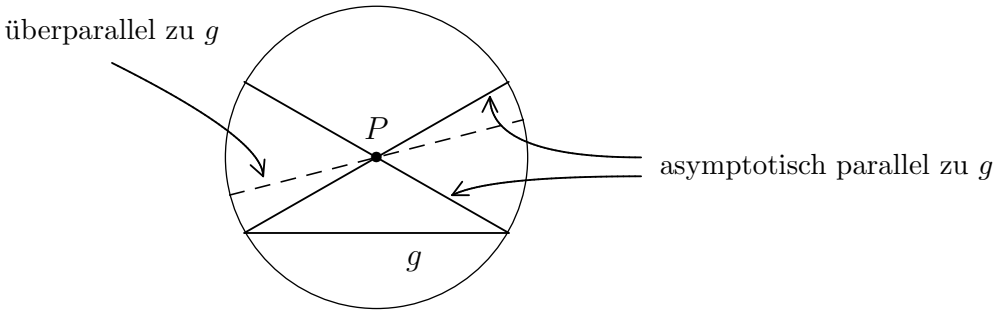
5 Bierdeckel und andere Scheiben

Jahrhunderte lang wurde versucht, das Parallelenaxiom direkt zu beweisen – vergebens! Dann kam Saccheri auf die Idee, ein hyperbolisches Parallelenaxiom vorauszusetzen und daraus einen Widerspruch herzuleiten. Auch er scheiterte. Erst Johann Bolyai und Nikolai Lobatschewski erkannten die Möglichkeit einer widerspruchsfreien nichteuklidischen Geometrie. Indem sie von einer solchen Annahme ausgingen, entdeckten sie in der räumlichen hyperbolischen Geometrie eine Fläche, die Horosphäre, auf der alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt sind. Damit war die euklidische Geometrie gerettet und zugleich das Tor zu einer neuen Welt aufgestoßen worden.

Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der Geometrie war damit nachgewiesen, aber für einen endgültigen Beweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie fehlte noch ein Modell! Man hoffte, dass sich eine nichteuklidische Ebene in den euklidischen Raum (isometrisch) einbetten ließe. Diese Hoffnung wurde durch Hilbert zerstört, der bewies, dass das unmöglich sei.

Allerdings war noch nicht alles verloren. Man kann nämlich zumindest einen Teil der nichteuklidischen Ebene, der durch einen Horozykel und zwei Radien begrenzt wird, einbetten. Das war schon Beltrami gelungen, der die sogenannte *Pseudosphäre* untersuchte, eine Fläche, die durch Rotation einer *Traktrix* (auch als *Hundekurve* bekannt) entsteht. Allgemein ist auf Flächen von konstanter negativer Krümmung zumindest teilweise die nichteuklidische Geometrie verwirklicht.

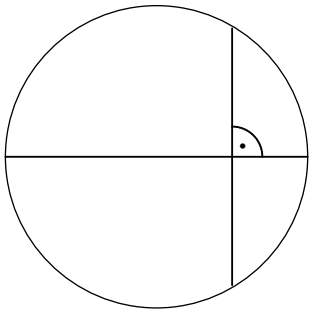
Ein erstes vollständiges Modell ist das von Cayley-Klein-Beltrami: Als Ebene nehme man das Innere des Einheitskreises E, als Geraden die Stücke gewöhnlicher Geraden, die sich innerhalb von E befinden. Inzidenz- und Anordnungsaxiome lassen sich leicht überprüfen. Schwieriger wird es dagegen bei den Bewegungsaxiomen, dazu braucht man Kenntnisse der projektiven Geometrie. Deshalb können wir hier nicht auf die Details eingehen und müssen uns mit der Mitteilung begnügen, dass alle Axiome der neutralen Geometrie verifiziert werden können. Und man sieht sofort, dass das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt ist:



Man spricht hier scherzhaft auch von „Bierdeckel-Geometrie“. Leider ist dieses Modell nicht nur mit einer nichteuklidischen Metrik versehen, es ist außerdem nicht

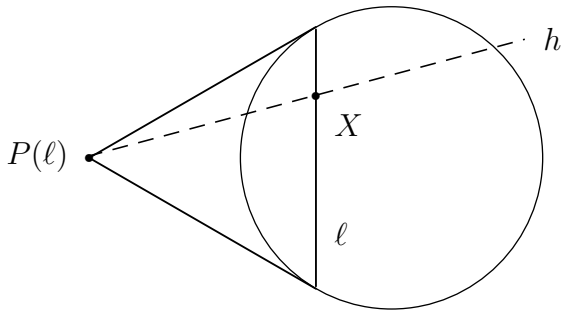
„konform“, d.h., man kann die Winkel nicht mit einem euklidischen Winkelmesser messen. Insbesondere ist es schon schwierig, rechte Winkel als solche zu erkennen.

1. Fall: ℓ Durchmesser, h dazu senkrecht:

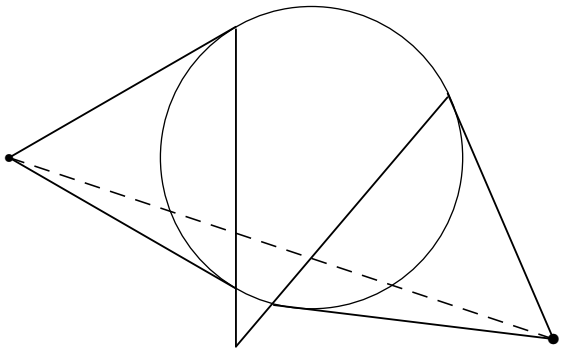


2. Fall: Weder ℓ noch h ist Durchmesser:

Sei $P(\ell)$ der Pol zu $\overline{PQ}$. Die Gerade h steht in X senkrecht auf ℓ, wenn sie auf der Geraden $P(\ell)X$ liegt.



Divergente Parallelen haben eine gemeinsame Senkrechte.



Ein konformes Modell stammt von Poincaré, und das soll hier vorgeführt werden. Allerdings müssen wir dazu etwas ausholen.

Es erweist sich als vorteilhaft, im Komplexen zu arbeiten. Für diejenigen, die noch keine Funktionentheorie kennen, sollen hier in aller Kürze die wichtigsten Fakten zusammengestellt werden:

Durch die Zuordnung $z = x + \mathsf{i}\, y \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x, y)$ wird eine Bijektion zwischen dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und der reellen euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ hergestellt. Begriffe wie „offene Mengen“ lassen sich dann leicht übertragen. Ein *Gebiet* in $\mathbb{C}$ ist eine zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Die Spiegelung an der x-Achse ergibt im Komplexen den Übergang $z = x + \mathsf{i}\, y \mapsto \bar{z} := x - \mathsf{i}\, y$ zum Konjugiert-Komplexen. Aus der euklidischen Länge $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ wird im Komplexen der Betrag $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$.

