4 Das Kreisaxiom

Wir haben Euklids Axiomensystem „repariert“, aber wenn wir nun in seinem Stile weitermachen wollen, dann brauchen wir immer noch ein Axiom über das Schneiden von Kreisen. Andererseits beweist Hilbert mit den oben bereitgestellten Axiomen und Sätzen schon ohne weitere Hilfsmittel einen großen Teil der Sätze Euklids (vor Proposition 29). Brauchen wir also gar – abgesehen von Postulat V – gar kein weiteres Axiom?

Man muss bei Euklid schon etwas genauer hinsehen. Da gibt es nämlich

Proposition 22: *Aus drei gegebenen Strecken a, b, c mit*

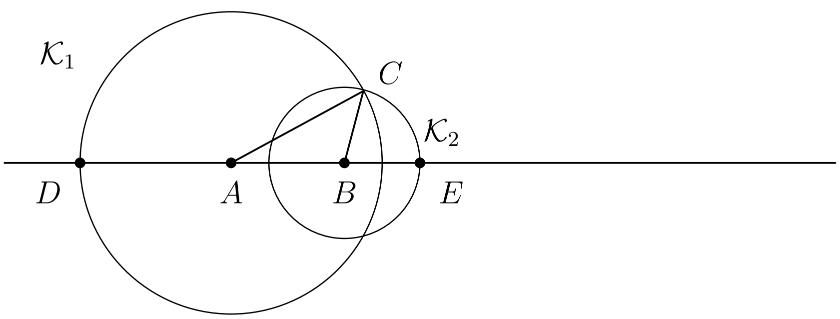
$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

kann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Die Beweisidee ist die folgende:

Man ordnet die Strecken in der Reihenfolge b, c, a auf einer Geraden an, so dass Punkte D, A, B, E entstehen.

Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius $b = \overline{DA}$ und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius $a = \overline{BE}$. Wählt man einen Schnittpunkt C der beiden Kreise aus, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.



Für Euklid ist der Satz kein Problem, die Methode der zwei Kreise hat er ja schon häufig angewandt. Bei Hilbert sucht man den Satz (als Folgerung aus den Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenz-Axiomen) vergeblich. Woran liegt das?

Wir machen ein kleines Gedankenexperiment. Wir lassen den alten Pythagoras ein Modell für die Ebene konstruieren:

Ausgangspunkt ist die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, zu Ehren der von den Pythagoräern gelehrten Harmonie der Zahlen. Aber es gibt ja auch irrationale Längen, die z.B. als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Katheten auftreten können. Normiert man eine Kathete zu 1 und hat die zweite Kathete die Länge ω, so hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1 + \omega^2}$. Solche Zahlen müssen also auch zugelassen werden.

Es sei K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, und $\alpha \in K$, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$. Dann setzen wir

$$K(\sqrt{\alpha}) := \{a + b\sqrt{\alpha} \mid a, b \in K\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $K(\sqrt{\alpha})$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, d.h. die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ führen aus $K(\sqrt{\alpha})$ nicht heraus. Aber es gilt noch mehr: Ist $x := a + b\sqrt{\alpha} \neq 0$, so muss $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sein, und damit auch $a - b\sqrt{\alpha} \neq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{a - b\sqrt{\alpha}}{(a + b\sqrt{\alpha})(a - b\sqrt{\alpha})}\\ &= \frac{a}{a^2 - b^2\alpha} - \frac{b}{a^2 - b^2\alpha}\sqrt{\alpha}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $K(\sqrt{\alpha})$ sogar ein Körper ist. Man nennt $K(\sqrt{\alpha})$ eine *quadratische Körpererweiterung* von K. Diese Erweiterung ist zugleich ein 2-dimensionaler K-Vektorraum, mit der Basis $\{1, \sqrt{\alpha}\}$.

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *pythagoräisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{1 + \omega_i^2})$ mit $\omega_i \in K_{i-1}$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine pythagoräische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\omega \mapsto \sqrt{1 + \omega^2}$ anwendet.

Mit $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller pythagoräischen Zahlen.

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ ein Körper ist.

Die Ebene in dem neuen Modell $\mathcal{M}_9$ sei nun die Menge

$$\mathcal{E} := \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}).$$

Die Geraden seien die Mengen der Gestalt

$$g = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid ax + by = r\}, \quad a, b, r \in \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}), \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Inzidenz-Axiome erfüllt sind. Die Größen a, b, r der Geraden durch zwei gegebene Punkte erhält man über rein rationale Operationen.

Die Zwischen-Beziehung vererbt sich von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathcal{E}$, und es ist klar, dass dann auch das Pasch-Axiom gilt. Als nächstes benötigt man Bewegungen:

$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ ergibt eine Translation um (a, b),

$(x, y) \mapsto (x, -y)$ ergibt die Spiegelung an der x-Achse

und

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bx}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

ergibt eine Drehung um den Nullpunkt $O := (0,0)$, die $E := (1,0)$ auf einen Punkt $P \in \overrightarrow{OC}$ abbildet, $C := (a,b)$.

Da $\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}$ ist, spielt sich alles im Körper der pythagoräischen Zahlen ab. Aus den hier angegebenen Abbildungen kann man alle Bewegungen konstruieren, die nötig sind, um die Bewegungs-Axiome zu erfüllen.

Wir haben also ein fast perfektes Modell für die Euklidische Ebene gefunden. Aber wie steht es mit den Schnittpunkten von Kreisen?

Dazu betrachten wir allgemeine Wurzel-Ausdrücke der Form

$$q = q_n(\sqrt{q_{n-1}(\sqrt{\ldots\sqrt{q_1(\sqrt{\alpha})\ldots}})}),$$

mit rationalen Funktionen $q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$ und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$. Tauscht man eine oder mehrere der Wurzeln gegen ihr Negatives, so erhält man einen sogenannten *konjugierten* Ausdruck zu q.

Ist das Argument jeder Wurzel von der Form $1+\omega^2$ (wobei ω wieder ein zusammengesetzter Ausdruck sein kann), so sind der ursprüngliche Ausdruck und alle dazu konjugierten Ausdrücke reelle Zahlen. Sind die Argumente der Wurzeln dagegen von beliebiger Form, so können auch nicht-reelle komplexe Zahlen entstehen.

Ein Beispiel ist etwa der reelle Ausdruck $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. Der dazu konjugierte Ausdruck $\sqrt{2(-\sqrt{2}-1)} = \mathrm{i}\cdot\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ ist tatsächlich rein imaginär. Das bedeutet, dass $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ nicht pythagoräisch sein kann!

