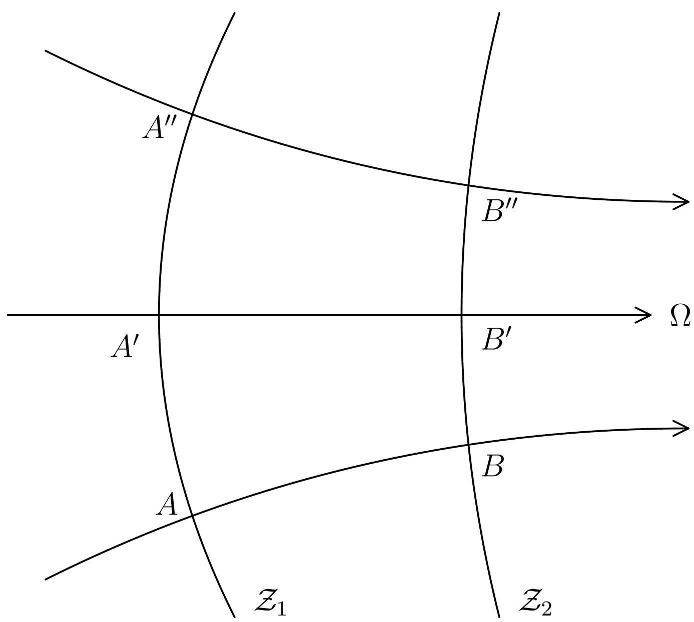
Ein Bogenstück auf einem Horozykel ist also frei verschiebbar, wie eine Strecke auf einer Geraden. Und zwei Bogenstücke sind genau dann kongruent, wenn die darunter liegenden Sehnen kongruent sind.

Mit Hilfe des engen Zusammenhangs zwischen Bögen und den darunterliegenden Sehnen kann man nun auch die Länge eines Horozykel-Bogens definieren (ähnlich wie bei den Strecken durch Intervallschachtelung). Man braucht allerdings eine Standard-Einheit. Dafür bietet sich die Länge des Bogens an, dessen Sehne die Länge $2x$ hat, mit $\Pi(x) = \frac{\pi}{4}$. Die Bogenlänge wird dann mit $2S$ bezeichnet.

4.22 Satz. *Seien $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ zwei konzentrische Horozykel mit Zentrum Ω. Die Radien $\vec{s}$, $\vec{s}'$ und $\vec{s}''$ mögen die Horozykel in den Punkten A, A' und A'' bzw. B, B' und B'' treffen. Dann gilt:*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AA''}/\overset{\frown}{BB''}.$$

Zum Beweis: Ist etwa $\overset{\frown}{AA'} \widehat{=} \overset{\frown}{A'A''}$, so ist $\overrightarrow{A'\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA''}$, und B'' erhält man durch Spiegeln des Punktes B an dieser Mittelsenkrechten. Die Aussage des Satzes ist dann sicher richtig.



Ähnlich einfach ist es, wenn das Verhältnis ganzzahlig ist. Und schließlich bekommt man die Aussage auch für rationale Verhältnisse.

Bei einem beliebigen inkommensurablen Verhältnis muss man durch rationale Zahlen approximieren. Dafür braucht man die folgende Aussage:

> Wenn die Punkte A_n und B_n auf einem Horozykel liegen und gegen A bzw. B konvergieren, so konvergieren auch die Bogenlängen von $\overset{\frown}{A_nB_n}$ gegen $\overset{\frown}{AB}$.

Aber das ist ziemlich klar, auf Grund der Konstruktion der Bogenlänge. ∎

Wir bleiben bei der obigen Situation. M sei der Mittelpunkt von $\overline{AA'}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BB'}$. Dann ist $\triangle ANM \mathrel{\widehat{=}} \triangle A'MN$, also auch $\triangle ABN \mathrel{\widehat{=}} \triangle A'NB'$. Aber das bedeutet, dass $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'B'}$ ist. Die konzentrischen Horozykel-Bögen sind äquidistant! Man kann daher eine Funktion f wie folgt definieren:

Ist x der Abstand zwischen den Horozykel-Bögen, so setzen wir

$$f(x) := \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}.$$

Aus dem obigen Satz folgt, dass f wohldefiniert ist.