Ist $z \in \mathbb{C}$, so gibt es die Polarkoordinaten-Darstellung

$$z = |z|\, e^{\mathsf{i}\, t} = |z| \cdot (\cos t + \mathsf{i} \sin t).$$

Die Zahl $t \in [0, 2\pi)$ nennt man das *Argument* von z (in Zeichen $\arg(z)$). Aus den Eigenschaften (insbesondere den Additionstheoremen) für Sinus und Cosinus folgt die Beziehung

$$e^{\mathsf{i}\,(s+t)} = e^{\mathsf{i}\, s} \cdot e^{\mathsf{i}\, t}, \quad \overline{e^{\mathsf{i}\, t}} = e^{-\mathsf{i}\, t} \quad \text{und} \quad e^{2\pi \mathsf{i}\, n} = 1 \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine komplexwertige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ kann in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden: $f = g + \mathsf{i}\, h$. Dann lassen sich auch Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit problemlos übertragen. Allerdings haben die Mathematiker frühzeitig erkannt, dass es recht sinnvoll ist, einen eigenen Differenzierbarkeitsbegriff im Komplexen einzuführen.

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. f heißt in z_0 *komplex differenzierbar*, falls es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : G \to \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z).$$

Die komplexe Zahl $f'(z_0) := \Delta(z_0)$ nennt man die *Ableitung* von f in z_0.

f heißt auf G komplex differenzierbar, falls f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$\Delta(z) = \begin{cases} \big(f(z) - f(z_0)\big)/(z - z_0) & \text{falls } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ ist.

Die Linearität der Ableitung, die Produkt- und die Quotientenregel folgen wie im Reellen.

5.1 Satz. *$f : G \to \mathbb{C}$ sei in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar. Ist außerdem h in $w_0 := f(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist auch $h \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

BEWEIS: Ist $h(w) = h(w_0) + \Delta^{**}(w) \cdot (w - w_0)$ und $f(z) = f(z_0) + \Delta^{*}(z) \cdot (z - z_0)$, so folgt:

$$\begin{aligned}(h \circ f)(z) &= h(w_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot (f(z) - w_0) \\ &= (h \circ f)(z_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^{*}(z) \cdot (z - z_0).\end{aligned}$$

Nun kann man $\Delta(z) := \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^{*}(z)$ setzen. ∎

Beispiele.

1. Sei $f(z) := az + b$, mit festen Zahlen a und b. Dann ist $f(z) - f(z_0) = a(z - z_0)$, also f komplex differenzierbar und $f'(z) \equiv a$.

2. Weil $z^2 - z_0^2 = (z - z_0) \cdot (z + z_0)$ ist, ist z^2 in z_0 komplex differenzierbar und $(z^2)' = 2z$.

3. Eine *(gebrochen) lineare Transformation* oder *Möbius-Transformation* ist eine Abbildung der Gestalt

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

   Die Funktion T ist für alle $z \neq -d/c$ definiert und stetig.

   Wir betrachten zwei Spezialfälle.

   1. Fall: Ist $c = 0$, $A := a/d$ und $B := b/d$, so ist T eine komplexe affin-lineare Funktion:

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

   Da A eine komplexe Zahl ist, stellt die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ eine Drehstreckung dar. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene.

   2. Fall: Die Abbildung $I(z) := 1/z$ nennt man die *Inversion*. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig.

   Sei $z_0 \neq 0$, z nahe z_0 (und o.B.d.A. $\neq 0$). Dann ist

$$1/z - 1/z_0 = \Big(-1/(zz_0)\Big) \cdot (z - z_0),$$

   also $z \mapsto 1/z$ komplex differenzierbar und $(1/z)' = -1/z^2$.

   Ist $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ eine beliebige Möbius-Transformation mit $c \neq 0$ und

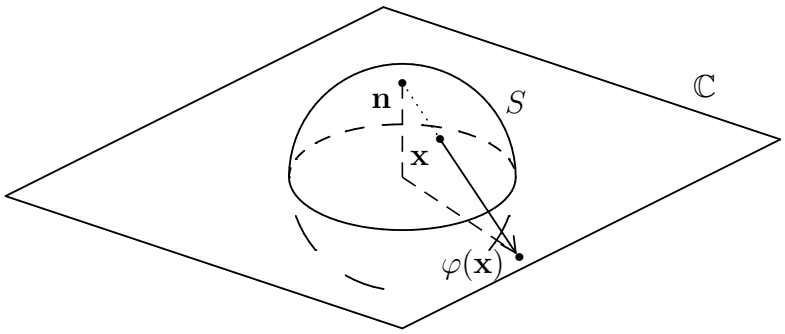
$$A := \frac{bc - ad}{c} \quad \text{und} \quad B := \frac{a}{c},$$

so ist

$$A \cdot \frac{1}{cz+d} + B = \frac{(a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)}$$
$$= \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = T(z).$$

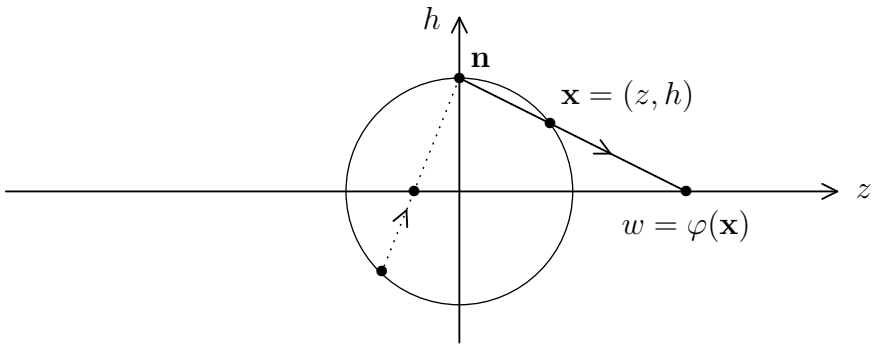
Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

Eine gebrochen-lineare Transformation $T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad-bc \neq 0$ ist definiert für $z \neq -\dfrac{d}{c}$. Um den Ärger mit den Definitionslücken zu vermeiden, ergänzt man die komplexen Zahlen gerne um ein zusätzliches Element ∞ und sagt dann, T bildet $z = -\dfrac{d}{c}$ auf ∞ ab. In diesem Sinne stellen die gebrochen linearen Transformationen bijektive Abbildungen von $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich dar. Um das besser zu verstehen, geben wir eine anschauliche Deutung für $\overline{\mathbb{C}}$.



Sei $S := S^2 = \{(z,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + h^2 = 1\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} := (0,1) \in S$ der „Nordpol“. Dann wird die *stereographische Projektion* $\varphi : S \setminus \{\mathbf{n}\} \to \mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:

Ist $\mathbf{x} = (z,h) \in S \setminus \{\mathbf{n}\}$, so trifft der Strahl, der von $\mathbf{n}$ ausgeht und bei $\mathbf{x}$ die Sphäre S durchstößt, in einem Punkt $\varphi(\mathbf{x})$ die komplexe Ebene:



Ist $w = \varphi(z,h)$, so liegen w und z auf dem gleichen Strahl in $\mathbb{C}$, der von 0 ausgeht. Also muß $w = \lambda z$ sein, mit einem reellen Faktor $\lambda > 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: Ist $h > 0$, so ist $z \neq 0$, $\lambda > 1$, und nach dem Strahlensatz besteht das Verhältnis

$$h : 1 = |w - z| : |w|.$$

Also ist $h = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$, und daher $\lambda = \dfrac{1}{1-h}$.