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist pythagoräisch, also auch $2(\sqrt{2}-1)$, aber eben leider nicht die Wurzel daraus. Wir werden weiter unten sehen, dass das in einer Geometrie, in der sich zwei Kreise bei geeigneter Lage der Mittelpunkte und geeigneten Radien immer schneiden müssen, nicht passieren kann.

Das Kreis-Axiom:

S-1) Sind $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathcal{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch aus dem Äußeren von $\mathcal{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Jetzt können wir das Programm Euklids durchführen:

4.1 Satz (Euklids Proposition 1). *Sind zwei Punkte A, B gegeben, so gibt es Punkte P und Q auf den beiden Seiten von AB, so dass die Dreiecke ABP und ABQ beide gleichseitig sind (also drei paarweise zueinander kongruente Seiten besitzen).*

Der BEWEIS wird wie bei Euklid ausgeführt.

Bei Hilbert kann der Satz so nicht bewiesen werden. Allerdings gilt:

4.2 Satz über die Existenz gleichschenkliger Dreiecke. *Zu Punkten $A \neq B$ gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{AB}$.*

BEWEIS: Sei $C \notin AB$. Ist $\angle BAC \cong \angle ABC$, so ist man fertig. Wir nehmen daher an, dass $\angle BAC < \angle ABC$ ist. Es gibt also eine Bewegung φ, so dass $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{BA}$ und $\varphi(C) \in H(AB, C) \cap H(BC, A) = I(\angle ABC)$ ist. Die Gerade $B\varphi(C)$ trifft $\overline{AC}$ in einem Punkt D. Dann ist ABD gleichschenklig. ∎

Bemerkung. Der obige Beweis benötigt **nicht** das Kreisaxiom. In späteren Sätzen kann man meist an Stelle von gleichseitigen Dreiecken auch gleichschenklige Dreiecke benutzen.

Allerdings ergibt dieses Vorgehen im Sinne Hilberts keine Algorithmen zur geometrischen Konstruktion, es fehlen die Instrumente dafür (Zirkel und Lineal).

Euklids **Propositionen 2 und 3**, die sich mit dem Antragen von Strecken beschäftigen, sind überflüssig geworden, dank der Bewegungsaxiome. Euklids Methode liefert liefert allerdings ein Konstruktionsverfahren.

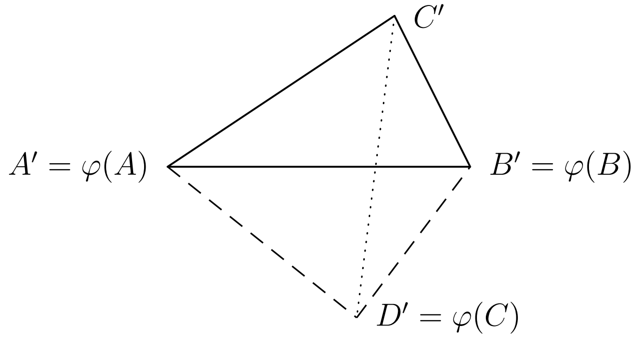
Euklids **Proposition 4** (SWS-Kongruenz) und **5** (Pons asinorum) haben wir bereits bewiesen. **Proposition 6** ist die Umkehrung zu Proposition 5 („Ein Dreieck mit gleichen Basiswinkeln ist gleichschenklig“) und kann ganz leicht durch Widerspruch bewiesen werden.

Proposition 7 stellt einen Hilfssatz für Proposition 8 zur Verfügung, den wir direkt beweisen:

4.3 Satz (SSS, Euklids Proposition 8). *Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

BEWEIS: Sei φ die eindeutig bestimmte Bewegung, die A auf A' abbildet, B auf einen Punkt von $\overrightarrow{A'B'}$ und C so, dass $D' := \varphi(C)$ und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'B'$ liegen. Da $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ist, muss $\varphi(B) = B'$ sein.



Da $\overline{B'D'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{B'C'}$ ist, ist $C'D'B'$ gleichschenklig, und die Basiswinkel $\angle C'D'B'$ und $\angle D'C'B'$ sind kongruent. Genauso folgt auch, dass $\angle D'C'A'$ und $\angle C'D'A'$ kongruent sind. Mit Winkeladdition (oder -Subtraktion, je nach Gestalt der Dreiecke) erhält man:

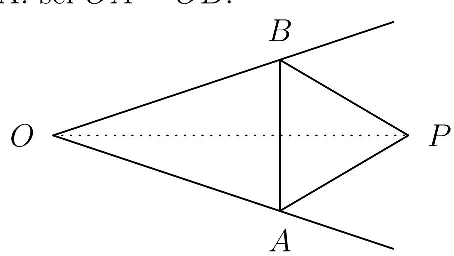
$$\angle A'C'B' \mathrel{\widehat{=}} \angle A'D'B'.$$

Mit dem SWS-Kongruenzsatz folgt: $A'B'C' \mathrel{\widehat{=}} A'B'D' \mathrel{\widehat{=}} ABC$. ■

4.4 Satz (Eulids Proposition 9, „Winkelhalbierung“).

Zu einem gegebenen Winkel $\alpha = \angle AOB$ kann man genau einen Strahl $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$ mit $P \in I(\alpha)$ finden, so dass $\angle AOP \mathrel{\widehat{=}} \angle POB$ ist.

Beweis: O.B.d.A. sei $\overline{OA} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OB}$.



Es gibt einen Punkt P, auf der zu O entgegengesetzten Seite von AB, so dass BAP gleichseitig ist. Nach dem Satz von der SSS-Kongruenz sind dann die Dreiecke OPB und OPA kongruent, und damit auch die einander entsprechenden Winkel $\angle POB$ und $\angle POA$.

Wäre P nicht in $I(\alpha)$, so wäre $\angle POB < \angle POA$ oder umgekehrt. Das kann nicht sein.

Man kann den Beweis auch mit Hilfe eines gleichschenkligen Dreiecks führen.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nimmt man die Existenz zweier Strahlen der gewünschten Art an und führt dann durch Vergleich aller auftretenden Winkel einen Widerspruch herbei. ■

4.5 Satz (Euklids Proposition 10, „Streckenhalbierung“).

Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau einen Punkt M mit

$$A - M - B \quad \textit{und} \quad \overline{AM} \cong \overline{MB}.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt auch hier sehr einfach durch Streckenvergleiche.

Zum Nachweis der Existenz des Punktes M konstruieren wir auf beiden Seiten von AB gleichseitige (bzw. gleichschenklige) Dreiecke ABC und ABC'. Da C und C' auf verschiedenen Seiten von AB liegen, muss die Verbindungsstrecke $\overline{CC'}$ die Gerade AB in einem Punkt M treffen.