Es sei nun noch ein dritter Horozykel $\mathcal{Z}_3$ gegeben, der von den Radien in den Punkten C, C' und C'' geschnitten wird. Ist y der Abstand von $\mathcal{Z}_2$ und $\mathcal{Z}_3$, sowie $z = x + y$ der Abstand von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$, so gilt:

$$f(x+y) = f(z) = \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{CC'} = \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} \cdot \overset{\frown}{BB'}/\overset{\frown}{CC'} = f(x) \cdot f(y).$$

Setzen wir schließlich noch $F(x) := \ln f(x)$, so ist $F(x+y) = F(x)+F(y)$. Man kann dann – wie schon an früherer Stelle – schließen, dass F linear ist, also von der Form $F(x) = c \cdot x$, mit einer Konstanten c. Daraus folgt: $f(x) = e^{cx}$. Traditionsgemäß schreibt man $c = \frac{1}{k}$ und erhält:

4.23 Satz. *Das Verhältnis $\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}$ zweier sich entsprechender Bogenstücke auf konzentrischen Horozykeln im Abstand x erfüllt die Formel*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = e^{x/k}, \qquad \textit{mit einer universellen Konstanten } k.$$

Die Konstante k beschreibt die Distanz zwischen zwei konzentrischen Horozykel-Bögen, deren Längenverhältnis $= e = 2.71828\ldots$ ist, hat also die Dimension einer Länge. Üblicherweise wählt man in der Flächenfunktion $\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC)$ die gleiche Konstante, und man setzt auch die Längeneinheit $S = k$. Damit ist die nichteuklidische Geometrie festgenagelt.

Bolyai und Lobatschewski ist es schließlich gelungen, eine Formel für den Parallelitätswinkel aufstellen:

$$\boxed{\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.}$$

Wir wollen den Beweis dieser Formel (nach Bolyai) zumindest andeutungsweise vorführen.

Zunächst müssen wir unser Axiomensystem erweitern, zu einem System der räumlichen Geometrie:

Die Grundmenge ist nun der *Raum*, gewisse Teilmengen heißen *Ebenen*, andere *Geraden*. Sofern Punkte und Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, müssen sie die Inzidenzaxiome **(I-1)** und **(I-2)** erfüllen. Hinzu kommt:

I-3-R Es gibt wenigstens vier Punkte im Raum, die nicht in einer Ebene liegen.

I-4 Liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, so liegt schon die ganze Gerade in dieser Ebene.

I-5 Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, so haben sie sogar eine durch diesen Punkt laufende Gerade gemeinsam.

I-6 Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene.

Die Axiome der Anordnung **(A-1)** bis **(A-5)** werden übernommen. Man kann dann zusätzlich sagen, dass zwei Punkte auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegen, wenn ihre Verbindungsstrecke die Ebene trifft. Der Raum wird so durch jede Ebene in zwei Halbräume unterteilt.

Die *Bewegungen* sind nun bijektive Abbildungen des Raumes auf sich. Die Axiome **(B-1)**, **(B-2)**, **(B-4)** und **(B-5)** werden übernommen, das starke Axiom (B-3) wird wie folgt verallgemeinert:

(B-3-R) Es seien A, B, C, D vier nicht auf einer Ebene gelegene Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

- A wird auf einen vorgegebenen Punkt O abgebildet.
- $\varphi(B)$ liegt auf einem vorgegebenen Strahl $\overrightarrow{OP}$.
- $\varphi(C)$ liegt in einer vorgegebenen Ebene $\mathcal{E}$ durch OP.
- $\varphi(D)$ liegt in einem vorgegebenen (durch $\mathcal{E}$ bestimmten) Halbraum.

Man kann nun leicht Spiegelungen an Ebenen beschreiben.

Als Stetigkeitsaxiom übernimmt man das Dedekindsche Axiom.

Durch eine Gerade und einen nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt ist genau eine Ebene festgelegt. Zwei verschiedene Geraden brauchen nicht auf einer gemeinsamen Ebene zu liegen. Man nennt sie dann *windschief*, und sie können sich in diesem Falle nicht schneiden.

Eine Gerade steht auf einer Ebene $\mathcal{E}$ *senkrecht*, wenn sie die Ebene in einem Punkt P trifft und auf jeder Geraden $l \subset \mathcal{E}$ mit $P \in l$ senkrecht steht. Von jedem Punkt außerhalb einer Ebene kann man eindeutig das Lot auf die Ebene fällen. Dadurch ist es möglich, die *orthogonale Projektion* einer Geraden auf eine Ebene zu definieren. Die Projektion einer Geraden ist wieder eine Gerade.

Um den *Winkel zwischen zwei sich schneidenden Ebenen* zu definieren, konstruiert man die eindeutig bestimmte zu beiden gegebenen Ebenen orthogonale Ebene und misst dort den Schnittwinkel der Schnittgeraden.