Ist $-1 < h < 0$, so ist ebenfalls $z \neq 0$ und $0 < \lambda < 1$, und man kommt zum gleichen Ergebnis. Schließlich ist $\varphi(0,-1) = 0$. Somit ist die stereographische Projektion gegeben durch

$$\boxed{\varphi(z,h) = \frac{1}{1-h} \cdot z.}$$

Diese Abbildung ist sogar bijektiv! Ist nämlich $w \in \mathbb{C}$, so ist der Strahl, der von $\mathbf{n}$ aus durch w geht, gegeben durch die Menge

$$\{(t(w,0) + (1-t)(0,1) \,:\, t \geq 0\} = \{(tw, 1-t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t \geq 0\}.$$

Es gibt genau ein t mit $|tw|^2 + (1-t)^2 = 1$, nämlich $t = \dfrac{2}{|w|^2+1}$. Bei diesem Parameter trifft der Strahl die Sphäre im Punkt

$$\boxed{\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right).}$$

φ und φ^{-1} sind beides stetige Abbildungen. Nähert sich $\mathbf{x} = (z,h) \in S$ dem Nordpol $(0,1)$, so wandert $\varphi(\mathbf{x})$ immer weiter ins Unendliche, denn es ist

$$|\varphi(z,h)|^2 = \frac{|z|^2}{(1-h)^2} = \frac{1-h^2}{(1-h)^2} = \frac{1+h}{1-h}\,.$$

5.2 Hilfssatz. *Jede Gerade und jeder Kreis kann durch eine Menge der Gestalt*

$$M = \{\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$ beschrieben werden.

Ist $\alpha = 0$, so liegt eine Gerade vor, andernfalls ein Kreis.

Beweis: 1) Ist $\alpha = 0$, so muss automatisch $c \neq 0$ sein, und die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

ist eine Gerade. Umgekehrt kann jede Gerade so geschrieben werden.

2) Ist $\alpha \neq 0$, so kann man dadurch dividieren, also o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha = 1$ ist. Dann ist $r := \sqrt{c\bar{c} - \delta}$ eine positive reelle Zahl, und der Kreis um $u := -\bar{c}$ mit Radius r ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |z-u| = r &\iff (z-u)(\bar{z}-\bar{u}) = r^2 \\ &\iff z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + (u\bar{u} - r^2) = 0 \\ &\iff z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0. \end{aligned}$$

∎

Jetzt können wir eine besondere Eigenschaft der gebrochen linearen Funktionen beweisen:

5.3 Satz. *Eine lineare Transformation* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *mit* $ad - bc \neq 0$ *bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.*

Zum Beweis betrachten wir eine Menge der Gestalt

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\bar{c} > \alpha\delta$. Wir müssen zeigen, dass $T(M)$ wieder eine solche Gestalt hat:

Es reicht, affin-lineare Funktionen und die Inversion zu betrachten.

1) Es ist klar, dass eine Translation $z \mapsto z + B$ Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abbildet. Betrachten wir eine Drehstreckung $z \mapsto w = Az$ mit $A \neq 0$. Dann ist $z = w/A$. Liegt z in M, so ist

$$0 = \alpha w\overline{w} + (c\overline{A})w + (\bar{c}A)\overline{w} + A\overline{A}\delta$$

mit $(c\overline{A})(\bar{c}A) = c\bar{c}A\overline{A} > \alpha(\delta A\overline{A})$. Also ist w wieder Element einer Menge vom gewünschten Typ.

2) Nun sei $w = \dfrac{1}{z}$. Dann ist auch $z = \dfrac{1}{w}$, und es gilt für $z \in M$:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{c}{w} + \frac{\bar{c}}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Da $w \neq 0$ sein muss, können wir mit $w\bar{w}$ multiplizieren und erhalten:

$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Auch hier ist das Bild von M wieder eine Menge vom gewünschten Typ. ∎

5.4 Satz. *Die stereographische Projektion bildet Kreise auf* S^2 *auf Kreise oder Geraden in* $\mathbb{C}$ *ab.*

BEWEIS: Ein Kreis auf $S = S^2$ ist der Durchschnitt von S mit einer Ebene

$$E := \{(z,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid cz + \overline{cz} + \varrho h + \sigma = 0\},$$

mit $(c,\varrho) \neq (0,0)$. Der Abstand der Ebene E vom Ursprung ist die Zahl

$$d := \frac{|\sigma|}{\sqrt{4c\overline{c} + \varrho^2}}.$$

Damit E und S sich tatsächlich in einem Kreis treffen, muß $d < 1$ sein, also $\sigma^2 - \varrho^2 < 4c\overline{c}$.

Setzt man nun $\alpha := \frac{1}{2}(\sigma + \varrho)$ und $\delta := \frac{1}{2}(\sigma - \varrho)$, so ist $\alpha\delta < c\overline{c}$. Für $(z,h) \in S \cap E$ und $w := \varphi(z,h)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\alpha w\overline{w} + cw + \overline{cw} + \delta &= \alpha\frac{1+h}{1-h} + \frac{cz}{1-h} + \frac{\overline{cz}}{1-h} + \delta \\
&= \frac{1}{1-h} \cdot (\alpha(1+h) + cz + \overline{cz} + \delta(1-h)) \\
&= \frac{1}{1-h} \cdot (cz + \overline{cz} + (\alpha - \delta)h + (\alpha + \delta)) \\
&= \frac{1}{1-h} \cdot (cz + \overline{cz} + \varrho h + \sigma) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt genauso, daß das Urbild einer solchen Kurve auf S ein Kreis ist. ∎

Wir wollen die komplexe Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ mit der reellen Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ vergleichen.

f heißt in z_0 *(reell) differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte Funktion r gibt, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ für z nahe z_0.
2. $\lim\limits_{h \to 0} r(h)/|h| = 0$.

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L nennt man die *totale Ableitung* von f in z_0 und bezeichnet sie mit $Df(z_0)$.

Bei der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ entsprechen die komplexen Zahlen 1 und i den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Deshalb nennt man die komplexen Zahlen

$$f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := Df(z_0)(1) \quad \text{und} \quad f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := Df(z_0)(\mathsf{i})$$

die *partiellen Ableitungen* von f nach x und y. Ist $f = g + \mathsf{i}\,h$, so gilt:

$$f_x(z_0) = g_x(z_0) + \mathsf{i}\,h_x(z_0) \quad \text{und } f_y(z_0) = g_y(z_0) + \mathsf{i}\,h_y(z_0).$$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Df(z_0)$ wird deshalb bezüglich der Basis $\{1, \mathsf{i}\}$ durch die Funktionalmatrix

$$J_f(z_0) := \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix}$$

beschrieben.