Aus dem Satz von der SSS-Kongruenz folgt, dass $CC'B \cong C'CA$ ist, insbesondere auch $\angle C'CA \cong \angle C'CB$.

Aus dem Satz von der SWS-Kongruenz folgt, dass $AMC \cong MBC$ ist, und insbesondere $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Wäre $M - A - B$, so wäre $\overline{MA} < \overline{MB}$, und genauso führt man die Beziehung $A - B - M$ zum Widerspruch. Also muss $A - M - B$ gelten. ∎

Definition. Sind g und h Geraden, die sich (genau) im Punkt O schneiden und dabei einen rechten Winkel einschließen, und ist $P \in h$ ein Punkt $\neq O$, so sagt man:

1. h ist eine *Senkrechte* zu g im Punkte O.
2. h ist ein *Lot* von P auf g mit Fußpunkt O.

4.6 Satz (Euklids Proposition 11, „Senkrechte errichten").

Ist g eine Gerade und $O \in g$, so kann man auf eindeutige Weise in O die Senkrechte zu g errichten.

Beweis: Man konstruiere Punkte $A, B \in g$ mit $A - O - B$ und $\overline{AO} \cong \overline{OB}$. Dann errichte man über $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck ABP und setze $h := OP$. Weil $AOP \cong OBP$ ist (SSS), muss auch $\angle AOP \cong \angle BOP$ sein.

Die Eindeutigkeit ergibt sich wie im Beweis der Kongruenz aller rechten Winkel. ∎

Definition. Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und h die Senkrechte zu AB in M, so nennt man h auch die *Mittelsenkrechte* zu $\overline{AB}$.

Mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man leicht zeigen: Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} \mid \overline{AX} \cong \overline{BX}\}.$$

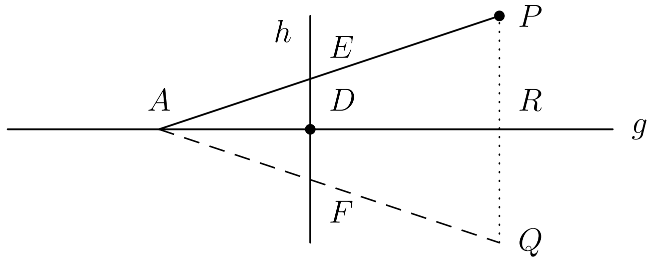
4.7 Satz (Euklids Proposition 12, „Lot fällen"). *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt, so kann man von P aus ein Lot auf g fällen.*

BEWEIS: Hier heißt es aufpassen! Euklid verwendet zum Beweis eine weitere Eigenschaft des Kreises, die er nie gezeigt hat: *Eine Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises schneidet diesen Kreis auf beiden Seiten des Punktes.*

Wir wollen diese Eigenschaft nicht als Axiom fordern, denn sie lässt sich aus dem Kreisaxiom herleiten. Allerdings braucht man dazu die Möglichkeit, ein Lot zu fällen. Also müssen wir für Proposition 12 einen anderen Beweis finden.

Wir wählen einen Punkt D auf g und errichten dort die Senkrechte h zu g. Liegt zufällig P auf h, so sind wir fertig.

Sei also $P \notin h$. Wir wählen einen Punkt $A \in g$, so dass A und P auf verschiedenen Seiten von h liegen. Dann trifft $\overline{AP}$ die Gerade h in einem Punkt E.



Wir suchen den Punkt $F \in h$ mit $E - D - F$ und $\overline{DE} \mathrel{\widehat{=}} \overline{DF}$. Anschließend verlängern wir $\overline{AF}$ über F hinaus bis zu einem Punkt Q, so dass $\overline{AQ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AP}$ ist.

Behauptung: PQ ist das gesuchte Lot.

Beweis dafür: Da P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen, schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in einem Punkt R. Da die Dreiecke ADE und ADF kongruent sind (SWS), ist $\angle RAP \mathrel{\widehat{=}} \angle RAQ$. Daraus folgt, dass auch $ARP \mathrel{\widehat{=}} ARQ$ ist. Insbesondere ist dann $\angle ARP \mathrel{\widehat{=}} \angle ARQ$, also PQ senkrecht zu g. ■

Die Aussagen von **Proposition 13 und 14** sind für uns bedeutungslos. **Proposition 15** behandelt die Gleichheit von Scheitelwinkeln, das haben wir schon erledigt.

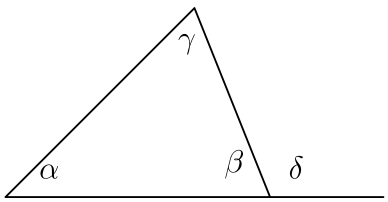
4.8 Satz (Euklids Proposition 16, „Außenwinkelsatz).

Bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Der BEWEIS kann wie bei Euklid geführt werden (vgl. §3), es müssen nur einige Begründungen eingefügt werden.

4.9 Satz (Euklids Proposition 17).

In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte.



Beweis: Nach dem Außenwinkelsatz ist $\delta > \alpha$. Trägt man also α neben β an, so ragt der freie Schenkel des angetragenen Winkels ins Innere von δ. In salopper Schreibweise kann man dafür sagen: $\alpha + \beta < \beta + \delta$. Aber $\beta + \delta$ entspricht zwei Rechten.

Bei den anderen Winkeln geht's genauso. ∎

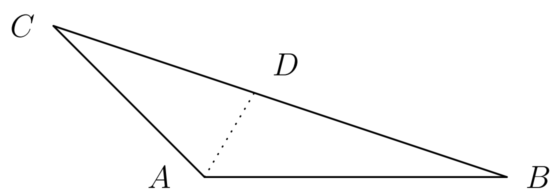
4.10 Folgerung. *Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.*

4.11 Folgerung. *Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade, die den Punkt nicht enthält, ist immer eindeutig bestimmt.*

Definition. Ein *rechtwinkliges Dreieck* ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt *Hypotenuse*, die beiden anderen Seiten nennt man *Katheten*.