Definition. Zwei Geraden im Raum heißen *parallel* (bzw. *asymptotisch parallel*), wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und dort parallel (bzw. asymptotisch parallel) sind.

Mit dieser Definition bleiben die bekannten Sätze der neutralen Geometrie erhalten.

Definition. Eine Gerade heißt zu einer Ebene *asymptotisch parallel*, wenn sie zu irgend einer Geraden dieser Ebene asymptotisch parallel ist.

Man zeigt dann leicht, dass die Gerade zu ihrer orthogonalen Projektion asymptotisch parallel ist. Bemerkenswert ist nun der folgende Satz:

4.24 Satz. *Durch eine zu einer gegebenen Ebene $\mathcal{E}$ asymptotisch parallelen Gerade g gibt es genau eine Ebene $\mathcal{E}'$, die $\mathcal{E}$ nicht schneidet.*

Da wir schon so viele Beweise weggelassen haben, ist es nicht sinnvoll, hier den Beweis anzugeben. Man beachte aber die formale Ähnlichkeit des Satzes mit dem Playfair-Axiom! Dabei befinden wir uns in der Neutralen Geometrie!

Ab jetzt setzen wir wieder das hyperbolische Parallelenaxiom voraus.

Die (asymptotische) Parallelität in Richtung eines idealen Punktes Ω kann man auch im Raum erklären, und die Relation „korrespondierend“ lässt sich ebenfalls übertragen.

Definition. Die Menge $\mathcal{S}$ aller Punkte X, die (bezüglich einer Richtung Ω) zu einem festen Punkt P korrespondierend sind, bezeichnet man als *Grenzfläche* oder *Horosphäre*. Der ideale Punkt Ω wird wieder als *Zentrum* bezeichnet, die Geraden oder Strahlen in Richtung Ω als *Achsen* oder *Radien*.

Eine Ebene, die einen Radius von $\mathcal{S}$ enthält, nennt man eine *diametrale Ebene*.

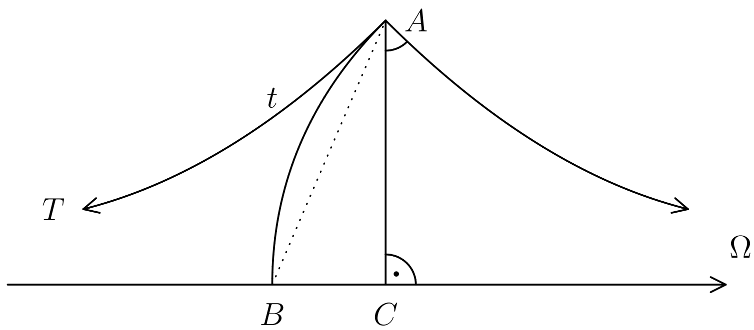
Offensichtlich schneidet jede diametrale Ebene die Horosphäre in einem Horozykel. Und nun passiert etwas ganz Erstaunliches: Wählt man die Horosphäre als Ebene und die auf ihr gelegenen Horozykeln als Geraden, so erhält man ein Modell für die ebene Geometrie. Und wegen Satz 4.24 ist diese Geometrie euklidisch! Für Bolyai war das wohl das entscheidende Indiz dafür, dass er auf der richtigen Spur war.

4.25 Lemma. *$\overset{\frown}{AB}$ sei ein Bogen auf einem Horozykel mit Zentrum Ω. t sei die Tangente an $\overset{\frown}{AB}$ in A, $T \in t$ ein Punkt auf der gleichen Seite von $\overrightarrow{A\Omega}$ wie B und C der Fußpunkt des Lotes von A auf den Radius durch B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ist die Einheitslänge S.*

2. $\Pi(AC) = \frac{\pi}{4}$.

3. $\overrightarrow{AT} ||| \overrightarrow{CB}$.



Beweis: Zunächst eine Vorbemerkung:

Der Winkel $\angle AB\Omega$ ist kleiner als $\pi/2$ (denn A und B sind korrespondierende Punkte), sein Nebenwinkel also $> \pi/2$. Da das Dreieck ABC eine Winkelsumme $< \pi$ haben muss, ist klar, dass C von B aus gesehen in Richtung Ω liegen muss. Das angegebene Bild stimmt also! Man beachte außerdem, dass AT und $A\Omega$ Geraden sind, nicht aber der Horozykelbogen $\overset{\frown}{AB}$!

Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar, auf Grund der Definition von S.

Da die Tangente stets auf dem Radius senkrecht steht, ist $\angle TA\Omega = \frac{\pi}{2}$, also

$$\angle CAT + \angle CA\Omega = \frac{\pi}{2}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} ||| \overrightarrow{CB} \quad &\Longleftrightarrow \quad \angle CAT = \Pi(AC) = \angle CA\Omega \\ &\Longleftrightarrow \quad \Pi(AC) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

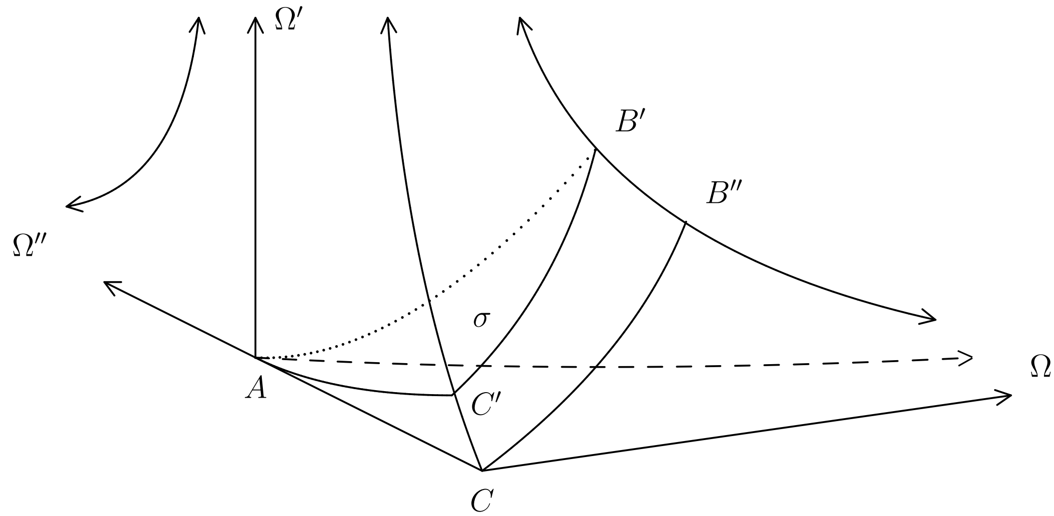
4.26 Die Formel für den Parallelitätswinkel.

$$\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.$$

Beweis: Sei $\overline{AC}$ eine Strecke der Länge x, $\alpha := \Pi(x)$. In einer Ebene $\mathcal{E}_I$, in der A und C liegen, werde in C die Senkrechte $\overrightarrow{C\Omega}$ errichtet und bei A die Parallele $\overrightarrow{A\Omega}$ angetragen. Dann ist $\angle CA\Omega = \alpha$.

$\mathcal{E}_{II}$ sei die zu $\mathcal{E}_I$ orthogonale Ebene durch AC. In der werde die Senkrechte $\overrightarrow{A\Omega'}$ zu AC errichtet und bei C die Parallele $\overrightarrow{C\Omega'}$ dazu angetragen.

Schließlich sei $\mathcal{E}_{III}$ die durch $\overrightarrow{C\Omega}$ und $\overrightarrow{C\Omega'}$ bestimmte Ebene. Sie enthält die zu $\overrightarrow{C\Omega}$ und $\overrightarrow{C\Omega'}$ parallele Gerade $\Omega\Omega'$.



Durch A geht die Horosphäre σ mit dem Zentrum Ω'. Die trifft $\overrightarrow{C\Omega'}$ in einem Punkt C' und $\Omega\Omega'$ in einem Punkt B'. So entsteht auf σ das euklidische Dreieck $AC'B'$.

Weil $\overrightarrow{C\Omega}$ auf $\mathcal{E}_{II}$ senkrecht steht, ist $\angle\Omega C\Omega'$ ein rechter Winkel, und $\mathcal{E}_{III}$ steht senkrecht auf $\mathcal{E}_{II}$. Und weil die Tangenten an $\overset{\frown}{AC'}$ und $\overset{\frown}{C'B'}$ in C' jeweils auf der Schnittgeraden $C\Omega'$ der beiden Ebenen senkrecht stehen, ist auch der euklidische Winkel $\angle AC'B'$ ein Rechter. Der Winkel $\angle C'AB'$ stimmt dagegen mit α überein, wie man leicht an den Tangenten in A erkennt.