5.5 Satz. *f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$linear ist (nämlich die Multiplikation mit $f'(z_0)$).*

Beweis: Sei f in z_0 komplex differenzierbar. Dann gibt es eine in z_0 stetige Funktion Δ, so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \big(\Delta(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0) \\ &= f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0), \end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung L (mit $L(v) := f'(z_0) \cdot v$) und der Funktion $r(h) := (\Delta(z_0 + h) - f'(z_0)) \cdot h$. Dann gilt:

$$\frac{r(h)}{h} = \Delta(z_0 + h) - f'(z_0) \to 0 \text{ (für } h \to 0)$$

Also ist f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear.

Ist umgekehrt f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, so gibt es eine komplexe Zahl a, so dass $Df(z_0)(v) = a \cdot v$ ist, und es gibt eine Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + r(z - z_0), \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Setzt man dann $\Delta(z) := a + \dfrac{r(z - z_0)}{z - z_0}$, für $z \neq z_0$, so strebt $\Delta(z) \to a$ für $z \to z_0$, Δ ist also stetig nach z_0 fortsetzbar. Außerdem ist $\Delta(z)(z - z_0) = f(z) - f(z_0)$. ∎

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann zusätzlich $\mathbb{C}$-linear, wenn es eine komplexe Zahl c_0 gibt, so dass $L(w) = c_0 \cdot w$ ist. Schreibt man $c_0 = a_0 + \mathsf{i}\, b_0$, so ist

$$c_0 \cdot 1 = a_0 + \mathsf{i}\, b_0 \quad \text{und} \quad c_0 \cdot \mathsf{i} = -b_0 + \mathsf{i}\, a_0\,.$$

Das bedeutet, dass L bezüglich $\{1, \mathsf{i}\}$ durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Eine Funktion $f = g + \mathsf{i}\, h$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** gelten:

$$\boxed{g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \text{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0)\,.}$$

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, so folgt aus den Cauchy-Riemann'schen DGLn:

$$\det Df(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ h_x & g_x \end{pmatrix} = (g_x)^2 + (h_x)^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Das bedeutet, dass f – aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ – orientierungserhaltend ist!

Komplex differenzierbare Funktionen lassen außerdem Winkel invariant. Allerdings müssen wir erst einmal erklären, was darunter zu verstehen ist.

Sind $z = r_1 \cdot e^{\mathrm{i}\,t_1}$ und $w = r_2 \cdot e^{\mathrm{i}\,t_2}$ zwei komplexe Zahlen $\neq 0$, so verstehen wir unter dem Winkel zwischen z und w die Zahl

$$\angle(z, w) = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{falls } t_2 > t_1 \\ 2\pi + t_2 - t_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Winkel $\angle(z, w)$ wird also von z aus immer in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen.

Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zwei glatte differenzierbare Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, so setzt man

$$\angle(\alpha, \beta) := \angle(\alpha'(0), \beta'(0)).$$

Behauptung: *Ist f eine komplex differenzierbare Funktion, so ist $(f \circ \alpha)'(0) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0)$.*

Beweis: Es ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{f \circ \alpha(t) - f \circ \alpha(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f \circ \alpha(t) - f \circ \alpha(0)}{\alpha(t) - \alpha(0)} \cdot \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0).$$

∎

Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ mit nicht verschwindender Ableitung heißt in z_0 *winkeltreu*, falls für beliebige glatte differenzierbare Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gilt:

$$\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta).$$

Ist f lokal umkehrbar, überall winkeltreu und orientierungserhaltend, so nennt man f *lokal konform*. Ist f sogar global injektiv, so nennt man f *konform*.

5.6 Satz. *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, f' stetig und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$, so ist f lokal konform.*

Beweis: Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist auch $\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Ist außerdem f' stetig, so sind die partiellen Ableitungen von f stetig und aus dem Satz über inverse

Abbildungen folgt, dass es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$ gibt, so dass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist f lokal umkehrbar.

Wir müssen nur noch zeigen, dass f winkeltreu ist. Aber es ist

$$\begin{aligned}\angle(f\circ\alpha, f\circ\beta) &= \angle((f\circ\alpha)'(0), (f\circ\beta)'(0)) = \angle(f'(z_0)\cdot\alpha'(0), f'(z_0)\cdot\beta'(0)) \\ &= \arg\Big(\frac{f'(z_0)\cdot\beta'(0)}{f'(z_0)\cdot\alpha'(0)}\Big) = \arg\Big(\frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\Big) = \angle(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

∎

Wir kommen zu den *gebrochen linearen Transformationen* zurück,

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{mit } ad - bc \neq 0,$$

Als komplex differenzierbare Funktionen sind solche Abbildungen konform.

Wieviele *Fixpunkte* hat $T(z)$, wenn T nicht konstant ist?

1. Es sei T affin-linear, $T(z) = az + b \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Dann ist Unendlich ein Fixpunkt. Ist $a = 1$, so liegt eine Translation vor und die Abbildung hat keinen weiteren Fixpunkt. Ist $a \neq 1$, so stellt $z = \dfrac{-b}{a-1}$ einen weiteren Fixpunkt dar. Mehr gibt es nicht.

2. Ist $c \neq 0$, so ist $T(\infty) = a/c$, also Unendlich kein Fixpunkt! Es gilt $T(z) = z$ genau dann, wenn $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ ist, und da es für eine quadratische Gleichung höchstens zwei verschiedene Lösungen gibt, hat T höchstens zwei Fixpunkte.

5.7 Folgerung.

1. *Sei T eine lineare Transformation mit mehr als zwei Fixpunkten.*
   Dann ist $T = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$.

2. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden.*
   Dann ist T durch die Bilder $T(z_i)$, $i \in \{1,2,3\}$ eindeutig festgelegt.

Beweis:

1. ist klar!

2. Sei $S(z_i) = T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist auch $S^{-1}T$ eine lineare Transformation, hat aber mindestens drei Fixpunkte. Also muss $S = T$ sein!

∎

Man kann sogar zu drei beliebigen Punkten und drei vorgegebenen Bildern die passende lineare Transformation konkret bestimmen.

Dazu suchen wir zunächst zu beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 eine Möbiustransformation T mit $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$ und $T(z_3) = \infty$. Eine leichte Überlegung ist, dass

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

schon die Punkte z_1 und z_3 richtig abbildet. Allerdings ist

$$T(z_2) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Dividieren wir $T(z)$ noch durch diesen Bruch, so erhalten wir die gewünschte Transformation.

Definition. Als *Doppelverhältnis* der Punkte z, z_1, z_2, z_3 bezeichnen wir die Größe

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Bemerkung. Ist einer der ausgewählten Punkte gleich Unendlich, so vereinfacht sich die Formel. Im Falle $z_1 = \infty$ gilt z.B.