4.12 Satz (Euklids Proposition 18). *In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.*

Beweis: Im Dreieck $\triangle ABC$ sei $\overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei $C - D - B$, mit $\overline{CD} \widehat{=} \overline{CA}$. Nach dem Außenwinkelsatz ist $\angle CDA > \angle CBA$. Aber da CAD gleichschenklig ist, ist $\angle CAD \widehat{=} \angle CDA$. Erst recht ist dann $\angle CAB > \angle CBA$. ∎

4.13 Satz (Euklids Proposition 19). *In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel stets die größere Seite gegenüber.*

Beweis: Wir betrachten das Dreieck ABC, es sei $\angle CAB > \angle CBA$. Wäre $\overline{CA} \widehat{=} \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zum Basiswinkelsatz. Wäre $\overline{CA} > \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zu Proposition 18. ∎

4.14 Folgerung. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse stets die größte Seite.*

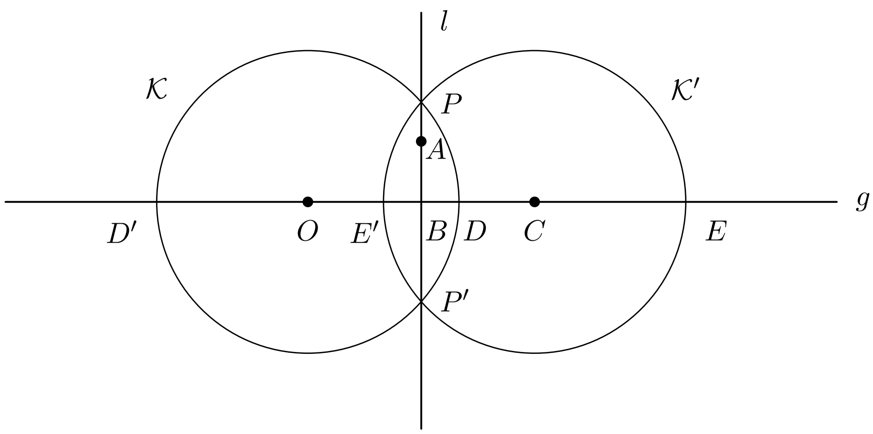
Jetzt können wir den Satz über das Schnittverhalten von Kreis und Gerade beweisen, den Euklid schon beim Beweis der Existenz eines Lotes benötigt hatte:

4.15 Satz. *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis um den Punkt O, A ein Punkt im Innern von $\mathcal{K}$ und l eine Gerade durch A. Dann schneidet l den Kreis in zwei Punkten (auf verschiedenen Seiten von A).*

Beweis: Der Beweis wurde nicht in der Vorlesung ausgeführt.

Die Aussage ist trvial, wenn O auf l liegt. Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass $O \notin l$ ist. Dann sei g das Lot von O auf l mit Fußpunkt B. Weiter sei C der Punkt auf g mit $O - B - C$ und $\overline{OB} \widehat{=} \overline{BC}$, so dass l die Mittelsenkrechte zu $\overline{OC}$ ist. Da das Dreieck OBA bei B rechtwinklig ist, ist $\overline{OA} > \overline{OB}$, also B im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ gelegen.

Die Gerade g schneidet $\mathcal{K}$ in zwei Punkten D und D', es gelte $D' - O - D$ und $D \in \overrightarrow{OB}$. Wählen wir $E \in \overrightarrow{OB}$ mit $B - C - E$ und $\overline{CE} \widehat{=} \overline{OD}$, so liegt E auf dem Kreis $\mathcal{K}'$ um C mit Radius $\overline{OD}$. Wegen $O - C - E$ ist $\overline{OE} > \overline{CE} \widehat{=} \overline{OD}$, also E im Äußeren von $\mathcal{K}$ gelegen.



Der Kreis $\mathcal{K}'$ schneidet g in E und in einem Punkt E', mit $E' - C - E$. Wegen $\overline{BC} \widehat{=} \overline{OB} < \overline{OD} = \overline{E'C}$ ist $E' - B - C$. Wegen $\overline{D'O} \widehat{=} \overline{E'C}$ und $D' - O - B$ ist $D' - E' - B$. Aber jeder Punkt zwischen D' und B (und damit insbesondere E') liegt im Innern von $\mathcal{K}$.

Aus dem Kreisaxiom folgt nun, dass sich $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ auf beiden Seiten von g je in einem Punkt treffen. Sei P der Schnittpunkt, der auf der gleichen Seite von g wie A liegt. Dann ist $\overline{OP} \widehat{=} \overline{CP}$. Außerdem ist $\overline{OB} \widehat{=} \overline{BC}$. Nach dem SSS-Kongruenzsatz ist dann $OBP \widehat{=} BCP$, also $\angle OBP \widehat{=} \angle CBP$. Da es sich um Nebenwinkel handelt, sind sie rechte Winkel, und das bedeutet, dass $BP = l$ ist, also $P \in l$.

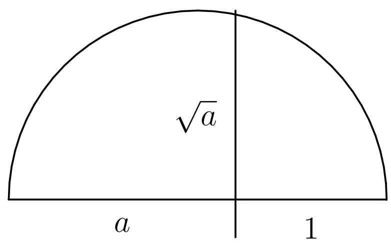
Der Punkt P' mit $P - B - P'$ und $\overline{PB} \widehat{=} \overline{BP'}$ ist offensichtlich der zweite Schnittpunkt der Kreise, und auch er liegt auf l. Somit ist $l \cap \mathcal{K} = \{P, P'\}$, mit $P - A - P'$.

∎

Wir können nun auch beweisen, dass das Kreis-Axiom im Modell $\mathcal{M}_9$ nicht erfüllt ist!

Sei a irgendeine pythagoräische Zahl. Dann liegen die Punkte $O := (0,0)$, $P := (a,0)$ und $Q := (a+1,0)$ in der pythagoräischen Ebene $\mathcal{E} = \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$. Da die Bewegungen in diesem Modell zugleich isometrische Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ auf sich sind, kann man sagen: Zwei Strecken sind genau dann kongruent, wenn sie die gleiche euklidische Länge haben. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OQ}$ ist also der Punkt $M := (\frac{a+1}{2}, 0)$, und der Kreis um M mit Radius $\overline{OM}$ ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid (x - \frac{a+1}{2})^2 + y^2 = (\frac{a+1}{2})^2\}.$$



Schneidet man $\mathcal{K}$ mit der Geraden $g := \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid x = a\}$, so erhält man Punkte (x,y) mit $x = a$ und $y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = a$, also $X_\pm := (a, \pm\sqrt{a})$. Nach dem Kreisaxiom wäre jeder solche Punkt konstruierbar, aber im Falle $a = 2(\sqrt{2}-1)$ haben wir schon gesehen, dass $\sqrt{a}$ nicht pythagoräisch ist.

Nun ist auch halbwegs klar, wie wir den Mangel beheben können:

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *platonisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit $\alpha_i \in K_{i-1}$ und $\alpha_i > 0$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine platonische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{\ }$ anwendet.