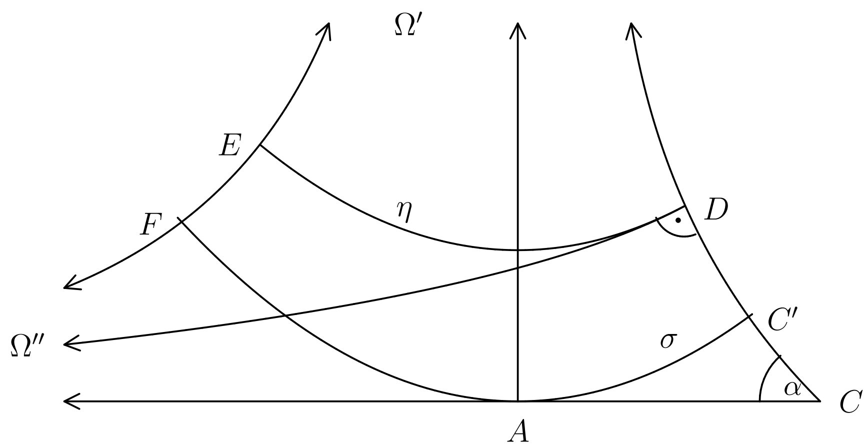
In der euklidischen Geometrie auf σ kann man natürlich auch mit Winkelfunktionen und euklidischer Trigonometrie arbeiten. Die Hypotenuse AB' des Dreiecks $AC'B'$ hat aber nach Lemma 4.25 die Länge S, da die Tangente $\overrightarrow{A\Omega}$ an $\overset{\frown}{AB'}$ in A zu dem Radius durch B' parallel ist (in der von A und $\Omega\Omega'$ aufgespannten Ebene $\mathcal{E}_{IV}$). Also gilt:

$$\overset{\frown}{B'C'} = S \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad \overset{\frown}{AC'} = S \cdot \cos\alpha.$$

Nun sei τ die zu σ konzentrische Horosphäre durch C. Sie trifft $\Omega\Omega'$ in einem Punkt B''. Dann folgt wieder mit Lemma 4.25, dass $\overset{\frown}{B''C}$ die Länge S hat. Führt man noch eine Längenfunktion λ für die hyperbolischen Geraden ein, so ist

$$\overset{\frown}{B''C}/\overset{\frown}{B'C'} = e^{\lambda(CC')/k}, \quad \text{also } e^{\lambda(CC')/k} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Für den Rest des Beweises brauchen wir nur noch die Situation in Ebene $\mathcal{E}_{II}$ zu betrachten.



Wir wählen einen Punkt D auf $\overrightarrow{C\Omega'}$ mit $\overline{CD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AC}$. Die Senkrechte zu $\overrightarrow{C\Omega}$ in D ist dann automatisch parallel zu $\overrightarrow{C\Omega''}$. Die Horosphäre σ trifft $\Omega'\Omega''$ in einem Punkt F, und die zu σ konzentrische Horosphäre η durch D trifft $\Omega'\Omega''$ in einem Punkt E. Da $\overrightarrow{D\Omega''}$ die Tangente an η in D ist, folgt wieder mit Lemma 4.25, dass $\overset{\frown}{DE}$ die Länge S hat, und das gleiche trifft auf $\overset{\frown}{AF}$ zu. Also ist

$$e^{\lambda(C'D)/k} = \overset{\frown}{C'F}/\overset{\frown}{DE} = \frac{S \cdot \cos\alpha + S}{S} = \cos\alpha + 1.$$

Zusammen mit dem obigen Resultat ergibt das:

$$\begin{aligned} e^{x/k} &= e^{\lambda(CC')/k} \cdot e^{\lambda(C'D)/k} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha} \cdot (\cos\alpha + 1) \\ &= \frac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Das liefert die gewünschte Formel. ∎

Nun ist man tatsächlich in der Lage, alles auszurechnen. Hier ist ein Beispiel:

4.27 Folgerung.

$$\textit{Ist } \Pi(x) = \frac{\pi}{4}, \textit{ so ist } x = k \cdot \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Beweis: Sei $\alpha := \Pi(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Dann ist

$$1 = \tan(\alpha) = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} = \frac{2y}{1 - y^2}, \text{ mit } y := \tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.$$

Nun folgt:

$$1 = \frac{2y}{1-y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 + 2y - 1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Da $y > 0$ ist, ist $e^{-x/k} = y = -1 + \sqrt{2}$, also

$$e^{x/k} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logarithmieren ergibt die gewünschte Formel. ∎