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Der fehlende Bruch

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(z/z_1) - 1}{(z_2/z_1) - 1}$$

geht gegen Eins, wenn z_1 nach Unendlich geht.

5.8 Satz. *Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils paarweise verschieden, so gibt es genau eine gebrochen lineare Transformation T mit $T(z_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Beweis: Seien $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ und $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$. Dann erfüllt die Verkettung

$$T(z) := T_2^{-1} \circ T_1(z)$$

die Forderung. Dass die Transformation T eindeutig bestimmt ist, haben wir schon gesehen. ∎

5.9 Satz. *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Ein Punkt $z \in \overline{\mathbb{C}}$ liegt genau dann auf der durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreislinie (alle $z_i \in \mathbb{C}$) oder Geraden (ein $z_i = \infty$), falls das Doppelverhältnis $DV(z, z_1, z_2, z_3)$ eine reelle Zahl oder Unendlich ist.*

Beweis: Sei $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$, K die Gerade oder Kreislinie durch die z_i. Dann ist $T(K)$ Kreis oder Gerade durch 0, 1 und Unendlich, also $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und damit ist $z \in K$ genau dann, wenn $T(z)$ reell ist oder Unendlich. ∎

5.10 Folgerung. *Das Gebiet $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ werde von einer Geraden oder einer Kreislinie berandet. Dann gibt es eine lineare Transformation T mit*

$$T(G) = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

BEWEIS: Es gibt eine lineare Transformation T, die ∂G auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abbildet. Weil ∂G und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ jeweils in zwei disjunkte Gebiete zerlegen, ist entweder $T(G) = \mathbb{H}$ oder $T(G) = -\mathbb{H}$. Im letzteren Falle schalte man noch die Abbildung $z \mapsto -z$ dahinter. ∎

Beispiel.

Die Abbildung

$$C(z) := \mathsf{i}\,(\frac{1+z}{1-z}) = DV(z, -1, -\mathsf{i}, 1)$$

bildet die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ab, denn -1, $-\mathsf{i}$ und 1 liegen alle auf $\partial\mathbb{D}$, und es ist $C(0) = \mathsf{i}$. Also ist $C(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$C^{-1}(w) = \frac{w - \mathsf{i}}{w + \mathsf{i}}\,.$$

Man spricht auch von der *Cayley-Abbildung.*

5.11 Satz. *Eine lineare Transformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ bildet genau dann $\mathbb{H}$ bijektiv auf sich ab, wenn a, b, c, d reell sind und $ad - bc > 0$ ist.*

BEWEIS: T bildet genau dann $\mathbb{H}$ auf sich ab, wenn $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf sich und i nach $\mathbb{H}$ abgebildet wird.

a) Sei $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Werden die Punkte z_1, z_2, z_3 auf 0, 1 und ∞ abgebildet, so liegen z_1, z_2, z_3 in $\partial\mathbb{H}$ und müssen reell oder $= \infty$ sein. Weil $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ist, müssen a, b, c, d reell sein. Außerdem ist

$$\operatorname{Im}\Big(\frac{a\,\mathsf{i} + b}{c\,\mathsf{i} + d}\Big) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}\,.$$

Also liegt $T(\mathsf{i})$ genau dann in $\mathbb{H}$, wenn $ad - bc > 0$ ist.

b) Sind umgekehrt a, b, c, d reell, so wird $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abgebildet, also $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ oder $-\mathbb{H}$. Die Bedingung $ad - bc > 0$ sorgt dafür, dass Ersteres der Fall ist. ∎

Wir benutzen jetzt die Cayley-Abbildung, um diejenigen linearen Transformationen zu finden, die das Innere $\mathbb{D}$ des Einheitskreises auf sich abbilden.

Ist $T(w) = \dfrac{aw+b}{cw+d}$ eine Transformation, die $\mathbb{H}$ auf sich abbildet, so bildet $S := C^{-1}\circ T\circ C$ den Einheitskreis $\mathbb{D}$ auf sich ab. Mit $C(z) = \mathsf{i}\,\dfrac{1+z}{1-z}$ und $C^{-1}(u) = \dfrac{u-\mathsf{i}}{u+\mathsf{i}}$ erhält man:

$$\begin{aligned} S(z) \;=\; C^{-1}\circ T\circ C(z) \;&=\; C^{-1}\Big(\frac{a\,\mathsf{i}\,(1+z)+b(1-z)}{c\,\mathsf{i}\,(1+z)+d(1-z)}\Big)\\ &=\; \frac{a\,\mathsf{i}\,(1+z)+b(1-z)+c(1+z)-\,\mathsf{i}\,d(1-z)}{a\,\mathsf{i}\,(1+z)+b(1-z)-c(1+z)+\,\mathsf{i}\,d(1-z)}\\ &=\; \frac{\big((c-b)+\,\mathsf{i}\,(a+d)\big)\,z+\big((c+b)+\,\mathsf{i}\,(a-d)\big)}{\big(-(c+b)+\,\mathsf{i}\,(a-d)\big)\,z+\big(-(c-b)+\,\mathsf{i}\,(a+d)\big)}\\ &=\; \frac{\big((a+d)-\,\mathsf{i}\,(c-b)\big)\,z+\big((a-d)-\,\mathsf{i}\,(c+b)\big)}{\big((a-d)+\,\mathsf{i}\,(c+b)\big)\,z+\big((a+d)+\,\mathsf{i}\,(c-b)\big)}\\ &=\; \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}, \end{aligned}$$

mit

$$\alpha := (a+d)-\,\mathsf{i}\,(c-b) \quad \text{und} \quad \beta := (a-d)-\,\mathsf{i}\,(c+b).$$

Also ist $S(z) = \gamma\cdot\dfrac{z-v}{1-\overline{v}z}$, mit $c := \alpha/\overline{\alpha}$ und $v := -\beta/\alpha$. Offensichtlich ist $|c| = 1$, es gibt also ein $\theta\in[0,2\pi)$ mit $c = e^{\,\mathsf{i}\,\theta}$. Außerdem ist $\beta/\overline{\alpha} = S(0)\in\mathbb{D}$ und damit auch $|v| = \big|-\beta/\alpha\,\big| = |\beta/\overline{\alpha}| < 1$, also $v\in\mathbb{D}$. Wir haben gezeigt:

5.12 Satz. *Die linearen Transformationen, die $\mathbb{D}$ auf sich abbilden, haben alle die Gestalt*

$$T(z) = e^{\,\mathsf{i}\,\theta}\cdot\frac{z-v}{1-\overline{v}z},\ \textit{mit } \theta\in[0,2\pi) \textit{ und } v\in\mathbb{D}.$$