Mit $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller platonischen Zahlen.

Ein Modell $\mathcal{M}_{10}$ gewinnen wir, indem wir als Ebene die kartesische Ebene der platonischen Zahlen benutzen: $\mathcal{E} := \mathrm{Plat}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$. Es ist klar, dass auch hier die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome gelten. Und da mit jeder positiven platonischen Zahl auch deren Wurzel wieder platonisch ist, sind die Schnittpunkte von Kreisen immer konstruierbar, d.h., es gilt das Kreisaxiom.

Die Platonische Ebene ist das Modell für die Geometrie, in der alle Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Und das ist die Geometrie, die Euklid betrieben hat. In der Ebene gibt es noch viele Lücken, insbesondere ist die Zahl π keine platonische Zahl. Deshalb konnte den Alten auch die Quadratur des Kreises nicht gelingen.

Unser Axiomensystem (und erst recht das von Hilbert) sagt nichts über die praktische Konstruierbarkeit geometrischer Figuren aus. Die „Elemente“ des Euklid beschreiben aber zum Teil auch Konstruktionsverfahren. Wollen wir uns dem annähern, so müssen wir erst mal definieren, was „konstruierbar“ bedeuten soll.

Definition. Eine **Gerade** g ist *konstruierbar*, falls zwei Punkte $A \neq B$ gegeben oder konstruierbar sind, die auf g liegen.

Ein **Kreis** $\mathcal{K}$ ist *konstruierbar*, falls der Mittelpunkt M und eine Strecke $\overline{MX}$ als Radius gegeben oder konstruierbar sind.

Ein **Punkt** P ist *konstruierbar*, falls er der Schnittpunkt zweier gegebener oder konstruierbarer Geraden $g \neq h$ oder einer der beiden Schnittpunkte zweier gegebener oder konstruierbarer (sich schneidender) Kreise ist.

Ein **Winkel** $\angle AOB$ ist *konstruierbar*, falls der Scheitelpunkt O und Punkte A und B auf beiden Schenkeln gegeben oder konstruierbar sind.

Ein **Dreieck** ABC ist *konstruierbar*, falls die Ecken A, B, C gegeben oder konstruierbar sind.

Folgende Mittel zum Konstruieren stehen uns inzwischen zur Verfügung:

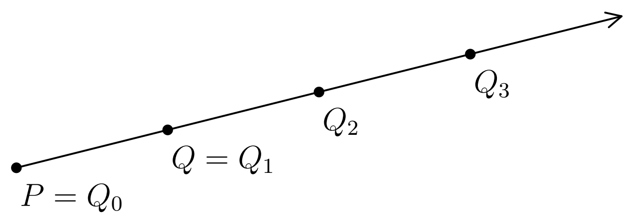
1. Zu jeder Geraden g kann man einen Punkt $P \notin g$ wählen (Axiom I-3).
2. Zu zwei Punkten $A \neq B$ kann man einen Punkt P mit $A - B - P$ wählen (Axiom A-4).
3. Ist g eine Gerade und sind A und B zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von g, so kann man den (eindeutig bestimmten) Punkt $P \in g$ mit $A - P - B$ konstruieren (Pasch-Axiom).
4. Ist α ein Winkel mit Scheitelpunkt O und sind $A \neq O$ und $B \neq O$ Punkte auf den beiden Schenkeln von α, so kann man einen Punkt $P \in I(\alpha)$ wählen.
5. Über einer Strecke $\overline{AB}$ kann ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden (Proposition 1).
6. Ist ein Strahl $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{OP}$ und eine Strecke $\overline{AB}$ gegeben, so kann man den (eindeutig bestimmten) Punkt $Q \in \overrightarrow{s}$ konstruieren, für den $\overline{OQ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$ ist (mit Euklids Propositionen 2 und 3).
7. Zu jedem Winkel kann man die Winkelhalbierende konstruieren.
8. Zu jeder Strecke kann man den Mittelpunkt konstruieren.
9. Ist g eine Gerade und $P \in g$, so kann man die (eindeutig bestimmte) Gerade h konstruieren, die in P auf g senkrecht steht.
10. Ist g eine Gerade und $P \notin g$ ein Punkt, so kann man das Lot von P auf g konstruieren.

Das Archimedes-Axiom:

4.16 Satz. *Zu zwei Punkten $P \neq Q$ und einer natürlichen Zahl n kann man stets Punkte $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n \in \overrightarrow{PQ}$ finden, so dass gilt:*

1. *$Q_0 = P$, $Q_1 = Q$ und $\overline{Q_iQ_{i+1}} \cong \overline{PQ}$ für $i = 1, \ldots, n-1$.*
2. *$Q_{i-1} - Q_i - Q_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$.*

Der Beweis ist trivial.



Definition. In der Situation des obigen Satzes sagt man: Der Punkt Q_n wird durch n-maliges Antragen der Strecke $\overline{PQ}$ erreicht. An Stelle der Strecke $\overline{Q_0Q_n}$ schreibt man auch $n \cdot \overline{PQ}$.

Ist zu der Strecke $\overline{PQ}$ noch eine weitere Strecke $\overline{AB} > \overline{PQ}$ gegeben, so erwartet man, dass $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$ ist, wenn man nur n groß genug wählt. Eigenartigerweise lässt sich das aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen. Man muss es fordern:

S-2) Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

Man nennt die Axiome S-1 und S-2 auch die *Stetigkeitsaxiome*, aus Gründen, die weiter unten erläutert werden.

Das Axiom S-2 taucht bei Euklid nicht explizit auf. In der Proportionenlehre betrachtet er allerdings nur Verhältnisse von solchen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$, die das Archimedes-Axiom erfüllen.

In der platonischen Ebene gilt S-2, so einfach ist die Frage nach der Unabhängigkeit also nicht zu entscheiden. Aber es gibt sogenannte *nicht-archimedische Körper* mit „unendlich kleinen“ und „unendlich großen“ Elementen, und in der mit Hilfe eines solchen Körpers modellierten Ebene gelten in gewissen Fällen alle bisherigen Axiome der Geometrie, nur nicht S-2.

Sei $\mathbb{R}(t) := \{f/g \,:\, f, g \text{ Polynome}, g \neq 0\}$ der Körper der „rationalen Funktionen“. Die Elemente von $P := \{R \in \mathbb{R}(t) \,:\, \exists\, c \in \mathbb{R}, \text{ so dass } R(t) > 0 \text{ für } t > c \text{ ist }\}$ nennen wir *positiv*. Damit wird $\mathbb{R}(t)$ zu einem angeordneten Körper. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $t - n$ positiv, also $t > n$. Das Archimedes-Axiom ist in $\mathbb{R}(t)$ nicht erfüllt.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge der stetigen Funktionen, die auf einem Intervall (c, ∞) definiert sind und entweder $\equiv 0$ oder ohne Nullstellen sind. Zwei solche Funktionen $f_1 : (c_1, \infty) \to$

$\mathbb{R}$ und $f_2 : (c_2, \infty) \to \mathbb{R}$ sollen äquivalent heißen, falls ein $c \geq \max(c_1, c_2)$ existiert, so dass $f_1 = f_2$ auf (c, ∞) ist. Es ist offensichtlich, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{C}$ mit $< f >$ und die Menge aller Äquivalenzklassen mit $\widehat{\mathcal{C}}$. Man beachte, dass diese Menge weit davon entfernt ist, ein Körper zu sein! Schon die Summe zweier Klassen kann nicht immer gebildet werden (die Funktionen $f_1(t) := 2$ und $f_2(t) := 2 + \sin t$ liegen in $\mathcal{C}$, nicht aber $f_2 - f_1$).

Wir nennen eine Klasse $< f >$ *positiv*, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(t) > 0$ für $t > c$ ist. Positive Klassen können addiert und multipliziert werden, das Ergebnis ist wieder positiv. Ist $< f > \neq 0$ (und damit $f(t) \neq 0$ für genügend großes t), so ist $< f >$ positiv oder $- < f >$ positiv.

Nun definieren wir $j : \mathbb{R}(t) \to \widehat{\mathcal{C}}$ durch $j(R) :=< R|_{(c,\infty)} >$, wobei c so zu wählen ist, dass $R(t)$ definiert und $R(t) \neq 0$ für $t > c$ ist. Die Abbildung ist wohldefiniert, denn das Ergebnis hängt nicht von der Wahl von c ab. Ist R positiv, so ist auch $j(R)$ positiv. Weiter ist $j(R_1 + R_2) = j(R_1) + j(R_2)$ und $j(R_1 \cdot R_2) = j(R_1) \cdot j(R_2)$. Die Summen und Produkte auf der rechten Seite können gebildet werden, denn zu jeder rationalen Funktion $R \neq 0$ gibt es ein c, so dass $R(t)$ definiert und $R(t) \neq 0$ für $t > c$ ist. Schließlich ist j injektiv: Ist $j(R_1) = j(R_2)$, so gibt es ein c, so dass $R_1(t) = R_2(t)$ für $t > c$ ist. Dann ist $R_1 - R_2$ eine rationale Funktion, die für $t > c$ verschwindet. Das ist nur möglich, wenn $R_1 = R_2$ ist.

Wir können also $\mathbb{R}(t)$ als Teilmenge von $\widehat{\mathcal{C}}$ auffassen.

4.17 Satz. *Sei $K \subset \widehat{\mathcal{C}}$ ein Körper, der $\mathbb{R}(t)$ umfasst, sowie $\alpha \in K$ ein positives Element, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$. Dann ist*

$$K' := K(\sqrt{\alpha}) = \{a + b\sqrt{\alpha} \,:\, a, b \in K\}$$

ein Körper, der K umfasst und seinerseits in $\widehat{\mathcal{C}}$ liegt.

BEWEIS: 1) Seien $f, g, h \in \mathcal{C}$, $a =< f >$, $b =< g >$ und $\alpha =< h >$. Alle drei Funktionen seien auf (c, ∞) definiert, stetig und ohne Nullstellen. Außerdem sei $h > 0$. Dann ist auch $F := f + g\sqrt{h}$ eine stetige Funktion auf (c, ∞). Wir nehmen an, es gibt eine unbeschränkte Folge (t_ν) mit $F(t_\nu) = 0$. Dann ist $f(t_\nu)^2 = g(t_\nu)^2 \cdot h(t_\nu)$ für alle ν. Aber $f^2 - g^2 h$ ist ein Element von K und damit eine stetige Funktion, die für großes t keine Nullstelle mehr besitzt. Das ist ein Widerspruch. Also liegt F in $\mathcal{C}$ und K' in $\widehat{\mathcal{C}}$.

2) Summe und Produkt zweier Elemente von K' können gebildet werden und liegen wieder in K'. Die Existenz des Inversen folgt wie bei der Konstruktion der pythagoräischen Zahlen, und genau wie dort ergibt sich, dass K' ein Körper ist. ∎

Definition. Es sei $\Omega(t)$ die Menge aller Elemente $x \in \widehat{\mathcal{C}}$, zu denen es eine (von x abhängige) Folge von Körpererweiterungen

$$\mathbb{R}(t) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit positivem $\alpha_i \in K_{i-1}$ (und $\sqrt{\alpha_i} \notin K_{i-1}$) gibt, so dass x in K_n liegt.

Wir nennen $\Omega(t)$ den Körper der *nichtarchimedischen Zahlen.*

$\Omega(t)$ enthält $\mathbb{R}$ und alle natürlichen Zahlen, die – aufgefasst als Äquivalenzklassen konstanter Funktionen – auch in $\mathcal{C}$ liegen. Aber in $\Omega(t)$ ist das Archimedische Axiom nicht erfüllt.

Als Modell $\mathcal{M}_{11}$ führen wir nun die Ebene $\Omega(t)\times\Omega(t)$ ein. In diesem Modell sind alle Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt, sowie das Kreisaxiom. Alle bisher bewiesenen Sätze gelten, aber nicht das Axiom S-2. Damit ist es unabhängig von den vorherigen Axiomen.

An entscheidender Stelle werden wir das Archimedische Axiom später in der Neutralen Geometrie verwenden. Hier wollen wir es aber schon einmal zur Einführung des Längenbegriffs benutzen.

Bisher haben wir ja völlig auf das Messen von Strecken und Winkeln verzichtet und uns dafür manche Unbequemlichkeit eingehandelt. Jetzt werden wir sehen, wie sich aus den vorhandenen Axiomen ein Maßbegriff ableiten lässt.

Die Kongruenz von Strecken liefert ja eine Äquivalenzrelation. Die allen Elementen einer Äquivalenzklasse gemeinsame Eigenschaft ist das, was wir uns anschaulich unter einer „Länge“ vorstellen. Deshalb wollen wir eine solche Äquivalenzklasse auch als *Länge* bezeichnen. Λ sei die Menge aller Längen.