Durch $w\mapsto e^{\,\mathsf{i}\,t}\cdot w$ wird eine Drehung um den Nullpunkt definiert, die offensichtlich $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ abbildet. Ist $v\in\mathbb{D}$ und $f(z) := \dfrac{z-v}{1-\overline{v}z}$, so gilt für $z\in\partial\mathbb{D}$:

$$z\overline{z} = 1 \text{ und } f(z)\overline{f(z)} = \frac{(z-v)(\overline{z}-\overline{v})}{(1-\overline{v}z)(1-v\overline{z})} = \frac{1+v\overline{v}-v\overline{z}-z\overline{v}}{1-\overline{v}z-v\overline{z}+v\overline{v}} = 1.$$

Also ist $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, und weil außerdem $f(v) = 0$ ist, ist $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Das heißt, dass alle Transformationen der Gestalt $T(z) = e^{\,\mathsf{i}\,\theta}\cdot\dfrac{z-v}{1-\overline{v}z}$ (mit $v\in\mathbb{D}$) den Einheitskreis auf sich abbilden. Wir nennen diese Abbildungen die *Automorphismen des Einheitskreises.*

5.13 Satz. *Zu je zwei Punkten $z_1, z_2\in\mathbb{D}$ gibt es einen Automorphismus T des Einheitskreises mit $T(z_1) = z_2$.*

Beweis: Für $\alpha\in\mathbb{D}$ sei $T_\alpha(z) := \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$. Dann ist $T_\alpha(\alpha) = 0$. Also ist $T := T_{z_2}^{-1}\circ T_{z_1}$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ mit $T(z_1) = T_{z_2}^{-1}(0) = z_2$. ∎

Man nennt die Abbildungen T_α *verallgemeinerte Translationen*.

Sei nun $\mathcal{B}$ die von der Konjugation $K : z \mapsto \overline{z}$, den Drehungen $D_\theta : z \mapsto e^{\mathrm{i}\,\theta}$ und den verallgemeinerten Translationen T_α erzeugte Gruppe von konformen bijektiven Abbildungen von $\mathbb{D}$ auf sich. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{B}$ die *hyperbolischen Bewegungen* von $\mathbb{D}$.

Wir werden nun auf $\mathbb{D}$ eine Geometrie einführen, deren Bewegungsgruppe gerade $\mathcal{B}$ ist. Zu diesem Zweck suchen wir eine $\mathcal{B}$-invariante Metrik auf $\mathbb{D}$, also eine Abbildung $d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(z, w) \geq 0$ für alle $z, w \in \mathbb{D}$.
2. $d(z, w) = d(w, z)$.
3. $d(z, w) = 0 \iff z = w$.
4. $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$.
5. $d(f(z), f(w)) = d(z, w)$ für jede hyperbolische Bewegung f.

Behauptung: Wenn wir noch fordern, dass $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{d(0,t)}{t} = 1$ ist, also d im Nullpunkt „fast euklidisch“, und außerdem $d(0, x_1) + d(x_1, x_2) = d(0, x_2)$ für x_1, x_2 reell und $0 < x_1 < x_2 < 1$, so ist die Metrik schon festgelegt.

Beweis: Es gebe eine Metrik der gewünschten Art, und für $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < 1$ sei $\psi(t) := d(0, t)$. Da $T_r(r) = 0$ ist, ist

$$d(r, r + \varepsilon) = d(T_r(r), T_r(r + \varepsilon)) = \psi(T_r(r + \varepsilon)).$$

Also muss gelten:

$$\psi(r + \varepsilon) = \psi(r) + \psi(\frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2}).$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(r+\varepsilon) - \psi(r)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \psi(\frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2}) \\ &= \frac{1}{1 - r\varepsilon - r^2} \cdot \left[\psi(\frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2}) \Big/ \frac{\varepsilon}{1 - r\varepsilon - r^2} \right] \\ &\longrightarrow \frac{1}{1 - r^2} \text{ (für } \varepsilon \to 0 \text{)} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: ψ ist differenzierbar, und es ist $\psi'(t) = \dfrac{1}{1 - t^2}$, also

$$d(0, r) = \psi(r) - \psi(0) = \int_0^r \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + r}{1 - r} + c,$$

für reelles $r > 0$. Lässt man noch r gegen Null gehen, so erhält man, dass $c = 0$ sein muss.

Sind $z, w \in E$ beliebig, so ist $T_z(z) = 0$ und $T_z(w) = \dfrac{w - z}{1 - \bar{z}w}$. Indem man noch eine Drehung dahinter schaltet, gewinnt man einen Automorphismus T von E mit

$$T(z) = 0 \quad \text{und} \quad T(w) = \delta(w, z) := |\frac{w - z}{1 - \bar{z}w}|.$$

Dann muss $d(z, w) = d(0, \delta(w, z))$ sein, und der rechte Ausdruck ist oben schon berechnet worden. ∎

Die obigen Berechnungen sollten nur die Motivation für unser Tun liefern. Aber jetzt gilt tatsächlich:

5.14 Satz. *Durch*

$$d(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z, w)}{1 - \delta(z, w)}$$

wird eine $\mathcal{B}$-invariante Metrik auf E definiert.

Beweis:

$\delta(z, w) = |\dfrac{z - w}{1 - \bar{w}z}| = |\dfrac{w - z}{1 - \bar{z}w}|$ ist unabhängig von der Reihenfolge von z und w, stets ≥ 0 und genau dann $= 0$, wenn $z = w$ ist. Diese Eigenschaften vererben sich sofort auch auf $d(z, w)$.

Ist T ein Automorphismus von E und sind $w_1, w_2 \in E$ beliebige Punkte, so gilt mit $w_1 := Tz_1$ und $w_2 := Tz_2$: $F := T_{w_1} \circ T \circ T_{z_1}^{-1}$ ist auch ein Automorphismus von E, jetzt aber mit $F(0) = 0$. Also ist F eine Drehung D_θ, und es folgt:

$$T_{w_1}(w_2) = T_{w_1} \circ T(z_1) = F \circ T_{z_1}(z_2) = D_\theta \circ T_{z_1}(z_2),$$

also $\delta(w_1, w_2) = |T_{w_1}(w_2)| = |T_{z_1}(z_2)| = \delta(z_1, z_2)$ und damit

$$d(Tz_1, Tz_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(w_1, w_2)}{1 - \delta(w_1, w_2)} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = d(z_1, z_2).$$

Insbesondere ist $d(z, w) = d(0, \delta(z, w))$.