Die Äquivalenzklasse einer Strecke $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit $[AB]$. Ist $\overline{CD}$ eine weitere Strecke, so kann man einen Punkt E mit $A-B-E$ finden, so dass $[BE]=[CD]$ ist. Wir schreiben dann:

$$[AE] = [AB] + [CD].$$

Man überlegt sich leicht, dass diese Definition unabhängig von den Repräsentanten ist. Und offensichtlich ist diese Addition auf Λ auch kommutativ und assoziativ. Also ist Λ eine kommutative Halbgruppe. Weiter gibt es zwischen den Elementen von Λ eine $<$-Beziehung mit folgenden Eigenschaften:

1. Für je zwei Elemente $a, b \in \Lambda$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.
2. Ist $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$.
3. Ist $a < b$, so ist auch $a + c < b + c$, für jedes $c \in \Lambda$.

Wir sagen dann: Λ ist eine *angeordnete kommutative Halbgruppe.*

Definition. Eine *Längenfunktion* ist eine Funktion $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b)$.
2. Es gibt ein $e \in \Lambda$ mit $\lambda(e) = 1$.

Jede Strecke $\overline{AB}$ mit $\lambda([AB]) = 1$ wird als *Einheitsstrecke* (bezüglich λ) bezeichnet.

4.18 Satz. *Ist λ eine Längenfunktion, so gilt:*

1. *Ist $a < b$, so ist auch $\lambda(a) < \lambda(b)$.*
2. *Ist (a_n) eine Folge von Längen, die man derart durch Strecken $\overline{AB_n}$ repräsentieren kann, dass B_{n+1} jeweils der Mittelpunkt von $\overline{AB_n}$ ist, so ist*

$$\lambda(a_{n+1}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda(a_n) = 0.$$

3. *Die Einheitslänge e ist eindeutig bestimmt, d.h. je zwei Einheitsstrecken für λ sind zueinander kongruent.*

Beweis:

1) Seien $a, b \in \Lambda$ mit $a < b$. Dann ist a die Klasse einer Strecke $\overline{AB}$ und b die Klasse einer Strecke $\overline{AC}$, mit $A - B - C$. Bezeichnen wir noch die Klasse der Strecke $\overline{BC}$ mit c, so ist $a+c = b$, also $\lambda(a)+\lambda(c) = \lambda(b)$. Da $\lambda(c) > 0$ ist, ist auch $\lambda(b) > \lambda(a)$, bzw. $\lambda(a) < \lambda(b)$.

2) Es ist $\overline{AB_{n+1}} \widehat{=} \overline{B_{n+1}B_n}$ und $A - B_{n+1} - B_n$, also

$$a_{n+1} + a_{n+1} = a_n.$$

Daraus folgt: $2 \cdot \lambda(a_{n+1}) = \lambda(a_n)$, oder $\lambda(a_{n+}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n)$.

Sukzessive folgt: $\lambda(a_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\lambda(a_1)$. Im Grenzwert strebt $\lambda(a_n)$ gegen 0.

3) Seien e, e' zwei Längen mit $\lambda(e) = \lambda(e') = 1$. Wäre $e \neq e'$, etwa $e < e'$, so müsste $\lambda(e) < \lambda(e')$ sein. ∎

Eine Längenfunktion ist also ein Homomorphismus $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ zwischen angeordneten Halbgruppen.

4.19 Satz. *Zu jeder beliebigen Strecke $\overline{PQ}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Längenfunktion λ, so dass $\overline{PQ}$ eine Einheitsstrecke für λ ist.*

Beweis: Sei $a \in \Lambda$ eine Länge, repräsentiert durch eine Strecke $\overline{AB}$. Wir wählen Punkte $Q_0, Q_1, \ldots$ auf $\overrightarrow{AB}$, so dass gilt:

1. $Q_0 = A$ und $Q_{i-1} - Q_i - Q_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $\overline{Q_iQ_{i+1}} \widehat{=} \overline{PQ}$ für alle i.

Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass entweder $Q_N = B$ ist, oder $A - Q_N - B$ und $Q_N - B - Q_{N+1}$.

Im ersten Fall ist $[AB] = [Q_0Q_1] + \cdots + [Q_{N-1}Q_N]$, wir setzen $\lambda(a) := N$ und sind fertig.

Im zweiten Fall konstruieren wir induktiv Folgen von Punkten (X_n), (Y_n) und Zahlen (ε_n) wie folgt:

$\underline{n=1}$: Sei M_1 der Mittelpunkt von $\overline{Q_NQ_{N+1}}$. Liegt B in der „rechten Hälfte“ (ist also $M_1 = B$ oder $M_1 - B - Q_{N+1}$), so setzen wir $X_1 := M_1$ und $Y_1 := Q_{N+1}$, sowie $\varepsilon_1 := 1$.

Liegt B in der „linken Hälfte“ (ist also $Q_N - B - M_1$), so setzen wir $X_1 := Q_N$, $Y_1 := M_1$ und $\varepsilon_1 := 0$.

Dann ist $2 \cdot \overline{X_1Y_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ und $B = X_1$ oder $X_1 - B - Y_1$.

$\underline{n \to n+1}$: Es seien X_n, Y_n mit $2^n \cdot \overline{X_nY_n} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ und $B = X_n$ oder $X_n - B - Y_n$ konstruiert, sowie Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$.

Ist $B = X_n$, so setzen wir $\lambda(a) := N + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ und sind fertig. Andernfalls sei M_{n+1} der Mittelpunkt von $\overline{X_nY_n}$.

Ist B in der „rechten Hälfte“ (also $B = M_{n+1}$ oder $M_{n+1} - B - Y_n$), so setzen wir $X_{n+1} := M_{n+1}$, $Y_{n+1} := Y_n$ und $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Ist B in der „linken Hälfte“ (also $X_n - B - M_{n+1}$, so setzen wir $X_{n+1} := X_n$, $Y_{n+1} := M_{n+1}$ und $\varepsilon_{n+1} := 0$.

In jedem Fall ist $\varepsilon_{n+1} \in \{0,1\}$ und $2^{n+1} \cdot \overline{X_{n+1}Y_{n+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$, sowie $B = X_{n+1}$ oder $X_{n+1} - B - Y_{n+1}$.

Bricht das Verfahren nicht vorzeitig ab, so setzen wir

$$\lambda(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass es nicht passieren kann, dass $\varepsilon_n = 1$ für alle $n \geq 1$ ist: Nach Voraussetzung ist $Q_N - B - Q_{N+1}$. Es gibt daher ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $2^k \cdot \overline{BQ_{N+1}} > \overline{PQ}$ ist. Andererseits ist $2^k \cdot \overline{M_kQ_N} = 2^k \cdot \overline{X_kY_k} = \overline{PQ}$. Daraus folgt, dass $\overline{M_kQ_N} < \overline{BQ_N}$ ist, also $B - M_k - Q_N$.