Es bleibt die Dreiecks-Ungleichung zu zeigen. Wegen der Bewegungsinvarianz genügt es, den Fall $d(z, w) \leq d(z, 0) + d(0, w)$ zu betrachten. Ist $z = re^{\mathrm{i}\tau}$ und $w = se^{\mathrm{i}\sigma}$, sowie $\alpha := \sigma - \tau$, so gilt:

$$\begin{aligned} d(z, 0) + d(0, w) &= d(0, r) + d(0, s) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\log \frac{1 + r}{1 - r} + \log \frac{1 + s}{1 - s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1 + \frac{r+s}{1+rs}}{1 - \frac{r+s}{1+rs}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(z,w) &= d(r, se^{\mathrm{i}\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+R}{1-R}, \end{aligned}$$

mit $R := \delta(se^{\mathrm{i}\alpha}, r)$. Wir setzen

$$g(\alpha) := R^2 = |\frac{r - se^{\mathrm{i}\alpha}}{1 - rse^{\mathrm{i}\alpha}}|^2 = \frac{r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha}{1 + r^2s^2 - 2rs\cos\alpha}.$$

$g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und man rechnet leicht nach, dass genau dann $g'(\alpha) = 0$ ist, wenn $\sin\alpha = 0$ ist, also wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ ist. Nun ist

$$g(0) = \left(\frac{r-s}{1-rs}\right)^2 \leq \left(\frac{r+s}{1+rs}\right)^2 = g(\pi),$$

also nimmt $g(\alpha)$ für $\alpha = \pi$ sein globales Maximum an. Damit ist $R = \sqrt{g(\alpha)} \leq \sqrt{g(\pi)} = \dfrac{r+s}{1+rs}$ und $d(z,w) \leq d(z,0) + d(0,w)$. ∎

Wir brauchen im folgenden noch die Länge von Wegen. Ohne weitere Motivation wird definiert:

Definition. Sei $\gamma : [a,b] \to E$ ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

die *euklidische Länge* von γ, und

$$L_h(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt$$

die *hyperbolische Länge* von γ.

Man kann zeigen:

5.15 Satz.

1. *Beide Längenbegriffe sind unabhängig von der Orientierung (dem Durchlaufungssinn) des Weges, und die Länge eines zusammengesetzten Weges ist die Summe der einzelnen Längen.*

2. *Es ist stets $L_h(\gamma) \geq L(\gamma) \geq 0$.*

3. *$L_h(f \circ \gamma) = L_h(\gamma)$, für jedes $f \in \mathcal{B}$.*

4. *$d(z,w) = \inf\{L_h(\gamma) \mid \gamma$ verbindet z mit w in $E\}$.*

BEWEIS: 1) und 2) sind trivial.

3) Hier benutzen wir die komplexe Differenzierbarkeit der Automorphismen des Einheitskreises: Für $z, z_0 \in E$ ist

$$\begin{aligned}\frac{|f'(z_0)|}{1-|f(z_0)|^2} &= \lim_{z\to z_0} \frac{|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}|}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{|z-z_0|}\cdot\delta(f(z),f(z_0)) \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{|z-z_0|}\cdot\delta(z,z_0) \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{|1-\bar{z}_0 z|} = \frac{1}{1-|z_0|^2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}L_h(f\circ\gamma) &= \int_a^b \frac{|(f\circ\gamma)'(t)|}{1-|f\circ\gamma(t)|^2}\,dt \\ &= \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1-|f(\gamma(t))|^2}\cdot|\gamma'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt = L_h(\gamma).\end{aligned}$$

4) Wir betrachten zunächst die Verbindungswege zwischen 0 und r, mit $0<r<1$. Sei $\gamma_0(t) := t$ auf $[0,r]$ und $\gamma = \gamma_1 + \mathrm{i}\,\gamma_2 : [0,r] \to E$ ein beliebiger Weg mit $\gamma(0)=0$ und $\gamma(r)=r$. Dann ist

$$\begin{aligned}L_h(\gamma) &= \int_0^r \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,dt \geq \int_0^r \frac{\gamma_1'(t)}{1-\gamma_1(t)^2}\,dt \\ &= \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = L_h(\gamma_0) = d(0,r).\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir den Abstand zweier beliebiger Punkte $z_1, z_2 \in E$. Dann gibt es einen Automorphismus f von E mit $f(z_1)=0$ und $f(z_2)=r := \delta(z_1,z_2) > 0$. Ist $\widetilde{\gamma}_0(t) := f^{-1}\circ\gamma_0(t)$, so ist

$$L_h(\widetilde{\gamma}_0) = L_h(\gamma_0) = d(0,r) = d(z_1,z_2).$$

Ist γ irgend ein anderer Verbindungsweg von z_1 und z_0, so verbindet $f\circ\gamma$ die Punkte 0 und r, und daher ist

$$L_h(\gamma) = L_h(f\circ\gamma) \geq L_h(\gamma_0) = d(z_1,z_2).$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Wir haben sogar gezeigt, auf welchen Wegen die hyperbolische Länge jeweils ihr Minimum annimmt, nämlich auf den Bildern von Abschnitten der positiven reellen

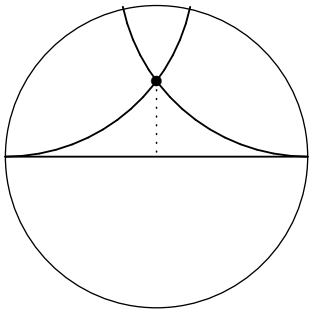
Achse unter hyperbolischen Bewegungen. Dies können wieder nur Abschnitte von Geraden oder Kreisen sein. Da die Transformationen aus $\mathcal{B}$ konform sind, müssen die Bildkurven in der Verlängerung den Rand des Einheitskreises unter einem rechten Winkel treffen. Das tun nur Geraden durch den Nullpunkt oder gewisse Kreise, die sogenannten *Orthokreise*.

Jetzt haben wir alles für unser Modell beisammen:

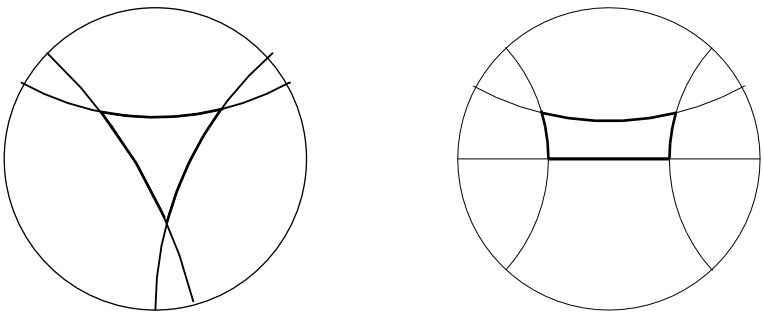
Als Ebene $\mathcal{E}$ benutzen wir das Innere des Einheitskreises E, als Geraden die Orthokreise (incl. der euklidischen Geraden durch den Nullpunkt). Die Inzidenz- und Anordnungsaxiome sind offensichtlich erfüllt. Und da alle hyperbolischen Geraden in diesem Modell homöomorph zu einem offenen Intervall und damit zur rellen Achse sind, ist auch das Dedekind-Axiom erfüllt.

Die Schwierigkeiten, die üblicherweise bei den Bewegungsaxiomen auftreten, haben wir schon durch die Konstruktion beiseite geräumt. Als Bewegungsgruppe nehmen wir natürlich die Gruppe $\mathcal{B}$. Sie setzt sich zusammen aus den verallgemeinerten Translationen T_α, den Drehungen D_θ um 0 und der Spiegelung $z \mapsto \bar{z}$. Dann sieht man leicht, dass alle Bewegungs-Axiome erfüllt sind.