Da alle ε_n in $\{0,1\}$ liegen und wenigstens ein $\varepsilon_n = 0$ ist, folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} < \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n - 1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 1.$$

Die Reihe ist konvergent und hat einen Wert < 1.

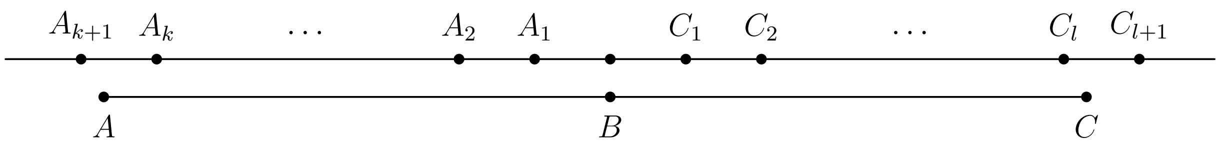
Wir müssen noch die Additivität von λ zeigen.

Betrachten wir drei Punkte A, B, C mit $A - B - C$. Die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ repräsentieren Klassen $a, b, c \in \Lambda$. Es soll gezeigt werden, dass $\lambda(a) + \lambda(b) = \lambda(c)$ ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Durch fortgesetztes Halbieren können wir uns eine Strecke $\overline{XY}$ mit $2^n \cdot \overline{XY} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ verschaffen.

Dann konstruieren wir auf $\overrightarrow{BA}$ Punkte $A_1, A_2, \ldots$, so dass $A_{i+1} - A_i - B$ und $\overline{A_1B} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_{i+1}A_i} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$ ist. Es gibt dann nach Archimedes ein k mit $A_k = A$ oder $A_{k+1} - A - A_k$.

Genauso konstruieren wir Punkte $C_1, C_2, \ldots$ auf $\overrightarrow{BC}$ mit $B - C_i - C_{i+1}$ und $\overline{BC_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{C_iC_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$. Wieder gibt es ein l mit $C_l = C$ oder $C_l - C - C_{l+1}$.



Nun gilt:

$$\begin{array}{rrcccl} & \overline{A_kB} & \leq & \overline{AB} & < & \overline{A_{k+1}B}, \\ & \overline{BC_l} & \leq & \overline{BC} & < & \overline{BC_{l+1}}, \\ \text{und} & \overline{A_kC_l} & \leq & \overline{AC} & < & \overline{A_{k+1}C_{l+1}}. \end{array}$$

Das ergibt folgende Ungleichungen:

$$\begin{array}{rrcccl} & \dfrac{k}{2^n} & \leq & \lambda(a) & < & \dfrac{k+1}{2^n}, \\ & \dfrac{l}{2^n} & \leq & \lambda(b) & < & \dfrac{l+1}{2^n}, \\ \text{und} & \dfrac{k+l}{2^n} & \leq & \lambda(c) & < & \dfrac{k+l+2}{2^n}. \end{array}$$

Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt:

$$\frac{k+l}{2^n} \leq \lambda(a) + \lambda(b) < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

Zusammen mit der dritten Ungleichung ergibt das:

$$|\lambda(a) + \lambda(b) - \lambda(c)| < \frac{k+l+2}{2^n} - \frac{k+l}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da n beliebig war, folgt: $\quad \lambda(a) + \lambda(b) = \lambda(c)$. ■

Im Modell $\mathcal{M}_{10}$ liegt es nahe, $\overline{OE}$ mit $O := (0,0)$ und $E := (1,0)$ als Einheitsstrecke zu wählen. Die dazu konstruierte Längenfunktion liefert die gewöhnliche euklidische Länge. Natürlich erhält man nur Zahlen, die in $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ liegen.

Bei der Messung von Winkeln ergeben sich ein paar Probleme:

1. Man muss die Archimedes-Eigenschaft für Winkel aus dem Archimedes-Axiom für Strecken herleiten.

2. Winkel können nicht beliebig addiert werden, das Ergebnis muss immer noch kleiner als zwei Rechte sein.

3. Bei der Streckenmessung konnten wir uns eine Einheitsstrecke wählen. Bei den Winkeln ist der rechte Winkel als universelles Maß vorgegeben.

Hat man allerdings (1) erledigt, so verläuft die Einführung eines Winkelmaßes fast genauso wie die Einführung einer Längenfunktion. Dem rechten Winkel ordnet man eine feste Zahl zu (wahlweise 90 oder $\pi/2$, je nachdem, ob man im Grad- oder im Bogenmaß rechnen will). Im zweiten Falle muss man in Kauf nehmen, dass das Maß eines Winkels nicht mehr notwendig eine platonische Zahl ist.

In der modernen Literatur wird an Stelle der Stetigkeitsaxiome S-1 und S-2 meist ein anderes Axiom angegeben:

Das Dedekind-Axiom:

S) Sind ein Punkt O, ein von O ausgehender Strahl $\overrightarrow{s}$ und zwei Teilmengen $m_u, m_o \subset \overrightarrow{s}$ gegeben, so dass für alle $X \in m_u$ und alle $Y \in m_o$ die Beziehung $O - X - Y$ gilt, so gibt es einen Punkt S mit folgender Eigenschaft:

Für alle $X \in m_u \setminus \{S\}$ und alle $Y \in m_o \setminus \{S\}$ ist $X - S - Y$.

Die Dedekind-Eigenschaft lässt sich leicht auf Geraden und Winkel übertragen, und sie sorgt dafür, dass jede positive reelle Zahl als Streckenlänge und jede Zahl zwischen 0 und π als Winkelgröße vorkommt. Also ist das Axiom S von den bisherigen Axiomen unabhängig. Allerdings kann man die Axiome S-1 und S-2 ohne große Mühe aus S herleiten. Ein passendes Modell ist die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$.

Für Euklid und seine Zirkel-und-Lineal-Geometrie reichen die Axiome S-1 und S-2 aus. Das Dedekind-Axiom S passt überhaupt nicht in die Antike Welt, es gehört in die Mathematik nach Cantor, in der mengentheoretische Begriffsbildungen keine Probleme mehr bereiten. Wir wollen hier vorerst beim Standpunkt Euklids bleiben, denn bis zur Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie am Anfang des 19. Jahrhunderts ist man damit ausgekommen.

Wir haben jetzt alle Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms kennengelernt.