In der vorliegenden Geometrie ist offensichtlich das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt:



Man kann auch leicht Dreiecke mit einer Winkelsumme $< 180°$ finden, oder Saccheri-Vierecke, in denen die Hypothese vom spitzen Winkel erfüllt ist.



In unserem Modell können wir nun alles berechnen, was wir wollen. Wir werden das am Beispiel des Parallelitätswinkels demonstrieren:

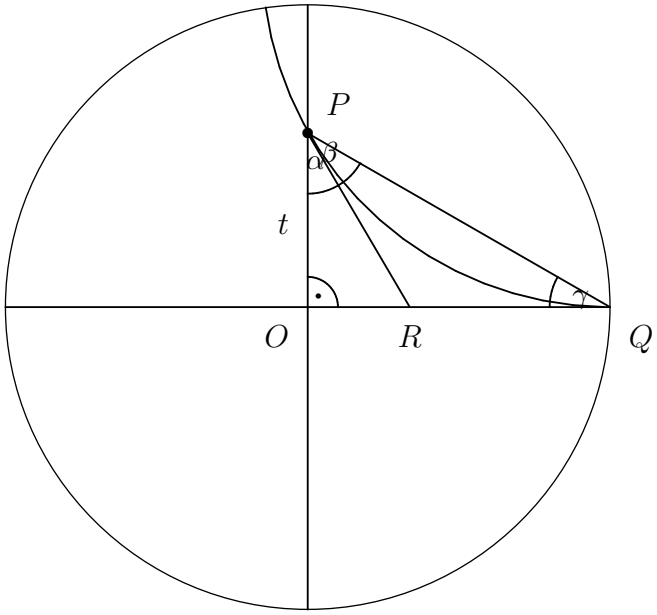
Jeder auf einem von 0 ausgehenden Strahl befindlichen Strecke mit der euklidischen Länge t ist auch ihre hyperbolische Länge

$$x = x(t) := \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

zugeordnet. Dann ist

$$e^{2 \cdot x(t)} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Wir betrachten nun folgende Situation:



Es sei O der Nullpunkt, $P := \mathrm{i}t$ und $\alpha := \Pi(x(t))$. $Q := 1$ ist für die nichteuklidische Geometrie auf E ein idealer Punkt. Die hyperbolische Parallele zu $\vec{OQ}$ durch P ist der Orthokreis, der die reelle Achse bei Q tangential berührt und die imaginäre Achse bei P unter dem Winkel α schneidet. Die (euklidische) Tangente an diesen Orthokreis in P möge die reelle Achse in R treffen.

Von nun an können wir rein euklidisch argumentieren! Die beiden Tangenten PR und QR treffen sich auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$. Also ist das Dreieck QPR gleichschenklig, und die Basiswinkel $\beta := \angle QPR$ und $\gamma := \angle PQR$ sind gleich. Im rechtwinkligen Dreieck QPO gilt daher:

$$\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) + \beta = \pi, \qquad \text{also } \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Da $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ und allgemein $\tan(\varphi - \psi) = \dfrac{\tan\varphi - \tan\psi}{1 + \tan\varphi \tan\psi}$ ist, folgt:

$$\tan(\beta) = \frac{1 - \tan(\alpha/2)}{1 + \tan(\alpha/2)}.$$

Da außerdem die Kathete $\overline{OQ}$ des Dreiecks QPO die Länge 1 hat, gilt die Gleichung $t : 1 = \tan\gamma$, und damit:

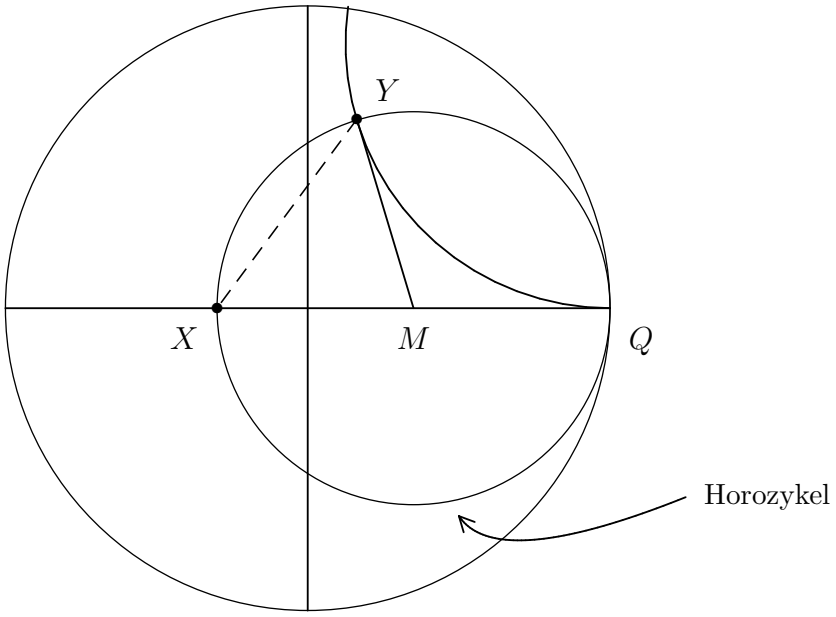
$$e^{2x} = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\frac{1-\tan(\alpha/2)}{1+\tan(\alpha/2)}}{1-\frac{1-\tan(\alpha/2)}{1+\tan(\alpha/2)}} = \frac{1}{\tan(\alpha/2)},$$

also

$$\boxed{\tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-2x}.}$$

So einfach ist die berühmte Formel für den Parallelitätswinkel im Poincaré-Modell herzuleiten!

Zum Schluss wollen wir uns noch einen Horozykel ansehen:



Sei k ein Orthokreis durch Q, der eine zu $\vec{OQ}$ asymptotisch parallele hyperbolische Gerade darstellt. Seien $X \in \overline{OQ}$ und $Y \in k$ korrespondierende Punkte. Dann ist $\angle YXQ \mathrel{\widehat{=}} \angle XYQ$, und zwar im hyperbolischen Sinne. Die hyperbolische Verbindungsstrecke zwischen X und Y ist ein Orthokreis-Bogen, dessen Sehne die euklidische Verbindungsstrecke von X und Y ist. Aber dann muss auch $\angle YXM \mathrel{\widehat{=}} \angle XYM$ sein, im euklidischen Sinne, wenn M der Schnittpunkt der Tangente an k in Y mit der reellen Achse ist. Nun können wir wieder rein euklidisch arbeiten. Es ist $\overline{MQ} = \overline{MY}$, und da das Dreieck YXM gleichschenklig ist, ist auch $\overline{XM} = \overline{YM}$.

Das bedeutet, dass X, Y und Q auf dem euklidischen Kreis um M durch Q liegen. In der hyperbolischen Geometrie ist dieser Kreis ein Horozykel.